BERNARD HELFFER

Sur l’hypoellipticité d’une classe d’opérateurs paraboliques dégénérés

Astérisque, tome 19 (1974), p. 79-105
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__19__79_0>

Astérisque
n°19 (1974) p.79-106

SUR L'HYPOELLIPTICITE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS PARABOLIQUES DEGENERES

Bernard HELFFER

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

Société Mathématique de France

Nous nous proposons dans ce travail de donner des conditions suffisantes d'hypoellipticité pour des opérateurs d'ordre 2m (m entier) du type :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a_{2m}(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{j=0}^{2m-1} a_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$$

où (x,t) est un point courant d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ et où, pour j entier $(0 \leq j \leq 2m)$, $a_j(x,t,\xi)$ désigne un polynôme homogène de la variable ξ dans $\mathbb{R}^n$, dont les coefficients sont de classe C^∞ dans $\mathcal{O}$.
Les résultats que nous démontrons généralisent ceux récemment obtenus par T. Matsuzawa [7], Y. Kannai [4] et Y. Kato [6], dont nous utilisons les méthodes.
Notons que des résultats d'hypoellipticité pour des classes voisines d'opérateurs se trouvent aussi dans [11].
Les hypothèses de base de ce travail sont les suivantes : le symbole principal de l'opérateur L vérifie une condition (inspirée par les travaux de F. Trèves [9], [10]) du type :

$$\int_{t'}^{t} \operatorname{Re} a_{2m}(x,s,\xi)ds \geq C(t-t')^{k+1}|\xi|^{2m} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

pour certaines valeurs de t et t'.
D'autres hypothèses assurent la prédominance de $\operatorname{Re} a_{2m}$ par rapport aux autres termes de l'opérateur.
Sous ces conditions, on montre qu'on peut construire pour l'opérateur transposé une paramétrix approchée à droite du type suivant :

$$K\,v(x,t) = \int_{T_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} K(x,\xi,t,t')\,\hat{v}(\xi,t')d\xi \,.\, dt' \quad ;$$

$$v(x,t) \in C_0^\infty(\mathcal{O})$$

où $K(x,\xi,t,t')$ est un symbole dont le terme principal est donné par

$$K_0(x,\xi,t,t') = e^{-\int_{t'}^{t} a_{2m}(x,s,\xi)ds} \quad .$$

L'hypoellipticité de l'opérateur L se déduit alors des propriétés de régularité du noyau de l'opérateur K par un procédé classique [8].
On montre par exemple l'hypoellipticité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de l'opérateur :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - t^\ell(t^{2r} + |x|^{2p})\,\mathcal{A}_{2m}(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$$

où ℓ, r, p, m sont des entiers positifs vérifiant $p \geq m$ et où $\mathrm{Re}\,\mathfrak{K}_{2m}(x,t,\xi) \geq C\,|\xi|^{2m}$ pour (x,t,ξ) dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$.

Au § 1, nous énonçons le théorème principal de cet article. Ce théorème contient le théorème 1.1 de [7], le cas étudié dans [4], et les théorèmes 1 et 2 de [6].

Au § 2 on rappelle (cf. [4] et [6]) comment la démonstration de l'hypoellipticité se ramène à la construction d'une famille de paramétrix approchées pour l'opérateur transposé.

Au § 3, on construit formellement ces paramétrix en utilisant les méthodes de [7].

Aux § 4, 5, 6, on démontre les estimations qui permettent de donner un sens à la construction formelle.

*
* *

§ 1. ENONCE DU THEOREME ET APPLICATIONS

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$.
$x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne un point courant de $\mathbb{R}^n$, t un point courant de $\mathbb{R}$.

On considère l'opérateur défini dans $\mathcal{O}$ par :

$$(1.1) \qquad L = \frac{\partial}{\partial t} - a_{2m}(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{j=0}^{2m-1} a_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$$

où pour j entier $(0 \leq j \leq 2m)$, $a_j(x,t,\xi)$ désigne un polynôme homogène d'ordre j de la variable ξ dans $\mathbb{R}^n$ à coefficients dans $C^\infty(\mathcal{O})$.

Pour Ω et I fixés tels que $\Omega \times I$ soit contenu dans $\mathcal{O}$, on fait les hypothèses suivantes.

[H1] (cf. [10])

Il existe T_0 dans $\bar{I}$, k dans $\mathbb{N}$ et une constante C strictement positive tels que la propriété suivante soit vérifiée :

pour tout (x,t,t',ξ) dans $\Omega \times I \times I \times \mathbb{R}^n$ tel que t' appartient à l'intervalle joignant t à T_0, on a :

$$(1.2) \qquad \mathrm{Re}\left(\int_{t'}^{t} a_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right) \geq C\,|t-t'|^{k+1}\,|\xi|^{2m} .$$

[H2]

Il existe des constantes réelles θ et τ telles que, pour tout entier j $(0 \leq j \leq 2m)$, pour tout (α,β) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ vérifiant :

$$|\alpha| + |\beta| + j > 0 \qquad (|\alpha| + j)\theta + (|\beta| + j)\tau \leq 1$$

il existe des constantes $C_{\alpha,\beta,j}$ telles que, pour tout (x,t,ξ) dans $\Omega \times I \times \mathbb{R}^n_\xi$ on ait :

$$(1.3) \qquad \left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta \partial \xi^\alpha}\, a_{2m-j}(x,t,\xi)\right| \leq$$
$$\leq C_{\alpha,\beta,j}\,|\mathrm{Re}\,a_{2m}|^{1-(|\alpha|+j)\theta-(|\beta|+j)\tau}\,|\xi|^{2m[(|\alpha|+j)\theta+(|\beta|+j)\tau]-|\alpha|-j} .$$

[H3]
θ et τ vérifient la condition :

(1.4) $$2m \frac{k}{k+1} (\tau + \theta) < 1 \quad .$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.1 : Si L est défini dans $\mathcal{O}$ par (1.1) et si pour tout point (x,t) de $\mathcal{O}$, il existe un voisinage relativement compact de la forme $\Omega \times I$ inclus dans $\mathcal{O}$ où les hypothèses [H1], [H2], [H3] sont vérifiées, alors L est hypoelliptique dans $\mathcal{O}$.

Donnons trois applications à ce théorème

Exemple 1 (voir [7]) : On suppose $n = 1$, $I =]-1,+1[$. On considère l'opérateur défini dans $\Omega \times I$ par :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(1.5) Re $a(x,t) \geq 0$ dans $\Omega \times I$.

(1.6) Pour tout x dans Ω, la fonction $t \to \mathrm{Re}\, a(x,t)$ a seulement des zéros d'ordre pair inférieur ou égal à 2ℓ dans l'intervalle I.

(1.7)* Il existe une constante C telle que, pour tout (x,t) dans $\Omega \times I$, on ait :

$$|\mathrm{Im}\, a(x,t)| \leq C\, \mathrm{Re}\, a(x,t) \; .$$

(1.8)* Il existe une constante C et un réel ε strictement positif tels que pour tout (x,t) dans $\Omega \times I$, on ait :

$$|b| + |\mathrm{Im} \frac{\partial a}{\partial x}| \leq C\, (\mathrm{Re}\, a)^{\frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{1}{4\ell}} \quad .$$

Alors L est hypoelliptique dans $\Omega \times I$.

En effet des hypothèses (1.5) et (1.6), on déduit que [H1] est vérifiée avec $T_0 = -1$ et $k = 2\ell$. On déduit également (cf. [9]) que :

* On peut bien entendu affaiblir (1.7) et (1.8) en les supposant vraies sur tout compact K de $\Omega \times I$.

Pour tout compact K dans $\Omega\times I$, il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout (x,t) dans K, on ait :

$$(1.9) \qquad \left|\operatorname{Re}\frac{\partial a}{\partial x}\right| \leq C_K(\operatorname{Re} a(x,t))^{\frac{1}{2}} \quad .$$

De (1.7), (1.8), (1.9), on déduit que [H2] est vérifiée avec $\theta = 0$, $\tau = \frac{1}{2}+\frac{1}{4l}-\varepsilon$.

[H3] est alors vérifiée.

Cet exemple donne un très légère amélioration du théorème (1.1) de [7].

<u>Exemple 2</u> (voir [4], [6]) : On garde les notations de l'exemple 1 et on considère l'opérateur défini par :

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + t\, a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(1.5)' = 1.5) ; (1.6)' = (1.6) ; (1.7)' = (1.7) .

(1.8)' Il existe une constante C telle que, pour tout (x,t) dans $\Omega\times I$, on ait :

$$|b| + \left|t \operatorname{Im}\frac{\partial a}{\partial x}\right| \leq C\,|t \operatorname{Re} a|^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Alors L est hypoelliptique dans $\Omega\times I$. En effet, on vérifie que les hypothèses du théorème sont satisfaites avec $\theta = 0$, $\tau = \frac{1}{2}$, $T_o = 0$, $k = 2\ell + 1$.

<u>Exemple 3</u> : L'opérateur $L = \frac{\partial}{\partial t} + (t^2 + x^4)\frac{\partial^4}{\partial t^4}$ est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.

Signalons que $L = \frac{\partial}{\partial t} + (t+x)^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ne l'est pas.

Avant de commencer la démonstration du théorème, faisons quelques remarques préliminaires :

<u>Remarque 1.1</u> : L'hypoellipticité étant une propriété locale, on supposera dans la suite que $\mathcal{O} = \Omega\times I$ et que L vérifie les hypothèses [H1], [H2], [H3] dans $\Omega\times I$.

Remarque 1.2 : L'opérateur ${}^tL$ transposé de L s'écrit sous la forme

$$P \equiv -{}^tL \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2m} b_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$$

où $b_j(x,t,\xi)$ $(j = 0,\dots,2m)$ est un polynôme homogène d'ordre j de la variable ξ dans $\mathbb{R}^n$ à coefficients dans $C^\infty(\mathcal{O})$.
De plus $b_{2m} = a_{2m}$, et les $b_j(x,t,\xi)$ $(0\le j\le 2m)$ vérifient l'hypothèse [H2] avec les mêmes constantes θ et τ.

Remarque 1.3 : Soit L le transformé de L par le difféomorphisme $(x,t) \to (x,-t)$, alors $-L$ vérifie les hypothèses [H1], [H2], [H3].

Remarque 1.4 : De la remarque 1.3, on déduit facilement que l'on peut toujours se ramener, quitte à restreindre Ω et I, au cas où $I =]-1,+1[$ et où $T_o = -1$ ou $T_o = 0$, si l'on veut démontrer l'hypoellipticité de L au voisinage du point (x,0) de $\Omega\times I$. On fera cette hypothèse dans la suite.

Remarque 1.5 : On peut remplacer [H1] et [H3] par des hypothèses différentes

[H1]' (cf. [10])

Il existe T_o dans $\bar{I}$ tel que :

pour tout (x,t,t',ξ) dans $\Omega\times I\times I\times\mathbb{R}^n$ tel que t' appartient à l'intervalle joignant t à T_o, on a :

(1.2)' $$\mathrm{Re}\int_{t'}^{t} a_{2m}(x,s,\xi)ds \ge 0$$

l'inégalité étant stricte lorsque t est différent de t'.

[H3]'

τ et θ doivent vérifier la condition

(1.4)' $$2m(\tau+\theta) < 1 .$$

Par exemple l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + e^{-\frac{1}{t^2+x^2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.

§ 2. REDUCTION DU PROBLEME A LA CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE DE PARAMETRIX

Grâce à la remarque 1.4, on a vu qu'on pouvait se ramener au cas où $I =]-1,+1[$ et où T_o est égal à -1 ou 0.
Nous supposerons dans la suite que $T_o = 0$, pour deux raisons :

1) Le cas T_o est un peu plus délicat.

2) Le cas $T_o = -1$ a été traité dans [7] dans un cadre plus restreint, mais la construction formelle des parametrix est exactement la même et seules des estimations sur des symboles seraient à vérifier. Or ce sont les mêmes que dans le cas $T_o = 0$.

Signalons enfin que les techniques utilisées dans ce paragraphe ont été utilisées par [4] et [6] pour démontrer des résultats analogues, c'est pourquoi nous ne donnerons pas de démonstration des propositions qui suivent.

Proposition 2.1 [4], [6] : Soit $M = \frac{\partial}{\partial t} + p(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$ (où $p(x,t,\xi)$ est un polynôme en ξ à coefficients dans $C^\infty(\Omega \times]-1,+1[)$) un opérateur possédant la propriété suivante :

$$\begin{cases} \text{pour tout ouvert } \omega \text{ contenu dans } \Omega, \text{ et tout réel } \varepsilon\ (0<\varepsilon<1), \\ u \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1,+1[),\ Mu \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega \times [0,\varepsilon[) \cap C^\infty(\omega \times]-\varepsilon,0]) . \end{cases}$$

Alors M vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} \text{pour tout ouvert } \omega \text{ contenu dans } \Omega, \text{ et tout réel } \varepsilon\ (0<\varepsilon<1), \\ u \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1,+1[),\ Mu \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[) . \end{cases}$$

En vertu de la remarque 1.3 et de la proposition 2.1, il suffira pour démontrer l'hypoellipticité de L dans $\Omega \times I$, de montrer que la propriété suivante est vérifiée :

[P1] Pour tout ouvert ω contenu dans Ω, et tout réel ε $(0<\varepsilon<1)$

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1,+1[),\ Lu \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega \times [0,\varepsilon[) .$$

Montrons maintenant comment la propriété P1 se déduit de la construction d'une suite de parametrix approchées pour le transposé de L.

Considérons $P_{x,t} = -{}^tL = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=o}^{2m} b_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$ et posons :

$$U = (\Omega \times \mathbb{R}^n_y \times]-1,+1[\times [0,1[)$$

$$W = U - \{(x,y,t,t') \in U,\ (x,t) = (y,t')\}$$

$$\Sigma = \{(t,t') \in I \times [0,1[\ ;\ t' < t\}$$

$$\overline{\Sigma} = \{(t,t') \in I \times [0,1[\ ;\ t' \leq t\}\ .$$

[P2] On peut construire deux suites de distributions sur U, $K_j(x,y,t,t')$ et $F_j(x,y,t,t')$ telles que, pour tout j dans $\mathbb{N}$ on ait :

(2.1)* pour tout (x,y,t,t') dans $U \setminus (\Omega \times \mathbb{R}^n_y \times \overline{\Sigma})$, on a

$$F_j(x,y,t,t') = 0$$

$$K_j(x,y,t,t') = 0\ .$$

(2.2) pour tout (x,y,t,t') dans U, on

$$P_{x,t}(\sum_{\ell=o}^{j} K_\ell(x,y,t,t')) = \delta(x-y,t-t') + F_j(x,y,t,t')$$

(2.3) $$K_j \in C^\infty(W)$$

(2.4) $\forall\ \varphi(y,t') \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n_y \times]0,1[)\ ;\ \langle K_j,\varphi\rangle_{y,t'} \in C^\infty(\Omega \times]-1,+1[)$

(2.5) $\forall\ \psi(x,t) \in C_o^\infty(\Omega \times]-1,+1[)\ ;\ \langle K_j,\psi\rangle_{x,t} \in C^\infty(\Omega \times [0,1[)$

(2.6 Pour tout entier N positif, il existe un entier M tel que, pour tout j supérieur à M, $F_j(x,y,t,t')$ soit dans $C^N(U)$.

---

* On utilise abusivement la notation fonction, mais ça ne prêtera pas à confusion.

Remarque 2.1 :
(2.3), (2.4), (2.5) expriment que K_j est un noyau "très régulier" en un sens voisin de celui de [8].
(2.6) exprime que F_j est, pour j suffisamment grand, régularisant.

On démontre alors facilement la propriété suivante :

Proposition 2.2 : Si l'opérateur $-{}^tL$ vérifie la propriété [P2], alors L vérifie la propriété [P1].

Dans les paragraphes suivants, on montrera comment on peut construire les suites K_j et F_j et comment la propriété [P2] se déduit d'estimations sur des symboles.

§ 3. CONSTRUCTION FORMELLE DES DISTRIBUTIONS K_j et F_j DANS LE CAS $T_o = 0$

Les K_j et F_j seront des noyaux distributions associés à des opérateurs du type suivant : pour v dans $C_o^\infty(\Omega \times]0,1[)$ et (x,t) dans $\Omega \times]-1,+1[$, on pose

$$(3.1) \qquad [K]v(x,t) = \int_o^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} K(x,\xi,t,t')\, \hat{v}(\xi,t')\, d\xi\, dt'$$

où

$$\hat{v}(\xi,t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,\xi>} v(y,t')\, dy \quad .$$

Le noyau associé à K est alors défini dans u par

$$(3.2) \qquad K(x,y,t,t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} K(x,\xi,t,t')\, d\xi \quad .$$

L'idée directrice étant de construire une paramétrix de l'opérateur $P = -{}^tL$, on cherche [K] de telle sorte que, pour tout v dans $C_o^\infty(\Omega \times]0,1[)$, on ait $P[K]v = v$ dans $\Omega \times]0,1[$.

Par un calcul formel nous avons :

$$P[K]v = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} K(x,\xi,t,t)\hat{v}(\xi,t)\, d\xi$$
$$+ \int_o^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=o}^{2m} b_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \xi)\right] K(x,\xi,t,t')\hat{v}(\xi,t')\, d\xi\, dt'$$

de sorte qu'on est amené à résoudre :

$$(3.3)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{j=o}^{2m} b_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}+\xi)\right) K(x,\xi,t,t') = 0 \text{ dans } \Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \Sigma \\ K(x,\xi,t,t')_{t=t'} = 1 \qquad \text{pour } t'\geq 0 \ , \ (x,\xi) \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi \\ K(x,\xi,t,t') = 0 \text{ pour } -1<t<t'<1,\ t'\geq 0,\ (x,\xi) \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi \ . \end{cases}$$

On va trouver K de manière approchée, en résolvant d'abord

$$(3.4)\quad \begin{cases} L_1\, K_o \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + b_{2m}(x,t,\xi)\right) K_o(x,\xi,t,t') = 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\Sigma \\ K_o(x,\xi,t,t')_{t=t'} = 1 \qquad \text{pour } t'\geq 0 \ , \ (x,\xi) \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi \\ K_o(x,\xi,t,t') = 0 \text{ pour } (x,\xi) \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\ ;\ -1<t<t'<1;\ t'\geq 0 \ . \end{cases}$$

On pose :

$$(3.5)\qquad L_2 \equiv \sum_{j=o}^{2m} \sum_{\substack{\alpha \\ o<|\alpha|+j\leq 2m}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha b_{2m-j}}{\partial\xi^\alpha}(x,t,\xi)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

et on résoud par récurrence pour j dans $\mathbb{N}$

$$(3.6)\quad \begin{cases} L_1\, K_{j+1}(x,\xi,t,t') = -\,L_2 K_j(x,\xi,t,t') \qquad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\Sigma \\ K_{j+1}(x,\xi,t,t') = 0 \text{ pour } -1<t\leq t'<1,\ t'\geq 0\ ;,\ (x,\xi) \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi \ . \end{cases}$$

On vérifie alors formellement que : pour $v(x,t)$ dans $C^\infty_o(\Omega\times\,]0,1[)$, on a dans $\Omega\times\,]0,1[$

$$P([K_o]+\ldots+[K_j])v(x,t) = v(x,t) + \int_o^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} L_2 K_j(x,\xi,t,t')v(\xi,t')d\xi dt' \ .$$

On pose :

$$(3.7)\quad F_j(x,\xi,t,t') \equiv L_2 K_j(x,\xi,t,t') \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\,]-1,+1[\,\times\,[0,1[$$

$[F_j]$ est alors défini par (3.1) et $F_j(x,y,t,t')$ par (3.2).
On a ainsi construit formellement les suites $K_j(x,y,t,t')$ et $F_j(x,y,t,t')$ dont on va montrer maintenant qu'elles vérifient [P2].

§ 4. ETUDE DE $K_o(x,y,t,t')$

On démontre dans ce paragraphe que $K_o(x,y,t,t')$ défini par (3.4) et (3.2) vérifie les propriétés (2.3), (2.4), (2.5).
Précisons d'abord quelques notations :

$S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi)$ désigne l'espace des symboles d'ordre m introduit par Hörmander [1], [3] muni de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet (voir [3]).
On pose :

$$S^{-\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi) .$$

Pour Λ inclus dans $I\times I$ et p dans $\mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{E}^p(\Lambda,S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi))$ l'ensemble des fonctions $K(x,\xi,t,t')$ telles que l'application $(t,t')\to K(x,\xi,t,t')$ soit de classe C^p de Λ dans $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi)$ et on pose

$$\mathcal{E}(\Lambda,S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi)) = \bigcap_{p\geq 0} \mathcal{E}^p(\Lambda,S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi)) .$$

Enfin, on utilisera les notations : $D_x=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, $D_\xi=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}$, $D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$.

<u>Proposition 4.1</u> : Pour tout $\varepsilon>0$, nous avons :

(4.1) $$K_o(x,\xi,t,t')\in\mathcal{E}(\Sigma,S^{-\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi))\cap\bigcap_{p\geq 0}\mathcal{E}^p(\overline{\Sigma},S^{\varepsilon+2mp}_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi))$$

avec $\rho=1-\frac{2mk}{k+1}\cdot\theta$, $\delta=\frac{2mk}{k+1}\cdot\tau$.

(4.2) Pour tout (α,β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $2m(p_1+p_2)<|\alpha|$, la quantité :

$$|D_t^{p_1}D_{t'}^{p_2}D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')(1+|\xi|)^{-\delta|\beta|+\rho|\alpha|-2m(p_1+p_2)-\varepsilon}|$$

tend vers zéro uniformément dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma}$ lorsque t tend vers t'.

En abrégé, $\rightrightarrows$ signifiera convergence uniforme dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma}$.

Démonstration : D'après la remarque 1.2, on a lesinégalités suivantes :

(4.3) $$\mathrm{Re}\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)ds \geq C(t-t')^{k+1}|\xi|^{2m} \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\Sigma$$

(4.4) $$\left[\begin{array}{l} \forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n;\ |\alpha|\theta+|\beta|\tau\leq 1 \\ |D^\beta_x D^\alpha_\xi b_{2m}(x,t,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}|\mathrm{Re}b_{2m}|^{1-|\alpha|\theta-|\beta|\tau}\,|\xi|^{2m(|\alpha|\theta+|\beta|\tau)-|\alpha|} \\ \text{dans } \Omega\times I\times\mathbb{R}^n_\xi . \end{array}\right.$$

Lorsque $T_o = 0$, k est impair et $\mathrm{Re}b_{2m}(x,t,\xi)$ est positif pour t positif. La solution $K_o(x,\xi,t,t')$ du système (3.4) s'écrit explicitement :

(4.5) $$K_o(x,\xi,t,t') = \begin{cases} \exp(-\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)ds) & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma} \\ 0 & \text{pour } (x,\xi) \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi,\ -1<t<t'<1,\ t'\geq 0 . \end{cases}$$

De (4.3) et (4.5), on déduit aisément que : $K_o(x,\xi,t,t')\in\mathcal{E}(\Sigma,S^{-\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi))$.
Nous allons maintenant démontrer en plusieurs étapes que :

(4.6) $$K_o \in \bigcap_{p\geq o} \mathcal{E}^p(\overline{\Sigma},S^{\varepsilon+2mp}_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi)) .$$

i) Nous avons trivialement :

(4.7) $$|K_o(x,\xi,t,t')| \leq 1 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma} .$$

(4.8) $$|(K_o(x,\xi,t,t')-1)(1+|\xi|)^{-\varepsilon}| \rightrightarrows 0$$

lorsque t tend vers t', ε assure en effet l'uniformité en ξ.

ii) Etudions maintenant $D^\beta_x D^\alpha_\xi K_o(x,\xi,t,t')$. C'est une somme de termes de la forme :

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} \left(\int_{t'}^{t} D_x^{\beta_j} D_\xi^{\alpha_j} b_{2m}(x,s,\xi)ds\right) e^{-\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)ds}$$

(où $\mathfrak{J}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$)
qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} \left(\left(\int_{t'}^{t} D_x^{\beta_j} D_\xi^{\alpha_j} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right) e^{-\gamma_j \int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds}\right)$$

avec $\gamma_j > 0$; $\sum_{j\in\mathfrak{J}} \gamma_j = 1$; $|\alpha_j| + |\beta_j| > 0$

$$\sum_{j\in\mathfrak{J}} |\alpha_j| = |\alpha| \ ; \ \sum_{j\in\mathfrak{J}} |\beta_j| = |\beta| \ .$$

Outre (4.3) et (4.4), on utilisera dans le cas où les hypothèses de (4.4) ne sont pas vérifiées, l'inégalité suivante qui est toujours vérifiée (quitte à restreindre $\Omega\times I$).

(4.9) Pour tout (α,β) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n$, il existe une constante C, telle que pour tout (x,t,ξ) dans $\Omega\times[0,1[\times\mathbb{R}^n$, on ait :

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta \partial\xi^\alpha} b_{2m}\right| \leq C\,|\xi|^{2m-|\alpha|} \ .$$

Lorsque $|\alpha_j|\theta + |\beta_j|\tau \leq 1$, on déduit de (4.4) que :

$$(4.10) \quad \left|\int_{t'}^{t} D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right| < C\left(\int_{t'}^{t} |\mathrm{Re}\, b_{2m}|\,ds\right)^{1-|\alpha_j|\theta-|\beta_j|\tau} \times$$

$$\times\ (t-t')^{|\alpha_j|\theta+|\beta_j|\tau}\ |\xi|^{2m\theta|\alpha_j|+2m\tau|\beta_j|-|\alpha_j|} \ .$$

Lorsque $|\alpha_j|\theta + |\beta_j|\tau \geq 1$, on déduit de (4.9) que :

$$(4.11) \quad \left|\int_{t'}^{t} D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right| < C(t-t')\,|\xi|^{2m-|\alpha_j|}$$

De (4.3) et (4.11) on déduit alors que :

(4.12) Si $|\alpha_j|\theta + |\beta_j|\tau \leq 1$

$$\left|\int_{t'}^{t} D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right| <$$

$$< C\left(\int_{t}^{t'} |\mathrm{Re}\, b_{2m}|\,ds\right)^{1-|\alpha_j|\theta\cdot\frac{k}{k+1} - |\beta_j|\tau\cdot\frac{k}{k+1}} |\xi|^{2m\theta\cdot\frac{k}{k+1}|\alpha_j|+2m\tau\cdot\frac{k}{k+1}|\beta_j|-|\alpha_j|} \ .$$

(4.13) Si $|\alpha_j|\theta + |\beta_j|\tau \geq 1$

$$\left|\int_{t'}^{t} D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right| < C\left(\int_{t}^{t'} |\mathrm{Re}\, b_{2m}|\,ds\right)^{\frac{1}{k+1}} |\xi|^{2m\frac{k}{k+1} - |\alpha_j|} \ .$$

Grâce à (4.12) et (4.13), on montre facilement que pour tout j dans $\mathfrak{J}$, il existe une constante C, telle que, pour tout (x,ξ,t,t') dans $\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$, on ait pour $|\xi|>1$:

$$(4.14)\qquad \left| e^{-\gamma_j \int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)ds} \int_{t'}^{t} D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x,s,\xi)ds \right| \leq$$

$$\leq C\,|\xi|^{\left(\frac{2mk\theta}{k+1}-1\right)|\alpha_j| + \frac{2mk\tau}{k+1}|\beta_j|} .$$

Vu l'expression de $D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')$, on en déduit que, pour tout (α,β) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que l'on ait dans $\Omega\times\mathbb{R}^n\times\overline{\Sigma}$:

$$(4.15)\qquad |D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\left(\frac{2mk\theta}{k+1}-1\right)|\alpha| + \frac{2mk\tau}{k+1}|\beta|} .$$

On a donc $\rho = 1-2m\,.\,\frac{k}{k+1}\theta$, $\delta = 2m\,.\,\frac{k}{k+1}\tau$.

On déduit de (4.15) que pour tout $\varepsilon>0$, pour tout (α,β) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n$, $|\alpha|>0$:

$$(4.16)\qquad \left| D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')\,.\,(1+|\xi|)^{-\delta|\beta|+\rho|\alpha|-\varepsilon} \right| \rightrightarrows 0 \text{ lorsque } t\searrow t' .$$

iii) On veut étudier maintenant $D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')$. t et t' jouant un rôle symétrique, nous nous contenterons d'étudier un terme de la forme :

$$D_t^p D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t') .$$

C'est une somme de termes de la forme :

$$\prod_{j\in\mathfrak{J}} D_t^{p_j}\left(\left(\int_{t'}^{t} D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x,s,\xi)ds\right) e^{-\int_{t'}^{t}\gamma_j b_{2m}(x,s,\xi)ds} \right)$$

avec les notations de ii) et la relation $\sum_{j\in\mathfrak{J}} p_j = p$.

On étudie dans la suite, un terme du produit, qu'on note :

$$D_t^p\left[\int_{t'}^{t} D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)ds\,.\,e^{-\gamma\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)ds}\right]$$

et qui est une somme de termes de la forme

$$D_t^{p_1}\left[\int_{t'}^{t} D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right] . \left(D_t^{p_2} e^{-\gamma\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds}\right)$$

avec $p_1 + p_2 = p$.

Nous distinguerons deux cas

a) $p_1 = 0$

On a alors la majoration suivante pour $|\xi| > 1$

$$\left|\int_{t'}^{t} D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)\,ds . D_t^p e^{-\gamma\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds}\right| \leq$$

$$\leq C\left(\int_{t'}^{t} |D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)|\,ds\right) e^{-\gamma\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\, b_{2m} ds} |\xi|^{2mp} .$$

Il résulte alors des calculs de ii) qu'il existe une constante C, telle que, pour tout (x,ξ,t,t') dans $\Omega\times\mathbb{R}^n\times\overline{\Sigma}$ vérifiant $|\xi| > 1$, on ait :

$$(4.17)\qquad \left|\int_{t'}^{t} D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)\,ds . D_t^p e^{-\gamma\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds}\right| \leq$$

$$\leq C\, |\xi|^{2mp-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} .$$

b) $p_1 > 0$

Alors pour $|\xi| > 1$, on majore grossièrement :

$$D_t^{p_1}\left(\int_{t'}^{t} D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)\,ds\right) \leq C\, |\xi|^{2m-|\alpha|} \leq C\, |\xi|^{2mp_1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$D_t^{p_2}\left(e^{-\gamma\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds}\right) \leq C\, |\xi|^{2mp_2} .$$

On a ainsi montré que dans tous les cas on avait l'inégalité :

$$(4.18)\qquad D_t^p\left[\int_{t'}^{t} D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x,s,\xi)\,ds . e^{-\gamma\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)\,ds}\right] \leq$$

$$\leq |\xi|^{2mp-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} , \quad \text{pour } |\xi| > 1.$$

Les inégalités passent au produit et on en déduit qu'il existe une constante C, telle que, pour tout (x,ξ,t,t') dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma}$, on ait :

$$(4.19)\qquad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')| \leq C(1+|\xi|)^{2m(p_1+p_2)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} .$$

On démontre alors facilement (4.2).
Ceci termine la démonstration de la proposition 4.1.

Remarque 4.2 : La démonstration de la proposition précédente montre qu'on a l'estimation plus précise suivante qui sera utile ultérieurement. Pour tout réel positif c, $(c<1)$, pour tout (α,β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, il existe une constante C_{α,β,p_1,p_2} telle que l'on ait dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma}$

$$(4.20)\qquad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x,\xi,t,t')| \leq$$

$$\leq C_{\alpha,\beta,p_1,p_2}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|+2m(p_1+p_2)}|K_o(x,\xi,t,t')|^c .$$

Remarque 4.3 : L'hypothèse que $a_{2m}(x,t,\xi)$ est un polynôme ne sert que pour montrer (4.2).

Proposition 4.4 : L'intégrale oscillante (cf. [3])

$$(4.21)\qquad K_o(x,y,t,t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>}K_o(x,\xi,t,t')\,d\xi$$

définit une fonction C^∞ dans W.

Démonstration :
i) Par définition $K_o(x,y,t,t') = 0$ pour $t<t'$; $t'\geq 0$.
ii) Si (t,t') appartient à Σ, on montre aisément la majoration :

$$(4.22)\qquad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_y^\alpha (e^{i<x-y,\xi>}K_o(x,\xi,t,t')| \leq$$

$$\leq C_{\alpha,\beta,p}(1+|\xi|)^{|\alpha|+2m(|\beta|+p_1+p_2)}\exp(-c|\xi|^{2m}(t-t')^{k+1})$$

et de (4.22), on déduit facilement que $K_o(x,y,t,t')$ est indéfiniment différentiable dans l'ensemble : $\{(x,y,t,t')\in U\ ,\ t\neq t'\}$.
iii) Par ailleurs, si $x\neq y$ (on suppose par exemple $x_1\neq y_1$) et (t',t)

appartient à $\overline{\Sigma}$, nous avons pour tout j dans $\mathbb{N}$:

$$(x_1 - y_1)^j K_o(x,y,t,t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left(\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^j e^{i<x-y,\xi>} \right) K_o(x,\xi,t,t') d\xi$$

$$= \frac{(-1)^j}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{i<x-y,\xi>} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^j K_o(x,\xi,t,t') d\xi \ .$$

Ces égalités sont à considérer comme des égalités d'intégrales oscillantes. Grâce à la proposition 4.1 et à l'estimation (4.2), on vérifie aisément que pour tout (p_1,p_2,β,α,j) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ vérifiant l'inégalité :

$$2m(p_1 + p_2) + |\beta| + |\alpha| < \rho \,.\, j - 1 \ .$$

La quantité :

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_y^\alpha (x-y)^j K_o(x,y,t,t')| \tag{4.23}$$

tend uniformément vers zéro dans $\{U \setminus \{x = y\}\}$ lorsque t tend vers t'.

$K_o(x,y,t,t')$ est donc, puisque j est arbitraire, indéfiniment différentiable dans l'ensemble $\{(x,y,t,t') \in U \ , \ x \neq y\}$.
La proposition est ainsi démontrée.

<u>Proposition 4.5</u> : Pour toute fonction φ dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^n_y \times]0,1[)$, la distribution

$$<K_o(x,y,t,t'),\varphi(y,t')>_{y,t'} \quad \text{est dans } C^\infty(\Omega \times]-1,+1[) \ .$$

La démonstration est immédiate en utilisant le fait que pour tout N, il existe une constante C_N telle que, pour tout (ξ,t') dans $\mathbb{R}^n \times]0,1[$, on ait :

$$|\hat{\varphi}(\xi,t')| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} \ .$$

<u>Proposition 4.6</u> : Pour toute fonction ψ dans $C_o^\infty(\Omega \times]-1,+1[)$ la distribution

$$<K_o(x,y,t,t'),\psi(x,t)>_{x,t} \quad \text{est dans } C^\infty(\Omega \times [0,1[) \ .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $F(\xi,t,t') = \int_\Omega e^{i<x,\xi>} K_o(x,\xi,t,t')\psi(x,t)dx$.
Nous utiliserons le lemme suivant [3].

<u>Lemme</u> : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a(x,\xi)$ un élément de $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi)$ et $v(x)$ une fonction de $C^\infty_o(\Omega)$, alors pour tout entier N, il existe une constante C_N, telle que l'on ait pour ξ dans $\mathbb{R}^n$:

(4.24) $$\left|\int_\Omega e^{i<x,\xi>}a(x,\xi)v(x)dx\right| \leq C_N(1+|\xi|)^{m+\delta N-N} \quad .$$

De ce lemme et de la proposition 4.1, on déduit que $F(\xi,t,t')$ appartient à $\mathcal{E}(\overline{\Sigma},S^{-\infty}(\mathbb{R}^n_\xi))$. On remarque alors que :

$$\int_{\Omega\times I} K_o(x,y,t,t')\psi(x,t)dx\, dt = \int_{t'}^1 \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-i<y,\xi>}F(\xi,t,t')d\xi\, dt \quad .$$

Il est clair, sur cette expression, que $<K_o,\psi>$ est dans $C^\infty(\Omega\times [0,1[)$.

On a ainsi démontré que $K_o(x,y,t,t')$ vérifiait (2.3), (2.4), (2.5).

<u>Remarque 4.7</u> : Dans cette partie, nous n'avons utilisé de l'hypothèse [H3] que les inégalités $\frac{2mk\tau}{k+1} < 1$ et $\frac{2mk\theta}{k+1} < 1$ qui correspondent aux conditions habituelles dans les classes $S^m_{\rho,\delta}$: $\delta < 1$ et $\rho > 0$.

§ 5. ETUDE DE $K_j(x,y,t,t')$ POUR $j > 0$

On démontre dans ce paragraphe que $K_j(x,y,t,t')$ défini par récurrence par (3.6) et (3.2) vérifie les propriétés (2.3), (2.4), (2.5). Rappelons que, pour j dans $\mathbb{N}$, on définit $K_j(x,\xi,t,t')$ par :

(5.1) $$K_{j+1}(x,\xi,t,t') = \begin{cases} -\int_{t'}^{t} K_o(x,\xi,t,s).L_2K_j(x,\xi,s,t')ds & \text{dans } \Omega\times \mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma} \\ 0 & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\{I\times[0,1[\setminus\overline{\Sigma}\} \end{cases}$$

<u>Proposition 5.1</u> : Il existe η ($\eta > 0$), tel que pour tout ε strictement positif, on ait, pour tout j dans $\mathbb{N}$:

(5.2) $$K_j(x,\xi,t,t') \in \mathcal{E}(\Sigma,S^{-\infty}(\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi))\cap \bigcap_{p\geq o} \mathcal{E}^p(\overline{\Sigma}, S^{\varepsilon+2mp-\eta.j}_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi))$$

(5.3) Pour tout (α,β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $2m(p_1+p_2)<|\alpha|+2mj$, la quantité :

$$|D_t^{p_1}D_{t'}^{p_2}D_x^{\beta}D_\xi^{\alpha}K_j(x,\xi,t,t')\,.\,(1+|\xi|)^{-\delta|\beta|-2m(p_1+p_2)+\rho|\alpha|+\eta.j-\varepsilon}|$$

tend uniformément vers zéro dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma}$ lorsque t tend vers t'.

Remarquons que pour $j=0$, la proposition a été démontrée au § 4. Nous procéderons en plusieurs étapes.

i) Par récurrence sur j, on démontre facilement que, pour tout (α,β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta,p_1,p_2,j}$, telle que l'on ait dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\Sigma$:

$$(5.4)\qquad |D_t^{p_1}D_{t'}^{p_2}D_x^{\beta}D_\xi^{\alpha}K_j(x,\xi,t,t')|\leq$$

$$\leq C_{p_1,p_2,\alpha,\beta,j}(1+|\xi|)^{2m(p_1+p_2+|\beta|+|\alpha|+j)}\exp(-c(t-t')^{k+1}|\xi|^{2m}).$$

Ceci démontre le premier point de (5.2).

ii) Montrons que $K_j(x,\xi,t,t')$ appartient à $\mathcal{E}^0(\overline{\Sigma},S^{\varepsilon-\eta.j}_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi))$. On raisonne par récurrence sur j et on suppose donc que :

$$(5.5)\qquad \exists\ \eta>0;\quad |D_x^{\beta}D_\xi^{\alpha}K_j(x,\xi,t,t')|\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\varepsilon-\eta.j+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

dans $\Omega\times\mathbb{R}^n\times\overline{\Sigma}$.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme 5.2</u> : Sous l'hypothèse [H1], on a la majoration suivante : pour tout réel c, $0<c\leq 1$ et tout réel k, $0\leq k<1$, il existe une constante C_k telle que l'on ait dans $\Omega\times\mathbb{R}^n_\xi\times\overline{\Sigma}$:

$$(5.6)\qquad \left|\int_{t'}^{t}\exp\left(-c\int_s^t \operatorname{Re} b_{2m}(x,s',\xi)\,ds'\right)ds\right|\leq C_k(1+|\xi|)^{-\frac{2m}{k+1}.k}\,.$$

Donnons tout d'abord une majoration de $|K_{j+1}|$. Dans l'expression de K_{j+1} (cf. (5.1) et (3.5)) n'interviennent que des termes du type suivant :

$$A_{\beta,\ell} = \int_{t'}^{t} \exp(-\int_{s}^{t} b_{2m}(x,s',\xi)ds') \,.\, \frac{\partial^\beta}{\partial\xi^\beta} b_{2m-\ell}(x,s,\xi).D_x^\beta K_j(x,\xi,s,t')ds$$

avec la relation $0 < |\beta| + \ell \leq 2m$.

Utilisant (5.5) et [H2], on a, si $((|\beta| + \ell)\theta + \ell\tau) < 1$, l'inégalité suivante dans $\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$:

$$|A_{\beta,\ell}| < C(1+|\xi|)^{\varepsilon-\eta.j+\delta|\beta|-\ell-|\beta|+2m\theta(|\beta|+\ell)+2m\ell\tau} \times$$

$$\times \left(\int_{t'}^{t} \exp(-\int_{s}^{t} \mathrm{Re}b_{2m}(x,s',\xi)ds').|\mathrm{Re}b_{2m}|^{1-(|\beta|+\ell)\theta-\ell\tau}ds\right).$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on déduit que, dans $\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$, on a :

$$|A_{\beta,\ell}| < C(1+|\xi|)^{\varepsilon-\eta.j+\delta|\beta|-\ell-|\beta|+2m\theta(|\beta|+\ell)+2m\ell\tau} \times$$

$$\times \left(\int_{t'}^{t} \exp(-c\int_{s}^{t} \mathrm{Re}b_{2m}ds')ds\right)^{(|\beta|+\ell)\theta+\ell\tau}$$

où c est une constante réelle $(0 < c \leq 1)$ dépendant de (β,ℓ).
Utilisant le lemme 5.2, on en déduit que, dans $\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$, on a :

$$(5.7) \quad |A_{\beta,\ell}| < C_k(1+|\xi|)^{\varepsilon-\eta.j+\delta|\beta|-\ell-|\beta|+2m\theta(|\beta|+\ell)+2m\ell\tau} \times$$

$$\times (1+|\xi|)^{-\frac{2m|\beta|k\theta}{k+1}-\frac{2m\ell\tau.k}{k+1}-\frac{2m\ell\theta k}{k+1}} .$$

Pour que la récurrence marche, il faut montrer qu'on peut trouver η indépendant de j, strictement positif tel que :

$$\frac{2mk}{k+1}\tau|\beta| - \ell - |\beta| + 2m\theta(|\beta|+\ell) + 2m\tau\ell - \frac{2m|\beta|k\theta}{k+1} - \frac{2m\ell\theta}{k+1}\,.\,k - \frac{2m\ell\tau}{k+1}\,.\,k \leq -\eta \;.$$

Du fait que k peut être choisi arbitrairement proche de 1, il suffit de vérifier l'inégalité stricte pour $k = 1$.
Cette inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{2mk}{k+1}(\tau+\theta)-1\right)[|\beta|+\ell] < -\eta$$

ce qui est possible, grâce à [H3]. On prend en effet η vérifiant :

$$(5.8) \qquad 0 < \eta < 1 - \frac{2mk}{k+1}(\tau+\theta) \;.$$

Lorsque $((|\beta| + \ell)\theta + \ell\tau) \geq 1$, on montre des majorations analogues en utilisant l'analogue de (4.9) pour $b_{2m-\ell}$

On a ainsi montré que sous les hypothèses (5.5) et (5.8), on avait dans $\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$ la majoration suivante :

$$|K_j(x,\xi,t,t')| \leq C(1+|\xi|)^{\varepsilon-\eta(j+1)} \quad .$$

Etudions maintenant $D^\gamma_x D^\alpha_\xi K_{j+1}$; on voit aisément, en utilisant la remarque (4.2), que la majoration de ce terme se ramène à celle de termes du type suivant :

$$A_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\ell} =$$

$$= \int_t^{t'} \exp(-c\int_s^t \mathrm{Re}\, b_{2m}(x,s',\xi)ds') \left|\frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \frac{\partial^{\beta+\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta+\alpha_1}} b_{2m-\ell}\right| \left|\frac{\partial^{\beta+\gamma_2+\alpha_2}}{\partial x^{\beta+\gamma_2}\partial\xi^{\alpha_2}} K_j\right| ds$$

avec $|\beta|+\ell > 0$, $|\gamma_1|+|\gamma_2| = |\gamma|$; $|\alpha_1|+|\alpha_2| = |\alpha|$ et c arbitrairement proche de 1 ($c < 1$).

Deux cas sont à distinguer selon que $(|\beta|+|\alpha_1|+\ell)\theta + (|\gamma_1|+\ell)\tau$ est plus petit ou plus grand que 1. On suppose dans la suite que :

$(|\beta|+|\alpha_1|+\ell)\theta + (|\gamma_1|+\ell)\tau) < 1$; l'autre cas est plus facile à traiter.

Par un calcul analogue à celui fait pour la majoration de $|K_{j+1}|$, on obtient la majoration suivante dans $\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$:

$$(5.9) \quad \left[\begin{array}{l} |A_{\gamma_1,\gamma_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\ell}| \leq C(1+|\xi|)^{\lambda+\varepsilon+\delta|\gamma|-\rho|\alpha|-j.\eta} \\ \text{avec } \lambda = (\ell+|\beta|)\left(\frac{2mk}{k+1}(\tau+\theta)-1\right) + (1-k)\left(\frac{2m\theta}{k+1}(|\beta|+|\alpha_1|+\ell) + \frac{2m\tau}{k+1}(\ell+|\gamma_1|)\right) . \end{array}\right.$$

Grâce à (5.8), on peut trouver k de sorte que $\lambda \leq -\eta$.

On a ainsi montré (5.2) dans le cas $p = 0$, et la propriété (5.3) se montre alors facilement.

iii) On va montrer maintenant que $K_j(x,\xi,t,t')$ appartient à $\mathcal{E}^p(\overline{\Sigma}, S^{\varepsilon-\eta j+2mp}_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi))$. On raisonne par récurrence sur j, et on suppose donc qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait :

$$(5.10) \quad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D^\beta_x D^\alpha_\xi K_j(x,\xi,t,t')| \leq$$

$$\leq C_{\alpha,\beta,p_1,p_2} (1+|\xi|)^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\eta.j+2m(p_1+p_2)+\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma} .$$

Nous utiliserons le lemme suivant [7] :

Lemme 5.3 : Soit $f(t,t',s)$ une fonction indéfiniment différentiable dans l'ensemble : $\{(t,t',s)\ ;\ 0 \le t' \le s \le t < 1\}$.
Alors nous avons dans $\overline{\Sigma}$

$$(5.11)\qquad D^q_{t'} D^p_t\Big(\int_{t'}^{t} f(t,t',s)ds\Big) = \int_{t'}^{t} D^q_{t'} D^p_t f(t,t',s)ds$$
$$+ D^q_{t'}\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)}{j!} D^{p-j}_t D^{j-1}_s f(t,t',s)\Big)_{s=t}$$
$$- \sum_{k=1}^{q} \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} D^{q-k}_{t'} D^{k-1}_s (D^p_t f(t,t',s))_{s=t}\ .$$

On va étudier $D^p_t D^\beta_x D^\alpha_\xi K_{j+1}(x,\xi,t,t')$ (le cas général se ferait de manière analogue). On applique le lemme 5.3 avec :

$$f(t,t',s) = D^\beta_x D^\alpha_\xi (K_o(x,\xi,t,s) \bullet L_2 K_j(x,\xi,s,t'))\ .$$

D'après (5.11), on a deux termes à étudier

a) $\int_{t'}^{t} D^p_t f(t,t',s)ds$

Ce premier terme se décompose en une somme de termes du type suivant :

$$A = \int_{t'}^{t} (D^{p_1}_t D^{\beta_1}_x D^{\alpha_1}_\xi K_o(x,\xi,t,s)) D^{\beta_2}_x D^{\alpha_2}_\xi D^\gamma_\xi b_{2m-\ell} \cdot D^{p_2}_t D^{\gamma+\beta_3}_x D^{\alpha_3}_\xi K_j(x,\xi,s,t')ds$$

avec
$$\begin{cases} |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| = |\beta| \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = |\alpha| \\ |\gamma| + \ell > 0 \\ p_1 + p_2 = p\ . \end{cases}$$

Utilisant la remarque 4.2, on obtient la majoration :

$$|A| \le (1+|\xi|)^{2mp_1-\rho|\alpha_1|+\delta|\beta_1|} \int_{t'}^{t} \Big(|K_o(x,\xi,t,s)|^c |D^{\beta_2}_x D^{\alpha_2+\gamma}_\xi b_{2m-\ell}| \times$$
$$\times |D^{p_2}_t D^{\gamma+\beta_3}_x D^{\alpha_3}_\xi K_j|\Big)ds \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}\ .$$

Grâce aux hypothèses (5.8) et (5.10) on obtient, en procédant comme pour ii) la majoration souhaitée.

b) Le second terme qui intervient est

$\sum_{k=1}^{p} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} \quad D_t^{p-k} D_s^{k-1} f(t,t',s))_{s=t}$. On est conduit à majorer

pour (t,ι,s) vérifiant $0<t'\leq s\leq t<1$ les expressions suivantes :

$$B = D_s^{q_1} D_t^{p_1} D_x^{\beta_1} D_\xi^{\alpha_1} K_o(x,\xi,t,s).D_s^{q_2} D_x^{\beta_2} D_\xi^{\alpha_2}(D_\xi^{\gamma} b_{2m-\ell})\circ D_s^{q_3} D_x^{\gamma} D_t^{p_2} D_x^{\beta_3} D_\xi^{\alpha_3} K_j(x,\xi,s,t')$$

avec $\quad q_1+q_2+q_3 = k-1$

$p_1+p_2 = p-k$,

$|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3| = |\beta|$

$|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3) = |\alpha|$

$|\gamma|+\ell > 0$

$1 \leq k \leq p$.

Utilisant les hypothèses de récurrence, on a :

$$|B| \leq C(1+|\xi|)^{2m(p_1+q_1)+\delta|\beta_1|-\rho|\alpha_1|+2m-\ell-|\gamma|} \times$$

$$\times \; (1+|\xi|)^{+2m(p_2+q_3)+\delta(|\beta_3|+\gamma)-\rho|\alpha_3|+\varepsilon-\eta.j}$$

$$|B| \leq C(1+|\xi|^{2m(p)+\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\ell-|\gamma|+\delta|\gamma|+\varepsilon-\eta.j} \quad .$$

Cette majoration est en particulier vraie pour $s=t$ (C est indépendante de (t,t',s)). La récurrence marche si :

$$-\ell-|\gamma|+\delta|\gamma| \leq -\eta \quad .$$

Or d'après (5.8), on a

$$\eta < 1-\frac{2mk}{k+1}(\tau+\theta) \leq 1-\delta \leq \ell+(1-\delta)|\gamma|$$

lorsque $|\gamma|+\ell > 0$.

De a) et b) on déduit que (5.10) est vrai pour $k=j+1$. On a ainsi complètement démontré (5.2). Le point (5.3) s'obtient sans difficulté en examinant la démonstration de (iii). La proposition 5.1 est ainsi démontrée.

<u>Proposition 5.4</u> : $K_j(x,y,t,t')$ défini dans U par (3.6) et (3.2) vérifie les propriétés (2.3), (2.4), (2.5).

On renvoie aus démonstrations des propositions 4.4, 4.5, 4.6, compte-tenu de la proposition 5.1.

<u>§ 6. ETUDE DE</u> $F_j(x,y,t,t')$ <u>DANS</u> U

Nous terminons la démonstration du théorème 1 en montrant que $F_j(x,y,t,t')$ défini dans U par (3.7) et (3.2) vérifie (2.6).
De la proposition (5.1) et de la définition de L_2, on déduit :

<u>Proposition 6.1</u> : Pour tout ε strictement positif et tout j entier, on a les propriétés suivantes :

(6.1) Pour tout (β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une constante C_{β,p_1,p_2} telle qu'on ait dans $\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$ l'inégalité suivante :

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta F_j(x,\xi,t,t')| \leq C_{\beta,p_1,p_2} (1+|\xi|)^{\varepsilon-\eta.j+\delta|\beta|+2m(p_1+p_2+1)} .$$

(6.2) Pour tout (β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p_1+p_2 < j$, la quantité

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta F_j(x,\xi,t,t') . (1+|\xi|)^{-\delta|\beta|+\eta.\varepsilon-2m(p_1+p_2+1)}|$$

converge uniformément vers zéro dans $\Omega\times \mathbb{R}^n_\xi \times \overline{\Sigma}$ lorsque t tend vers t'.

Rappelons que $F_j(x,y,t,t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{i<x-y,\xi>} F_j(x,\xi,t,t')d\xi$. On déduit de la proposition 6.1 que :

<u>Proposition 6.2</u> : La suite $F_j(x,y,t,t')$ $(j\in \mathbb{N})$ vérifie (2.9). Plus précisément, pour tout j dans $\mathbb{N}$, pour tout (α,β,p_1,p_2) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant $|\beta| + |\alpha| + 2m(p_1+p_2+1) < \eta.j - 1$, on a

(6.3) $$D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^{\beta} D_y^{\alpha} F_j(x,y,t,t') \in C^o(U) \quad .$$

Démonstration : Evidente grâce à (6.1) et (6.2).

Remarque 6.3 : On pourrait mettre en évidence que l'hypothèse [H3] sous la forme $\delta < \rho$ n'est utilisée en fait que pour montrer que $F_j(x,y,t,t')$ vérifie (6.3). Cette condition intervenait pour les classes $S^m_{\rho,\delta}$ dans des circonstances analogues dans [1].

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), Singular Operators, 138-183.

[2] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Mathematica 119 (1967), 147-171.

[3] L. Hörmander, Fourier Integral Operators, Acta Mathematica 127 (1971).

[4] Y. Kannai, An unsolvable hypoelliptic operator, Israle J. of Math. 9, (1971), 306-165.

[5] Y. Kato, The hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators, J. of Functional Analysis 7 (1971), 116-131.

[6] Y. Kato, Remarks on hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators, Proc. of Japan Accademy, vol. 47 No 85 (1971).

[7] T. Matsuzawa, On some degenerate parabolic equations (à paraître dans Nagoya Math. Journal).

[8] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann (1966), 138-139.

[9] F. Trèves, A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. on pure and applied Math., vol. XXIV (1971), 71-115.

[10] F. Trèves, Concatenations of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity, Comm. on pure and applied Math., vol. XXVI No 2 (1973).

[11] C. Zuily, Sur l'hypoellipticité des opérateurs d'ordre 2 à coefficients réels, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 277, p. 529.
