

Astérisque

JOHN HUBBARD

Transversalité

Astérisque, tome 16 (1974), p. 33-48

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__33_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRANSVERSALITE

par John HUBBARD

§ 1. Produits tensoriels et Tôr sur une algèbre de Fréchet.

DEFINITION 1.- Une algèbre de Fréchet A est un espace de Fréchet sur $\underline{\mathbb{C}}$, muni d'une application $A \times A \rightarrow A$ bilinéaire continue, qui en fait une algèbre associative, commutative, avec élément unité.

Exemples.

Les algèbres de Banach commutatives avec élément unité sont des algèbres de Fréchet.

Si (X, \mathcal{O}_X) est un espace analytique, $\mathcal{O}(X)$ est une algèbre de Fréchet.

DEFINITION 2.- Soit A une algèbre de Fréchet. E est dit un A -module de Fréchet si E est un espace de Fréchet sur $\underline{\mathbb{C}}$, muni d'une application $A \times E \rightarrow E$ bilinéaire continue qui en fait un A -module.

E sera dit un A -module de Fréchet nucléaire s'il est nucléaire en temps ou l'espace de Fréchet sur $\underline{\mathbb{C}}$.

Exemple.

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace analytique, \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur X . Alors $\mathcal{F}(X)$ est un $\mathcal{O}(X)$ -module de Fréchet nucléaire.

DEFINITION 3.- Un A -module de Fréchet E est dit libre s'il est de la forme $A \hat{\otimes}_{\mathbb{N}} V$, avec V un espace de Fréchet.; E est dit nucléairement libre si V est nucléaire.

Remarques.

1) Si A n'est pas nucléaire, un A -module nucléairement libre $\neq 0$ n'est pas nucléaire.

2) Si E est un A -module de Fréchet libre, E est projectif au sens suivant : soit $F \rightarrow G \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules de Fréchet, scindée sur $\underline{\mathbb{C}}$. Alors l'application $\mathcal{L}_A(E, F) \rightarrow \mathcal{L}_A(E, G)$ est bijective. Ceci provient du fait que si $E = A \hat{\otimes}_{\pi} V$, on a $\mathcal{L}_A(E, H) \cong \mathcal{L}_{\underline{\mathbb{C}}}(V, H)$ pour tout A -module de Fréchet H .

DEFINITION 4.- Une résolution libre d'un A -module de Fréchet E est une suite exacte $L_n \rightarrow E \rightarrow 0$, où tous les L_n sont des A -modules de Fréchet libres.

Une telle résolution est dite directe si les applications $L_{n+1} \rightarrow L_n$, $n \in \mathbb{N}$ et $L_0 \rightarrow E$ sont scindées sur $\underline{\mathbb{C}}$.

PROPOSITION 1.- a) Tout A -module de Fréchet admet une résolution libre directe.

b) Si L_n et L'_n sont deux résolutions libres directes de E , il existe un morphisme $L_n \rightarrow L'_n$, unique à homotopie près.

Démonstration.

a) Posons $L_n = A \hat{\otimes}_{\pi} A \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes}_{\pi} A \hat{\otimes}_{\pi} E$ avec $n+1$ facteurs A , et la structure de A -module provenant du premier facteur. Définissons $d_n : L_n \rightarrow L_{n-1}$

par

$$d_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_n \otimes x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes x + (-1)^n a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes a_n x.$$

Le complexe L_n ainsi défini est une résolution libre de E . L'application $t \mapsto 1 \otimes t$ de L_n dans L_{n+1} est une scission sur $\underline{\mathbb{C}}$, mais n'est en général pas A -linéaire.

b) Résulte de la projectivité de manière bien connue.

DEFINITION 5.- Soient E et F deux A -modules de Fréchet. On définit $E \hat{\otimes}_A F = \text{coker}(E \hat{\otimes}_\pi A \hat{\otimes}_\pi F \longrightarrow E \hat{\otimes}_\pi F)$, où l'application est donnée par $x \otimes a \otimes y \longrightarrow ax \otimes y - x \otimes ay$.

Soit $L_\bullet \longrightarrow F$ une résolution libre directe de F . On définit $\text{Tor}_n^A(E, F) = H_n(E \hat{\otimes}_A L_\bullet)$.

Remarques.

1) Par la proposition 1, b), cet espace d'homologie est indépendant du choix de L_\bullet ; sa topologie en particulier n'en dépend pas, et n'est pas nécessairement séparée.

2) $\text{Tor}_0^A(E, F) = E \hat{\otimes}_A F$.

3) Si F est libre, disons $F = A \hat{\otimes}_\pi V$, ($\forall n > 0$) $\text{Tor}_n^A(E, F) = 0$, et $E \hat{\otimes}_A F = E \hat{\otimes}_{\underline{C}} V$. En effet, il suffit de prendre $L_0 = F$, et $L_n = 0$, $n > 0$.

PROPOSITION 2.- Soit $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte de A -modules de Fréchet, F un A -module de Fréchet, et $L_\bullet \longrightarrow F \longrightarrow 0$ une résolution libre directe. Supposons l'une des trois conditions suivantes vérifiée. :

1) Les E_i sont nucléaires. (Il suffit que E_2 soit nucléaire pour que E_1 et E_3 le soient aussi).

2) Les L_n sont nucléairement libres. (Si A et F sont nucléaires, la construction de la proposition 1 montre que les L_n peuvent être choisis nucléairement libres.

3) $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$ se scinde sur \underline{C} . Alors la suite

$$0 \longrightarrow E_1 \hat{\otimes}_A L. \longrightarrow E_2 \hat{\otimes}_A L. \longrightarrow E_3 \hat{\otimes}_A L. \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de complexes.

Démonstration.

Pour les cas 1) et 2), la proposition suit de l'exactitude de la tensorisation avec un espace de Fréchet nucléaire.

Pour le cas 3), la scission donne un inverse à droite de l'application $E_1 \hat{\otimes}_A L. \longrightarrow E_2 \hat{\otimes}_A L.$, ce qui prouve bien l'injectivité, et c'est tout ce qu'il faut démontrer.

COROLLAIRE.- Dans les situations ci-dessus, il y a une suite exacte longue

$$\dots \text{Tor}_{n+1}^A(E_3, F) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(E_1, F) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(E_2, F) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(E_3, F) \longrightarrow \text{Tor}_{n-1}^A(E_1, F) \dots$$

donnée par la construction d'algèbre homologique bien connue.

PROPOSITION 3.- Soient E, F des A -modules de Fréchet, et $P. \longrightarrow E$ une résolution libre de E . Supposons l'une des trois conditions ci-dessous satisfaite :

- 1) $P.$ nucléairement libre.
- 2) F et A nucléaires.
- 3) $P. \longrightarrow E$ directe.

Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Tor}_n^A(E, F) = H_n(P. \otimes_A F) .$$

Remarques.

- 1) La condition 3) montre que Tor_n^A est symétrique en ses arguments.
- 2) Nous rencontrerons effectivement des résolutions dont on ignore si elles sont directes, mais pour lesquelles la première ou la seconde condition sera

satisfaite.

Démonstration.

Soit $d_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ la différentielle de la résolution P_\bullet , et $E_n = \text{Im } d_n = \ker d_{n-1}$, $E_0 = E$. Les suites $0 \rightarrow E_{i+1} \rightarrow P_i \rightarrow E_i \rightarrow 0$ sont exactes, et les conditions 1), 2) et 3) impliquent respectivement les conditions 1), 2) et 3) de la proposition 2.

Il existe donc une suite exacte

$$\text{Tor}_j^A(P_i, F) \rightarrow \text{Tor}_j^A(E_i, F) \rightarrow \text{Tor}_{j-1}^A(E_{i+1}, F) \rightarrow \text{Tor}_{j-1}^A(P_i, F)$$

dont les extrémités sont nulles. On en déduit un isomorphisme

$$\text{Tor}_j^A(E_i, F) \rightarrow \text{Tor}_{j-1}^A(E_{i+1}, F), \text{ et par récurrence descendante un isomor-}$$

phisme

$$\text{Tor}_i^A(E, F) \simeq \text{Tor}_i^A(E_{i-1}, F).$$

La suite exacte $0 \rightarrow \text{Tor}_i^A(E_{i-1}, F) \rightarrow E_i \hat{\otimes}_A F \rightarrow P_{i-1} \hat{\otimes}_A F$ identifie $\text{Tor}_i^A(E_{i-1}, F)$ au noyau de l'application $f : E_i \hat{\otimes}_A F \rightarrow P_{i-1} \hat{\otimes}_A F$.

Par tensoriaation avec F , on déduit de la suite exacte

$$P_{i+1} \rightarrow P_i \rightarrow E_i \rightarrow 0$$

la suite exacte

$$P_{i+1} \hat{\otimes}_A F \rightarrow P_i \hat{\otimes}_A F \rightarrow E_i \hat{\otimes}_A F \rightarrow 0,$$

qui permet de considérer les éléments du noyau de f comme les classes d'éléments du noyau de d_i , modulo l'image de d_{i+1} , ce qui est la définition de $H_i(P_\bullet \hat{\otimes}_A F)$. c.q.f.d.

§ 2. Transversalité.

DEFINITION 6.- Soient E et F deux A-modules de Fréchet. E et F sont dits transverses sur A si

- (i) $E \hat{\otimes}_A F$ est séparé, et
- (ii) $\text{Tor}_q^A(E, F) = 0$, $\forall q > 0$.

Remarques.

1) Un A-module de Fréchet libre est transverse à tout A-module de Fréchet.

2) Soit $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte de A-modules de Fréchet et F un A-module de Fréchet, et supposons l'une des trois conditions de la proposition 2 vérifiée.

Si d'autre part, E_2 et E_3 sont transverses à F sur A , E_1 l'est également.

3) La notion de transversalité recouvre celle de polycylindre privilégié.

Soient Ω un ouvert de Stein de \mathbb{C}^n , \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Ω , $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset \Omega$ un polycylindre compact. On dit que K est privilégié par rapport à \mathcal{F} si $B(K)$ et $\mathcal{F}(\Omega)$ sont transverses sur $\mathcal{O}(\Omega)$. ($B(K)$ est l'espace des fonctions continues sur K holomorphes à l'intérieur de K , c'est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \sup_K |f(x)|$.

Pour des exemples de voisinages privilégiés et non privilégiés, voir [1] et [2] .

Un récent article de G. Pourcin [3] indique que dans ce cas, la condition (i) entraîne la condition (ii). Dans les cas étudiés ici, c'est au contraire la condition (ii) qui sera essentielle.

PROPOSITION 4.- Soit E° un complexe borné à droite de A-modules de Fréchet

acyclique en degrés $\geq k$, et F un A -module de Fréchet transverse aux E^n pour tout $n \geq k$.

Supposons l'une des trois conditions ci-dessous satisfaite :

- 1) Les E^n sont nucléaires, $n \geq k$.
- 2) A et F sont nucléaires.
- 3) E^\bullet est scindé sur \underline{C} en degrés $\geq k-1$.

Alors le complexe $F \hat{\otimes}_A E^\bullet$ est aussi acyclique en degré k .

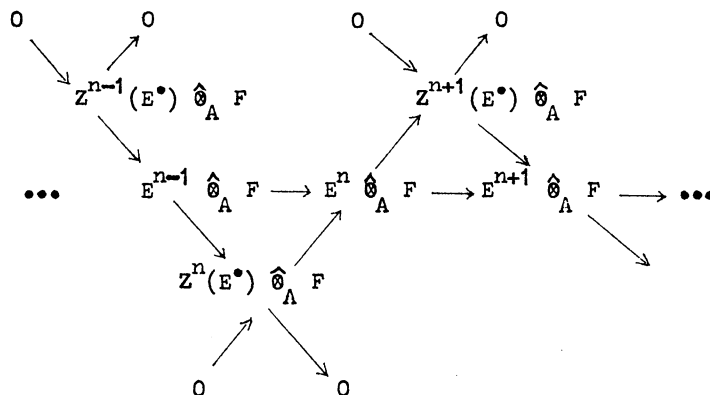
Démonstration.

La remarque 2) ci-dessus appliquée aux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow Z^n(E^\bullet) \longrightarrow E^n \longrightarrow Z^{n+1}(E^\bullet) \longrightarrow 0$$

entraîne, par récurrence descendante, que les $Z^n(E^\bullet)$ sont transverses à F sur A pour $n \geq k$.

Dans le diagramme commutatif suivant,



la transversalité de $Z^n(E^\bullet)$ nous donne que les lignes diagonales sont exactes ce qui entraîne que la ligne horizontale l'est aussi.

II-08

COROLLAIRE.- Soient E^\bullet , F^\bullet deux complexes bornés à droite de A -modules de Fréchet U , et $f^\bullet : E^\bullet \rightarrow F^\bullet$ un morphisme de complexes induisant un isomorphisme sur la cohomologie. Soit M un A -module de Fréchet transverse aux E^n et aux F^n . Supposons l'une des deux conditions suivantes vérifiées :

- 1) Les E^n et les F^n sont nucléaires.
- 2) M et A sont nucléaires.

Alors $f \otimes 1_M : E^\bullet \hat{\otimes}_A M \rightarrow F^\bullet \hat{\otimes}_A M$ induit un isomorphisme sur la cohomologie.

Démonstration.

On ferme le mapping cylindre N^\bullet de f^\bullet :

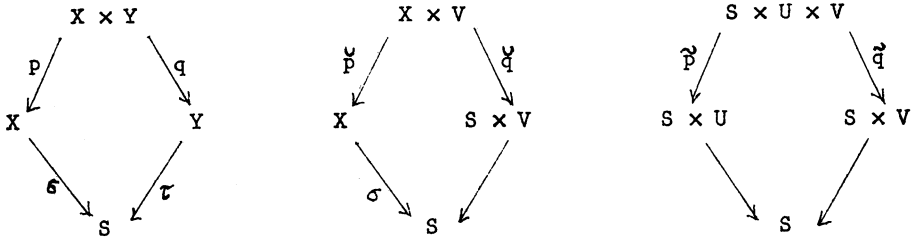
$$N^n = E^n \oplus F^{n-1},$$

et $d_n : N^n \rightarrow N^{n+1}$, $d_n(x, y) = (d(x), d(y))^{(-1)^n} \times f(x)$

et la proposition entraîne que le complexe N^\bullet est acyclique, le complexe $N^\bullet \hat{\otimes}_A M$ l'est aussi. Comme $N^\bullet \hat{\otimes}_A M$ est le mapping cylindre de $f \otimes 1_M$, le corollaire est démontré.

§ 3. Faisceaux analytiques transverses.

Soient S, X, Y des espaces analytiques, $\sigma : X \rightarrow S$ et $\tau : Y \rightarrow S$ des morphismes (x, y) un point de $X \times_S Y$, U et V des ouverts de $\underline{\mathbb{C}}^n$ et $\underline{\mathbb{C}}^m$, tels que X et Y se plongent au voisinage de (x, y) dans $S \times U$ et $S \times V$ au-dessus de S . Dans ces diagrammes suivants, les morphismes $p, q, \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}, \tilde{p}, \tilde{q}$ sont des morphismes canoniques :



Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} des faisceaux analytiques cohérents sur X et Y respectivement, et $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ leurs extensions à $S \times U$ et $S \times V$. Soit \mathcal{L} une résolution de $\overline{\mathcal{G}}$ sur $S \times V$.

PROPOSITION 5. - Les espaces suivants sont canoniquement isomorphes :

$$\begin{aligned} & \text{Tor}_n^{\mathcal{O}_{S \times U \times V}}(x,y) \left((\tilde{p}^* \overline{\mathcal{F}})_{(x,y)}, (\tilde{q}^* \overline{\mathcal{G}})_{(x,y)} \right) \\ & \text{Tor}_n^{\mathcal{O}_{S \times U}}(x) \left(\mathcal{F}_x, (\tilde{q}^* \mathcal{G})_{(x,y)} \right) \\ & H_n \left((\tilde{p}^* \mathcal{F})_{(x,y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times V}} (\tilde{q}^* \mathcal{L})_{(x,y)} \right) \\ & H_n \left(\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_X} (\tilde{q}^* \mathcal{L})_{(x,y)} \right) . \end{aligned}$$

Démonstration.

Nous supprimerons les points x, y , ou (x,y) dans les formules suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Tor}_n^{\mathcal{O}_{S \times U \times V}} (\tilde{p}^* \overline{\mathcal{F}}, \tilde{q}^* \overline{\mathcal{G}}) = H_n (\tilde{p}^* \overline{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U \times V}} \tilde{q}^* \mathcal{L}) = \\ & H_n (\overline{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_{S \times U \times V} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U \times V}} \tilde{q}^* \mathcal{L}) = H_n (\overline{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \tilde{q}^* \mathcal{L}) = \\ & \text{Tor}_n^{\mathcal{O}_{S \times U}} (\overline{\mathcal{F}}, \tilde{q}^* \overline{\mathcal{G}}) . \end{aligned}$$

En effet, la première égalité est vraie si $\tilde{q}^* \mathcal{L}$ est une résolution libre de \bar{g} , comme \tilde{q} est plat il l'est ; la seconde égalité découle de la définition de l'image réciproque analytique et la troisième est triviale ; la quatrième emploie le fait que $\tilde{q}^* \mathcal{L}$ est plat sur $S \times U$.

L'égalité de $H_n(\tilde{p}^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times V}} \tilde{q}^* \mathcal{L})$ et $H_n(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{q}^* \mathcal{L})$ vient de

$$\tilde{p}^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times V}} \tilde{q}^* \mathcal{L} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X \times V} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times V}} \tilde{q}^* \mathcal{L} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{q}^* \mathcal{L} .$$

Finalement, $H_n(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{q}^* \mathcal{L}) = H_n(\tilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \tilde{q}^* \mathcal{L})$ est une application du fait purement algébrique suivant : soient A un anneau, E et F des A -modules, $I \subset A$ idéal tel que $IE = 0$. Alors $E \otimes_A F \cong E \otimes_{A/I} F/IF$. En effet, en prenant pour idéal J celui qui définit X dans $S \times U$, on constate que $\mathcal{O}_{S \times U}/J = \mathcal{O}_X$ et $(\tilde{q}^* \mathcal{L})/J(\tilde{q}^* \mathcal{L}) = \tilde{q}^* \mathcal{L}$. C.Q.F.D.

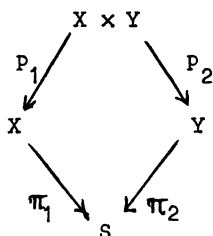
DEFINITION 7.- Soient S, X, \mathcal{F} et \mathcal{G} comme dans la proposition 5. On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont transverses sur S au point (x,y) si, pour tout $n > 0$, les espaces de la proposition 5 sont nuls ; \mathcal{F} et \mathcal{G} sont dits transverses sur S s'ils sont transverses partout.

Remarques.

- 1) La condition est symétrique en \mathcal{F} et \mathcal{G} , car le premier espace l'est ; il est indépendant des plongements $X \rightarrow S \times U, Y \rightarrow S \times V$ car le quatrième espace est indépendant du plongement $X \rightarrow S \times U$.
- 2) Si \mathcal{F} est plat sur \mathcal{O}_S , \mathcal{F} est transverse à n'importe quel faisceau \mathcal{G} .
- 3) On ignore si la nullité de $\text{Tor}_n^{\mathcal{O}_{S,S}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_y)$ entraîne la transversalité ou de \mathcal{F} et de \mathcal{G} au point (x,y) .

§ 4. Sections globales de faisceaux analytiques.

Soient S, X, Y des espaces de Stein, \mathcal{F} et \mathcal{G} des faisceaux cohérents sur X et Y respectivement, $\pi_1 : X \rightarrow S$ et $\pi_2 : Y \rightarrow S$ des morphismes. Soient p_1 et p_2 les morphismes canoniques du diagramme suivant



et

$$\mathcal{H} = p_1^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} p_2^* \mathcal{G} .$$

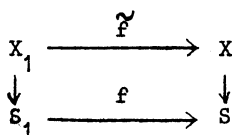
THEOREME.- Supposons \mathcal{F} et \mathcal{G} transverses sur S . Alors $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{G}(Y)$ sont transverses sur $\mathcal{O}(S)$, et $\mathcal{H}(X \times_S Y) = \mathcal{F}(X) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{G}(Y)$.

COROLLAIRE 1.- Soient S et X des espaces de Stein, $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme, \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X , S' un ouvert de Stein de S , et $X' = \pi^{-1}(S')$. Alors $\mathcal{O}(S')$ et $\mathcal{F}(X)$ sont transverses sur $\mathcal{O}(S)$, et $\mathcal{O}(S') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X')$.

Démonstration.

La platitude de l'inclusion d'un ouvert nous donne la condition de transversalité.

COROLLAIRE 2.- Soit



un diagramme cartésien

d'espaces de Stein, et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X , plat sur \mathcal{O}_S on a $\mathcal{O}(S_1) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{F}(X) = (\tilde{f}^* \mathcal{F})(X_1)$.

COROLLAIRE 3. Soient S, X, \mathcal{F} comme dans le corollaire 1, \mathcal{F} plat sur \mathcal{O}_S et s un point de S . Alors $\mathcal{F}(X)$ est transverse sur $\mathcal{O}(S)$ à $\mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s = \mathbb{C}_s$, et $\mathcal{F}_s / \mathcal{F}_s \mathfrak{m}_s = \mathcal{F}(X) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathbb{C}_s$.

Démonstration du théorème.

Nous supposons d'emblée S, X, \mathcal{F} quelconques, et la démonstration se fera en accroissant progressivement la généralité de Y et de \mathcal{G} .

Cas particulier 1.

V un ouvert de \mathbb{C}^n , $Y = S \times V$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{S \times V}$.

Alors $\mathcal{H} = p_1^*(\mathcal{F})$ et $X \times_S Y = X \times V$. $\mathcal{G}(Y) = \mathcal{O}(S \times V) = \mathcal{O}(S) \hat{\otimes} \mathcal{O}(V)$ est nucléairement libre, et donc transverse à n'importe quoi.

$$\mathcal{F}(X) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{G}(Y) = \mathcal{F}(X) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{O}(S) \hat{\otimes} \mathcal{O}(V) = \mathcal{F}(X) \hat{\otimes} \mathcal{O}(V) =$$

$$p_1^*(\mathcal{F})(X \times V) = \mathcal{H}(X \times_S Y),$$

et le théorème est vérifié dans ce cas. Remarquons que la transversalité était trivialement vérifiée.

Cas particulier 1'.

V et Y comme ci-dessus, mais $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{S \times V}^r$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Cas particulier 2.

V et Y comme ci-dessus, et \mathcal{G} admettant des résolutions de longueur infinie (et satisfaisant à la condition de transversalité).

Démonstration.

Prenons $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$ une résolution avec $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times V}^{r_i}$ et considérons le complexe

$$\mathcal{M}_\bullet = P_1^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} P_2^*(\mathcal{L}_\bullet)$$

$\mathcal{M}_\bullet \rightarrow \mathcal{H}$ est une résolution de \mathcal{H} , car l'exactitude des suites de faisceaux se vérifie ponctuellement, et l'homologie du complexe $(\mathcal{M}_\bullet)_{(x,y)}$ est nulle d'après l'hypothèse de transversalité (troisième espace de la proposition 5). Donc par le théorème B,

$$0 = H_n(\mathcal{M}_\bullet(X \times_S Y)) = \text{Tôr}_n^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y)), \text{ pour } n > 0,$$

et
$$\mathcal{H}(X \times_S Y) = H_0(\mathcal{M}_\bullet(X \times_S Y)) = \mathcal{F}(X) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{G}(Y).$$

Cas particulier 2'.

X, Y, S, \mathcal{F} quelconques, $Y \subset\subset Y_0$, Y un ouvert spécial, \mathcal{G} un faisceau cohérent sur Y qui se prolonge à Y_0 .

Démonstration.

On choisit Y_1 tel que $Y \subset\subset Y_1 \subset\subset Y_0$, et l'hypothèse que Y est un ouvert spécial permet de plonger Y_1 dans $S \times V$, V un ouvert de Stein de \mathbb{C}^n .

Si l'on prolonge le faisceau \mathcal{G} par 0 à $S \times V$, l'on se ramène au cas particulier 2).

Cas général.

Le cas général demande un passage à la limite projective.

LEMME 1 (Mittag-Leffler).- Soit

$$0 \longrightarrow \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{F_i\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{G_i\}_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

une suite exacte de systèmes projectifs d'espaces de Fréchet indexés par \mathbb{N} ,

telle que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $j > i$, les applications $\rho_i^j : E_j \rightarrow E_i$, sont d'image dense.

Posons $E = \varprojlim E_i$, $F = \varprojlim F_i$, $G = \varprojlim G_i$. Alors la suite $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration.

La seule difficulté est de montrer que $F \rightarrow G$ est surjectif. Prenons donc $z \in G$ et essayons de remonter z à F .

Choisissons d'abord des métriques d sur E_i, F_i, G_i telles que les applications $\rho_i^j : E_j \rightarrow E_i$, etc, réduisent les distances. C'est possible car, pour toute métrique d_1 , il suffit de poser, pour $x, y \in E_j$, (resp etc) $d(x, y) = \sup_{i \leq j} d_1(\rho_i^j(x), \rho_i^j(y))$.

Maintenant supposons que $z = (z_i)$, et relevons z_i en $y_i \in F_i$. Les y_i ne ferment pas en général un système cohérent. Par récurrence, on peut trouver des $y_i' \in F_i$ tels que $d(\rho_n^{n+1}(y_{n+1}'), y_n') < \frac{1}{2^n}$. En effet, supposons que la construction ait été faite jusqu'à l'ordre n , et posons $x_n = \rho_n^{n+1}(y_{n+1}') - y_n'$, $x_n \in E_n$. Comme l'image de E_{n+1} est dense dans E_n , il existe $u_{n+1} \in E_{n+1}$ tel que $d(\rho(u_{n+1}), x_n) < \frac{1}{2^n}$.

Posons $y_{n+1}' = y_{n+1}' - u_{n+1}$. On vérifie que

$$d(\rho(y_{n+1}'), y_n') < \frac{1}{2^n},$$

car $\rho(y_{n+1}') = \rho(y_{n+1}') - \rho_n(u_{n+1}')$.

Si, pour n fixe, l'on considère la suite

$$y_{i,n}' = \rho_n^{n+1} \circ \rho_{n+1}^{n+2} \dots \circ \rho_{n+i-1}^{n+i}(y_{i+n}') ,$$

celle-ci forme une suite de Cauchy, et les limites $y_n'' = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{i,n}'$ ferment

un système cohérent qui relève z . C.Q.F.D.

LEMME 2.- Soit $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un système projectif de A -modules de Fréchet et F un A -module de Fréchet. Supposons les $\rho_i^j : E_j \rightarrow E_i$ d'image dense. Si les E_i sont transverses à F sur A pour tout i , alors $E = \varprojlim E_i$ est transverse à F , et $E \hat{\otimes}_A F = \varprojlim (E_i \hat{\otimes}_A F)$.

Démonstration.

Prenons $L_\bullet \rightarrow F$ une résolution libre directe et découpons la en suites exactes courtes $0 \rightarrow F_{n+1} \rightarrow L_n \rightarrow F_n \rightarrow 0$ scindées sur \mathbb{C} . On vérifie par récurrence ascendante sur n que les F_n sont transverses aux E_i . Les suites $0 \rightarrow F_{n+1} \hat{\otimes}_A E_i \rightarrow L_n \hat{\otimes}_A E_i \rightarrow F_n \hat{\otimes}_A E_i \rightarrow 0$ sont donc exactes, et les applications $F_n \hat{\otimes}_A E_j \rightarrow F_n \hat{\otimes}_A E_i$ d'image dense.

Par le lemme 1, les suites

$$0 \rightarrow F_{n+1} \hat{\otimes}_A E \rightarrow L_n \hat{\otimes}_A E \rightarrow F_n \hat{\otimes}_A E \rightarrow 0$$

sont exactes et le complexe $L_\bullet \hat{\otimes}_A E$ est une résolution de $F \hat{\otimes}_A E$. C.Q.F.D.

Pour finir la démonstration du théorème, il me faut la notion d'ouvert très spécial.

DEFINITION 8.- Soient X un espace analytique, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ un morphisme, $W \subset X$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ des ouverts, tels que φ induise un isomorphisme de ω sur un sous-espace analytique fermé de Ω , et $P \subset \subset \Omega$ un polycylindre ouvert. Alors on dit que $V = (\varphi|_W)^{-1}(P)$ est un ouvert très spécial de X .

Soient V et V' des ouverts très spéciaux de X , tels que $V \subset V'$; et soient φ, w, Ω, P ; $\varphi', w', \Omega', P'$ comme dans la définition 8.

Alors considérons $\tilde{\varphi} = (\varphi, \varphi') : X \rightarrow \mathbb{C}^{n+n'}$. $\tilde{\varphi}|_w$ est un plongement analytique,

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\mathbb{C}^n \times P') = V'$$

$$\tilde{\varphi}^{-1}(P \times P') = V \amalg V_1 \quad .$$

Dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(\underline{\mathbb{C}}^n \times P^1) & \longrightarrow & \mathcal{O}(P \times P^1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}(V^1) & & \mathcal{O}(V \amalg V_1) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathcal{O}(V) &
 \end{array}$$

la flèche $\mathcal{O}(\underline{\mathbb{C}}^n \times P^1) \longrightarrow \mathcal{O}(P \times P^1)$ est d'image dense par le théorème de Runge, les flèches verticales sont surjectives par le théorème B, et la flèche $\mathcal{O}(V \amalg V_1) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ est surjective car l'union est disjointe. L'application $\mathcal{O}(V^1) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ est donc d'image dense.

Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}^r(V^1) & \longrightarrow & \mathcal{O}^r(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F}(V^1) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)
 \end{array}$$

la flèche $\mathcal{O}^r(V^1) \longrightarrow \mathcal{O}^r(V)$ est d'image dense, nous venons de le voir, et les flèches verticales sont surjectives par le théorème A.

La flèche $\mathcal{F}(V^1) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ est donc d'image dense.

Comme tout ouvert de Stein peut être recouvert par une famille dénombrable croissante d'ouverts très spéciaux, le théorème est démontré par le lemme 2.