GENEVIÈVE POURCIN

Déformation de singularités isolées

Astérisque, tome 16 (1974), p. 161-173
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__161_0>

DEFORMATION DE SINGULARITES ISOLEES

par Geneviève POURCIN

Soit X_o un sous-espace analytique fermé à singularités isolées d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On construit par un procédé analytique une déformation semi-universelle de $\bigsqcup_{x \in \operatorname{Sing} X_o} X_{o,x}$ et on démontre "l'ouverture de la versalité".

§ 1. Introduction.

1) Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ réunion disjointe de polycylindres. On note B(K) l'algèbre des fonctions continues sur K et analytiques sur $\mathring{K}$ et $\mathcal{G}_K$ l'espace analytique banachique des idéaux de B(K) admettant une présentation finie directe ([1]). En un point I l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{G}_K$ est égal à

$$\operatorname{Hom}_{B(K)}(I, B(K)/I) .$$

On note $\mathcal{R}_K$ le sous-espace analytique universel de $\mathcal{G}_K \times \mathring{K}$.

2) Dans tout ce qui suit, U désigne un ouvert de Stein de $\mathbb{C}^n$ et X_o un sous-espace analytique de U à singularités isolées définies par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_o$. On suppose que K est un compact contenant Sing X_o en son intérieur et privilégié pour $\mathcal{O}_{X_o}$.

Soient $I_o = B(K, \mathcal{I}_o)$ le point de $\mathcal{G}_K$ défini par X_o et T_K l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{G}_K$ en I_o.

3) Soient $(f_1, \dots, f_p)$ des générateurs de $\mathcal{I}_o$ au voisinage de K et $(z_1, \dots, z_n)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^n$. On considère

(1) $\quad \mathcal{T}_1 = \mathrm{coker}[\mathcal{O}^n_{X_o} \xrightarrow{J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_u}(\mathcal{I}_o, \mathcal{O}_{X_o})]$

où J est défini par

$$J(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(f_i) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \frac{\partial f_i}{\partial z_s} \quad .$$

On sait [3] que $\mathcal{T}_1$ est concentré sur Sing X_o et que $\Gamma(U,\mathcal{T}_1)$ classe les déformations infinitésimales de X_o .

4) Soient $X \xrightarrow{\pi} S$, et $X' \xrightarrow{\pi'} S$ deux déformations de X . On dit qu'elles sont localement isomorphes s'il existe un voisinage W (resp. W) de $\pi^{-1}(s_o)$ (resp.($\pi'^{-1}(s_o)$) et un S-isomorphe de W sur W' .

On note Def_{X_o} le foncteur contravariant associant à tout germe d'espace analytique A l'ensemble des classes d'isomorphie locale de déformations de X au-dessus de A .

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME.- Il existe : un germe d'espace analytique de dimension finie S,s_o , un ouvert U_1 de $\mathbb{C}^n$ contenant K et un sous-espace X de $S \times U_1$ plat sur S , tels que

(i) $X \longrightarrow S$ soit une déformation semi-universelle de

$$C_o = \coprod_{x \in \mathrm{Sing}\, X_o} X_{o,x} \quad .$$

(ii) Pour tout point s de S assez voisin de s_o

(a) $X \longrightarrow S$ est une déformation verselle de

$$C(s) = \coprod_{x \in \mathrm{Sing}\, X(s)} X(s),x \quad .$$

(b) Pour toute immersion de germes d'espaces analytiques $B \longrightarrow B'$ le morphisme

$$\mathrm{Hom}(B',S) \longrightarrow \mathrm{Def}_{C(S)}(B') \times_{\mathrm{Def}_{C(S)}(B)} \mathrm{Hom}(B,S)$$

est surjectif.

N.B. Le fait que les singularités soient isolées n'est utilisé que pour montrer que $\mathrm{Supp}\,\mathcal{T}_1$ est fini et que K est privilégié pour $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{I}_o, \mathcal{O}_{X_o})$, $q > 0$.

§ 2. Quelques lemmes.

LEMME 1 ([3] Théorème 4.11).- Soit A un espace analytique réduit à un point. Pour tout couple d'ouvert de Stein (U_1, U_2) contenus dans U et tels que

$$\mathrm{Sing}\, X_o \subset U_1 \subset U_2$$

le morphisme naturel $\mathrm{Def}_{X_o \cap U_2}(A) \longrightarrow \mathrm{Def}_{X_o \cap U_1}(A)$ est surjectif.

Soient B' un espace analytique ponctuel et B un sous-espace défini par un idéal $\mathcal{J}$ de carré nul. Soient $X \longrightarrow B$ une déformation de $X_o \cap U_2$ et $Y' \longrightarrow B'$ une déformation de $X_o \cap U_1$ telles que $Y_{|B}$ et X coïncident dans $B \times U_1$. Il suffit de montrer l'existence d'une déformation $X' \longrightarrow B'$ de $X_o \cap U_2$ telle que

$$(*) \quad \begin{cases} X' \cap U_1 = Y' \\ X'_{|B} = X \end{cases}$$

le lemme en résultant par récurrence sur la longueur de A .

Soit $\{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement de Stein de $X_o \cap U_2 - \mathrm{Sing}\, X_o$. On pose

$$V_o = X_o \cap U_1 \quad , \qquad I = J \cup \{0\} \ .$$

Pour tout i dans J , $X_o \cap V_i$ étant lisse, il existe une déformation $X'_i \longrightarrow B'$ prolongeant $X_{|V_i} \longrightarrow B$. De plus, pour tout couple (i,j) dans $I \times I$, $X_o \cap V_i \cap V_j$ étant lisse, il existe un isomorphisme

$$\tau_{ij} : X'_{ij} \longrightarrow X'_{ji}$$

tel que $\tau_{ij|B} = \mathrm{Id.}$ de V_{ij}

(on note $X'_{ij} = X'_i \cap X'_j$ si (i,j) est dans $J \times J$ et $X'_{oj} = X'_{jo} = Y' \cap X'_j$ si j est dans J. Soient $\Theta = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_o}}(\Omega^1_{X_o}, \mathcal{O}_{X_o})$ et l la longueur de j.

On définit une classe de cohomologie dans $H^2(X_o, \Theta^l)$ en posant

$$U_{ijk} \longrightarrow \tau_{ij}\tau_{ik}^{-1}\tau_{jk} .$$

Comme X_o est de Stein, $H^2(X_o, \Theta^l) = 0$ et on peut modifier les isomorphismes τ_{ij} de façon à recoller les X'_i en une déformation X' vérifiant (*).

LEMME 2.- <u>Au voisinage de</u> I_o, G_K <u>peut être plongé dans son espace tangent de Zariski</u>.

a) Soit $f : E,o \longrightarrow F,o$ un germe d'application analytique entre deux espaces de Banach tel que T_of soit direct ; alors $X = f^{-1}(0)$ se plonge dans T_oX au voisinage de 0 : en effet, si p désigne la projection de F sur $\mathrm{Im}\, T_of$ parallèlement à un supplémentaire topologique de $\mathrm{Im}\, T_of$, X est plongé dans la variété $(p \circ f)^{-1}(0)$.

b) Soient s et p deux entiers et $\mathcal{G}(n,p)$ l'espace analytique banachique des suites exactes de $B(K)$-modules

$$B(K)^s \xrightarrow{u} B(K)^p \xrightarrow{v} B(K)$$

u et v étant des morphismes directs d'espaces de Banach. L'application $\beta : \mathcal{G}(n,p) \longrightarrow G_K$ telle que

$$\beta(u,v) = \mathrm{Im}\, v$$

est un morphisme lisse ([1], §4, cor. prop. 2). D'autre part, on vérifie à l'aide de a) et de ([1], §4) que $\mathcal{G}(n,p)$ se plonge dans son espace tangent de Zariski. On en déduit alors, par l'intermédiaire de β un plongement de $\mathcal{G}_K$ dans T_K.

LEMME 3.- <u>Soient</u> X <u>un espace analytique à singularités isolées et</u> K <u>un compact</u> $\mathcal{O}_{X_o}$ <u>-privilégié tel que</u>

$$\operatorname{Sing} X_o \subset \mathring{K} .$$

<u>Alors pour tout</u> $q \geq 0$, K <u>est</u> $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_u}(\mathcal{I}_o, \mathcal{O}_{X_o})$ <u>-privilégié.</u>

C'est une conséquence de (4) et du fait que les $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_u}(\mathcal{I}_o, \mathcal{O}_{X_o})$ sont localement $\mathcal{O}_{X_o}$-libres sur X_o -Sing X_o.

Pour montrer le dernier point, on suppose que 0 est un point régulier de X_o et que

$$\forall i \in \{1,\dots,p\} , \qquad f_i(z) = z_i$$

le complexe de Koszul donne une résolution L de $\mathcal{O}_{X_o,0}$ telle que si $L_i = \mathcal{O}_{u,o}^{r_i}$, $d_i : L_i \longrightarrow L_{i-1}$ vérifie

$$\operatorname{Im} d_i \subset \mathcal{I}^{r_i} .$$

Alors
$$d_{i+1}{}^* : \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\{x\}}(L_i, \mathcal{O}_{X_{o,o}}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\{x\}}(\operatorname{Im} d_{i+1}, \mathcal{O}_{X_{o,o}})$$

est l'application nulle. Il en résulte que les $\operatorname{Ext}^q_{\mathbb{C}\{x\}}(\mathcal{I}_o, \mathcal{O}_{X_{o,o}})$ sont $\mathcal{O}_{X_{o,o}}$-libres.

LEMME 4.- <u>Soient</u> X_o <u>un espace analytique à singularités isolées et</u> K <u>un compact</u> $\mathcal{O}_{X_o}$<u>-privilégié contenant</u> Sing X_o <u>en son intérieur. Alors le complexe d'espaces de Banach déduit de</u> (1)

$$B(K,\mathcal{O}_{X_o})^n \xrightarrow{J} \operatorname{Hom}_{B(K)}(B(K,\mathcal{I}_o), B(K,\mathcal{O}_{X_o})) \xrightarrow{\pi} B(K,\mathcal{T}_1) \longrightarrow 0$$

<u>est exact direct.</u>

En effet, on déduit du lemme 3 que le morphisme naturel d'espaces de Banach

$$B(K, Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{I}_o, \mathcal{O}_{X_o})) \longrightarrow Hom_{B(K)}(B(K,\mathcal{I}_o), B(K,\mathcal{O}_{X_o}))$$

est un isomorphisme.

De plus, il résulte de (4) que K est $\mathcal{T}_1$ -privilégié.

§ III.

Soit $\varphi_o = (z_1, \ldots, z_n)$ l'élément de $B(K)$ défini par les coordonnées de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble

$$B(K,U) = \{\varphi \in B(K)^n \mid \varphi(K) \subset U\}$$

est un voisinage de φ_o dans $B(K)^n$.

On note Φ l'application $(\varphi, z) \longrightarrow \varphi(z)$ de $B(K,U) \times K$ dans U et $\chi : B(K) \longrightarrow B(K, \mathcal{O}_{X_o})$ l'application canonique.

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> S, s_o <u>un germe d'espace analytique de dimension finie ou non et</u> X <u>un sous-espace analytique</u> S-<u>anaplat de</u> $S \times U$ <u>tel que</u> $X(s_o) = X_o$.

(i) <u>Il existe un voisinage</u> W <u>de</u> φ_o <u>dans</u> $B(K,U)$ <u>et un morphisme canonique</u>

$$\sigma : S, s_o \times W \longrightarrow \mathcal{G}_K$$

<u>tel que</u>

$$(\sigma \times I_K)^* \mathcal{R}_K = (I_S \times \Phi)^* X \quad .$$

(ii) <u>Si</u> $T\sigma$ <u>désigne l'application linéaire tangente à</u> σ <u>en</u> (s_o, φ_o), <u>on a</u> :

(a) $T\sigma_{|\{0\} \times B(K)^n} = J \circ \chi$.

(b) $\pi \circ T\sigma : TS \longrightarrow B(K, \mathcal{T}_1)$ <u>est le morphisme de Kodaira</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit $\mathcal{L}$. une résolution $\mathcal{O}_{S \times U}$ -libre de type fini de $\mathcal{O}_X$. Par hypothèse,

pour tout s assez voisin de s_o , $\mathcal{L}_\bullet(s)$ est une résolution de $\mathcal{O}_{X(s)}$.
Pour construire σ , on définit un complexe de fibrés analytiques banachiques sur $S \times W_1$ de la manière suivante : si $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_i}$ et si $q_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1}$ est donné par

$$q_i = (Q^i_{\alpha\beta})_{\substack{\alpha \in \{1,\ldots,r_i\} \\ \beta \in \{1,\ldots,r_{i-1}\}}} \quad , \qquad Q^i_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(S \times U) \quad .$$

On pose

$$\tilde{\mathcal{L}}_i = \mathcal{O}^{r_i}_{S \times W \times U}$$

et on note $B(K,\tilde{\mathcal{L}}_i)$ le fibré banachique trivial sur $S \times W_1$ associé à $\tilde{\mathcal{L}}_i$.
Soit alors

$$\tilde{q}_i : B(K,\mathcal{L}_i) \longrightarrow B(K,\mathcal{L}_{i-1})$$

le morphisme de fibrés défini par

$$\tilde{q}_i = (\widetilde{Q^i_{\alpha\beta}})_{\alpha\beta} \quad , \quad \tilde{Q}^i_{\alpha\beta} : S \times W \longrightarrow B(K)$$

avec

$$\tilde{Q}^i_{\alpha\beta}(s,\varphi)(z) = Q^i_{\alpha\beta}(s,\varphi(z))$$

le complexe de fibrés banachiques $B(K,\tilde{\mathcal{L}}_\bullet)$ est exact direct en (s_o,φ_o) donc sur un voisinage $S,s_o \times W$ de (s_o,φ_o) ; il en résulte un morphisme canonique ([1])

$$\sigma : S,s_o \times W \longrightarrow G_K$$

tel que l'assertion (1) soit vraie.

<u>Remarque</u>.- Ensemblistement σ associe à (s,φ) le sous-espace $\varphi^{-1}(X(s))$ de $\mathring{K}$.

- Pour démontrer (ii), on considère la suite exacte directe

$$B(K,\mathcal{L}_2(s_o)) \xrightarrow{p_2} B(K,\mathcal{L}_1(s_o)) \xrightarrow{p_1} B(K) \xrightarrow{p_o} B(K,\mathcal{O}_{X_o}) \longrightarrow 0$$

et l'application r :

$$r : \mathrm{Hom}_{B(K)}(B(K,\mathcal{L}_2(s_o)) , B(K,\mathcal{L}_1(s_o)) \times \mathrm{Hom}_{B(K)}(B(K,\mathcal{L}_1(s_o) , B(K)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{B(K)}(B(K,\mathcal{L}_2(s_o)) , B(K))$$

définie par

$$r(u,v) = p_1 \circ v + v \circ p_2 \quad .$$

Il résulte de [2] que $T\sigma = h_1 \circ h_2$ où

$$h_1 : \ker r \longrightarrow \mathrm{Hom}(B(K,J_o) , B(K,\mathcal{O}_{X_o}))$$

est l'application naturelle et où

$$h_2 : TS \times B(K)^n \longrightarrow \ker r$$

est définie par

$$h_2(t,\Psi) = \left(\frac{\partial q_2}{\partial z}(z,0).\Psi + \frac{\partial q_2}{\partial t}(z,0).t \, , \, \frac{\partial q_1}{\partial z}(z,0).\Psi + \frac{\partial q_1}{\partial t}(z,0).t \right)$$

avec, si $\Psi = (\Psi_1,\dots,\Psi_n)$

$$\forall i = 1,2 \quad , \quad \frac{\partial q_i}{\partial z}(z,0).\Psi = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial z_j} . \Psi_j \right)_{\alpha,\beta}$$

et si S est de dimension finie et $t = (t_1,\dots,t_k)$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}(z,0).t = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial Q^i_{\alpha\beta}}{\partial t_j} \circ t_j \right)_{\alpha,\beta} \quad .$$

Alors $T\sigma(t,\Psi) : B(K,J_o) \longrightarrow B(K,\mathcal{O}_{X_o})$ est déterminé par

$$\forall l \in \{1,\dots,r_1\} \quad , \quad T\sigma(t,\Psi)(Q^1_l(z,0)) = p_o\left(\frac{\partial Q^1_l}{\partial z}(z,0).\Psi + \frac{\partial Q^1_l}{\partial t}(z,0).t \right)$$

d'où l'on déduit les assertions (ii) et (iii) ; ce qui termine la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE.- <u>On suppose, donnée au voisinage de</u> 0 , <u>une sous-variété</u> Σ_K <u>de dimension</u> k <u>de</u> T_K <u>telle que</u> $T_o\Sigma_K$ <u>soit un supplémentaire de</u> $\mathrm{Im}\, J$ <u>dans</u> T_K . <u>Alors, pour toute déformation</u> $X \longrightarrow S$ <u>de</u> X_o , <u>il existe deux morphismes</u> $h : S \longrightarrow W$ <u>et</u> $\mathcal{O} \quad S \longrightarrow \Sigma_K \cap G_K$ <u>tels que le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "(I_S,\, h)"] \arrow[dr, "\mathcal{O}"'] & S \times W \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{G}_K \\ & \Sigma_K \cap \mathcal{G}_K \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif et que

$$(\mathcal{O} \times I_{\overset{\circ}{K}})^* \mathcal{R}_K = (I_S \times \Phi \ (I_{S \times \overset{\circ}{K}}, h))^* X_{|S \times \overset{\circ}{K}} \ .$$

C'est une conséquence de la proposition 1 et du théorème des fonctions implicites. Il existe au voisinage de 0 un isomorphisme $\alpha : \Sigma_K \times \operatorname{Im} J \longrightarrow T_K$ tel que

$$\alpha_{|\Sigma_K} = \mathrm{Id.} \quad , \quad T\alpha_{|\{0\} \times \operatorname{Im} J} = \mathrm{Id.} \ .$$

Soit $\tilde{\sigma} : TS \times W \longrightarrow T_K$ un morphisme prolongeant σ , alors

$$p = pr_2 \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\sigma} : TS \times W \longrightarrow \operatorname{Im} J$$

est une submersion et $\Gamma = p^{-1}(0)$ est une sous-variété de $TS \times W$ isomorphe à TS . Il suffit alors de prendre pour h le morphisme admettant pour graphe $\Gamma \cap S \times W$ et $\mathcal{O} = \sigma \circ (I_{s,h})$.

Remarque.- L'espace analytique de dimension finie $\Sigma_K \cap \mathcal{G}_K$ muni de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{K|\Sigma_K \cap \mathcal{G}_K}$ est "presque" semi-universel en ce sens que pour toute déformation $X \longrightarrow S$ de X_o définie au voisinage de K , il existe un morphisme $\mathcal{O} : S \longrightarrow \Sigma_K \cap \mathcal{G}_K$ tel que X et $(\mathcal{O} \times I)^* \mathcal{R}$ soient des déformations localement isomorphes dans $S \times \overset{\circ}{K}$.

§ 4. Etude locale de $\mathcal{G}_K$.

Soient L, K et K' trois compacts $\mathcal{O}_{X_o}$-privilégiés tels que

$$\operatorname{Sing} X_o \subset L^o \subset L \subset\subset K \subset\subset K' \ .$$

Compte tenu du lemme 4, soit E_K un sous-espace $\mathbb{C}$-direct de $B(K)$ isomorphe par $\chi \circ J$ à $\mathrm{Im}\, J$. On définit $E_{K'}$ et E_L de la même manière et on identifie $T_{K'}$ à $\mathbb{C}^k \times E_{K'}$. Soit

$$S_{K'} = \mathcal{G}_{K'} \cap \mathbb{C}^k \times \{0\} .$$

Soient alors $\rho' : \mathcal{G}_{K'} \longrightarrow \mathcal{G}_K$ et $\rho : \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathcal{G}_L$ les morphismes canoniques ([1]) et $\tilde{\rho}' : T_{K'} \longrightarrow T_K$, $\tilde{\rho} : T_K \longrightarrow T_L$ des prolongements de ρ et ρ' définis au voisinage de 0 . On pose

$$\Sigma_K = \tilde{\rho}'(\mathbb{C}^k \times \{0\},0,0) \quad , \qquad S_K = \Sigma_K \cap \mathcal{G}_K$$
$$S_L = \mathcal{G}_L \cap \tilde{\rho}(\Sigma_K)$$
$$\mathcal{X}_K = \mathcal{R}_{K|S_K} \times \mathring{K} \quad , \qquad \mathcal{X}_L = \mathcal{R}_{L|S_L} \times L^o \ .$$

On déduit de la proposition 1 et de son corollaire :

- un morphisme canonique de germes $f : S_K \times E_L \longrightarrow \mathcal{G}_L$ tel que Tf soit un isomorphisme et que les déformations $(f \times I_{L^o})^*\mathcal{R}_L \longrightarrow S_K$ et $\mathcal{X}_{K|S_K \times L^o} \longrightarrow S_K$ soient localement isomorphes ;
- un morphisme $\mathcal{O} : \mathcal{G}_{K'} \longrightarrow S_K$ tel que $T\mathcal{O}_{|\mathbb{C}^k \times \{0\}} = \mathrm{Id}.\mathbb{C}^k$.

PROPOSITION 2.- <u>Au voisinage de</u> (s_o,φ_o) ,

(a) ρ <u>induit un isomorphisme</u> $i : S_K \longrightarrow S_L$ <u>tel que</u>

$$(i \times I_{L^o})^*\mathcal{X}_L = \mathcal{X}_{K|S_K} \times L^o \ .$$

(b) f <u>est un isomorphisme</u>.

Puisque Tf est un isomorphisme, f est un plongement au voisinage de (s_o,φ_o) . De plus, il résulte de l'universalité de $\mathcal{G}_K$ que

$$f_{|S_K \times \{0\}} = \rho_{|S_K}$$

et par conséquent ρ induit un plongement $i : S_K \longrightarrow S_L$. Le fait que i soit un isomorphisme résulte du paragraphe 2, lemme 1 et du

LEMME 5.- Soit A un voisinage infinitésimal de $i(s_o)$ dans S_L. Il existe un morphisme $\tau : A \longrightarrow S_K$ tel que $i \circ \tau$ soit tangent à l'identité.

En effet d'après le lemme 1, $X_{L|_A}$ se prolonge en une déformation de X_o ; il en résulte un morphisme canonique $j : A \longrightarrow \mathcal{G}_K$. Il suffit alors de prendre $\tau = \mathcal{O} \circ j$.

L'assertion (b) est une conséquence de (a) et du résultat suivant :

LEMME ([2], § 5 - lemme 1).- "Soient H un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^k$, U un voisinage de 0 dans un espace de Banach, $\mathcal{G}$ un sous-espace $\mathbb{C}$-analytique de $H \times U$. Posons $S = H \times \{0\} \cap \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ contient $S \times U$ au voisinage de 0 dans $H \times U$ "

COROLLAIRE.- Au voisinage de I_o, $\mathcal{G}_K$ est isomorphe au produit d'un espace de dimension finie par un ouvert d'espace de Banach.

§ 5. Démonstration du théorème.

Soient alors S un ouvert de S_K et V un voisinage de 0 dans E_L tels que $f : S \times V \longrightarrow \mathcal{G}_K$ soit un isomorphisme et que

$$\forall s \in S \quad , \quad \operatorname{Sing} X(s) \subset \overset{\circ}{K} \quad .$$

On pose

$$X = X_{K|_{S \times \overset{\circ}{K}}}$$

et on identifie dorénavant $S \times V$ et son image par f. On a alors

$$\mathcal{R}_K = (I_S \times \phi)^* X \quad .$$

Démonstration de l'assertion (i).

Soient $Y \longrightarrow B$ une déformation de C_o et L_1 un compact $\mathcal{O}_{X_o}$-

privilégié tels que Y soit défini au voisinage de $B \times L_1$ et que

$$\mathrm{Sing}\, X_o \subset L_1 \subset L^o \quad .$$

On définit E_{L_1}, S_{L_1} et X_{L_1} comme E_L, S_L et X_L et on note $i_1 : S_K \longrightarrow S_{L_1}$ l'isomorphisme déduit de la proposition 2. Il résulte du corollaire de la proposition 1 deux morphismes $h_1 : B \longrightarrow E_{L_1}$ et $\mathcal{O}_1 : B \longrightarrow S_{L_1}$ tels que

$$(\mathcal{O}_1 \times I_{L_1^o})^* X_{L_1} = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L_1^o , h_1))^* Y \quad .$$

Le morphisme $\mathcal{O}_2 = i_1^{-1}\ \mathcal{O}_1 : B \longrightarrow S$ vérifie donc

$$(\mathcal{O}_2 \times I_{L_1^o})^* X = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L_1^o , h_1))^* Y$$

ce qui démontre la versalité de $X \longrightarrow S$. La semi-universalité résulte de

$$\dim_{\mathbb{C}} T_{s_o} S = k \quad .$$

On remarque, de plus, que toute déformation de C_o se prolonge à $\mathring{K}$.

Démonstration de (ii) (a).

Soient s un point de S et $Y \longrightarrow B$ une déformation de $C(s)$. On peut supposer Y défini dans $B \times \mathring{K}$. Soit alors $f_1 : B \longrightarrow \mathcal{G}_L$ le morphisme canonique. Alors les deux morphismes

$$\tilde{f} = pr_1 \circ f_1 \ : B \longrightarrow S$$

$$\tilde{h} = pr_2 \circ f_1 \ : B \longrightarrow V$$

vérifient

$$(f \times I_L o)^* X = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L^o , \tilde{h}))^* Y \quad .$$

Démonstration de (iii) (b).

On suppose donné un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \hookrightarrow & B' \end{array}$$

un polycylindre $\mathcal{O}_{X_o}$ -privilégié $\dot{L}_1$ contenant $\dot{C}(s)$ et deux morphismes

$$f_1 : B \longrightarrow S$$

$$h_1 : B \longrightarrow W_{L_1}$$

tels que

$$(f_1 \times I_{L_1^o})^* X = (I_B \times \Phi \circ (I_B \times L_1^o , h_1))^* Y \quad .$$

Le morphisme composé

$$B \xrightarrow{(f_1,h_1)} S \times W_{L_1} \hookrightarrow \mathcal{G}_{L_1}$$

est le morphisme canonique.

D'autre part, on peut supposer Y' défini dans $B' \times \mathring{K}$, il en résulte un morphisme $g_2 : B' \longrightarrow \mathcal{G}_L$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}_{L_1} \\ B' \arrow[r, "g_2"] & \mathcal{G}_L \arrow[u, "\mathrm{can}"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. $\mathcal{G}_L$ étant toujours identifié à $S \times V$, $pr_1 \circ g_2$ prolonge f_1 et est le morphisme cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY - "Le problème des modules...", Ann. Instit. Fourier, XVI, I (1966).

[2] A. DOUADY - "Le problème des modules pour les variétés analytiques" d'après Kuranishi, Seminaire Bourbaki, I (1964/1965).

[3] D.S. RIM - "Formal deformation theory", S.G.A. (1971), exposé VI, Lecture notes n° 288, Springer-Verlag.

[4] G. POURCIN - "Polycylindres privilégiés", Séminaire E.N.S., 1971-1972.