Astérisque

Pierre Priouret

Marc Yor

Processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}$ et mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Astérisque, tome 22-23 (1975), p. 247-290

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__22-23__247_0>

Soc. Math. France
Astérisque
n°22-23 (1975) p.247-290

PROCESSUS DE DIFFUSION A VALEURS DANS $\mathbb{R}$ ET MESURES QUASI-INVARIANTES SUR $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

par

Pierre PRIOURET et Marc YOR

Université de Paris VI

PROCESSUS DE DIFFUSION A VALEURS DANS R ET MESURES QUASI-INVARIANTES SUR C(R,R)

par

Pierre PRIOURET et Marc YOR(*)

INTRODUCTION :

A la suite de l'article précédent ([1]) , et dans la lignée des idées présentées par Cartier au début de [6] , on s'intéresse ici au problème de la construction d'une mesure de probabilité sur C(R,R) markovienne, euclidienne et quasi-invariante par les translations de $\mathcal{D}(R,R)$, avec un module de quasi-invariance e^{Λ} donné.

De façon plus précise, si P est une fonction régulière convenable (par exemple, comme dans [1] , un polynome réel borné inférieurement et non constant), on pose pour $f \in \mathcal{D}(R,R)$ et $\omega \in C(R,R)$,

$$\Lambda(f,\omega) = \int_R \{(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t))\, f''(t) - (P(\omega(t) + f(t)) - P(\omega(t))\}dt$$

$a_f(\omega) = e^{\Lambda(f,\omega)}$ et on cherche une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{W} = C(R,R)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Propriété de quasi-invariance

(*) Equipe de Recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n°1 "Mathématiques, Informatique" associée au C.N.R.S..

$$\forall \psi \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{W}) \quad \int_{\mathcal{W}} \psi(\omega-f)\,d\mu(\omega) = \int_{\mathcal{W}} \psi(\omega)\ a_f(\omega)\ d\mu(\omega)$$
$$\forall f \in \mathcal{D}(R,R)$$

(2) Propriété d'invariance euclidienne

Pour toute η , transformation euclidienne de R ,

et $T_\eta \ : \ \begin{matrix}\mathcal{W} \to \mathcal{W} \\ \omega \to \omega\circ\eta^{-1}\end{matrix} \quad T_\eta(\mu) = \mu$.

(3) Propriété de Markov si $X_t(\omega) = \omega(t)$ et $\underline{\underline{F}}_t^{-\infty} = \sigma(X_u, u \leq t)$,

$$\forall \psi \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{W}) \quad \mu\{\psi(X_{t+h}) \,|\, \underline{\underline{F}}_t^{-\infty}\} = \mu\{\psi(X_{t+h}) \,|\, X_t\}$$
$$\forall t \in R, \quad h > 0,$$

Le but de ce travail est de retrouver, en s'appuyant sur la théorie probabiliste des processus de diffusion, la solution μ^P du problème précédent construite dans [1] .

Le paragraphe 1 est consacré à la construction et à la caractérisation du processus de diffusion de générateur L défini par : $L\psi = \frac{1}{2}\psi'' - \psi'\zeta$ $(\psi \in \mathcal{D}(R))$, où $\zeta \in C^\infty(R)$ est telle que : $e^{-2\hat{\zeta}} \in S(R)$, en désignant par $\hat{\zeta}$ une primitive de ζ . En particulier, on retrouve la situation étudiée dans [1] lorsque $\zeta^2 - \zeta'$ est un polynôme borné inférieurement.

Dans le paragraphe 2 , on montre que le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ associé au processus de diffusion de générateur L admet pour unique mesure de probabilité invariante la mesure $\rho(x)\,dx$ avec $\rho = e^{-2\hat{\zeta}}$ et que $(P_t)_{t \geq 0}$ induit un semi-groupe fortement continu de contraction, auto-adjoint dans $L^2(R,\mu_0)$.

A partir des mesures $(P_x)_{x \in R}$ sur $C(R_+,R)$ définissant le processus de diffusion précédent, on construit au paragraphe 3 une mesure μ sur $C(R,R)$ ayant les propriétés (2) et (3), et on montre au paragraphe 4 que cette mesure possède aussi la propriété de quasi-invariance (1), en notant $\zeta^2 - \zeta' = 2P$. Enfin, on établit au paragraphe 5 les formules liant les mesures μ^P associées à des fonctions P différentes.

Les Auteurs remercient Messieurs Courrège et Renouard qui ont attiré leur attention sur ces problèmes et les ont encouragés à écrire une version probabiliste d'une partie de leur article [1] .

1 - PROCESSUS DE DIFFUSION DE GÉNÉRATEUR L :

Nous construisons dans ce paragraphe, le processus de diffusion de générateur L , défini par : $\forall f \in \mathcal{D}(R)$, $Lf(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \zeta(x) f'(x)$, où $\zeta : R \to R$ vérifie l'hypothèse

(H.1)
$$\zeta \in C^{\infty}$$
$$\int_0^{\infty} \exp(2\hat{\zeta}(u))\, du = \int_{-\infty}^{0} \exp 2\hat{\zeta}(u)\, du = \infty$$

($\hat{\zeta}$ désigne une primitive de ζ) .

La construction d'un tel processus est, pour l'essentiel, faite dans Mac Kean [3] et Kunita [8], dans le cadre de l'étude des diffusions sur les variétés.

Cependant, dans le cas particulier traité ici, on aborde de façon plus directe cette construction et on obtient quelques précisions supplémentaires.

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ muni d'une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$, continues à droite, et complètes pour $(\underline{\underline{F}}, P)$. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sur cet espace, $\underline{\underline{F}}_t$ adapté à valeurs dans R , avec $B_0 = 0$. ζ étant de classe C^{∞} , pour tout n , il existe $\zeta_n \in \mathcal{D}(R)$, telle que $\zeta_n = \zeta$ sur $K_n = [-n,+n]$ et ζ_n est à support dans K_{n+1} . ζ_n étant uniformément lipschitzienne et bornée, pour tout $\omega \in \Omega$, et tout $x \in R$, il y a existence et unicité des solutions de l'équation intégrale :

$$f(t) = x + B_t(\omega) - \int_0^t \zeta_n(f(s))\, ds \ .$$

On désigne le processus obtenu à partir des solutions par ${}^nX_t^x(\omega)$. Il vérifie donc l'équation

$$E(x,-\zeta_n) \ : \ {}^nX_t^x = x + B_t - \int_0^t \zeta_n({}^nX_s^x)\, ds$$

Soit

$$T_n^x(\omega) = \mathrm{Inf}(t \geqq 0 \mid \ |{}^nX_t^x(\omega)| > n \ ) \ .$$

La méthode d'itération utilisée pour résoudre les équations précédentes et l'unicité des solutions de chaque équation entraînent les résultats suivants :

<u>LEMME 1.1.</u> - Les processus $({}^nX_t^x)_{x \in R, t \in R_+}$ possèdent les propriétés suivantes :

1°) $\forall n, \forall \omega$, l'application $(x,t) \to {}^nX_t^x(\omega)$ est continue

2°) $\forall \omega$, ${}^nX_t^x(\omega) = {}^{n+1}X_t^x(\omega)$ sur $t < T_n^x(\omega)$.

La seconde propriété permet de définir un processus $(X_t^x)_{t<\underline{e}^x}$ avec $\underline{e}^x = \sup_n T_n^x$ et $X_t^x(\omega) = {}^nX_t^x(\omega)$ pour $t < T_n^x(\omega)$.

Nous rappelons, avant d'étudier le processus X_t^x , la formule de Cameron-Martin, vu son importance dans la suite des démonstrations : on trouvera sa formulation et démonstration dans [3] , p.67 .

On désigne sur $C(R_+,R)$ les projections $\omega \to \omega(t)$ par X_t et on note $\underline{\underline{F}}_t^o = \sigma(X_s, s \leq t)$. Soit $x \in R$, et $b_1, b_2 : R \to R$ deux fonctions localement lipschitziennes. Soit B_t un mouvement brownien défini sur un espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$ et deux processus X_t^1 et X_t^2 conservatifs vérifiant :

$$\forall t \;,\; X_t^i = x + B_t + \int_0^t b_i(X_s^i)\, ds \qquad (i = 1,2) \;.$$

On note P_x^i la loi de X^i sur $C(R_+,R)$.

Alors, P_x^1 p.s., $X_t - x - \int_0^t b_1(X_s)\, ds$ est un $\underline{\underline{F}}_t^o$ mouvement brownien noté Y_s et :

$$(1) \;\forall \psi \in b(\underline{\underline{F}}_t^o) \;,\quad P_x^2(\psi) = P_x^1\Big(\psi \exp\Big\{\int_0^t (b_2(X_s) - b_1(X_s))\, dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t (b_2(X_s) - b_1(X_s))^2\, ds\Big\}\Big) \;.$$

Cette formule permet en particulier d'obtenir le lemme suivant :

<u>LEMME 1.2.</u> - Pour tout $x_o \in R$, il existe $N^{x_o} \subset \Omega$, de P-mesure nulle, tel que : $\forall n \in N$, $\forall \omega \notin N^{x_o}$, l'application $x \to T_n^x(\omega)$ est continue en x_o.

<u>Preuve</u> : Supposons $T_n^{x_o}(\omega) = u > 0$. Alors $\{{}^n X_t^{x_o}(\omega) \,,\; 0 \leqq t \leqq u-\varepsilon\}$ est un compact, et donc à une distance δ de $\{-n\} \cup \{n\}$. Il existe donc, d'après le lemme 1.1., $\eta(\omega) > 0$ tel que :

---

(1) On notera plusieurs fois $P(\psi)$ au lieu de $E(\psi)$.

$$|x-x_o| \leq \eta(\omega) \Longrightarrow |{}^nX_t^x - {}^nX_t^{x_o}| \leq \frac{\delta}{2} \quad , \quad \forall\, t \leq u-\varepsilon$$

$$\Longrightarrow T_n^x(\omega) \geq u-\varepsilon \Longrightarrow \underline{\lim}_{x \to x_o} \; T_n^x(\omega) \geq T_n^{x_o}(\omega) \quad ,$$

résultat encore vrai lorsque $T^n_{x_o}(\omega) = 0$.

Posons $\quad {}^nN^\varepsilon_{x_o} = \{\omega | T^n_{x_o}(\omega) < \infty \; ; \; {}^nX^{x_o}_{s+T_n^{x_o}}(\omega) \in \left]-n,+n\right[\; , \; \forall\, 0 \leq s \leq \varepsilon\}$.

Si $\omega \notin \bigcup_{\varepsilon \in Q} {}^nN^\varepsilon_{x_o}$, on a :

$$\forall\, \varepsilon \in Q \; , \; \exists s, \; 0 \leq s \leq \varepsilon, \quad {}^nX^{x_o}_{s+T_n^{x_o}}(\omega) \notin \left]-n,+n\right[$$

supposons $T_n^{x_o}(\omega) < \infty$; d'après le lemme 1.1., il existe $\eta(\omega) > 0$ tel que

$$|x-x_o| \leq \eta(\omega) \Longrightarrow {}^nX^x_{s+T_n^{x_o}}(\omega) \notin \left]-n,+n\right[$$

$$\Longrightarrow T_n^x(\omega) \leq T_n^{x_o}(\omega) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}_{x \to x_o} \; T_n^x(\omega) \leq T_n^{x_o}(\omega) \; ,$$

relation encore vraie lorsque $T_n^{x_o}(\omega) = \infty$.

Si $\omega \notin \bigcup_{\varepsilon \in Q} {}^nN^\varepsilon_{x_o}$, l'application $x \to T_n^x(\omega)$ est continue en x_o.

Il suffit donc de montrer que : $\forall p \in N$, $\forall \varepsilon \in Q$, ${}^{n}N^{\varepsilon}_{x_o} \cap (T_n^{x_o} \leq p)$ est de P-mesure nulle. Or, d'après la formule de Cameron-Martin, P_{x_o} - loi sur $C(R_+,R)$ de ${}^{n}X^{x_o}$ - et W_{x_o} sont équivalentes sur $\underline{\underline{F}}^o_{p+\varepsilon}$, où W_{x_o} désigne la loi sur $C(R_+,R)$ du mouvement brownien partant de x_o . Enfin, on sait que : $W_{x_o}\left(T_n \leq p \ ; \ X_{s+T_n} \in [-n,+n] \ , \ \forall \ 0 \leq s \leq \varepsilon\right) = 0$.

On peut donc prendre $N^{x_o} = \bigcup\limits_{\substack{n \in N \\ \varepsilon \in Q}} {}^{n}N^{\varepsilon}_{x_o}$.

Les principales propriétés du processus X_t^x sont résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3. - Le processus X_t^x possède les propriétés suivantes :

a) $(X_t^x)_{x \in R, t < \underline{e}^x}$ vérifie la propriété de Markov forte sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$.

b) Pour tout x , le processus X^x est conservatif, i.e. :

$$P\left(\underline{e}^x < \infty\right) = 0 .$$

c) $P_t f(x) = E\left(f(X_t^x)\right)$ $(f \in \mathcal{B}_b(R))$ définit un semi-groupe markovien vérifiant l'identité :

$$(I) \quad \forall f \in \mathcal{D}(R) \ , \qquad P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Lf)(x)\, ds$$

d) $\forall x_o \in R$, $t_o \in R_+$, $\forall \omega \notin N^{x_o}$ $(\underline{e}^{x_o} < \infty)$, l'application $(x,t) \to X_t^x(\omega)$ est continue en (x_o,t_o) .

Preuve : a) Cette propriété est démontrée dans un cadre général en [3] , p. 54.

b) C'est une conséquence immédiate du test de Feller sur les explosions de diffusion à une dimension ([3], p. 65).

Il suffit de vérifier

$$\int_0^\infty (j(\infty)-j(x)) \frac{dx}{j'(x)} = \int_-^0 (j(x)-j(-\infty) \frac{1}{j'(x)} dx = \infty$$

avec $j(x) = \int_0^x \exp(2\hat{\zeta}(u))\, du$. L'hypothèse (H.1) entraîne donc le caractère conservatif du processus X^x , pour tout x .

c) La propriété de Markov simple entraîne que P_t est un semi-groupe (qui est borélien d'après la propriété d)).

D'après la formule de Ito, on a :

$$\forall f \in \mathcal{D}(R) \quad , \quad f(X_t^x) = f(x) + \int_0^t f'(X_s^x)\, dB_s + \int_0^t Lf(X_s^x)\, ds \ ,$$

ce qui entraîne l'identité (I) .

d) Soit $x_o \in R$, $t_o \in R_+$ et $\omega \notin N^{x_o} \cup (\underline{e}^{x_o} < \infty)$, soit $T \in R_+$ tel que $t_o < T$. Il existe n tel que $T < T_n^{x_o}(\ )$; d'après le lemme 1.2., il existe un voisinage U de x_o tel que : $\forall x \in U$, $T < T_n^x(\omega)$.

D'après le lemme 1.1., et l'égalité : $X_t^x(\omega) = {}^nX_t^x(\omega)$, $\forall t \leqq T$, on obtient le résultat.

On désigne par P_x la loi du processus X^x sur $\mathcal{W} = C(R_+,R)$. Lorsque $\zeta = 0$, on note $P_x = W_x$; c'est la loi du mouvement brownien partant de x . Pour la suite du travail, X_t désigne les projections usuelles sur et $\underline{\underline{F}}_t^o = \sigma(X_s, s \leq t)$; $C(R_+, R)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de R_+ .

La seconde partie de ce paragraphe a pour but de caractériser les probabilités $(P_x)_{x \in R}$ et le semi-groupe P_t , et d'étudier leurs propriétés.

<u>DÉFINITION 1.4.</u> - Soit $b : R \to R$, fonction borélienne. $E(x,b)$ désigne l'équation intégrale : $X_t = x + B_t + \int_0^t b(X_s)\, ds$, où B_t est un mouvement brownien.

- On dit qu'il y a unicité trajectorielle de $E(x,b)$ si, B_t étant donné, deux processus X_t et X'_t vérifiant $E(x,b)$ sont indistingables.

- On dit qu'il y a unicité en loi de $E(x,b)$, si B_t et B'_t étant deux mouvements browniens, X_t solution de $E(x,b)$ (avec B_t) et X'_t solution de $E(x,b)$ (avec B'_t) ont même loi .

On a déjà montré l'unicité trajectorielle des solutions de $E(x-\zeta)$.

<u>PROPOSITION 1.5.</u> - Pour tout $x \in R$, il y a unicité en loi des solutions de $E(x-\zeta)$ (1).

<u>Preuve</u> : Soit P_x la loi sur $\mathcal{W}$ d'une solution de $E(x-\zeta)$. D'après la formule de Cameron-Martin, pour toute fonction $\psi \in b(\underline{\underline{F}}_t^o)$

---

(1) Rappelons le théorème général, dû à Yamada et Watanabé pour les équations différentielles stochastiques : l'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi.

$$P_x(\psi) = W_x\left(\psi \exp\{-\int_0^t \zeta(X_s)\, dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta^2(X_s)\, ds\}\right)$$

Le théorème suivant caractérise la famille des probabilités $(P_x)_{x\in R}$.

<u>THEORÈME 1</u> - Il existe une famille de probabilités unique $(P_x)_{x\in R}$ sur $(\mathcal{W}, \underline{\underline{F}}^o_\infty)$ telles que :

1) $(\mathcal{W}, X_t, \underline{\underline{F}}^o_t, P_x)$ est un processus de Markov à valeurs dans R .

2) $\forall x$, P_x vérifie :

$$P_x(X_o = x) = 1$$

$$\forall f \in \mathcal{D}(R) , \qquad E_x\left(f(X_t)\right) = f(x) + \int_0^t E_x\left(Lf(X_s)\right) ds \quad .$$

De plus, cette famille vérifie les propriétés suivantes :

$\forall f \in C_b(R)$, $(t,x) \to E_x\left(f(X_t)\right)$ est continue et l'application $x \to P_x$ est étroitement continue.

<u>Preuve</u> : L'existence de la famille P_x vérifiant 1) et 2) a été prouvée précédemment. D'après la propriété d) de la proposition 1.3., pour $f \in C_b(R)$, $(t,x) \to E_x\left(f(X_t)\right) = E\left(f(X_t^x)\right)$ est continue. D'après le théorème 6.6. p. 47 de [9], il est nécessaire et suffisant pour que $x \to P_x$ soit étroitement continue que $x \to P_x(\phi)$ soit continue pour toute fonction uniformément continue, bornée sur $\mathcal{W}$, muni de la topologie métrisable de la convergence uniforme sur tout compact (on prend une distance d bornée par 1). Soit $x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x_o$ et une telle fonction ϕ .

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que $d(u,v) \leqq \delta \Longrightarrow |\phi(u) - \phi(v)| \leqq \varepsilon/2$

$$|P_{x_n}(\phi) - P_{x_o}(\phi)| = |P(\phi(X^{x_n})) - P(\phi(X^{x_o}))|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + 2||\phi||_\infty \ \frac{1}{\delta} \ E\left(d(X^{x_n} \ ; \ X^{x_o})\right) .$$

Le résultat découle de la proposition 1.3.,d), et du théorème de convergence dominé.

Prouvons maintenant l'unicité des mesures P_x vérifiant 1) et 2): La propriété de Markov et la propriété 2 entraînent que

$$\forall f \in \mathcal{D}(R) , \qquad f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)\, ds$$

est une $(P_x, \underline{\underline{F}}_t^o)$ martingale. Il n'est pas difficile de montrer que $X_t - x + \int_0^t \zeta(X_s)\, ds$ est une martingale locale de processus croissant t : c'est donc un mouvement brownien B_t , $\underline{\underline{F}}_t^o$ adapté. On a donc : $X_t = x + B_t - \int_0^t \zeta(X_s)\, ds$. La proposition 1.5. entraîne l'unicité des probabilités P_x .

Le théorème 2 caractérise le semi-groupe P_t .

<u>THEORÈME 2</u> - Il existe un unique semi-groupe de noyaux $P_t(x,dy)$ markovien tel que :

(I) $\forall f \in \mathcal{D}(R)$, $P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Lf)(x)\, ds$.

Ce semi-groupe possède les propriétés suivantes :

a) si $h(x) = e^{-\hat{\zeta}(x)}$ et $2P(x) = \zeta^2(x) - \zeta'(x)$,

$$\text{(II)}\quad \forall f \in \mathcal{B}_b(R)^{(1)},\quad h(x)\, P_t\, f(x) = W_x\Big((fh)(X_t)\, e^{-\int_0^t P(X_s)ds}\Big)$$

b) $\forall f \in \mathcal{B}_b(R)$, $(t,x) \to P_t\, f(x) \in C^\infty(]0,\infty[\times R)$

c) Le semi-groupe P_t admet une densité $p_t(x,y)$ - c'est à dire

$\forall f \in \mathcal{B}_b(R)$, $P_t\, f(x) = \int p_t(x,y)\, f(y)\, dy$ - telle que $p \in C^\infty(]0,\infty[\times R \times R)$,

solution de $(\frac{\partial}{\partial t} - L_x)\, p_t(x,y) = 0$ et $(\frac{\partial}{\partial t} - L_y^*)\, p_t(x,y) = 0$, avec $L^* f = \frac{1}{2} f'' + (\zeta f)'$.

<u>Preuve</u> : On a montré précédemment l'existence d'un semi-groupe de noyaux vérifiant (I) . Prouvons l'unicité :

soit T_t un semi-groupe markovien vérifiant (I) et A son générateur fort

1°) Toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(R)$ appartient à $\mathcal{D}(A)$ et $A\phi = L\phi$.

En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(R)$,

$$\left|\frac{1}{t}(T_t\, \phi(x) - \phi(x) - L\phi(x)\right| = \left|\frac{1}{t}\int_0^t (T_s\, L\phi(x) - L\phi(x))\, ds\right|$$

$$\leqq \sup_{s \leqq t} ||T_s(L\phi) - L\phi||_\infty \leqq t\,||L^2\phi||_\infty \xrightarrow{(t\to 0)} 0.$$

(1) Dans toute la suite, $\mathcal{B}_b(R)$ désigne les fonctions boréliennes bornées sur R et $C_b^\infty(R)$ les fonctions de classe C^∞ , bornées ainsi que leurs dérivées.

2°) $1 \in \mathscr{D}(A)$, car $T_t\, 1 = 1$, $\forall t$; de plus $A1 = 0$.

3°) Au semi-groupe T_t , on associe - à l'aide de la première réalisation canonique un processus de Markov, avec les probabilités $(\overline{P}_x, x \in R)$; $\overline{P}_x$ est en fait pseudo portée par $\mathscr{W} = C(R_+, R)$, d'après un critère de Dynkin ([11], théorème 3.9, p. 3) ; il suffit de montrer que pour tout x R , il existe une fonction $\phi \geqq 0$ avec ϕ nulle dans un voisinage V de x , et supérieure ou égale à $c > 0$ sur V^c , telle que : $\phi \in \mathscr{D}(A)$ et $A\phi(0)$; soit $\psi \in \mathscr{D}(R)$, $\psi \equiv 1$ dans un voisinage de x , on pose $\phi = 1 - \psi$.

D'après 1°) et 2°), $\phi \in \mathscr{D}(A)$ et $A\phi(x) = -L\psi(x) = 0$. On note encore $\overline{P}_x$ les probabilités induites par $\overline{P}_x$ sur $\mathscr{W}$: les probabilités $(\overline{P}_x, x \in R)$ vérifient les hypothèses 1) et 2) du théorème 1 , et donc $\overline{P}_x = P_x$, $\forall x$. Par conséquent,

$$\forall f \in \mathscr{B}_b(R) , \quad T_t\, f(x) = \overline{P}_x\big(f(X_t)\big) = P_x\big(f(X_t)\big) = P_t\, f(x) .$$

Démontrons les propriétés de P_t annoncées dans le théorème :

a) Soit $f \in \mathscr{B}_b(R)$. D'après la formule de Cameron-Martin (voir proposition 1.5., par exemple),

$$P_t\, f(x) = E_x\big(f(X_t)\big) = W_x\Big(f(X_t)\, e^{-\int_0^t \zeta(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta^2(X_s)ds}\Big).$$

Appliquons la formule de Ito à $-\hat{\zeta}(X_t)$; il vient

$$P_t\, f(x) = W_x\Big(f(X_t)\, e^{-\hat{\zeta}(X_t)+\hat{\zeta}(X_o) - \int_0^t P(X_s)ds}\Big)$$

d'où (II) $$h(x)\, P_t\, f(x) = W_x\Big((fh)(X_t)\, e^{-\int_0^t P(X_s)ds}\Big) .$$

b) La formule (II) est évidemment valable pour les semi-groupes ${}^nP_t$ associés aux processus ${}^nX_t$, avec $h_n(x) = e^{-\hat{\zeta}_n(x)}$, $2P_n(x) = \zeta_n^2(x) - \zeta_n'(x)$ soit $f \in C_b(R)$.

On a alors $h_n(x)\ {}^nP_t\ f(x) = W_o\left((fh_n)(x+X_t)\ e^{-\int_0^t P_n(x+X_s)ds}\right)$.

Les fonctions h_n et P_n étant dans $C_b^\infty(R)$, on obtient, par dérivation sous le signe W_o : ${}^nP_t\ f \in C_b^\infty(R)$. ζ_n étant à support compact, si A_n désigne le générateur fort de P_t, il est évident, d'après la formule de Ito par exemple que pour $f \in C_b^2(R)$, $A_n\ f = L_n\ f = \frac{1}{2} f'' - \zeta_n\ f'$. De même que dans la démonstration 1°), on montre que, f $C_b^\infty(R)$ étant fixé, $A_n({}^nP_s\ f) = {}^nP_s(L_n\ f)$. D'où : $L_n({}^nP_s\ f) = {}^nP_s\ L_n\ f$; on en déduit donc, d'après l'identité (I_n) ${}^nP_t\ f = f + \int_0^t {}^nP_s\ L_n\ f\ ds$, $\frac{\partial}{\partial t}\ {}^nP_t\ f = L_n({}^nP_t\ f)$; lorsque $n \to \infty$, les fonctions $(t,x) \to P_t\ f(x)$ convergent vers $P_t\ f(x)$, par définition du processus X^x ; à l'aide du théorème de convergence dominée, on déduit facilement que : $\frac{\partial}{\partial t} P_t\ f = L(P_t\ f)$, au sens des distributions sur $]0,\infty[\times R$. L'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - L$ sur $]0,\infty[\times R$, étant parabolique, donc hypoelliptique, il existe une fonction $\Psi(t,x) \in C^\infty(]0,\infty[\times R)$ telle que $P_t\ f(x) = \Psi(t,x)$ ps $(dt\ dx)$. Or, d'après la fin du théorème 1, $(t,x) \to P_t\ f(x)$ est continue : elle appartient donc à $C^\infty(]0,\infty[\times R)$.

c) D'après la formule de Cameron-Martin, les mesures $P_t(x,.)$ sont équivalentes à la mesure de Lebesgue. De plus, pour toute fonction mesurable bornée, $(t,x) \to P_t\ f(x)$ est mesurable pour $\mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{B}(R)$. D'après un lemme classique de Doob, il existe donc une fonction $\overline{p}_t(x,y)$ mesurable pour $\mathcal{B}(R_+ \times R^2)$ telle que $P_t(x,dy) = \overline{p}_t(x,y)\ dy$.

Soit $g \in C^2(R) \cap \mathcal{D}(A)$. Remarquons alors que $Ag = Lg$. En effet, g appartient au domaine de $\mathcal{U}$, générateur de Dynkin de X et $\mathcal{U}g(x) = Ag(x)$. Il est alors immédiat, d'après la formule de Ito que $g(x) = Lg(x)$. Soit $f \in \mathcal{D}(R)$. On a donc, d'après la remarque précédente, et b), $P_t\, f \in \mathcal{D}(A) \cap C^2$ $\Longrightarrow A(P_t\, f) = L(P_t\, f) = P_t(Lf)$.

Ceci entraîne, au sens des distributions sur $]0,\infty[\times R \times R$, $(\frac{\partial}{\partial t} - L_x)\, \overline{p}_t(x,y) = 0$, $(\frac{\partial}{\partial t} - L_y^*)\, \overline{p}_t(x,y) = 0$ (avec $L^*\, f(x) = \frac{1}{2}\, f''(x) + (\zeta f)'$). En particulier, on a donc : $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(L_x + L_y^*))\, \overline{p}_t(x,y) = 0$; l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - (L_x + L_y^*)$ étant parabolique, il existe donc $p_t(x,y)$ fonction de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times R \times R$, avec $\overline{p}_t(x,y) = p_t(x,y)$ ps dt.dx.dy. Pour $f \in \mathcal{D}(R)$, on a alors $P_t\, f(x) = \int p_t(x,y)\, f(y)\, dy$ ps dt.dx , d'après le théorème de Fubini. Les deux membres étant des fonctions continues de (t,x) sont identiques. L'égalité étant vraie pour toute $f \in \mathcal{D}(R)$, on a donc :

$$\forall t,x \quad , \qquad p_t(x,y) = \overline{p}_t(x,y)\ dy \quad \text{ps} \quad , \text{ et donc :}$$

$$\forall f \in \mathcal{B}_b(R) \quad , \quad P_t\, f(x) = \int p_t(x,y)\, f(y)\, dy \quad .$$

d) Soit $\Phi \in \mathcal{B}_b(R)$. Il suffit de démontrer le résultat pour $0 \leq \Phi \leq 1$; remarquons, par l'application du lemme de Fatou, et la continuité de $p_t(x,y)$ que $P_t\, \Phi(x)$ et $P_t(1-\Phi)(x)$ sont deux fonctions s.c.i. en (t,x) ; or, $P_t(1-\Phi) = 1 - P_t\, \Phi$, ce qui entraine la continuité de $(t,x) \to P_t\, \Phi(x)$. A l'aide de c) et du théorème de Fubini, on obtient facilement que $\frac{\partial}{\partial t} P_t\, \Phi(x) = L(P_t\, \Phi)(x)$ au sens des distributions sur $]0,\infty[\times R$. De même que précédemment et avec la remarque ci-dessus, cela entraîne que $(t,x) \to P_t\, \Phi(x) \in C^\infty(]0,\infty[\times R)$.

2 - EXISTENCE ET UNICITÉ D'UNE MESURE DE PROBABILITÉ INVARIANTE PAR LE SEMI-GROUPE P_t :

On fait désormais l'hypothèse (H.2) : $e^{-2\hat{\zeta}} \in S(R)$ (1).

Remarquons que l'hypothèse (H.2) entraîne (H.1). L'hypothèse (H.2) est motivée par la théorie faite dans [1], dont nous rappelons ici le cadre : la donnée d'une fonction $\rho : R \to R_+$, strictement positive, de classe C^∞, et telle que

α) $\int \rho(x)\, dx = 1$, est équivalente à celle de la fonction ζ de classe C^∞, ou :

$$\beta) \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho} .$$

ζ étant donnée, ρ est l'unique fonction déterminée par $\rho(x) = e^{-2\hat{\zeta}(x)}$ et α) $\int \rho(x)\, dx = 1$: il existe une unique primitive $\hat{\zeta}$ de ζ telle que α) soit réalisée.

On désigne par Q un polynome réel, de degré impair, dont le coefficient dominant est strictement positif, et par P sa primitive centrée (voir 1.3., chapitre 1 , de [1]). On a alors

LEMME 2.1. - (1.5., chapitre 1 , de [1]) . Il existe une fonction $\rho \in C^\infty(R)$, et une seule vérifiant α) , ainsi que les équations différentielles suivantes

(1) $S(R)$ désigne l'espace des fonctions $f : R \to R$, de classe C^∞ , vérifiant $\forall p, n \in N$, $\sup_{x \in R} (1+x^2)^p \, |f^{(n)}(x)| < \infty$.

$\gamma)\quad \zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = Q$

$\delta)\quad \zeta^2 - \zeta' = 2P$

$\varepsilon)\quad -\frac{1}{2}(\rho^{1/2})'' + P\,\rho^{1/2} = 0$.

En outre, la solution ρ ainsi obtenue vérifie : $\rho^{1/2} \in S(R)$.

Nous ne supposons dans la suite que la seule hypothèse (H.2), et utilisons donc les notations et résultats du paragraphe 1 .

On cherche les mesures de probabilités invariantes par P_t , de façon à construire, à partir de la diffusion du paragraphe 1 , un processus de Markov stationnaire.

THEOREME 3 - $\mu_o(dx) = \rho(x)\,dx$ est l'unique mesure de probabilité invariante par le semi-groupe P_t .

De plus, on a : $\forall f,g \in \mathcal{D}(R)$, $\int f\,P_t\,g\,d\mu_o = \int P_t\,f\,g\,d\mu_o$.

Preuve : a) μ_o est invariante par le semi-groupe P_t ; il suffit de vérifier que $\forall f \in \mathcal{D}(R)$, $\forall t$, $\mu_o(P_t\,f) = \mu_o(f)$. D'après l'identité (I) , on a :

$$\mu_o(P_t\,f) = \mu_o(f) + \int_0^t \mu_o(P_s\,Lf)\,ds .$$

Dans la démonstration de la partie c) du théorème 2 , on a montré : $P_s Lf = LP_s f$. Soit $h : R \to [0,1]$, $h \in \mathcal{D}(R)$, avec $h(x) = 1$, pour $|x| \leq 1$. On pose $h_n(x) = h(\frac{x}{n})$.

On a alors :

$$\mu_o(P_s\ Lf) = \int \rho(x)\ dx\ L(P_s\ f)(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int \rho(x)\ dx\ h_n(x)\ L(P_s\ f)(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int dx\ L^*(\rho h_n)\ P_s\ f(x)\ .$$

Or, $L^*(\rho) = 0$, les dérivées des fonctions h_n sont uniformément bornées, et ρ, ρ' et ρ'' sont intégrables. On a donc :

$$\mu_o(P_s\ Lf) = \lim_{n \to \infty} \int dx\ L^*(\rho h_n)(x)\ P_s\ f(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{]-n,+n[^c} dx\ \{\tfrac{1}{2}(\rho h_n)'' - \tfrac{1}{2}(\rho' h_n)'\}\ (x)\ P_s\ f(x)\ .$$

On obtient $\mu_o(P_s\ Lf) = 0$, $\forall f \in \mathcal{D}(R)$, $s \geq 0$, d'où le résultat.

b) μ_o est la seule mesure de probabilité invariante par le semi-groupe P_t : soit μ_1 une mesure de probabilité invariante par le semi-groupe P_t . D'après l'identité (I) , μ_1 vérifie :

$$\forall t > 0\ ,\ \forall f \in \mathcal{D}(R)\ ,\quad \frac{1}{t}\int_0^t \mu_1(P_s\ Lf)\ ds = 0\ .$$

En faisant tendre t vers 0 , il vient : $\mu_1(Lf) = 0$. Soit T la distribution associée à μ_1 . On a donc :

$$\frac{1}{2} < T, f'' >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} - < T, f' >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \frac{1}{2} < T', f' >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} - < \zeta T, f' >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

$$= 0 .$$

D'où ; $(\frac{1}{2} T' + \zeta T)' = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} T' + \zeta T = C$. D'après le théorème IX, p.130 , de [10] , toute distribution-solution est en fait une fonction de classe C^∞ ; soit donc $\mu_1(dx) = \phi(x)\, dx$, avec $\frac{1}{2} \phi' + \zeta\phi = C \Longrightarrow \phi(x) = \left(C_1 + 2C \int_0^x \frac{1}{\rho(u)}\, du\right) \rho(x)$; μ_1 étant une probabilité, on a $\phi \geqq 0$, ce qui n'est pas possible que si $C = 0$, puisque $\lim_{|u| \to \infty} \rho(u) = 0$. Enfin, comme $\int \phi(x)\, dx = 1$, on a $\phi = \rho$ et donc $\mu_1 = \mu_o$.

c) Soit $\phi : \mathcal{W} \to R$, $\underline{\underline{F}}_t^o$ mesurable ; d'après le théorème de classe monotone, ϕ vérifie $\forall\, \omega$, $\phi(\omega) = \phi(\omega_t)$, où $\omega_t(s) = \begin{cases} \omega(s) , & s \leqq t \\ \omega(t) , & s > t . \end{cases}$

Notons $r_t : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ l'application suivante :

$$(r_t\, \omega)(s) = \omega(t-s) \quad (s \leqq t)$$
$$= \omega(0) \quad (s \geqq t) .$$

Les probabilités $(W_x)_{x \in R}$ vérifient :

$$\forall\, \phi \geqq 0 , \underline{\underline{F}}_t^o \text{ mesurable} , \int dx\, W_x\big(\phi(\omega)\big) = \int dx\, W_x\big(\phi(r_t\, \omega)\big) .$$

La vérification de l'identité sur les fonctions $\phi(\omega) = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$, $t_i \leqq t$, est immédiate et l'extension aux fonctions ϕ $\underline{\underline{F}}_t^o$ mesurables, positives, découle du théorème de classe monotone.

On déduit de cela, et de la formule II, du théorème 2,

$$\forall f,g\in\mathcal{C}(R)\ ,\ \int\mu_o(dx)f(x)P_tg(x) = \int dx\ W_x\Big((\rho^{1/2}f)(X_o)(\rho^{1/2}g)(X_t)e^{-\int_0^t P(X_s)ds}\Big)$$

$$= \int dx\ W_x\Big((\rho^{1/2}f)(X_t)(\rho^{1/2}g)(X_o)e^{-\int_0^t P(X_s)ds}\Big)$$

$$= \int \mu_o(dx)g(x)P_tf(x)\ .$$

<u>PROPOSITION 2.2.</u> - Pour chaque $t > 0$, P_t est un opérateur symétrique, contractant sur $L^2(R,\mu_o)$ et le semi-groupe P_t est fortement continu sur $L^2(R,\mu_o)$.

L'unique opérateur A auto-adjoint positif dans $L^2(R,\mu_o)$ tel que $P_t = e^{-tA}$ possède les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{D}(R)\subset\mathcal{D}(A)\subset\{f\ \ L^2(R,\mu_o)\ |Lf\ \text{-}_{\text{distributions}}^{\text{au sens des}}\text{-}\in L^2(R,\mu_o)\}$

b) $f\in\mathcal{D}(A) \Longrightarrow Af = -\,Lf$ (au sens des distributions)

c) $\mathcal{D}(A)$ contient l'ensemble des f appartenant à $L^2(R,\mu)$ telles que : Lf - au sens des distributions - appartient à $L^2(R,\mu)$ et il existe une suite $(f_n)_{n\in N}$ de $\mathcal{D}(R)$ telle que $||f_n - f||\ \xrightarrow[L^2(R,\mu_o)]{(n\to\infty)}\ 0$ et

$$||Lf_n||_{L^2(R,\mu_o)} \to ||Lf||_{L^2(R,\mu_o)}\ .$$

<u>Preuve</u> : i) Les opérateurs P_t de contractions (car contractants) et pour $f\in\mathcal{D}(R)$, l'application $t\to P_t\,f$, à valeurs dans $L^2(R,\mu_o)$ est con-

tinue. La densité de $\mathcal{D}(R)$ dans $L^2(R,\mu_o)$ entraîne que le semi-groupe P_t est fortement continu et formé d'opérateurs symétriques sur $L^2(R,\mu_o)$, d'après le théorème 3.

ii) Tout semi-groupe P_t de contractions, fortement continu, constitué d'opérateurs symétriques, sur un espace de Hilbert, est de la forme $P_t = e^{-tA}$ avec A opérateur auto-adjoint positif et $-A$ est le générateur infinitésimal de P_t .

iii) D'après le théorème de convergence dominé, et l'inégalité :

$\forall f \in \mathcal{D}(R)$, $\quad \left|\frac{1}{t}(P_t f(x) - f(x)) - Lf(x)\right| \leqq t \, ||L^2 f||_\infty$,

on a :

$$\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{D}(A) \quad \text{et pour} \quad f \in \mathcal{D}(R) \;, \quad Lf = -Af \;.$$

Inversement, pour $f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$, l'application $\mathcal{D}(R) \quad g \to \langle f,Lg \rangle_{\mu_o}$ se prolonge continument à $L^2(R,\mu_o)$.

$$\text{Or, } \langle f,Lg \rangle_{\mu_o} = \langle \rho f,Lg \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$
$$= \langle L^*(\rho f),g \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} \;,$$

où L^* désigne l'adjoint de L sur $\mathcal{D}'$. De l'identité $L^*(\rho f) = Lf$, on déduit :

$$\langle f,Lg \rangle_{\mu_o} = \langle \rho^{1/2} Lf,\rho^{1/2} g \rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$

$g \to \langle f,Lg \rangle_{\mu_o}$ se prolonge donc continument à $L^2(R,\mu_o)$, si et seulement si, $Lf \in L^2(R,\mu_o)$.

iv) Soit $f \in L^2(R,\mu_o)$, avec $Lf \in L^2(R,\mu_o)$ et $f \in \mathcal{D}(R)$ avec

$$\alpha) \quad \| f_n - f \|_{L^2(R,\mu_o)} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$$

$$\beta) \quad \| Lf_n \|_{L^2(R,\mu_o)} \xrightarrow{(n\to\infty)} \| Lf \|_{L^2(R,\mu_o)}$$

A étant un opérateur fermé, pour montrer que $f \in \mathcal{D}(A)$, il suffit de montrer que $\| Lf - Lf_n \|_{L^2(R,\mu_o)} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$.

$$\forall\, \theta \in \mathcal{D}(R) \ , \quad < Lf_n, \theta >_{\mu_o} = < f_n, L\theta >_{\mu_o} \xrightarrow{(n\to\infty)} < f, L\theta >_{\mu_o} = < Lf, \theta >_{\mu_o} \ ,$$

d'après α) . La condition β) entraîne alors le résultat, d'après la densité de $\mathcal{D}(R)$ dans $L^2(R,\mu_o)$.

Remarque : Dans le cadre de [1] , où, en particulier, $\zeta^2 - \zeta'$ est un polynôme borné inférieurement (voir 1.3., chapitre 1 , de [1]) , A - qui est alors le hamiltonien H - est défini par (proposition 1.6. de [1])

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{ f \in L^2(R,\mu_o) \mid f \in H^2_{loc}(R) \} \text{ et } Lf \in L^2(R,\mu_o) \\ Af = -Lf \quad (f \in \mathcal{D}(A)) \ . \end{cases}$$

3 - CONSTRUCTION D'UNE MESURE μ SUR $C(R,R)$ ASSOCIÉE A L'OPÉRATEUR DIFFERENTIEL L, ET POSSÉDANT LES PROPRIÉTÉS DE MARKOV ET D'INVARIANCE EUCLIDIENNE :

On suppose désormais, jusqu'à la fin de l'article, l'hypothèse (H.2) vérifiée. La mesure μ construite et caractérisée par le théorème 4 est la mesure du champ euclidien d'interaction $P'(2P = \zeta^2 - \zeta')$ dans le cadre (1), d'où son importance.

Le semi-groupe P_t et la probabilité μ_o étudiés précédemment permettent de construire un processus $(X_t)_{t\in R}$ à trajectoires continues, de Markov, et stationnaire $(\forall t_1,t_2,\dots,t_n \in R$, la loi de $(X_{t_1+h},\dots,X_{t_n+h})$ est indépendante de $h \in R)$.

On note $\mathcal{W}' = C(R,R)$, X_t la projection : $\omega \to \omega(t)$; pour $a < b$, $\underline{\underline{F}}_b^a = \sigma\{X_s, a \leq s \leq b\}$; $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{+\infty}^{-\infty}$.

THEOREME 4 - Il existe une unique probabilité μ sur $(\mathcal{W}',\underline{\underline{F}})$ telle que l'une des propriétés suivantes soit réalisée :

1°) μ est markovienne, relativement aux tribus $\underline{\underline{F}}_t^{-\infty}$, de semi-groupe de transition P_t (1), i.e. : $\forall f \in \mathcal{B}_b(R)$, $\forall s \geq 0$, $\forall t \in R$,

$$\mu\left(f(X_{s+t})\,|\,\underline{\underline{F}}_t^{-\infty}\right) = P_s\, f(X_t) \quad .$$

La loi de X_t, $X_t(\mu)$ est indépendante de t.

---

(1) Les probabilités $(P_x)_{x\in R}$ et le semi-groupe P_t ont été introduits respectivement dans les théorèmes 1 et 2.

2°) μ est solution du problème des martingales suivant :

$$\forall s \in R , \qquad H_t^f = f(X_{t+s}) - f(X_s) - \int_s^{s+t} Lf(X_u)\, du$$

est une $(\underline{\underline{F}}^s_{s+t}, \mu)_{t \geq 0}$ martingale.

La loi de X_t , $X_t(\mu)$ est indépendante de t .

μ est alors déterminée par : $i_+(\mu) = \int \mu_o(dx)\, P_x$ (1) et $X_t(\mu) = \mu_o$, $\forall t$

où i_+ est l'application $\begin{array}{c} \mathcal{W}' \to \mathcal{W} \\ \omega \to \omega_{/R_+} \end{array}$,

et est invariante par les opérateurs θ_t et σ , respectivement de translation et de symétrie, définis par : $(\theta_t\, \omega)(s) = \omega(t+s)$ et $\sigma(\omega)(s) = \omega(-s)$

$$t \quad R \quad , \qquad \int \psi \circ \theta_t\, d\mu = \int \psi\, d\mu$$

$$\psi \quad b(\underline{\underline{F}}) \quad , \qquad \int \psi \circ \sigma\, d\mu = \int \psi\, d\mu \; .$$

<u>Preuve</u> : Montrons tout d'abord l'unicité des probabilités vérifiant 1°) ou 2°) .

a) Soit ν probabilité sur $(\mathcal{W}', \underline{\underline{F}})$ vérifiant 1°) . Alors, ν vérifie 2°) . En effet, soit $s \in R$; $0 < t$, h et $f \in \mathcal{D}(R)$.

---

(1) Les probabilités $(P_x)_{x \in R}$ et le semi-groupe P_t ont été introduits respectivement dans les théorèmes 1 et 2.

$$\mu\left(H^f_{t+h} \middle| \underline{\underline{F}}^s_{s+t}\right) = H^f_t + \mu\left(f(X_{s+t+h}) - f(X_{s+t}) - \int_{s+t}^{s+t+h} Lf(X_u)\, du \middle| \underline{\underline{F}}^s_{s+t}\right)$$

$$= H^f_t + P_h\, f(X_{s+t}) - f(X_{s+t}) - \int_0^h P_u\, f(X_{s+t})\, du .$$

D'après l'identité (I) vérifiée par P_t , H^f_t est une $\underline{\underline{F}}^s_{s+t}$ martingale.

b) Soit ν probabilité sur $(\mathcal{W}', \underline{\underline{F}})$ vérifiant 2°) . Pour tout $s \in R$, on note $\nu^s = \nu_{|C((s,\infty))}$. La propriété 2°) entraîne - de même que dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 - qu'il existe un $\underline{\underline{F}}^s_{s+t}$ mouvement brownien $(B^{(s)}_t)_{t \geq 0}$ tel que :

(i) $$X_{t+s} = X_s + B^{(s)}_t - \int_s^{t+s} \zeta(X_u)\, du \qquad \nu^s \text{ p.s.} \quad .$$

La proposition d'unicité en loi (proposition 1.4.) s'étend facilement au cas où la loi initiale est une probabilité quelconque sur R . En considérant ici θ_{-s} comme opérateur de $C(R_+,R)$ sur $C((s,\infty),R)$ on a donc :

(ii) $$\nu^s = \theta_{-s}\left(\int X_s(\nu)(dx)\, P_x\right) \quad .$$

D'après la seconde condition de 2°) , $X_{t+s}(\nu) = X_s(\nu)$, $\forall t \geq 0$. D'après (i), $X_s(\nu)$ est donc invariante par le semi-groupe P_t , et donc, d'après le théorème 3 , $X_s(\nu) = \mu_o$.

La formule (ii) devient alors $\nu^s = \theta_s\left(\int \mu_o(dx)\, P_s\right)$, ce qui démontre l'unicité de ν .

c) Montrons maintenant l'existence d'une probabilité μ sur $(\mathcal{W}',\underline{\underline{F}})$ satisfaisant 2°) .

Soit un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une famille de tribus $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, croissante, continue à droite, et complète pour P ; B_t désigne un $(\mathcal{F}_t,P)$ mouvement brownien réel, et X_o une variable aléatoire, $\mathcal{F}_o$-mesurable, de loi μ_o ; X_t est l'unique solution de : $X_t = X_o + B_t - \int_0^t \zeta(X_s)\, ds$. On note alors $\mu^s (s \in R)$ la probabilité sur $C((s,\infty))$ définie par $\mu^s\left(X_{s+t_1},\dots, X_{s+t_n} \in \Gamma\right) = P\left(X_{t_1},\dots,X_{t_n} \in \Gamma\right)$, avec $0 \leq t_1 \leq \dots < t_n$. Sur l'espace Ω , on a, pour $0 \leq u,t$:

$$X_{t+u} = X_u + B_{t+u} - B_u - \int_u^{t+u} \zeta(X_v)\, dv$$

$$= X_u + B_{t+u} - B_u - \int_0^t \zeta(X_{s+v})\, dv$$

$(B_{t+u} - B_u)_{t\geq 0}$ étant un $\underline{\underline{\mathcal{F}}}_{t+u}$ mouvement brownien et X_u ayant pour loi μ_o , on a, d'après l'unicité en loi des solutions de $E(X_o,-\zeta)$, pour $t > 0$: $\mu^s|_{\underline{\underline{F}}_\infty^{s+t}} = \mu^{s+t}$.

Les probabilités $(\mu^s, s \in R)$ sont donc compatibles entre elles, et il existe donc une unique probabilité μ sur $(\mathcal{W}',\underline{\underline{F}})$, telle que $\mu|_{\underline{\underline{F}}_\infty^s} = \mu^s$. Pour prouver ceci, on peut par exemple considérer la bijection suivante :

$$C(R,R) \to R \times \prod_{n=0}^{\infty} C_o\left(n,n+1\right) \times \prod_{n=0}^{\infty} C^o\left(-n,-n+1\right)$$

$$f \to \left(f(0) \; ; \; (f(u) - f(n))_{n\leq u\leq n+1} \; ; \; (f(u)-f(-n+1))_{-n\leq u\leq -n+1}\right)$$

et appliquer le théorème d'existence de produit infini de probabilités sur des espaces polonais. (On a noté ici $C_o(a,b) = \{f \in C(a,b) \mid f(a) = 0\}$

$$C^o(a,b) = \{f \in C(a,b) \mid f(b) = 0\}).$$

d) Montrons l'invariance de μ par les opérateurs θ_t et σ .

D'après le théorème de classe monotone, il suffit de montrer les deux égalités suivantes :

$\forall s, t_1<t_2<\ldots<t_n$, $h > 0$, $\forall f_i \in \mathcal{B}_b(R)$,

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i+h})\right) \quad ;$$

$\forall s, \forall\, 0<t_1<t_2<\ldots<t_n$, $\forall f_i \in \mathcal{B}_b(R)$,

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{s-t_i})\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{s+t_i})\right) \quad .$$

Chacune des expressions s'écrit explicitement à l'aide d'une formule faisant intervenir μ_o et le semi-groupe P_t : l'homogénéité du semi-groupe P_t et le théorème 3 entraînent ces deux égalités. Remarquons enfin que μ vérifie la propriété de Markov.

4 - PROPRIÉTÉS DE QUASI-INVARIANCE DES PROBABILITÉS P_x ET μ :

On montre la quasi-invariance des probabilités P_x sur $\mathcal{W}$, sous les translations des fonctions $f \in \mathcal{D}(R_+^*)$: la quasi-invariance de μ sur $\mathcal{W}'$ sous les translations des fonctions f de $\mathcal{D}(R)$ en découle. Dans le théorème 6 , on montre que cette propriété s'étend aux fonctions f de $S(R)$.

Rappelons la formule du module de quasi-invariance :
$\omega \in \mathcal{W}'$ (ou $\mathcal{W}$) , $f \in \mathcal{D}(R)$ ou $S(R)$,

$$a_f(\omega) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \{f''(t)\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)) - (P(\omega(t) + f(t))-P(\omega(t))\}dt$$

THEOREME 5 - $\forall x \in R$, P_x est quasi-invariante sur $\mathcal{W}$, sous les translations des fonctions $f \in \mathcal{D}(R_+^*)$, de module de quasi-invariance a_f
$\forall\ \psi \in b(\underline{\underline{F}})$, $\forall f \in \mathcal{D}(R_+^*)$,

$$\int \psi(\omega-f)\ dP_x(\omega) = \int \psi(\omega)\ a_f(\omega)\ dP_x(\omega) \quad .$$

Preuve : Il existe un $(\underline{\underline{F}}_s,P_x)$ mouvement brownien B_t tel que $X_t = x + B_t - \int_0^t \zeta(X_s)\ ds$ P_x p.s..

Soit $f \in \mathcal{D}(R_+^*)$; $Z_t = X_t - f(t) = x + B_t - \int_0^t (\zeta(Z_s + f(s)) + f'(s))\ ds$. On exprime ensuite la loi de Z_t en fonction de P_x à l'aide de la formule de Cameron-Martin. Il suffit de considérer $\psi \in b(\underline{\underline{F}}_t)$ pour t tel que $\mathrm{supp}(f) \subset]0,t[$.

On a alors :

$$\int \psi(\omega-f)\,dP_x(\omega) = E_x\Big(\psi(\omega)\ \exp\{\int_0^t - \big(\zeta(X_s+f(s)) - \zeta(X_s) + f'(s)\big)\ dB_s$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \big(\ \zeta(X_s+ f(s)) - \zeta(X_s) + f'(s)\big)^2\ ds\}\Big)$$

soit $F_f(x,s) = \mathrm{Log}\ \rho^{1/2}(x+f(s)) - \mathrm{Log}\ \rho^{1/2}(x)$.

En utilisant la formule de Ito pour $F_f(X_t,t)$ et la définition de P , on a :

$$\int \psi(\omega-f)\,dP_x(\omega) = E_x\Big(\psi(\omega)\ \exp\{F_f(X_t,t) + \int_0^t P(X_s)\ ds - \int_0^t P(X_s+ f(s))\ ds$$

$$- \int_0^t \zeta(X_s)\ f'(s)\ ds - \int_0^t f'(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (f'(s))^2\ ds\}\Big)$$

soit $\Lambda_1(P) = \exp - \int_0^t (P(X_s+ f(s)) - P(X_s))\ ds$.

On applique encore la formule de Ito à $\phi(x,t) = xf'(t)$ et à X_t

$$\int \psi(\omega-f)\,dP_x(\omega) = E_x\Big(\psi(\omega)\Lambda_1(P)\ \exp\{F_f(X_t,t) - X_t f'(t) + \int_0^t ds\big(X_s f''(s) - \tfrac{1}{2}(f'(s))^2\big)\ .$$

Le support de f étant inclus dans $]0,t[$, on a :

$$F_f(X_t,t) = X_t f'(t) = 0\ , \text{ et } \int_0^t (f'(s))^2\ ds = - \int_0^t f(s)\ f''(s)\ ds\ .$$

D'où $\int \psi(\omega-f)\ dP_x(\omega) = \int \psi(\omega)\ a_f(\omega)\ dP_x(\omega)$.

COROLLAIRE 4.1. - μ est une mesure quasi-invariante sur $\mathcal{W}'$, sous les translations des fonctions $f \in \mathcal{D}(R)$, de module de quasi-invariance a_f .

Preuve : D'après le théorème précédent, on a :

$$\int \psi(\omega-f)\ d\mu(\omega) = \int \psi(\omega)\ a_f(\omega)\ d\mu(\omega) \quad \text{pour}$$

$$\psi(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i}) \ , \ t_i \geqq 0 \ \text{ et } \operatorname{supp}(f) \quad [0,\infty[\ .$$

L'égalité générale pour $\psi = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})$ $(t_1 < \ldots < t_n)$ et $f \in \mathcal{D}(R)$ découle de l'invariance de μ par les opérateurs θ_t . En effet, il existe u tel que $\forall i$, $t_i + u > 0$, supp $(f+u) > 0$, soit $f_u(t) = f(t-u)$,

supp (f_u) = supp$(f+u)$.

D'où :

$$\begin{aligned} \mu\Big(\prod_i f_i(X_{t_i} - f(t_i))\Big) &= \mu\Big(\prod_i f_i(X_{t_i+u} - f_u(t_i+u))\Big) \\ &= \int \prod_i f_i(X_{t_i+u}) a_{f_u}(\omega)\ d\mu(\omega) \\ &= \int \prod_i f_i(X_{t_i+u}) a_f(\omega \circ \theta_u)\ d\mu \\ &= \int \psi(\omega)\ a_f(\omega)\ d\mu(\omega) \ . \end{aligned}$$

THEOREME 6 - μ est une mesure quasi-invariante sur $\mathcal{U}\mathcal{S}'$, sous les translations des fonctions $f \in S(R)$, de module de quasi-invariance a_f .

<u>Preuve</u> : a) Montrons que pour $f \in S(R)$, $a_f \in L^1(\mu)$ et $\forall \psi \in b_+(\underline{\underline{F}})$, $\mu(\psi . a_f) \leq \mu(\psi(\omega-f))$.

Soit $\psi \in b(\underline{\underline{F}}_{t_o}^{s_o})$, avec $s_o < 0 < t_o$. On considère $s<s_o<0<t_o<t$. Pour tout $s \leq s_o$, il existe $(B_u^{(s)})_{u \geq s}$, F_{u+s}^s mouvement brownien nul en $u=s$, tel que : μ p.s. , $X_u = X_u + B_u^{(s)} - \int_s^u \zeta(X_v)\, dv$, $u \geq s$. D'où :
$Z_u = X_u - f(u) = Z_s + B_u^{(s)} - \int_s^u \{\zeta(Z_v+f(v)) + f'(v)\}\, dv$.

La loi de X_s est μ_o $(\mu_o(dx) = \rho(x)\, dx)$, celle de Z_s est donc μ_s $(\mu_s(dx) = \rho(x+f(s))\, dx)$.

On a donc :

$$\mu(\psi(\omega-f)) = \int \rho(x+f(s))\, dx\, \tilde{P}_x^s(\psi(\omega)) \quad ,$$

où $\tilde{P}_x^s$ est la loi de $(X_u)_{u \geq s}$ sur $C([s,\infty))$, X_u vérifiant :

$$X_u = x + B_u^{(s)} - \int_s^u \{\zeta(X_v + f(v)) + f'(v)\ dv \quad .$$

Pour toute fonction $\phi : R \times R \to R$, borélienne, bornée, on a :

$$\left|\iint (\rho(x+f(s)) - \rho(x))\, \phi(s,x)\, dx\right| \leq ||\phi||_\infty \int |\rho(x+f(s)) - \rho(x)|\, dx$$

puisque $\rho \in S(R)$ et $\lim_{|s|\to\infty} f(s) = 0$.

$$\text{D'où } \mu(\psi(\omega-f)) = \lim_{s \to -\infty} \int \rho(x)\, dx\, \tilde{P}_x^s(\psi(\omega)) \quad .$$

En appliquant les mêmes méthodes que pour le théorème 5, et avec les mêmes notations, il vient :

$$\int \rho(x)\, dx\, \tilde{P}^s_x(\psi) = \mu\big(\psi(\omega) \exp\{F_f(X_t,t) - F_f(X_s,s) - (X_t f'(t) - X_s f'(s))$$

$$- \frac{1}{2}\{f(t)\, f'(t) - f(s)\, f'(s) + \int_s^t Q_f(X_u,u)\, du\}\big)$$

où $Q_f(x,u) = (x + \frac{1}{2} f(u))\, f'(u) - (P(x+f(u)) - P(x))$.

Il existe une suite $\begin{cases} t_n \to +\infty \\ s_n \to -\infty \end{cases}$ telle que :

i) $F(X_{t_n},t_n) \to 0$; $F(X_{s_n},s_n) \to 0$, μ p.s.

ii) $X_{t_n} f'(t_n) \to 0$; $X_{s_n} f'(s_n) \to 0$, μ p.s.

iii) $\displaystyle\int_{s_n}^{t_n} Q_f(X_u,u)\, du \to \int_{-\infty}^{+\infty} Q_f(X_u,u)\, du$ μ p.s.

En effet, $F_f(X_t,t) = \mathrm{Log}\, \dfrac{\rho^{1/2}(X_t + f(t))}{\rho^{1/2}(X_t)}$

et

$$\mu\{\Big|\frac{\rho^{1/2}(X_t + f(t))}{\rho^{1/2}(X_t)} - 1\Big|\} = \int \rho^{1/2}(x)\, dx\, |\rho^{1/2}(x+f(t)) - \rho^{1/2}(x)| \underset{|t|\to\infty}{\to} 0$$

d'après le théorème de convergence dominée et $\rho \in S(R)$.

De même, $\mu\{|X_t f'(t)|\} = |f'(t)| \int \rho(x)\, |x|\, dx \underset{|t|\to\infty}{\to} 0$

et

$$\mu\{|\int_t^\infty (X_u + \frac{1}{2} f(u))\ f''(u)\ du|\} \leqq \int_t^\infty du\ |f''(u)|\left|\int \rho(x)dx|x + \frac{1}{2}f(u)|\right. \to 0 \quad (|t| \to \infty)$$

En supposant maintenant $\psi \geqq 0$, d'après le lemme de Fatou,

$$\mu\{\psi(\omega)\ \exp\int_{-\infty}^{+\infty} Q_f(X_u,u)\ du\} \leqq \mu\{\psi(\omega-f)\}\ .$$

Dans la suite de la démonstration, on montrera
$\mu\{\exp\int_{-\infty}^{+\infty} Q_f(X_u,u)\ du\} = 1$.

En admettant provisoirement ce résultat, on a donc : les deux mesures $\mu\{.,a_f(\omega)\}$ et $\psi \to \mu\{\psi(\omega-f)\}$ sur $\underline{\underline{F}}_{t_o}^{s_o}$ sont des probabilités, et la première est majorée par la seconde : elles sont donc égales. D'après le théorème de classe monotone, l'égalité est vraie pour toute fonction $\psi \in b(\underline{\underline{F}})$.

b) Soit $f \in S(R)$; $\mu(a_f(\omega)) = 1$ découle du résultat suivant :

$$^{+}U_t^f = {}^{+}\psi_t^f(X_t)\ e^{\int_{-\infty}^{+\infty} Q_f(X_s,s)ds}$$

est une $(\mu.\underline{\underline{F}}_t^{-\infty})$ martingale équi-intégrable, convergeant vers

$$U_\infty^f = e^{\int_{-\infty}^{+\infty} Q_f(X_s,s)\ ds}$$

dans $L^1(\mu)$, avec

$$^{+}\psi_t^f(x) = \exp\{-(x + \frac{1}{2}\ f(t))\ f'(t) + F_f(x,t)\}\ ;\quad F_f(x,t) = \mathrm{Log}\ \frac{\rho^{1/2}(x+f(t))}{\rho^{1/2}(x)}\ .$$

Pour $f \in \mathcal{D}(R)$, ${}^{+}U_t^f$ est obtenu à partir de la formule de Cameron-Martin (voir la démonstration du théorème 5) ; c'est donc une $(\mu;\underline{\underline{F}}_t^{-\infty})$ martingale. Cette propriété équivaut à l'égalité :

$$ {}^{+}\psi_t^f(X_t) = \mu\left(\exp \int_{-\infty}^{+\infty} Q_f(X_s,s)\, ds \middle| \underline{\underline{F}}_t^{-\infty}\right) \qquad (1) $$

De même, on introduit ${}^{-}U_t^f = {}^{-}\psi_t^f(X_t) \exp \int_t^{\infty} Q_f(X_s,s)\, ds$

avec $\qquad {}^{-}\psi_t^f(x) = \exp\{(x + \frac{1}{2} f(t)\, f'(t) - F_f(x,t)\}$.

Pour les mêmes raisons, si $f \in \mathcal{D}$, ${}^{-}U_t^f$ est une martingale backward $(\mu;\underline{\underline{F}}_{\infty}^t)$ (la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_{\infty}^t$ est décroissante), ce qui équivaut à :

$$ {}^{-}\psi_t^f(X_t) = \mu\left(\exp \int_{-\infty}^{t} Q_f(X_s,s)\, ds \middle| \underline{\underline{F}}_{\infty}^t\right) \qquad (2) $$

D'après a), $\mu(U_{\infty}^f) \leqq 1$, pour $f \quad S(R)$.

On considère $f \in S_{-}$, i.e. : $f \in S$, et à support dans $[t_o,+\infty[$.

Soit ${}^{-}\tilde{U}_t^f = \mu\left(U_{\infty}^f \middle| \underline{\underline{F}}_{\infty}^t\right)$

$$ = e^{\int_t^{\infty} Q_f(X_s,s)ds} \mu\left(\exp \int_{-\infty}^{t} Q_f(X_s,s)\, ds \middle| \underline{\underline{F}}_{\infty}^t\right) \quad . $$

Il existe $\hat{f} \in \mathcal{D}(R)$, avec $f = \hat{f}$ sur $[t_o,t]$; d'après (2),

$$ {}^{-}\tilde{U}_t^f = e^{\int_t^{\infty} Q_f(X_s,s)ds} {}^{-}\psi_t^{\hat{f}}(X_t) = {}^{-}U_t^f \quad ; $$

donc $({}^{-}U_t^f, t \in R)$ est uniformément intégrable, et toujours d'après a), il existe $t_n \to +\infty$, tel que ${}^{-}U_t^f \to 1$, μ p.p. ${}^{-}U_{t_n}^f$ converge donc dans $L^1(\mu)$ vers 1 . D'où $\mu(U_\infty^f) = 1$, $\forall f \in S_-$.

Pour $f \in S_-$, ${}^{+}U_t^f$ est une $(.\underline{\underline{F}}_t^{-\infty})$ martingale positive continue. Elle converge donc p.p. lorsque $t \to \infty$. Or, il existe $t_n \to +\infty$, tel que ${}^{+}U_{t_n}^f \to U_\infty^f$ μ p.p. D'où, ${}^{+}U_t^f \to U_\infty^f$ μ p.p. D'après le lemme de Fatou, on a :

$$\mu(U_\infty^f | \underline{\underline{F}}_t^{-\infty}) \leqq {}^{+}U_t^f \quad .$$

Or, $\mu(U_\infty^f) = 1 \Longrightarrow \mu(U_\infty^f | \underline{\underline{F}}_t^{-\infty}) = {}^{+}U_t^f$; soit maintenant f $S(R)$; pour $t \in R$, il existe $\hat{f} \in S$ tel que $\hat{f} \equiv f$ sur $[t,\infty[$; on en déduit, de même que précédemment ${}^{+}\psi_t^f(X_t) = \mu\left(\exp \int_t^\infty Q_f(X_s,s)\, ds | \underline{\underline{F}}_t^{-\infty}\right)$, et en posant ${}^{+}\tilde{U}_t^f = E(U_\infty^f | \underline{\underline{F}}_t^{-\infty})$ que ${}^{+}\tilde{U}_t^f = {}^{+}U_t^f$. Les variables $({}^{+}U_t^f$, t $R)$ sont donc uniformément intégrables et il existe $t_n \to +\infty$ tel que ${}^{+}U_{t_n}^f \to U^f$ p.s. ; cette convergence a donc lieu dans $L^1(\mu)$ et $E(U_\infty^f) = 1$. On en conclut également que ${}^{+}U_t^f = \mu(U^f | \underline{\underline{F}}_t^{-\infty})$.

5 - FORMULES LIANT LES DIFFÉRENTES PROBABILITÉS P_x ET μ, LORSQUE ζ VARIE. UN PROBLEME DE MARTINGALES :

On s'est, jusqu'à présent, intéressé seulement, ζ (ou ρ) étant fixé, à établir certaines propriétés des mesures P_x et μ qui étaient associées à cette fonction par les théorèmes 1 et 4 : ρ étant donné, appartenant à $S(R)$ (c'est l'hypothèse (H.2)), on note maintenant P_x^ρ et μ^ρ les probabilités correspondantes. Remarquons, dans le cadre de l'étude faite en [1], que, d'après le lemme 2.1, P polynôme borné inférieurement étant donné, il existe un seul couple (ζ,ρ) solution des équations :

$$\zeta^2 - \zeta' = 2P \quad ; \quad \zeta = -\frac{1}{2}\,\frac{\rho'}{\rho} \quad \text{et} \quad \int \rho(x)\,dx = 1 .$$

On pourrait alors noter les probabilités P_x^ρ et μ^ρ respectivement P_x^P et μ^P.

Enfin, l'indice m $(m > 0)$ (remplaçant ρ) désignera les objets associés au champ libre de masse $m\left(\zeta(x) = mx \; ; \; P_m(x) = \frac{m^2x^2 - m}{2}\right.$,

$$\left. P_m(x) = \sqrt{\frac{m}{\pi}}\; e^{-mx^2}\right) ,$$

l'indice 0 ceux liés au mouvement brownien $(\zeta(x) \equiv 0!)$.

THEORÈME 7 - ρ, ρ_1, ρ_2 désignant des fonctions appartenant à $S(R)$. Les probabilités P_x^ρ sont liées par les relations suivantes : $\forall F \in b(\underline{\underline{F}}_t)$, $\forall x \in R$,

$$(\mathrm{III}\ \rho_1,\rho_2) \qquad \rho_1^{1/2}(x)\, E_x^{\rho_1}(F) = \rho_2^{1/2}(x)\, E_x^{\rho_2}\{F\, \frac{\rho_1^{1/2}}{\rho_2^{1/2}}(X_t)\, e^{-\int_0^t ds(P_1(X_s)-P_2(X_s))}\}$$

$$(\mathrm{III}_{\rho,m}) \qquad \rho^{1/2}(x)\, E_x^{\rho}(F) = \rho_m^{1/2}(x)\, E_x^{m}\{F\, \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_t)\, e^{-\int_0^t ds(P(X_s)-P_m(X_s))}\}$$

$$(\mathrm{III}_{\rho,o}) \qquad \rho^{1/2}(x)\, E_x^{\rho}(F) = E_x^{o}\left(F\, \rho^{1/2}(X_t)\, e^{-\int_0^t P(X_s)ds}\right).$$

Les probabilités μ^ρ sont liées par les relations suivantes :

$\forall a < b \in R$, $\forall F \in \underline{\underline{F}}_b^a$, $\forall \rho \in S(R)$, on a :

$$(\mathrm{III}'_{,m}) \qquad \mu^\rho(F) = \mu^m\left(F\, \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_b)\, \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_a)\, e^{-\int_a^b ds(P(X_s) - P_m(X_s))}\right).$$

Preuve : a) Pour démontrer les formules III, il suffit de démontrer $(\mathrm{III}_{\rho,o})$ et de procéder ensuite par calcul sur les densités de Radon-Nikodym. La formule $(\mathrm{III}_{\rho,o})$ est une généralisation de la formule (II), aux fonctions $F \in \underline{\underline{F}}_t$; elle est obtenue de la même manière que (II) .

b) μ^ρ et μ^m étant invariantes par les opérateurs θ_t , il suffit de démontrer $(\mathrm{III}'_{\rho,m})$ pour $0 = a < b$ et $F \in \underline{\underline{F}}_b^o$. On a alors :

$$\mu^\rho(F) = \int dx\ \rho(x)\ E_x^\rho(F)$$

$$= \int dx\ \rho^{1/2}(x)\rho_m^{1/2}(x)\ E_x^m\left(F\ \frac{\rho^{1/2}(X_b)}{\rho_m^{1/2}(X_b)}\ e^{-\int_0^b (P(X_s)-P_m(X_s))ds}\right)$$

$$\mu^{\rho}(F) = \int dx\ \rho_m(x)\ E_x^m\left(F\ \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_b)\ \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_o)\ e^{-\int_0^b (P(X_s)-P_m(X_s))ds}\right)$$

$$= \rho^m\left(F\ \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_b)\ \frac{\rho^{1/2}}{\rho_m^{1/2}}(X_o)\ e^{-\int_0^b (P(X_s)-P_m(X_s))ds}\right)\ .$$

On déduirait de même les formules (III'_{ρ_1,ρ_2}) de $(III'_{\rho,o})$.

Il peut être intéressant - pour l'étude de champs euclidiens markoviens en dimension $d \geqq 2$ - d'avoir un procédé de construction de P_x^{ρ} à partir du champ libre de masse m , faisant intervenir seulement la fonction P , et non pas les fonctions ζ ou ρ , seule l'interaction P' étant donnée a priori. De plus, la proposition suivante donne une signification probabiliste aux équations du lemme 2.1. On pose le problème suivant : soit P fonction continue : $R \to R$; quelles sont les fonctions U de classe C^2 , $U : R \to R$, telles qu'il existe une probabilité P_x^P sur $\mathcal{W}$ qui vérifie :

$$\log\left(\frac{d(E_x^P)}{d(E_x^o)}\ \Big|\ \underline{\underline{F}}_t\right) = U(X_t) - U(X_o) - \int_0^t P(X_s)\,ds\ ?$$

Ceci est possible si, et seulement si,
$H_t^U = \exp\{U(X_t) - U(X_o) - \int_0^t P(X_s)\,ds\}$ est une E_x^o martingale pour les tribus $\underline{\underline{F}}_t$.

<u>PROPOSITION 5.1.</u> - H_t^U est une E_x^o martingale locale si et seulement si, U est solution de l'équation (E_P) : $U'(x) + (U'(x))^2 = 2P(x)$.

Si la fonction P est bornée inférieurement, et si

$\forall t$, $E_x^o\left((U'(X_t))^2\ e^{2U(X_t)}\right) < \infty$, alors H_t^U est une E_x^o martingale (de carré intégrable).

<u>Preuve</u> : D'après la formule de Ito appliquée à $U(X_t)$,

$$H_t^U = \exp \int_0^t U'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t U''(X_s)\ ds - \int_0^t P(X_s)\ ds$$

$$= (\exp M_t) \times V_t \quad \text{avec} \quad M_t = \int_0^t U'(X_s)\ dX_s$$

$$V_t = \exp \int_0^t ds\ (\tfrac{1}{2}\ U'(X_s) - P(X_s)) \quad .$$

D'où :

$$H_t^U = 1 + \int_0^t H_s^U\ dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s^U(U'(X_s))^2\ ds + \int_0^t ds\ H_s^U\left(\tfrac{1}{2}\ U''(X_s) - P(X_s)\right) \quad .$$

H_t^U est donc une martingale locale si, et seulement si : $\forall s$, $\frac{1}{2}\ (U'(X_s))^2 + U''(X_s) = P(X_s)$; la loi de X_s chargeant tout R , et les fonctions intervenant étant continues, ceci est équivalent à : U est une solution de (E_P) .

Supposons maintenant P , fonction bornée inférieurement et U solution de (E_P) . D'après les calculs précédents, pour que H_t^U soit une martingale de carré intégrable, il suffit que $E_x^o\left(\int_0^t (H_s^U)^2(U'(X_s))^2\ ds\right) < \infty$ et donc que $E_x^o\left(\int_0^t (U'(X_s))^2\ e^{2U}(X_s)\ ds\right) < \infty$.

Cette expression est égale à :

$$\int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} (U(y))^2 \, e^{2U(y)} \, e^{-\frac{(x-y)^2}{2s}} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \, dy$$

$$\leqq K_t \int_{-\infty}^{+\infty} (U'(y))^2 \, e^{2U(y)} \, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \, \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}$$

$$= K_t \, E_x^o\left[(U'(X_t))^2 \, e^{2U(X_t)}\right] \quad .$$

<u>COROLLAIRE 5.2.</u> -

$${}^{m}H_t^U = \frac{\rho_m^{1/2}(X_o)}{\rho_m^{1/2}(X_t)} \exp\{U(X_t) - U(X_o) - \int_0^t (P(X_s) - P_m(X_s)) \, ds\}$$

est une P_x^m martingale locale si, et seulement si, U est solution de l'équation (E_P) . Si la fonction P est bornée inférieurement et si $\forall t$, $E_x^o\left[(U'(X_t))^2 \, e^{2U(X_t)}\right] < \infty$, alors ${}^{m}H_t^U$ est une P_x^m martingale.

<u>Preuve</u> : En utilisant la formule $(III_{m,o})$, on obtient : ${}^{m}H_t^U$ est une P_x^m martingale locale (resp. : martingale) si et seulement si, H_t^U est une P_x^o martingale locale (resp. : martingale), d'où le résultat.

<u>Remarque</u> : En théorie des champs, pour P polynôme borné inférieurement, la formule $(III'_{P,m})$ est obtenue dans [7] par des méthodes tout à fait différentes, qu'il est intéressant de comparer : les mesures introduites en [7] sont définies par

$$\frac{d\nu^n}{d\mu^m}\Big|\underline{\underline{F}}_{+n}^{-n} = \frac{e^{-\int_{-n}^{+n}(P(X_s)-P_m(X_s))ds}}{\mu^m\{e^{-\int_{-n}^{+n}P(X_s)-P_m(X_s)ds}\}}$$

Le processus ainsi introduit $\exp - \int_{-t}^{+t} (P(X_s)-P_m(X_s))ds$ n'est pas une μ^m martingale : notre méthode permet de corriger ceci et de procéder ainsi sans approximation.

<u>Remarque finale</u> : Dans l'ordre des idées suggérées par Courrège et Renouard à l'alinéa 6.5.2 de [1] , on peut envisager, pour $d > 1$, d'associer le champ euclidien $(\Sigma(f), f \in S(R^d))$ de Nelson à un processus de Markov $(X_t)_{t\in R}$ à valeurs dans $S'(R^{d-1})$, par la relation :

$$\Sigma(f)(\omega) = \int_R < X_t(\omega) , f(t,.) >_{S'_o \times S_o} dt \ , \quad \text{où} \quad S_o = S(R^{d-1}) \ .$$

Le générateur infinitésimal de ce processus est alors à déduire du Hamiltonien fourni par la théorie constructive en transportant ce dernier dans $L^2(S'_o,\mu_o)$ où μ_o n'est plus ici la mesure gaussienne du champ libre, mais la mesure quasi-invariante convenablement associée à l'interaction en cause mentionnée en 6.5.2 de [1] .

Actuellement, on ne sait mettre en oeuvre ces idées que pour le champ libre.

RÉFÉRENCES

(1) Ph. COURRÈGE et P. RENOUARD : Equations du champ euclidien en dimension $d = 1$, processus de diffusion et mesures quasi-invariantes sur $C(R,R)$. Article précédent de ce numéro.

(2) J. NEVEU : Notes sur l'intégrale stochastique. Cours de 3ème cycle - second semestre 1972. Lab. de Calcul des Probabilités - Université Paris VI.

(3) H. Mac KEAN : Stochastic Integrals. Academic Press (1969).

(4) P.A. MEYER : Intégrales stochastiques I et II. Séminaire de Probabilités I - Université de Strasbourg. Springer-Verlag. n° 39 , 1967.

(5) E. NELSON : Quantum fields and Markov fields. Amer. Math. Soc. Summer Institute on Partial Diff. Equations, held at Berkeley, 1971.

(6) P. CARTIER : Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs II : prolongement analytique. Séminaire Bourbaki, vol. 72/73 - novembre 1972.

(7) F. GUERRA, L. ROSEN et B. SIMON : The $P(\phi)_2$ euclidien Quantum field theory as classical statistical mechanics. Ann. Maths. (A paraître).

(8) H. KUNITA : Diffusion processes and control systems. Cours de 3ème cycle - second semestre 1974. Lab. de Calcul des Probabilités - Université Paris VI.

(9) K. PARTHASARATHY : Probability measures on metric spaces. Academic Press, 1967.

(10) L. SCHWARTZ : Théorie des distributions. Hermann, 1966.

(11) E.B. DYNKIN : Markov processes. Springer-Verlag, vol. I (1965).

P. PRIOURET et M. YOR
Laboratoire de Calcul des Probabilités.
Univ. Paris VI - Tour 56
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05