Astérisque

C. Chambon
F. Combes
N. Dang Ngoc
M. Enock
A. Guichardet
F. Ledrappier
J. C. Marcuard
O. Maréchal
M. Samuélidès
J. L. Sauvageot
J. M. Schwartz
J. P. Thouvenot
Alain Guichardet (réd.)

Systèmes dynamiques non commutatifs

Astérisque, tome 13-14 (1974)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__13-14__1_0>

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SYSTEMES DYNAMIQUES NON COMMUTATIFS

Séminaire rédigé par A.Guichardet d'après des exposés faits au Séminaire Dang Ngoc - Guichardet 1972 - 1973 par C.Chambon, F.Combes, N.Dang Ngoc, M.Enock, A.Guichardet, F.Ledrappier, J.C.Marcuard, O. Maréchal, M.Samuélidès, J.L.Sauvageot, J.M.Schwartz, J.P.Thouvenot.

Table des matières

Première Partie : W^* - SYSTÈMES DYNAMIQUES

Chapitre I | GÉNÉRALITÉS

§ I.1. Définitions et notations.

(Voir aussi Appendice A, § A.7)

Etant donnée une W^* - algèbre $\underline{A}$, on appellera automorphismes de $\underline{A}$ les $*$ - automorphismes de $\underline{A}$ et on notera Aut $\underline{A}$ le groupe qu'ils forment ; un tel automorphisme est automatiquement isométrique et bicontinu pour la topologie ultra-faible. On note Int $\underline{A}$ le sous-groupe distingué de Aut $\underline{A}$ formé des automorphismes intérieurs, c'est-à-dire de la forme

$$a \longmapsto i_u(a) = u\, a\, u^{-1}$$

où u appartient à $\underline{U}(\underline{A})$, l'ensemble des éléments unitaires de $\underline{A}$. On munit toujours, sauf mention expresse du contraire, Aut $\underline{A}$ de la topologie de la convergence simple ultra-faible. On dit qu'un groupe G opère dans $\underline{A}$ par automorphismes si l'on s'est donné un morphisme de G dans Aut $\underline{A}$.

Lemme I.1. L'application canonique p de $\underline{U}(\underline{A})$ sur Int $\underline{A}$ est continue si l'on munit $\underline{U}(\underline{A})$ de la topologie ultra-faible ; si $\underline{A}$ peut être réalisée dans un espace hilbertien séparable (ce qui équivaut à dire que son prédual est séparable pour la topologie de la norme), $\underline{U}(\underline{A})$ et Int $\underline{A}$ sont des espaces polonais et p admet une section borélienne.

La première assertion est facile ; la seconde résulte de Dixmier [3], lemmes 3 et 4.

Notations diverses.

Etant donnée une W^* - algèbre $\underline{A}$ on notera $\underline{C}$ son centre, $\underline{E}$ ou $\underline{E}(\underline{A})$ l'ensemble des états normaux sur $\underline{A}$, $\underline{P}$ ou $\underline{P}(\underline{A})$ celui des poids normaux semi-finis (poids n.s.f.), $\underline{P}_f$ celui des poids normaux semi-finis fidèles (poids n.s.f.f.).

Un système dynamique (ou W^* - système dynamique, ou SD) est un couple $\underline{F} = (\underline{A}\ ,\ G)$ où G est un groupe opérant dans $\underline{A}$ par automorphismes ; on notera g.a ou g a l'action de $g \in G$ sur $a \in \underline{A}$; alors G opère aussi dans $\underline{E}$ et $\underline{P}$ par $(g.\varphi)(a) = \varphi\,(g^{-1}a)$; même chose pour $\underline{A}_*$. On notera $\underline{I}$ ou $\underline{A}^G$ l'ensemble des éléments G-invariants de $\underline{A}$, $\underline{A}_*^G$ l'ensemble analogue pour $\underline{A}_*$; même chose pour $\underline{C}^G$, $\underline{E}^G$, $\underline{P}^G$.

Pour tout $a \in \underline{A}$ on note G.a l'orbite de a sous l'action de G, co G.a son enveloppe convexe, $\overline{\text{co G.a}}$ son enveloppe convexe ultra-faiblement fermée.

On dit que G opére ergodiquement ou que le système $\underline{F}$ est ergodique si $\underline{I}$ est réduit aux scalaires ; on dit que $\underline{F}$ est centralement ergodique si G opère ergodiquement dans $\underline{C}$.

Pour tout projecteur $e \in \underline{I}$, G opère naturellement dans la sous-algèbre $e\,\underline{A}\,e$; on obtient ainsi un système dynamiquenoté $(e\,\underline{A}\,e\ ,\ G)$ ou $\underline{F}_e$ et appelé induit.

Remarque I.1. Il serait intéressant de définir un système induit $\underline{F}_e$ même lorsque e n'est pas invariant, comme cela se fait lorsque $\underline{A}$ est commutative (cf. § B.7) ou que $G = \text{Int}\,\underline{A}$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

- si φ est un poids n.s.f. invariant, son support appartient à $\underline{I}$; si φ est fidèle, les automorphismes σ_t^φ permutent à G et l'algèbre $\underline{A}_\varphi$ des éléments σ_t^φ invariants est G-invariante ;

- si $\varphi \in \underline{A}_*^G$, sa valeur absolue $|\varphi|$ et l'élément partiellement isométrique u tel que $\varphi = |\varphi| .u$ sont G-invariants ; la partie réelle et la partie imaginaire de φ sont G-invariantes;
- si φ est hermitienne, φ^+ et φ^- sont G-invariants.

On dit que G <u>opère presque librement dans</u> $\underline{C}$ si pour tout élément g de G distinct de l'élément neutre e, et pour tout projecteur non nul p de $\underline{C}$, il existe un projecteur non nul p' de $\underline{C}$, majoré par p et vérifiant $g\, p'.p' = 0$.

§ I.2. Systèmes dynamiques concrets, représentations, morphismes, produits croisés.

Définitions. Un système dynamique $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ est dit concret si $\underline{A}$ opère dans un espace hilbertien H et si on a une représentation unitaire U de G dans H telle que $g.a = U_g\, a\, U_g^{-1}$ pour tout $a \in \underline{A}$ et tout $g \in G$; un tel système sera souvent noté $(\underline{A}, G, H, U)$; alors $U_g \underline{A}' U_g^{-1} = \underline{A}'$ $\forall\ g \in G$. Un vecteur de H sera dit totalisateur et invariant s'il est totalisateur pour $\underline{A}$ et invariant par les U_g.

On appelle représentation d'un système dynamique $(\underline{A}, G)$ dans une W^*- algèbre $\underline{B}$ tout couple (π, U) où π est un morphisme normal de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ et U un morphisme de G dans $\underline{U}(\underline{B})$ vérifiant

$$\pi(g.a) = U_g\, \pi(a)\, U_g^{-1} \qquad \forall\ a \in \underline{A}\ ,\ g \in G\ .$$

On appelle représentation de $(\underline{A}, G)$ dans un espace hilbertien H toute représentation de $(\underline{A}, G)$ dans $\underline{L}(H)$; on obtient ainsi un système dynamique concret. Tout poids n.s.f. G-invariant sur $\underline{A}$ définit canoniquement, via la construction de Gelfand-Segal, une représentation de $(\underline{A}, G)$; si le poids est fini, le système dynamique concret associé admet un vecteur totalisateur et invariant.

Soient $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ et $\underline{F}' = (\underline{A}', G)$ deux systèmes dynamiques avec même groupe G ; on appelle morphisme de $\underline{F}$ dans $\underline{F}'$ tout morphisme normal de $\underline{A}$ dans $\underline{A}'$ tel que $\pi(g\, a) = g(\pi(a))$; on obtient alors un SD $(\pi(\underline{A}), G)$ appelé image de π ; un tel SD est aussi appelé quotient de $\underline{F}$. Le support e de π appartient à $\underline{C}^G$; le morphisme $(\underline{A}, G) \longrightarrow (\pi(\underline{A}), G)$ est équivalent au morphisme $a \longmapsto a\, e$ de $(\underline{A}, G)$ sur $(\underline{A}\, e, G)$; pour que le SD $(\underline{A}\, e, G)$ soit centralement ergodique il faut et il suffit que e soit un projecteur minimal de $\underline{C}^G$; on en déduit la

Proposition I.1. Soient π_1 et π_2 des morphismes de $\underline{F}$ dont les images sont des systèmes dynamiques centralement ergodiques ; alors les supports de π_1 et π_2 sont ou égaux, ou orthogonaux.

Corollaire I.1. Soient (π_1, U_1) et (π_2, U_2) des représentations de $\underline{F}$ dans des espaces hilbertiens ; si les systèmes dynamiques concrets associés sont centralement ergodiques, π_1 et π_2 sont ou quasi-équivalentes, ou disjointes.

On appellera isomorphisme entre systèmes dynamiques tout morphisme bijectif.

Produits croisés.

Soit encore $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ un système dynamique ; soit ρ une représentation normale fidèle de $\underline{A}$ dans un espace hilbertien K ; posons

$$H = l^2(G ; K) \sim l^2(G) \otimes K ;$$

définissons des opérateurs $\pi(a)$ et U_g dans H par

$$(\pi(a).x)_h = \rho(h^{-1}a).x_h \tag{1}$$

$$(U_g.x)_h = x_{g^{-1}h} \tag{2}$$

pour tout $x = (x_h) \in l^2(G ; K)$; on a donc $U_g = V_g \otimes I$ où V est la représentation régulière gauche de G. Le couple (π, U) est une représentation de $\underline{F}$ dans H ; notons $\underline{B}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les $\pi(a)$ et les U_g.

Considérons maintenant une autre représentation normale fidèle ρ' de $\underline{A}$ dans un autre espace K' et construisons de même π', U', $\underline{B}'$; il existe un isomorphisme et un seul de $\underline{B}$ sur $\underline{B}'$ transformant $\pi(a)$ en $\pi'(a)$ et U_g en U'_g [l'unicité est évidente ; pour l'existence, d'après le théorème sur la structure des isomorphismes d'algèbres de von Neumann (cf. Dixmier [1], ch.I, § 4) on peut supposer que ρ' est soit un multiple de ρ, soit une sous-représentation de ρ quasi-équivalente à ρ, et dans les deux cas la vérification est facile].

Nous avons donc associé canoniquement au système dynamique $\underline{F}$ une W^*- algèbre $\underline{B}$ et une représentation (π, U) de $\underline{F}$ dans $\underline{B}$ tels que les $\pi(a)$ et U_g engendrent $\underline{B}$; on dit que $\underline{B}$ est le <u>produit croisé</u> de $\underline{A}$ par G et on le note $W^*(\underline{A},G)$; (π, U) est appelée <u>représentation canonique</u> de $\underline{F}$ dans $W^*(\underline{A},G)$; π est injective. On voit ainsi que tout système dynamique est isomorphe à un système dynamique concret.

Si on part d'un système dynamique concret $(\underline{A}, G, K, u)$ on peut encore réaliser le produit croisé de la façon suivante : c'est l'algèbre de von Neumann dans $l^2(G;K)$ engendrée par les opérateurs $\pi'(a)$ et U'_g définis par

$$(\pi'(a).x)_h = a.x_h$$

$$(U'_g.x)_h = u_g.x_{g^{-1}h} \quad ;$$

en effet l'opérateur T dans $l^2(G;K)$ défini par $(T.x)_h = u_h.x_h$ transforme (π, U) en (π', U'). De ce point de vue le morphisme canonique de $\underline{A}$ dans $W^*(\underline{A},G)$ n'est autre que l'ampliation $a \longmapsto I \otimes a$.

<u>Remarque</u> I.2. Il serait intéressant de définir un "produit croisé catégoriel" comme solution d'un problème universel naturel, et de déterminer dans quels cas il coïncide avec le "produit croisé concret" défini ci-dessus ; une théorie de ce type a été faite pour les produits tensoriels dans Guichardet [6].

Proposition I.2. Soient $\underline{F} = (\underline{A},G)$ un système dynamique, $\underline{B} = W^*(\underline{A},G)$ le produit croisé, $(\pi\ ,\ U)$ la représentation canonique de $\underline{F}$ dans $\underline{B}$; on identifie $\underline{A}$ à une sous-algèbre de $\underline{B}$ au moyen de π . On peut identifier $\underline{B}$ à un ensemble d'applications de G dans $\underline{A}$ de façon que si on note $b(.)$ l'application associée à un élément b de $\underline{B}$ on ait les propriétés suivantes :

(i) $(k_1b_1 + k_2b_2)(g) = k_1\ b_1(g) + k_2\ b_2(g) \quad \forall\ k_1,k_2 \in \mathbb{C}\ ,\ b_1,b_2 \in \underline{B}$.

(ii) $(b\ b')(g) = \sum_{h\in G} b(g\ h^{-1}).\ gh^{-1}(b'(h))$ avec convergence ultra-faible.

(iii) $b^*(g) = g.b(g^{-1})^*$.

(iv) $(\pi\ (a))(g) = a$ si $g = e$ et 0 sinon, pour tout $a \in \underline{A}$.

(v) $U_h(g) = I$ si $g = h$ et 0 sinon, pour tout $h \in G$.

(vi) Pour tout g l'application $b \longmapsto b(g)$ de $\underline{B}$ dans $\underline{A}$ est u.f.continue.

(vii) Si l'on pose $E(b) = b(e)$ pour tout $b \in \underline{B}$, E est une espérance conditionnelle fidèle de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ qui vérifie les relations suivantes :

$$E(U_g\ b\ U_g^{-1}) = g.E(b)$$

$$E(b^*\ b) = \sum_{g\in G} g^{-1}\ (b(g)^*\ b(g)) \quad \text{(convergence ultra-faible)}$$

$$E(b\ b^*) = \sum_{g\in G} b(g)\ b(g)^* \quad \text{(convergence ultra-faible).}$$

Démonstration. D'après ce qui a été dit avant la remarque I.2 on peut supposer que $\underline{F}$ est de la forme $(\underline{A},\ G,\ K,\ u)$ et écrire $(\pi\ (a).x)_h = a.x_h$, $(U_g.x)_h = u_g.x_{g^{-1}h}$; d'autre part on peut écrire $l^2(G;K) = \bigoplus_{g\in G} K_g$ avec des isomorphismes J_g de K sur K_g : $x \longmapsto x \otimes \delta_g$. Tout opérateur T dans $l^2(G;K)$ est représenté par la matrice $(T_{g,h})$ où $T_{g,h} = J_g^*\ T\ J_h \in \underline{L}(K)$; on a

$$(\pi(a))_{g,h} = a \text{ si } g = h \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

$$(U_g)_{h,k} = u_g \text{ si } h = gk \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout $b \in \underline{B}$ il existe une famille (a_g) d'éléments de $\underline{A}$ telle que l'on ait $b_{g,h} = a_{gh^{-1}}\, u_{gh^{-1}}$ [ceci est vrai si b est de la forme $\pi(a)\, U_g$ et se conserve par combinaison linéaire et passage à la limite ; voir aussi Dixmier [1], ch.I, § 9] ; on obtient l'application $b(.)$ de l'énoncé en posant $b(g) = a_g$ et on vérifie facilement les propriétés (i) à (vii).

<u>Proposition</u> I.3. (Zeller-Meier [1]) On reprend les notations de la prop.I.2 et on suppose que G opère presque librement dans $\underline{C}$. Alors

(i) Le commutant de $\underline{C}$ dans $\underline{B}$ est égal à $\underline{A}$;

(ii) le centre de $\underline{B}$ est égal à $\underline{C}^G$ (noter qu'il le contient toujours) ;

(iii) $\underline{B}$ est un facteur si et seulement si G opère ergodiquement dans $\underline{C}$;

(iv) si $\underline{A}$ est commutative, elle est commutative maximale dans B .

<u>Démonstration</u>.

(i) Soit b un élément de $\underline{B}$ commutant à $\underline{C}$; la relation $bc = cb \ \ \forall c \in \underline{C}$ entraîne $gc.b(g) = c.b(g) \ \ \forall g \in G$; il suffit de montrer que $b(g)$ est nul pour tout $g \neq e$. Supposons le contraire ; soit p le support de $b(g)$ dans $\underline{C}$, p' un projecteur non nul de $\underline{C}$ majoré par p et tel que $gp'.p' = 0$; comme $p'.b(g)$ est non nul on a

$$0 \neq p'.b(g) = p'\, p'\, b(g) = p'.gp'.b(g)$$

ce qui est contradictoire.

(ii) Soit b un élément du centre de $\underline{B}$; permutant à $\underline{C}$, b appartient à $\underline{A}$; permutant à $\underline{A}$, il appartient à $\underline{C}$; enfin comme b permute aux U_g on a $gb = U_g\, b\, U_g^{-1} = b$, c'est-à-dire $b \in \underline{C}^G$.

Les autres assertions sont maintenant immédiates.

§ I.3. Systèmes dynamiques avec groupes topologiques.

On suppose ici que G est un groupe topologique et opère continûment dans $\underline{A}$, i.e. que le morphisme considéré de G dans Aut $\underline{A}$ est continu ; quand on parlera d'une représentation (π , U) de $\underline{F}$, on supposera toujours que U est continue. On peut encore définir un produit croisé $W^*(\underline{A},G)$ en supposant G localement compact : on choisit une représentation normale fidèle ρ de $\underline{A}$ dans un espace hilbertien K, on pose

$$H = L^2(G, dg ; K) \sim L^2(G, dg) \otimes K$$

où dg est une mesure de Haar à gauche sur G, et on définit $\pi(a)$ et U_g par les formules (1) et (2) ; le seul point délicat est le fait que π soit normale ; pour le montrer il suffit de vérifier que pour toute famille (a_i) dans $\underline{A}$, filtrante décroissante et tendant u.f. vers 0, $\pi(a_i)$ tend u.f. vers 0, c'est-à-dire que $(\pi(a_i)\, x \mid x)$ tend vers 0 pour tout $x \in H$; grâce à l'équicontinuité des $\pi(a_i)$, on peut supposer que x est une application continue à support compact de G dans K ; alors pour tout g , le nombre $(\rho(g^{-1}a_i)\, x_g \mid x_g)$ tend vers 0 , et comme il s'agit de fonctions continues à supports compacts, le théorème de Dini montre que la convergence est uniforme par rapport à g ; on a donc

$$(\pi(a_i)\, x \mid x) = \int (\rho(g^{-1}a_i)\, x_g \mid x_g)\, dg \longrightarrow 0 .$$

On construit de cette façon canoniquement une W^* - algèbre $W^*(\underline{A};G)$ et une représentation (π , U) de $\underline{F}$ dans $W^*(\underline{A},G)$ telle que les $\pi(a)$ et U_g engendrent $W^*(\underline{A},G)$. Ceci montre en particulier que tout système dynamique avec groupe localement compact est isomorphe à un système dynamique concret de la forme $(\underline{A}, G, H , U)$ avec représentation U continue.

Proposition I.4 (Guichardet - Kastler [1]) Considérons un système dynamique

$(\underline{A}, G)$ où $\underline{A}$ opère dans un espace hilbertien séparable K et où G est localement compact séparable et opère continûment dans $\underline{A}$; considérons une désintégration $K = \int_T^{\oplus} K_t . d\mu(t)$ où T est un espace borélien standard et μ une mesure borélienne positive bornée sur T ; on suppose que $\underline{A}$ est décomposable, avec des composantes $\underline{A}_t$, et que l'algèbre des opérateurs diagonalisables est contenue dans $\underline{C}^G$. Alors pour tout $t \in T$ on peut faire opérer continûment G dans $\underline{A}_t$, d'une façon unique aux ensembles négligeables près, de telle sorte que l'on ait

$$g.a = \int^{\oplus} g(a_t).d\mu(t) \quad \forall \quad a = \int^{\oplus} a_t.d\mu(t) \in \underline{A} .$$

De plus on a $\underline{C}^G = \int^{\oplus} (\underline{C}_t)^G.d\mu(t)$ où $\underline{C}_t$ désigne le centre de $\underline{A}_t$.

Principe de la démonstration (pour plus de détails on renvoie à l'article cité) : d'après ce qui précède on peut supposer $\underline{F}$ concret et implémenté par une représentation continue U ; comme les U_g permutent aux opérateurs diagonalisables, on peut désintégrer U en des représentations U_t ; les opérateurs $(U_t)_g$ conservent $\underline{A}_t$ et définissent l'action cherchée de G dans $\underline{A}_t$.

<u>Corollaire</u> I.2. Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus il existe une désintégration $\underline{A} = \int_T^{\oplus} \underline{A}_t \, d\mu(t)$, avec un espace mesuré convenable (T, μ), et pour tout t une action continue de G dans $\underline{A}_t$ de façon que l'on ait $g\, a = \int^{\oplus} g(a_t).d\mu(t)$ pour tout $a \in \underline{A}$, et que le système $(\underline{A}_t, G)$ soit centralement ergodique pour presque tout t.

Il suffit de choisir une désintégration telle que l'algèbre des opérateurs diagonalisables soit égale à $\underline{C}^G$.

<u>Remarque</u> I.3. Ce corollaire montre que, grosso modo, tout système dynamique peut être désintégré en des systèmes centralement ergodiques ; il semble malheureusement impossible de désintégrer un SD en SD ergodiques.

§ I.4. Systèmes dynamiques finis, semi-finis, etc.

Définitions. Un système dynamique $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ est dit fini s'il existe suffisamment d'états normaux invariants sur $\underline{A}$, c'est-à-dire si pour tout élément a positif non nul il existe un état normal invariant non nul en a. Lorsque $\underline{A}$ est de genre dénombrable, cela revient à dire qu'il existe un état normal fidèle invariant ; la démonstration est analogue à celle du résultat parallèle concernant les W^*- algèbres finies (Dixmier [1], ch. I, § 6, prop. 9).
Un système dynamique est dit semi-fini s'il existe suffisamment de poids n.s.f. invariants, ou encore s'il existe un poids n.s.f. fidèle invariant ; l'équivalence des deux conditions se démontre en faisant la somme des éléments d'une famille maximale de poids n.s.f. invariants à supports deux à deux orthogonaux.
Un système dynamique est dit infini s'il n'est pas fini ; proprement infini s'il n'existe aucun état normal invariant ; purement infini s'il n'existe aucun poids n.s.f. invariant non nul.
On retrouve des notions connues lorsque $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$ (voir § A.3) ou lorsque $\underline{A}$ est commutative (§ B.4). Si $\underline{A}$ est un facteur fini, le système $(\underline{A}, G)$ est fini pour tout G car la trace canonique est invariante par tout automorphisme; par contre cela n'est plus vrai si $\underline{A}$ est une W^*- algèbre finie, puisque toute algèbre commutative est finie.
Un projecteur e de $\underline{I} = \underline{A}^G$ est dit fini (resp. semi-fini, etc.) si le système induit $\underline{F}_e$ est fini (resp....).

Théorème I.1 (Dang Ngoc [6]). Notons e (resp. f) la borne supérieure des supports des états normaux (resp. poids n.s.f.) invariants. Alors e et f appartiennent au centre de $\underline{A}^G$; e (resp. f) est le plus grand projecteur de $\underline{A}^G$ fini (resp. semi-fini) ; $I - f$ est purement infini et $f - e$ est proprement infini.

<u>Démonstration</u>. Les projecteurs e et f appartiennent à $\underline{I}$ puisque le support de tout poids n.s.f. invariant lui appartient ; pour tout élément unitaire u de $\underline{I}$, et tout poids n.s.f. invariant φ , le poids n.s.f. $a \longmapsto \varphi(u\,a\,u^{-1})$ est invariant, de support $u^{-1}.\mathrm{supp}\,\varphi\,.\,u$; donc f appartient au centre de I ; même chose pour e. Montrons que f est semi-fini ; il suffit de voir que pour tout projecteur g non nul de $f\,\underline{A}\,f$, il existe un poids n.s.f. invariant non nul en g ; or si on avait $\varphi(g) = 0$ pour tout poids n.s.f. invariant φ , on aurait $g \leq \inf\limits_{\varphi} (I - \mathrm{supp}\,\varphi) = I - f$, ce qui contredit le fait que $g \leq f$. On voit de même que e est fini.

Montrons que $I - f$ est purement infini ; soit ψ un poids n.s.f. invariant sur $(I-f)\underline{A}(I-f)$; l'application $a \longmapsto \psi((I-f)a(I-f))$ est un poids n.s.f. invariant, de support $\leq I-f$, donc nul ; par suite ψ est nul. On montre de même que $f-e$ est proprement infini. Montrons que f est le plus grand projecteur semi-fini appartenant à $\underline{I}$; soit g un tel projecteur ; pour tout poids n.s.f. invariant on a $I-f \leq I-\mathrm{supp}\,\varphi$, et comme f et g commutent, $g(I-f) \leq I-\mathrm{supp}\,\varphi$, d'où $\varphi(g(I-f)) = 0$; comme g est semi-fini cela implique $g(I-f) = 0$, d'où $g \leq f$. On voit de même que e est le plus grand projecteur fini de $\underline{I}$.

<u>Corollaire</u> I.3. Un système ergodique est soit fini, soit infini semi-fini, soit purement infini.

<u>Remarque</u> I.4. Il est facile de voir que $I-e$ est le plus grand projecteur proprement infini de $\underline{I}$; par contre on ignore si $I-f$ est le plus grand projecteur purement infini de $\underline{I}$.

<u>Exemple</u>. Prenons $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$; alors le système $(\underline{A}, G)$ est fini (resp...) si et seulement si l'algèbre $\underline{A}$ est finie (resp...) au sens habituel ;de même un projecteur du centre de $\underline{A}$ est fini (resp...) si et seulement si il est fini

(resp...) au sens habituel. En réalité dans ce cas on peut définir les propriétés de finitude (resp...) pour des projecteurs non nécessairement G-invariants ; il serait intéressant de le faire dans le cas général. Noter que dans le cas général, e et f n'appartiennent pas nécessairement au centre de $\underline{A}$; il ne semble donc pas possible de décomposer le système en un produit de systèmes fini, semi-fini proprement infini, et purement infini.

§ I.5. Systèmes dynamiques discrets ou continus.

Soit $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ un système dynamique ; on dit qu'un projecteur e de $\underline{A}$ est un G-atome si l'on a $e\,\underline{A}^G\,e = e\,\underline{A}\,e$; on dit que $\underline{F}$ est discret si tout projecteur non nul de $\underline{A}$ majore un projecteur non nul qui est un G-atome ; continu si $\underline{A}$ ne contient aucun G-atome non nul. On retrouve des notions connues lorsque $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$ (voir § A.3) ou que $\underline{A}$ est commutative (§ B.5).

On démontre facilement que $\underline{F}$ est discret si et seulement s'il existe un G-atome ayant pour support I dans $\underline{C}^G$; on montre aussi qu'il existe un unique projecteur $p \in \underline{C}^G$ tel que le système induit dans $\underline{A}p$ (resp. $\underline{A}\,(I-p)$) soit discret (resp. continu) (Sur tout ceci voir Dang Ngoc [6])

Remarque I.5. Il serait intéressant de développer une théorie de la structure des SD discrets analogue à celles qui existent lorsque $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$ (voir § A.3) ou lorsque $\underline{A}$ est commutative (§ B.8) ; on ignore si tout SD discret est semi-fini ; cela est vrai dans les deux cas particuliers en question, et même, plus généralement, lorsque $\underline{A}^G \subset \underline{C}$ (cf Størmer [8]).

Chapitre II | L'ESPÉRANCE CONDITIONNELLE E^G

§ II.1. Théorème d'existence.

On considère ici un système dynamique $\underline{F} = (\underline{A}, G)$; on pose $\underline{I} = \underline{A}^G$ et on note e le plus grand projecteur fini de $\underline{I}$ (cf. théorème I.1).

Lemme II.1. Pour tout $\varphi \in \underline{A}_*^G$ on a $\|\varphi\| = \|\varphi | \underline{I}\|$.

Soit $\varphi = |\varphi| . u$ la décomposition polaire de φ ; on a aussi $|\varphi| = \varphi . u^*$ (Dixmier [2], § 12.2) ; on a vu au § I.1 que u et $|\varphi|$ sont G-invariants ; on a donc

$$\|\varphi\| = \| |\varphi| \| = |\varphi|(I) = \varphi(u^*) \leq \|\varphi | \underline{I}\| \leq \|\varphi\| .$$

Théorème II.1.(Kovács - Szűcs [1], Dang Ngoc [6])

(i) Il existe une unique espérance conditionnelle E de $\underline{A}$ dans $\underline{I}$ possédant les propriétés suivantes :

a) E est G-invariante, i.e. $E \circ g = E$ pour tout $g \in G$

b) $\varphi \circ E = \varphi$ pour tout $\varphi \in \underline{A}_*^G$.

(ii) On a $E(I) = E(e) = e$, $E(\underline{A}) = \underline{I}\, e$.

(iii) Les espérances conditionnelles G-invariantes de $\underline{A}$ dans $\underline{I}$ sont exactement les applications $a \longmapsto e'.E(a)$ où e' est un projecteur du centre de $\underline{I}$ majoré par e .

Démonstration.

a) Notons X l'ensemble des formes $\varphi | \underline{I}$ où φ parcourt $\underline{A}_*^G$; d'après le lemme $\varphi \longmapsto \varphi | \underline{I}$ est une isométrie de $\underline{A}_*^G$ sur X, qui est donc un sous-espace vectoriel normiquement fermé de $\underline{I}_*$; de plus X est invariant à gauche car si

$i \in \underline{I}$ et $\psi \in X$, soit $\psi = \varphi / \underline{I}$, on a $\psi(i\,.) = \varphi(i\,.) / \underline{I} \in X$. Soit $X^{\perp}$ l'ensemble des $i \in \underline{I}$ tels que $\psi(i) = 0 \quad \forall \psi \in X$; $X^{\perp}$ est un idéal à gauche u.f. fermé qui contient évidemment I-e. Soit i un élément de $X^{\perp}$; pour tout $\varphi \in \underline{E}(\underline{A})^G$ on a $\varphi(i^* i) = 0$ donc

$$\varphi(i^* i e) = \varphi(i^* e i) \leq \varphi(i^* i) = 0 \; ;$$

comme $i^* i e \in e \underline{A} e$ et que e est fini, cela entraîne $i^* i e = 0$, d'où $i e = 0$, $i = i(I-e)$. On voit ainsi que $X^{\perp} = \underline{I}(I-e)$.

b) D'après Effros [1], théorème 4.6, tout sous-espace vectoriel de $\underline{I}$, normiquement fermé et invariant à gauche, est son propre biorthogonal ; donc X est l'ensemble des éléments de $\underline{I}_*$ nuls sur $\underline{I}(I-e)$. Soit ψ un élément de $\underline{I}_*$; la forme $\psi' : i \longmapsto \psi(i e)$ appartient à X, donc est la restriction à $\underline{I}$ d'un unique élément de $\underline{A}_*^G$, que nous noterons $\Lambda \psi$; on a

$$\| \Lambda \psi \| = \| \psi' \| \leq \| \psi \| \; ;$$

Λ est donc une application linéaire continue de $\underline{I}_*$ dans $\underline{A}_*^G \subset \underline{A}_*$, caractérisée par

$$(\Lambda \psi)(i) = \psi(i e) \qquad \forall \psi \in \underline{I}_*, \; i \in \underline{I} .$$

Comme les espaces de Banach $\underline{I}$ et $\underline{A}$ sont les duaux de $\underline{I}_*$ et $\underline{A}_*$, on peut considérer la transposée E de Λ, application linéaire u.f. continue de $\underline{A}$ dans $\underline{I}$ caractérisée par

$$\psi(E(a)) = (\Lambda \psi)(a) \qquad \forall a \in \underline{A}, \; \psi \in \underline{I}_* \; ; \tag{1}$$

on a en particulier

$$\psi(E(i)) = (\Lambda \psi)(i) = \psi(i e) \qquad \forall i \in \underline{I}, \; \psi \in \underline{I}_*$$

ce qui montre que $E(i) = i e$; en particulier $E(I) = E(e) = e$.

Pour tous $g \in G$ et $a \in \underline{A}$ on a

$$\psi(E(ga)) = (\Lambda\psi)(g\,a) = (\Lambda\psi)(a) = \psi(E(a)) \quad \forall \psi \in \underline{I}_*$$

ce qui prouve que E est G-invariante. On montre que E vérifie la condition b) de (i) en vérifiant que $(\varphi \circ E)\,|\,\underline{I} = \varphi\,|\,\underline{I}$, ce qui est immédiat. Soit $a \in \underline{A}$, $\psi \in \underline{I}_*$; posons $\tilde{\psi} = \psi(.\,(I-e))$; on a $\Lambda\tilde{\psi} = 0$, donc $0 = \tilde{\psi}(E(a)) = \psi(E(a).(I-e))$; ceci étant vrai pour tout ψ entraîne $E(a).(I-e) = 0$, $E(\underline{A}) \in \underline{I}\,e$. On a en fait l'égalité car si $i \in \underline{I}\,e$, on a $E(i) = i\,e = i$. Nous avons ainsi prouvé (ii).

c) Montrons que E est une espérance conditionnelle. Elle est idempotente puisque $E(E(a)) = E(a).e = E(a)$; pour montrer que E est positive, il suffit d'après (1) de vérifier que Λ est positive, ou encore que si un élément φ de $\underline{A}_*^G$ a une restriction à $\underline{I}$ positive, il est lui-même positif ; or cela résulte de ce que

$$\|\varphi\| = \|\varphi\,|\,\underline{I}\| = (\varphi\,|\,\underline{I})(I) = \varphi(I) .$$

Montrons enfin que $E(a\,i) = E(a).i$ pour tous $a \in \underline{A}$ et $i \in \underline{I}$; il suffit de vérifier que $\psi(E(a\,i)) = \psi(E(a).i) \;\; \forall \psi \in \underline{I}_*$, ou encore, en posant $\tilde{\psi} = \psi(.\,i)$, que $(\Lambda\psi)(a\,i) = (\Lambda\tilde{\psi})(a)$; comme $(\Lambda\psi)(.\,i)$ appartient à $\underline{A}^G$, il suffit de voir que $(\Lambda\psi)(.\,i)$ et $\Lambda\tilde{\psi}$ ont même restriction à $\underline{I}$; or pour tout $j \in \underline{I}$ on a

$$(\Lambda\psi)(j\,i) = \psi(j\,i\,e) = \psi(j\,e\,i) = \tilde{\psi}(j\,e) = (\Lambda\tilde{\psi})(j) .$$

d) Démontrons (iii). On voit immédiatement que si e' est un projecteur du centre de $\underline{I}$ majoré par e, $a \longmapsto e'.E(a)$ est une espérance conditionnelle G-invariante de $\underline{A}$ dans $\underline{I}$. Réciproquement soit E' une EC G-invariante de $\underline{A}$ dans $\underline{I}$; posons $e' = E'(I) \in \underline{I}^+$; pour tout $i \in \underline{I}$ on a

$$i\,e' = E'(i\,I) = E'(i) = E'(I\,i) = e'\,i \qquad (2)$$

donc e'appartient au centre de $\underline{I}$; e' est un projecteur car

$$e'e' = E'(e') = E'(E'(I)) = E'(I) = e' .$$

Soit Λ' l'application de $\underline{I}_*$ dans $\underline{A}_*$ transposée de E' : pour tout $\psi \in \underline{I}_*$

$$\Lambda'(\psi) = \psi \circ E' \in \underline{A}_*^G . \tag{3}$$

Pour $i \in \underline{I}$ on a d'après (2)

$$(\Lambda'(\psi))(i) = \psi(e'i) . \tag{4}$$

On voit facilement que $\mathrm{Im}\,\Lambda'$ est invariant à gauche par les éléments de $\underline{I}$. Soit X' l'ensemble des restrictions à $\underline{I}$ des éléments de $\mathrm{Im}\,\Lambda'$; X' est un sous-espace vectoriel de $\underline{I}_*$, invariant à gauche ; on voit facilement que $X'^{\perp} = \underline{I}\,(I-e')$; la relation $\mathrm{Im}\,\Lambda' \subset \underline{A}_*^G$ entraîne $X' \subset X$, $X'^{\perp} \supset X^{\perp}$, $\underline{I}\,(I-e') \supset I\,(I-e)$, $e' \leq e$. Enfin on montre que $E'(a) = e'.E(a)$ en vérifiant que $\psi(E'(a)) = \psi(e'.E(a))$ $\forall \psi \in \underline{I}_*$.

e) Il reste à démontrer l'unicité dans l'assertion (i) ; soit donc E' une EC de $\underline{A}$ dans $\underline{I}$ vérifiant les conditions a) et b) ; d'après (iii) on peut écrire $E'(a) = e'.E(a)$; la propriété b) entraîne $\mathrm{Im}\,\Lambda' = \underline{A}_*^G$, $X' = X$, $X'^{\perp} = X^{\perp}$, $e' = e$, $E' = E$.

<u>Définition</u>. L'espérance conditionnelle E du théorème II.1 sera appelée <u>espérance conditionnelle canonique</u> de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^G$ et notée E^G.

<u>Exemple</u>. Si $\underline{A}$ est finie et si $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$, E^G n'est autre que l'application $\natural$ de $\underline{A}$ sur son centre (cf. Dixmier [1], ch.III, § 4).

§ II.2. Cas des systèmes dynamiques finis.

Théorème II.2. En reprenant les notations du théorème II.1, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{F}$ est fini ;

(ii) $e = I$;

(iii) $E^G(\underline{A}) = \underline{A}^G$;

(iv) E^G est fidèle ;

(v) il existe une espérance conditionnelle G-invariante de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^G$.

De plus il existe au plus une espérance conditionnelle G-invariante de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^G$; si elle existe, elle est égale à E^G.

Cela résulte immédiatement du théorème II.1 ; l'équivalence de (i) et (v) est due à Kovács et Szűcs.

Théorème II.3 (Størmer [7]) Pour que $\underline{F}$ soit fini, il faut et il suffit que les orbites de G dans $\underline{A}_*$(ou, ce qui est équivalent, dans $\underline{E}(\underline{A})$) soient faiblement relativement compactes. Dans ces conditions E^G n'est autre que la transposée de l'application $\underline{A}_* \longmapsto \underline{A}_*^G$ donnée par le théorème de Ryll-Nardzewski (voir Appendice C).

(Noter qu'on peut appliquer le théorème de Ryll-Nardzewski à $\underline{A}_*$ parce que sa topologie faible est aussi sa topologie affaiblie ; mais pas à $\underline{A}$ parce que sa topologie ultra-faible n'est pas sa topologie affaiblie.)

Démonstration.

a) Supposons les orbites de G dans $\underline{E}(\underline{A})$ relativement compactes ; les orbites de G dans $\underline{A}_*$ le sont aussi puisque tout élément de $\underline{A}_*$ est combinaison linéaire d'éléments de $\underline{E}(\underline{A})$; notons P la projection de $\underline{A}_*$ sur $\underline{A}_*^G$ donnée par le théorème de Ryll-Nardzewski ; on voit de suite que sa transposée E est une application linéaire, positive, normale, idempotente, G-invariante dont l'image est incluse dans $\underline{I}$; pour que E soit une EC il reste à vérifier que $E(b\,a) = b.E(a)$ pour tous $b \in \underline{I}$, $a \in \underline{A}$. Soit $\varphi \in \underline{A}_*$; $P(\varphi)$ est limite faible de combinaisons linéaires convexes $\sum k_i . g_i\varphi$; définissons $b\varphi$ par $(b\varphi)(a) = \varphi(b\,a)$; on a

$$\sum k_i .\, g_i(b\varphi) = \sum k_i .\, b(g_i\varphi) = b. \sum k_i .\, g_i\varphi$$

$$\longrightarrow \quad b.\, P(\varphi) \in \underline{A}^G ;$$

comme $P(b\varphi)$ est l'unique élément de $\overline{\mathrm{co}\, G\, (b\varphi)} \cap \underline{A}^G$, cela entraîne

$$b.\, P(\varphi) = P(b\varphi) ;$$

d'où enfin

$$\begin{aligned} \varphi(E(b\,a)) &= (P(\varphi))(b\,a) = (b.\, P(\varphi))(a) \\ &= P(b\varphi)(a) = (b\varphi)(E(a)) = \varphi(b.\, E(a)) \end{aligned}$$

ce qui établit notre assertion.

On a $\varphi \circ E = \varphi$ pour toute $\varphi \in \underline{A}^G_*$ puisque $P(\varphi) = \varphi$; le théorème II.1 montre que $E = E^G$. Pour montrer que le système est fini, il suffit de vérifier que $E(I) = I$; prenons $\varphi \in \underline{A}_*$; $P(\varphi)$ est limite de combinaisons linéaires convexes $\sum k_i .\, g_i\varphi$; on a

$$\varphi(E(I)) = \lim \sum k_i . \varphi(I) = \varphi(I)$$

d'où $E(I) = I$.

b) Supposons maintenant le système fini et montrons que l'orbite $G\varphi$ d'un état normal φ est relativement compacte. D'après Akemann [1] il suffit de montrer que pour toute suite (e_n) de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\underline{A}$, $\varphi(g.e_n)$ tend vers 0 uniformément par rapport à g. Supposons le contraire ; il existe un nombre $\varepsilon > 0$, une suite $g_m \in G$ et une sous-suite e_{i_m} de la suite e_n tels que $\varphi(g_m.e_{i_m}) \geq \varepsilon \quad \forall\, m$. Posons $\psi = \varphi \circ E^G$; comme

e_{i_m} tend u.f. vers 0, on a

$$\lim \psi(g_m . e_{i_m}) = \lim \psi(e_{i_m}) = 0 . \tag{5}$$

D'autre part on a $\operatorname{supp} \psi \in \underline{A}^G$, $\varphi(I - \operatorname{supp} \psi) = \psi(I - \operatorname{supp} \psi) = 0$, $\operatorname{supp} \psi \geq \operatorname{supp} \varphi$; cette dernière relation, jointe à (5), entraîne (voir Dixmier [1], ch. I, § 4, prop. 5) $\lim \varphi(g_m . e_{i_m}) = 0$, ce qui est contradictoire.

Corollaire II.1. Si G est compact et opère continûment dans $\underline{A}$, le système est fini.

Remarque II.1. Ce corollaire ne subsiste pas si l'on suppose seulement G moyennable : prendre par exemple $\underline{A} = L^{\infty}(\mathbb{R})$ et $G = \mathbb{R}$ opérant par translations ; le système est ergodique, semi-fini puisque la mesure de Lebesgue est un poids n.s.f. invariant, mais non fini.

Définition. Soit $(\underline{A}, G)$ un système dynamique où G est localement compact et opère continûment dans $\underline{A}$; soit a un élément de $\underline{A}$ tel que pour tout $\varphi \in \underline{A}_*$ la fonction $g \longmapsto \varphi(g\, a)$ soit faiblement presque périodique ; il existe un unique élément de $\underline{A}$, noté $m_g\, g.a$, tel que

$$\varphi(m_g\, g.a) = m_g\, \varphi(g.a) \qquad \forall\, \varphi \in \underline{A}_* ;$$

cet élément est la moyenne des transformés de a ; il appartient à $\overline{\mathrm{co}\, G\, a}$ car toute $\varphi \in \underline{A}_*$ nulle sur $\overline{\mathrm{co}\, G\, a}$ est évidemment nulle sur $m_g\, g.a$. De la même façon on peut définir $m_g\, f(g)\, g.a$ pour toute $f \in \mathrm{FPP}(G)$.

Remarque II.2. En général la fonction $\varphi(g\, a)$ n'est pas FPP pour tout $a \in \underline{A}$ et tout $\varphi \in \underline{A}_*$: prendre par exemple G discret, $H = l^2(G)$, $\underline{A} = l^{\infty}(G)$, G opérant par translations à gauche dans $\underline{A}$; soit φ l'état défini par le vecteur $\delta_e \in H$; alors $\varphi(g\, a) = a(g^{-1})$, fonction qui n'est pas nécessairement FPP. Le théorème II.4 montre que si le système dynamique est fini, $\varphi(g\,a)$ est FPP pour tout $a \in \underline{A}$ et tout $\varphi \in \underline{A}_*$; on ignore si la réciproque est vraie ; par contre la condition " $\varphi(g\,a)$ est FPP pour tout $\varphi \in \underline{A}_*$ et tout a appartenant à une sous-C^* - algèbre A u.f. dense dans $\underline{A}$ " n'entraîne pas que le système soit fini : prenons un groupe G localement compact non compact, posons $A = FPP(G)$, $\underline{A} = W^*$- algèbre enveloppante de A ; G opère dans A par translations à gauche et dans $\underline{A}$ par bitransposition ; $\varphi(g\,a)$ est FPP pour tout $\varphi \in \underline{A}_* = A^*$ et tout $a \in A$ par définition même des fonctions FPP (voir § C.3) ; il est facile de voir que la moyenne est le seul état invariant de A ; par suite $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ admet un seul état normal invariant, qui n'est pas fidèle puisque sa restriction à A ne l'est pas ; donc $\underline{F}$ n'est pas fini.

<u>Théorème</u> II.4. (Kovacs - Szűcs [1]) Soit $(\underline{A}, G)$ un système fini.

(i) Pour tout $a \in \underline{A}$, $E^G(a)$ est l'unique élément de $\overline{\text{co}\; G\, a} \cap \underline{A}^G$;

(ii) on suppose que G est localement compact et opère continûment dans $\underline{A}$; alors la fonction $g \longmapsto \varphi(g\,a)$ est faiblement presque périodique pour tout $a \in \underline{A}$ et tout $\varphi \in \underline{A}_*$; de plus $E^G(a) = m_g\, g.a$;

(iii) on suppose en outre que G admet une famille moyennante (f_i) (voir définition au § C.4) ; alors pour tout $a \notin \underline{A}$, $E^G(a)$ est limite ultra-faible de $\int f_i(g).\, g\, a.\, dg$.

<u>Démonstration</u>.

(i) Soit b un élément de $\overline{\text{co}\; G\, a} \cap \underline{A}^G$; b est limite de combinaisons linéaires convexes $\sum k_i .\, g_i a$; on a

$$b = E^G(b) = \lim \sum k_i .\, E^G(g_i\, a) = E^G(a) .$$

Reste à voir que $E^G(a)$ appartient effectivement à $\overline{\text{co}\; G\, a}$. Supposons le contraire ; le théorème de Hahn - Banach sous sa forme géométrique montre qu'il existe $\varphi \in \underline{A}_*$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{Re}\,\varphi(E(a)) < k$$

$$\mathrm{Re}\,\varphi(c) \geq k \quad \forall\, c \in \overline{\mathrm{co}\, G\, a} \;;$$

d'autre part d'après le théorème II.3, $P(\varphi)$ est limite de combinaisons linéaires convexes $\sum k_i . g_i\varphi$; on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,P(\varphi)(a) &= \lim \mathrm{Re} \sum k_i . g_i\varphi(a) \\ &= \lim \sum k_i . \mathrm{Re}\,\varphi(g_i^{-1} a) \geq k \;; \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,P(\varphi)(a) &= \mathrm{Re}\,P(\varphi)(E\,a) = \lim \mathrm{Re} \sum k_i . g_i\varphi(E\,a) \\ &= \mathrm{Re}\,\varphi(E\,a) < k \end{aligned}$$

d'où contradiction.

(ii) résulte du théorème II.3 et du théorème C.2 (Appendice C).

(iii) résulte du § C.4.

<u>Remarque</u> II.3. Il serait intéressant de construire, pour un système $(\underline{A},G)$ semi-fini, des " espérances conditionnelles semi-finies de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^G$ " analogues aux traces opératorielles des W^* - algèbres semi-finies (voir Dixmier [1], ch. III, § 4).

§ II.3. Poids G - invariants.

La structure de l'ensemble des formes linéaires u.f. continues G-invariantes est donnée par le résultat suivant, qui découle immédiatement du th.II.1 :

Théorème II.5. L'application $\varphi \longmapsto \varphi | \underline{A}^G e$ est une bijection isométrique de $\underline{A}_*^G$ sur $(\underline{A}^G e)_*$; la bijection réciproque est $\psi \longmapsto \psi \circ E^G$.

En ce qui concerne les poids n.s.f. invariants nous allons obtenir des renseignements moins précis.

Théorème II.6 (Guichardet [5]) Si le système $(\underline{A}, G)$ est ergodique, les poids n.s.f. invariants non nuls, s'il en existe, sont fidèles et deux à deux proportionnels.

La première assertion résulte du fait que le support d'un tel poids appartient à $\underline{A}^G$. Deuxième assertion : soient φ et ψ deux tels poids ; notons $(u_t) = (\psi : \varphi)$ leur densité (cf. § A.5) ; u_t appartient à $\underline{A}^G$ donc est scalaire ; l'application $t \longmapsto u_t$ est un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans le groupe des complexes de module 1, donc de la forme $u_t = k^{it}$ où k est réel > 0 ; alors $\psi = k\varphi$.

Théorème II.7. Pour que le système $(\underline{A}, G)$ soit fini, il faut et il suffit qu'il existe un poids n.s.f. fidèle G - invariant φ dont la restriction à $\underline{A}^G$ soit semi-finie ; s'il en est ainsi, E^G est l'unique espérance conditionnelle de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^G$ vérifiant $\varphi \circ E^G = \varphi$.

Condition suffisante : on sait (§ A.4) que les automorphismes σ_t^φ permutent à G , par suite $\underline{A}^G$ est invariante par les σ_t^φ ; d'après le § A.6 il existe une unique espérance conditionnelle fidèle E de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^G$ vérifiant $\varphi \circ E = \varphi$; on voit immédiatement que pour $g \in G$,

$E \circ g$ a les mêmes propriétés, donc est égale à E ; autrement dit E est G-invariante et notre assertion résulte du théorème II.2.

Condition nécessaire : il suffit de poser $\varphi = \psi \circ E^G$ où ψ est un poids n.s.f. fidèle quelconque sur $\underline{A}^G$.

Théorème II.8 (Dang Ngoc [6])

(i) Etant donné un poids n.s.f. invariant φ , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) la restriction de φ à $\underline{A}^G$ est semi-finie

b) $\varphi \circ E^G = \varphi$

c) supp $\varphi \leq e$ où e est le plus grand projecteur fini de $\underline{A}^G$.

(ii) L'application $\varphi \longmapsto \varphi | \underline{A}^G$ est une bijection de l'ensemble des poids n.s.f. invariants sur $\underline{A}$ de support $\leq e$, sur l'ensemble des poids n.s.f. sur $\underline{A}^G$ de support $\leq$ e ; l'application réciproque est $\psi \longmapsto \psi \circ E^G$.

Démonstration.

a) $\Longrightarrow$ b). Posons $\underline{I} = \underline{A}^G$, $E = E^G$; le support p de φ appartient à $\underline{I}$ et $\varphi' = \varphi \,|\, p \underline{A} p$ est un poids n.s.f. fidèle invariant, dont la restriction à $p \underline{I} p$ est semi-finie (voir § A.2) ; d'après le théorème II.7, le système dynamique $(p \underline{A} p , G)$ est fini et si on note F l'espérance conditionnelle canonique de $p \underline{A} p$ sur $p \underline{I} p$, on a $\varphi' \circ F = \varphi'$; de plus, à cause de l'unicité, F est la restriction de E à $p \underline{A} p$. Soit a un élément de $\underline{A}^+$; on a

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(p\,a\,p) = \varphi'(p\,a\,p) = \varphi'(F(p\,a\,p)) \\ &= \varphi'(E(p\,a\,p)) = \varphi'(p\,Ea\,p) \qquad (\text{puisque } p \in \underline{I}\ e) \\ &= \varphi(p\,Ea\,p) = \varphi(Ea) \end{aligned}$$

ce qui prouve b).

b) $\Longrightarrow$ c). On a $\varphi(I-e) = \varphi(E(I-e)) = 0$ donc supp $\varphi \leq e$.

c) $\Longrightarrow$ a). En se restreignant à $e\,\underline{A}\,a$, on peut supposer le système fini ; comme φ est semi-fini, il existe des éléments $a_k \in \underline{A}^+$, convergeant u.f. vers I et vérifiant $\varphi(a_k) < +\infty$; alors $E(a_k)$ tend u.f. vers I et il suffit de montrer que $\varphi(E(a_k))$ est fini. On va en fait montrer que

$$a \in \underline{A}^+ , \quad \varphi(a) < +\infty \quad \Longrightarrow \varphi(E(a)) < +\infty$$

D'après le théorème II.4, E(a) est limite de combinaisons linéaires convexes $\sum k_i . g_i\, a$; comme φ est invariant on a

$$\varphi(\sum k_i . g_i\, a) = \sum k_i . \varphi(g_i\, a) = \varphi(a)$$

et comme φ est semi-continu inférieurement pour la topologie u.f.,

$$\varphi(E(a)) \leq \varphi(a) < +\infty \quad .$$

La démonstration de (ii) est immédiate.

<u>Corollaire</u> II.2. Si le système est fini, l'application $\varphi \longmapsto \varphi | \underline{A}^G$ est une bijection de l'ensemble des poids n.s.f. invariants sur $\underline{A}$, sur l'ensemble des poids n.s.f. sur $\underline{I}$; l'application réciproque est $\psi \longmapsto \psi \circ E^G$.

<u>Remarque</u> II.4 (description de l'ensemble des poids n.s.f. invariants). Dans le cas où $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$, on a une description assez précise : si l'on choisit une trace n.s.f. fidèle φ , les traces n.s.f. sont exactement les fonctions $a \longmapsto \varphi(h\,a)$ où h est un élément positif, borné ou non, affilié au centre de $\underline{A}$. Dans le cas général on peut dire ceci : choisissons un poids n.s.f. fidèle invariant φ ; pour qu'un poids n.s.f. fidèle ψ soit invariant, il faut et il suffit que le cocycle $(\psi : \varphi)$ prenne ses valeurs dans $\underline{A}^G$; autrement dit il y a correspondance bijective entre les poids n.s.f. fidèles invariants et les applications $t \longmapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ dans les éléments unitaires de $\underline{A}^G$, u.f. continues et vérifiant $u_{s+t} = u_s . \sigma^{\varphi}_s(u_t)$.

§ II.4. Application aux espérances conditionnelles sur certaines sous-W^*-algèbres.

On considère ici une W^*- algèbre $\underline{A}$ et une sous- W^*- algèbre commutative $\underline{B}$; on note $\underline{B}'$ le commutant de $\underline{B}$ dans $\underline{A}$; on fait opérer le groupe $G = \underline{U}(\underline{B})$ dans $\underline{A}$ par automorphismes intérieurs ; on a donc $\underline{A}^G = \underline{B}' \supset \underline{B}$.

Théorème II.9.

(i) Toute espérance conditionnelle de $\underline{A}$ dans $\underline{B}'$ est G - invariante.

(ii) Il existe au plus une espérance conditionnelle de $\underline{A}$ sur $\underline{B}'$; il en existe une si et seulement si le système $(\underline{A},G)$ est fini, et elle est alors égale à E^G.

(iii) S'il existe une espérance conditionnelle de $\underline{A}$ sur $\underline{B}'$, la restriction à $\underline{B}'$ de toute trace n.s.f. sur $\underline{A}$ est encore semi-finie.

Démonstration.

(i) Soit E une EC de $\underline{A}$ dans $\underline{B}'$; pour tout $u \in \underline{U}(\underline{B})$ et tout $a \in \underline{A}$ on a, puisque $u \in \underline{B}'$:

$$E(u\,a\,u^{-1}) = u.E(a).u^{-1} = E(a) .$$

(ii) résulte du théorème II.2.

(iii) S'il existe une EC de $\underline{A}$ sur $\underline{B}'$, le système $(\underline{A},G)$ est fini, et il suffit d'appliquer le théorème II.8.

Remarque II.5. On démontre (cf. Connes [1]) que si $\underline{D}$ est une sous - W^* - algèbre de $\underline{A}$ contenant son commutant dans $\underline{A}$, il existe au plus une EC de $\underline{A}$ sur $\underline{D}$.

Lemme II.2 (Dang Ngoc [6]) Soit $\underline{A}$ une W^*- algèbre.

(i) $\underline{A}$ est finie si et seulement si le système $(\underline{A}\ ,\{g^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ est fini pour tout élément g de Int $\underline{A}$;

(ii) $\underline{A}$ est proprement infinie si et seulement si le système en question est proprement infini pour au moins un élément g de Int $\underline{A}$.

Démonstration. Dire que $\underline{A}$ est finie (resp. proprement infinie) équivaut à dire que le système $(\underline{A}, \mathrm{Int}\,\underline{A})$ est fini (resp. proprement infini) ; il est donc évident que les conditions énoncées dans (i) et (ii) sont respectivement nécessaire et suffisante.

Supposons $\underline{A}$ non finie ; d'après Dixmier [1], ch. III, § 8, cor.2, il existe une suite de projecteurs $e_o, e_1, \ldots$ deux à deux orthogonaux et deux à deux équivalents, non nuls ; soit u_n une isométrie partielle vérifiant

$$u_n^* u_n = e_o \;,\quad u_n u_n^* = e_n \qquad \forall\; n \geq 1 \;;$$

posons $u_o = e_o$, $f = I - \sum_{n=o}^{\infty} e_n$ et

$$u = f + u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-2}\, u_{2k}^* + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1}\, u_{2k-1}^* \;;$$

on voit facilement que u est un opérateur unitaire et que $u^n e_o u^{-n}$ est égal à e_{2n-1} ou e_{-2n} suivant que $n > 0$ ou $n \leq 0$. Il en résulte que le système dynamique $(\underline{A}, \{g^n\})$, où g est l'automorphisme intérieur défini par u , n'est pas fini.

Supposons enfin $\underline{A}$ proprement infinie ; on peut alors supposer $\sum_{n=o}^{\infty} e_n = I$ et toute forme linéaire positive normale invariante est nulle sur e_o , donc nulle ; autrement dit le système $(\underline{A}, \{g^n\})$ est proprement infini.

Théorème II.10 (Takesaki [3], Tomiyama [2], Dang Ngoc [6]) Soit $\underline{A}$ une W^*-algèbre.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\underline{A}$ est finie

b) pour toute sous-W^*-algèbre commutative $\underline{B}$, le système dynamique $(\underline{A}, \underline{U}(\underline{B}))$ est fini, i.e. il existe une espérance conditionnelle fidèle de $\underline{A}$ sur $\underline{B}'$

c) pour toute sous-W^*-algèbre commutative maximale $\underline{B}$, le système dynamique $(\underline{A}, \underline{U}(\underline{B}))$ est fini.

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\underline{A}$ est proprement infinie

b) il existe une sous-W^*-algèbre commutative maximale $\underline{B}$ telle que le système $(\underline{A}\ ,\ \underline{U}(\underline{B}))$ soit proprement infini (dans la terminologie de Tomiyama [2], $\underline{B}$ est " completely non smooth ").

Démonstration.

(i) a) $\Longrightarrow$ b) puisque $\underline{U}(\underline{B}) \subset \mathrm{Int}\ \underline{A}$

b) $\Longrightarrow$ c) : évident.

c) $\Longrightarrow$ a) : supposons $\underline{A}$ infinie ; d'après le lemme II.2 il existe un unitaire $u \in \underline{A}$ tel que le système $(\underline{A}\ ,\ \{ i_u^n \})$ soit infini ; u appartient à une sous-W^*- algèbre commutative maximale $\underline{B}$, et $(\underline{A}\ ,\ \underline{U}(\underline{B}))$ est infini.

La démonstration de (ii) est analogue.

§ II.5. Type des produits croisés.

On considère un système dynamique $(\underline{A},G)$, on pose $\underline{B} = W^*(\underline{A},G)$, on identifie $\underline{A}$ à une sous-algèbre de $\underline{B}$, et on note E l'espérance conditionnelle de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ construite à la proposition I.2.

Lemme II.3.

(i) Si φ est un poids n.s.f. invariant sur $\underline{A}$, $\varphi \circ E$ est un poids n.s.f. sur $\underline{B}$ dont la restriction à $\underline{A}$ est égale à φ ; $\varphi \circ E$ est fidèle (resp. fini, resp. une trace) si et seulement si φ a la même propriété.

(ii) Si ψ est une trace normale finie sur $\underline{B}$, $\psi | \underline{A}$ est une trace normale finie invariante sur $\underline{A}$.

(iii) On suppose que G opère presque librement sur le centre $\underline{C}$ de $\underline{A}$; alors si ψ est une trace n.s.f. sur $\underline{B}$, $\psi | \underline{A}$ est une trace n.s.f. invariante sur $\underline{A}$.

Démonstration. Pour (i) et (ii), vérification facile ; pour (iii) : d'après la proposition I.3, $\underline{A}$ est le commutant de $\underline{C}$ dans $\underline{B}$ et il suffit d'appliquer le th. II.9.

On en déduit le

Théorème II.11 (Zeller-Meier [1]) Notons G' le sous-groupe de Aut $\underline{A}$ engendré par G et Int $\underline{A}$.

(i) $W^*(\underline{A},G)$ est finie si et seulement si le système $(\underline{A},G')$ est fini ;

(ii) si le système $(\underline{A},G')$ est semi-fini, $W^*(\underline{A},G)$ est semi-finie ; la réciproque est vraie si G opère presque librement dans $\underline{C}$.

(L'hypothèse que G opère presque librement dans $\underline{C}$ est en réalité inutile (communication orale de A.Connes))

Corollaire II.3. Supposons que G opère presque librement et ergodiquement dans $\underline{C}$; si le système $(\underline{A},G')$ n'est pas semi-fini, $W^*(\underline{A},G)$ est un facteur de type III.

§ II.6. Extensions des systèmes dynamiques.

Soient $(\underline{A},G)$ un système dynamique et H un sous-groupe distingué de G ; il est facile de voir que la sous-algèbre $\underline{A}^H$ est G - invariante et que pour tout $g \in G$ on a $g \circ E^H = E^H \circ g$ [on vérifie que $g \circ E^H \circ g^{-1}$ est encore une EC H - invariante et telle que $\varphi \circ g \circ E^H \circ g^{-1} = \varphi \quad \forall \varphi \in \underline{A}^H_*$, puis on applique l'unicité du théorème II.1 (i)]. On peut donc faire opérer G/H de façon naturelle dans $\underline{A}^H$; on notera $E^{G/H}$ l'EC canonique de $\underline{A}^H$ dans $(\underline{A}^H)^{G/H} = \underline{A}^G$; on a alors facilement

$$E^G = E^{G/H} \circ E^H . \tag{1}$$

Théorème II.12.(Dang Ngoc [6]) On suppose le système $(\underline{A},H)$ fini.

(i) Le système $(\underline{A},G)$ est fini (resp. semi-fini) si et seulement si le système $(\underline{A}^H , G/H)$ est fini (resp. semi-fini).

(ii) L'application $\varphi \longmapsto \varphi | \underline{A}^H$ est une bijection de l'ensemble des poids n.s.f. G - invariants sur $\underline{A}$, sur l'ensemble des poids n.s.f. G/H - invariants sur $\underline{A}^H$; l'application réciproque est $\psi \longmapsto \psi \circ E^H$.

Démonstration. (i) se déduit immédiatement de (ii). Démontrons (ii) : d'après le corollaire II.2, l'application $\varphi \longmapsto \varphi | \underline{A}^H$ est une bijection de l'ensemble des poids n.s.f. H - invariants sur $\underline{A}$, sur l'ensemble des poids n.s.f. sur $\underline{A}^H$, et la réciproque est $\psi \longmapsto \psi \circ E^H$; si φ est G - invariant, il est clair que $\varphi | \underline{A}^H$ est G/H - invariant ; si ψ est G/H - invariant, $\psi \circ E^H$ est G - invariant puisque E^H permute à G .

Corollaire II.4. Soit $(\underline{A},G)$ un système dynamique ; on suppose que $\underline{A}$ est finie et qu'il existe un poids normal fidèle fini (resp. semi-fini) G - invariant sur $\underline{C}$; alors il existe une trace normale fidèle finie (resp. semi-finie) G - invariante sur $\underline{A}$.

Résulte du fait que Int $\underline{A}$ est distingué dans le sous-groupe engendré par lui et G.

§ II.7. Systèmes dynamiques quotients.

On considère un système dynamique $(\underline{A},G)$ et un système dynamique quotient $(\underline{A}',G)$ au sens du § I.11, c'est-à-dire qu'on a un morphisme normal π de $\underline{A}$ sur $\underline{A}'$ compatible avec l'action de G ; on note e et e' les plus grands projecteurs G - invariants finis de $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ (cf. théorème I.1), E et E' les espérances conditionnelles canoniques de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^G$ et $\underline{A}'$ sur $\underline{A}'^G$.

Proposition II.1. On a $\underline{A}'^G = \pi(\underline{A}^G)$, $e' = \pi(e)$, $E' \circ \pi = \pi \circ E$.

Le support p de π est un élément G-invariant du centre de $\underline{A}$; on peut suppposer que $\underline{A}' = \underline{A}\, p$ et $\pi(a) = a\, p$ $\forall\, a \in \underline{A}$; l'égalité $\underline{A}'^G = \pi(\underline{A}^G)$ est alors évidente. Démontrons $e' = \pi(e)$; comme le système induit dans $e\,\underline{A}\,e$ est fini, il en est de même de $e\,\underline{A}\,e\,p = e\,p.\underline{A}\,p.e\,p$, donc on a $e\,p \leq e'$; soit maintenant φ un état invariant sur $\underline{A}\,p$; définissons un état invariant ψ sur $\underline{A}$ par $\psi(a) = \varphi(a\,p)$; on a facilement

$$\operatorname{supp} \psi = \operatorname{supp} \varphi \leq p$$

$$\operatorname{supp} \psi \leq e$$

donc

$$\operatorname{supp} \varphi \leq e\,p \ ;$$

enfin

$$e' = \sup_{\varphi} \operatorname{supp} \varphi \leq e\,p \ .$$

Démontrons enfin la dernière assertion, à savoir $\pi(E(a)) = E'(\pi(a))$ pour tout $a \in \underline{A}$; comme nous svons déjà que $\pi(E(a)) \in \underline{A}'^G.e'$ et que les éléments de $(\underline{A}'_*)^G$ séparent ceux de $\underline{A}'^G.e'$, il suffit de vérifier que

$$\psi(\pi(E(a))) = \psi(E'(\pi(a))) \qquad \forall\, \psi \in (\underline{A}'_*)^G \ ;$$

or $\psi \circ \pi \in \underline{A}_*{}^G$, donc

$$\psi(\pi(E(a))) = \psi(\pi(a)) = \psi(E'(\pi(a))) \ .$$

Chapitre III — ÉTUDE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES ($\underline{A}$, G) OU $\underline{A}$ EST SEMI-FINIE

§ III.1. Le théorème fondamental.

Théorème III.1 (Guichardet [5]) Soient $\underline{A}$ une W^* - algèbre, G_0 un sous-groupe de Aut $\underline{A}$ contenant Int $\underline{A}$, G un autre sous-groupe de Aut $\underline{A}$ tel que l'on ait $g\, G_0\, g^{-1} = G_0$ pour tout $g \in G$; on suppose que les systèmes dynamiques $(\underline{A}, G_0)$ et $(\underline{A}, G)$ sont semi-finis.

(i) On suppose en outre que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) $\underline{A}_*$ est séparable pour la topologie de la norme

(H_2) il existe une espérance conditionnelle fidèle de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^{G_0}$ permutable à G ;

alors il existe un poids n.s.f. fidèle sur $\underline{A}$ invariant par G_0 et G .

(ii) L'hypothèse (H_1) est inutile si G opère ergodiquement dans $\underline{A}^{G_0}$.

(iii) L'hypothèse (H_2) est vérifiée si le système $(\underline{A}, G_0)$ est fini ou s'il existe un poids n.s.f. fidèle ω sur $\underline{A}$, G - invariant et tel que sa restriction à $\underline{A}^{G_0}$ soit semi-finie.

Nous utiliserons deux lemmes.

Lemme III.1. Soient $\underline{C}$ une W^* - algèbre commutative à prédual séparable, $\underline{U}$ le groupe des éléments unitaires de $\underline{C}$ muni de la topologie ultra-faible ; faisons opérer le groupe $\mathbb{R}$ trivialement dans $\underline{U}$. Tout 2 - cocycle borélien $\gamma \in Z^2(\mathbb{R}, \underline{U})$ est le cobord d'une application borélienne δ de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}$.

(On notera que ce résultat et sa démonstration restent valables si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un groupe de Lie semi-simple simplement connexe ou par le groupe de Poincaré ; on trouvera à l'Appendice D les notions nécessaires sur la cohomologie des groupes.)

Démonstration. Rappelons d'abord qu'une W^*- algèbre est à prédual séparable si et seulement si elle peut être réalisée dans un espace hilbertien séparable. On peut écrire $\underline{C} = L^{\infty}(Z,\mu)$ où Z est un espace borélien standard et μ une mesure positive bornée sur Z ; pour tout espace topologique T on notera $M(Z,\mu,T)$ l'ensemble des applications μ - mesurables de Z dans T. On sait (Appendice D) que tout 2 - cocycle borélien $\in Z^2(\mathbb{R}, \mathbb{U})$, où $\mathbb{U}$ est le groupe des complexes de module 1, est le cobord d'une application borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, ce que nous écrirons $H^2(\mathbb{R}, \mathbb{U}) = 0$; le théorème 13 de Moore [1] affirme que $H^2(\mathbb{R}, M(Z,\mu,\mathbb{U}))$ est isomorphe à $M(Z,\mu,H^2(\mathbb{R},\mathbb{U}))$, donc nul ; cela signifie, en clair, que tout 2 - cocycle borélien, élément de $Z^2(\mathbb{R}, M(Z,\mu,\mathbb{U}))$ est le cobord d'une application borélienne ; mais ici on met sur $M(Z,\mu,\mathbb{U})$ la topologie de la convergence en moyenne, qui est plus fine que la topologie ultra-faible, ou topologie induite par la topologie de dual faible de $L^{\infty}(Z,\mu)$; il reste donc à voir que ces deux topologies définissent la même structure borélienne, et cela résulte de ce que ces deux topologies sont polonaises : pour la première c'est évident, et pour la seconde cela résulte du lemme I.1.

Lemme III.2. Définissons $\underline{C}$ et $\underline{U}$ comme au lemme précédent ; notons Γ le groupe multiplicatif des éléments positifs inversibles affiliés à $\underline{C}$; soit G un groupe opérant dans $\underline{C}$ par automorphismes ; alors G opère aussi dans Γ. Soit α un élément de $Z^1(G,\Gamma)$; supposons qu'il existe une application borélienne β de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}$ telle que pour tout réel t, α^{it} soit le cobord de $\beta(t)$. Alors α lui-même est un cobord.

Posons $\gamma(s,t) = \beta(s+t).\beta(s)^{-1}.\beta(t)^{-1}$; γ est un élément borélien de $Z^2(\mathbb{R}, \underline{U})$; la relation $\alpha(g)^{it} = g(\beta(t)).\beta(t)^{-1}$ entraîne que $\gamma(s,t) \in \underline{U}^G$, donc $\gamma \in Z^2(\mathbb{R}, \underline{U}^G)$. Comme $\underline{U}^G$ est le groupe des éléments unitaires de la W^* - algèbre commutative $\underline{C}^G$, le lemme III.1 montre qu'il existe une application borélienne δ de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}^G$ de cobord γ . Alors l'application $t \longmapsto \beta(t).\delta(t)^{-1}$ est un morphisme borélien de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}$, donc de la forme h^{it} où $h \in \Gamma$; on a donc

$$\beta(t) = \delta(t).h^{it}$$

$$\alpha(g)^{it} = g(h^{it}).\, h^{-it} \qquad \text{parce que } \delta(t) \in \underline{U}^G$$

$$= (gh \,.\, h^{-1})^{it}$$

d'où $\alpha(g) = gh.h^{-1}$.

Démonstration du théorème III.1.

a) Remarquons d'abord que $\underline{A}^{G_o}$ est contenue dans le centre $\underline{C}$ de $\underline{A}$; nous poserons $\underline{A}^{G_o} = \underline{C}^o$. Notons X l'ensemble des poids n.s.f. fidèles G_o - invariants sur $\underline{A}$, Γ le groupe des éléments positifs inversibles affiliés à $\underline{C}^o$, φ un élément de X ; comme les automorphismes σ_t^φ opèrent trivialement sur $\underline{C}^o$, on peut définir pour tout $h \in \Gamma$ un poids n.s.f.f. $h\varphi = \varphi(h\,.)$, évidemment G_o - invariant. Réciproquement soit ψ un élément de X ; posons $(u_t) = (\psi : \varphi)$ (voir Appendice A.5) ; alors $u_t \in \underline{C}^o$ et de plus

$$u_{s+t} = u_s \,.\, \sigma_s^\varphi(u_t) = u_s\, u_t$$

donc u_t est de la forme h^{it} avec $h \in \Gamma$, et $\psi = h\varphi$. On voit ainsi que le groupe Γ opère simplement transitivement dans X.

D'autre part G opère dans X par $g\varphi = \varphi \circ g^{-1}$ et dans Γ de façon naturelle ; on a

$$g\,(h\varphi) = (g\,h)\,(g\varphi) \quad \forall\, g \in G \,,\, h \in \Gamma \,,\, \varphi \in X \,.$$

Choisissons un élément φ de X, et, pour tout $g \in G$, notons $\alpha(g)$ l'élément de Γ vérifiant $g\varphi = \alpha(g)\varphi$; d'après l'appendice D, α appartient à

$Z^1(G,\Gamma)$, et il suffit, pour démontrer l'assertion (i) du théorème, de montrer que α est un cobord ; d'après le lemme II.2 il suffit de construire une application borélienne β de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}$ (groupe des éléments unitaires de $\underline{C}^o$) telle que pour tout réel t , α^{it} soit le cobord de $\beta(t)$.

b) Choisissons un poids n.s.f.f. G - invariant et notons h sa densité par rapport à φ (qui existe puisque φ est une trace) ; pour tout $g \in G$, $g\omega$ admet pour densité $g\,h$ par rapport à $g\varphi = \alpha(g)\varphi$, donc $g\,h.\alpha(g)$ par rapport à φ ; comme $g\,\omega = \omega$ on obtient $h = \alpha(g).\,g\,h$; c'est-à-dire

$$g\,h = \alpha(g)^{-1}.\,h \qquad \forall\; g \in G \quad . \tag{1}$$

On en déduit

$$g.h^{it} = \alpha(g)^{-it}.\,h^{it} \qquad \forall\; g \in G\;,\; t \in \mathbb{R}\;. \tag{2}$$

Notons E l'espérance conditionnelle de l'hypothèse (H_2) ; on a

$$g\,(E\,(h^{it})) = \alpha(g)^{-it}.\,E\,(h^{it}) \tag{3}$$

d'où résulte que

$$|\,E\,(h^{it})\,| \in (\underline{C}^o)^G \quad . \tag{4}$$

[Supposons un instant que h appartienne à $\underline{A}$ et que $E(h)$ soit inversible ; alors (1) entraîne $g\,(E(h)) = \alpha(g)^{-1}.\,E(h)$, α est un cobord et l'assertion (i) du théorème est démontrée ; plus généralement si $E(h^{it})$ est inversible pour tout t , les $\beta(t)$ cherchés peuvent être pris égaux aux éléments $|\,E\,(h^{it})\,|\,.(E\,(h^{it}))^{-1}$]

c) Notons $\underline{B}$ la sous- W^* - algèbre (commutative) de $\underline{A}$ engendrée par $\underline{C}^o$ et les éléments h^{it} ; comme $\underline{A}$ est à prédual séparable on peut écrire $\underline{C}^o = L^\infty(Z,\mu)$ où Z est un espace borélien standard et μ une mesure de masse 1 ; $\mu \circ E\,|\,\underline{B}$ est un état normal fidèle sur $\underline{B}$; on peut donc écrire $\underline{B} = L^\infty(Y,\nu)$ où Y est un espace borélien standard et $\nu = \mu \circ E \mid \underline{B}$; il existe une application mesurable p de Y sur Z telle que $\mu = p(\nu)$ et que l'image canonique dans $\underline{B}$ d'une fonction quelconque $f \in \underline{C}^o$ soit égale à $f \circ p$; enfin il existe une désintégration $\nu = \int_Z \nu_z \, . \, d\mu(z)$ où chaque ν_z est une mesure de masse 1 portée par $p^{-1}(\{z\})$ (voir par exemple Guichardet [1]).

Pour toute fonction $\varphi \in \underline{B}$, $E\varphi$ est la fonction définie μ - presque partout $z \longmapsto \nu_z(\varphi)$; en effet pour toute $f \in \underline{C}^o$ on a

$$\begin{aligned}\int f(z).(E\varphi)(z).d\mu(z) &= \mu(f.E\varphi) = \mu(E(f\circ p \, . \, \varphi)) \\ &= \nu(f\circ p \, . \, \varphi) = \iint f(p(y)).\varphi(y).d\nu_z(y).d\mu(z) \\ &= \int f(z). \, \nu_z(\varphi). \, d\mu(z) \, .\end{aligned}$$

d) Considérons h comme une fonction ν - mesurable strictement positive sur Y ; lorsque t tend vers 0, h^{it} tend simplement vers 1 ; d'après le théorème de Lebesgue, $(E(h^{it}))(z) = \nu_z(h^{it})$ tend vers 1 μ - presque partout ; pour μ - presque tout z il existe $\varepsilon(z) > 0$ tel que

$$|t| \leq \varepsilon(z) \Longrightarrow |E(h^{it})(z)| \geqslant \frac{1}{2} \, .$$

pour tout entier n positif posons

$$Z_n = \left\{ z \mid |E(h^{it})(z)| \geqslant \tfrac{1}{2} \quad \forall \, t \in [-1/n \, , \, 1/n] \right\}; \tag{5}$$

les Z_n sont μ - mesurables, G - invariants d'après (4), et forment une suite croissante dont la réunion est de complémentaire μ - négligeable. Notons P_n le projecteur de $(\underline{C}^o)^G$ associé à Z_n et posons $Q_n = P_n - P_{n-1}$; les Q_n sont deux à deux orthogonaux de somme I. (5) montre que pour $|t| \leq 1/n$, $E(h^{it}).Q_n$ est inversible dans $\underline{C}^o.Q_n$; notons $A_n(t)$ son inverse et posons

$$\beta_n(t) = |E(h^{it})| \, Q_n \, . \, A_n(t) \quad ;$$

β_n est une application borélienne de $[-1/n \, , \, 1/n]$ dans $\underline{U}.Q_n$ vérifiant

$$\alpha(g)^{it}.\, Q_n = g(\beta_n(t)).\,\beta_n(t)^{-1} \qquad (6)$$

en vertu de (3) et (4). On prolonge ensuite β_n à $\mathbb{R}$ en posant

$$\beta_n(t) = \beta_n(t/k)^k$$

lorsque $t \in](k-1)/n\, ,\, k/n]$ ou $[-k/n\, ,\, -(k-1)/n[$ et on a encore (6).

Pour définir $\beta(t)$ il suffit maintenant de poser $\beta(t) = \bigoplus_n \beta_n(t)$.

e) Démontrons l'assertion (ii) du théorème. La relation (4) montre que $|E(h^{it})|$ est un scalaire, soit $k_t.I$; lorsque t tend vers 0, h^{it} et $E(h^{it})$ tendent u.f. vers I, donc k_t tend vers 1 ; il existe $n > 0$ tel que $E(h^{it})$ soit inversible pour $|t| \leq 1/n$; on pose alors $\beta(t) = k_t.E(h^{it})^{-1}$; on prolonge β en une application de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}$ comme ci-dessus. Le lemme III.1 s'applique sans hypothèse de séparabilité car ici $\underline{U}^G = \mathbb{U}$. Le fait que l'application $t \longmapsto \beta(t).\delta(t)^{-1}$ soit borélienne ne suffit plus pour affirmer qu'elle est de la forme h^{it} ; mais il est facile de voir que β est continue en 0 et on sait (voir Appendice D) qu'alors δ l'est aussi ; notre morphisme est donc continu, et par suite de la forme h^{it}.

f) Démontrons l'assertion (iii). Si le système dynamique $(\underline{A},G_o)$ est fini, l'espérance conditionnelle canonique E^{G_o} de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^{G_o}$ permute à G (voir § II.6) ; s'il existe un poids n.s.f.f. ω G - invariant et tel que sa restriction à $\underline{A}^{G_o}$ soit semi-finie, l'existence de l'EC résulte de l'Appendice A.6.

<u>Remarque</u> III.0. En modifiant très légèrement la démonstration du théorème III.1 on peut démontrer le résultat suivant :

(i) Soit $(\underline{A},G)$ un système dynamique ; on suppose qu'il existe un poids n.s.f.f. φ tel que les automorphismes σ_t^{φ} permutent à G, et un poids n.s.f.f. ω invariant par les σ_t^{φ} et par G ; on suppose en outre que les deux hypothèses suivantes sont réalisées :

(H_1') $\underline{A}_*$ est séparable

(H_2') il existe une espérance conditionnelle fidèle de $\underline{A}$ sur $\underline{C}$ permutable à G ;

alors il existe un poids n.s.f.f. G - invariant, admettant par rapport à φ une densité affiliée à $\underline{C}$.

(ii) L'hypothèse (H_1') est inutile si G opère ergodiquement dans $\underline{C}$.

(iii) L'hypothèse (H_2') est vérifiée si $\underline{A}$ est finie, ou s'il existe un poids n.s.f.f. ψ G - invariant et tel que $\psi | \underline{C}$ soit semi-finie.

Pour démontrer cela on notera Γ le groupe des éléments positifs inversibles affiliés à $\underline{C}$, X l'ensemble des poids n.s.f.f. de la forme $k\varphi$ avec $k \in \Gamma$; G opère naturellement dans Γ ; pour tout $g \in G$ on a

$$\sigma_t^{g\varphi} = g \cdot \sigma_t^{\varphi} \cdot g^{-1} = \sigma_t^{\varphi}$$

donc $g\varphi$ est de la forme $\alpha(g)\varphi$ avec $\alpha(g) \in \Gamma$; G opère dans X car pour tout élément $k\varphi$ de X on a

$$g(k\varphi) = (gk)(g\varphi) = (gk)(\alpha(g))(\varphi) \in X .$$

Il suffit, pour démontrer (i), de construire une application borélienne β de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}(\underline{C})$ telle que α^{it} soit le cobord de $\beta(t)$ pour tout t. Comme ω est invariant par les σ_t^{φ}, il peut s'écrire $\omega = h\varphi$ où h est un élément positif inversible affilié à l'algèbre des éléments σ_t^{φ} - invariants ; la suite de la démonstration s'applique intégralement en remplaçant partout $\underline{A}^{G_0}$ par $\underline{C}$.

R.Nest [1] a démontré indépendamment le résultat ci-dessus en supposant le système ($\underline{A}$,G) fini.

<u>Corollaire</u> III.1. Soient (X,C) un espace quasi-mesuré (voir § B.1) où X est standard, G_o et G des sous-groupes de Aut (X,C) tels que $g\,G_o\,g^{-1} = G_o$ pour tout $g \in G$; on suppose que C contient une mesure σ - finie G_o - invariante et une mesure σ - finie G - invariante :

(i) On suppose en outre que l'hypothèse suivante est vérifiée :

(H) il existe une espérance conditionnelle fidèle de $L^{\infty}(X,C)$ sur $L^{\infty}(X,C)^{G_o}$.

Alors C contient une mesure σ - finie invariante par G_o et G .

(ii) L'hypothèse (H) est vérifiée si C contient une mesure finie G_o-invariante ou une mesure σ - finie G - invariante dont la restriction à la tribu des sous-ensembles G_o - invariants est σ - finie.

<u>Remarque</u> III.1. Le corollaire III.1 (i) ne subsiste pas si l'on supprime l' hypothèse (H) : prendre pour X un groupe localement compact non unimodulaire, pour C la classe des mesures de Haar, pour G_o et G le groupe X lui-même opérant par translations à gauche et à droite.

<u>Corollaire</u> III.2. Soient $\underline{A}$ une W^*- algèbre semi-finie, G un sous-groupe de Aut $\underline{A}$ tel que le système dynamique $(\underline{A},G)$ soit semi-fini.

(i) On suppose réalisées les deux hypothèses suivantes :

(H_1') $\underline{A}_*$ est séparable

(H_2') il existe une espérance conditionnelle fidèle de $\underline{A}$ sur son centre $\underline{C}$ permutable à G .

Alors il existe une trace n.s.f. fidèle G - invariante.

(ii) L'hypothèse (H_1') est inutile si G opère ergodiquement dans $\underline{C}$.

(iii) L'hypothèse (H_2') est réalisée si $\underline{A}$ est finie ou s'il existe un poids n.s.f.f. G - invariant et tel que sa restriction à $\underline{C}$ soit semi-finie.

Il suffit d'appliquer le théorème III.1 en prenant $G_o = \text{Int}\,\underline{A}$.

Le corollaire III.2 a été démontré par Størmer [5] en supposant que le poids qui intervient dans (iii) est fini et que G opère ergodiquement dans $\underline{C}$.

Remarque III.2. Lorsque $\underline{A}$ est un facteur semi-fini, le corollaire III.2 se réduit à l'assertion suivante : s'il existe un état normal fidèle G - invariant ω , toute trace n.s.f.f. sur $\underline{A}$ est G - invariante ; on peut même supprimer l'hypothèse suivant laquelle ω est fidèle (Pedersen - Takesaki [1]). Par contre ceci devient faux si l'on remplace " état " par "poids semi-fini " ; plus précisément il existe un facteur de type II_∞ $\underline{A}$ dans un espace hilbertien séparable et un groupe d'automorphismes G de $\underline{A}$ admettant un poids n.s.f.f. invariant mais ne conservant pas les traces n.s.f.f. de $\underline{A}$. Pour le voir notons X un groupe localement compact non unimodulaire , C la classe des mesures de Haar, G_0 un sous-groupe dénombrable partout dense dans X, opérant par translations à gauche dans X ; prenons pour G le groupe X lui-même opérant par translations à droite ; soit $\underline{B}$ le produit croisé de $L^\infty(X,C)$ par G_0 ; comme G_0 opère presque librement et ergodiquement dans $L^\infty(X,C)$, $\underline{B}$ est un facteur semi-fini et $L^\infty(X,C)$ est commutative maximale dans $\underline{B}$ (proposition I.3 et théorème II.11) ; on peut faire opérer G dans $\underline{B}$ de la façon suivante (en utilisant les notations de la proposition I.2) : $(g\, b)(g_0) = g\,(b(g_0))$ $\forall$ $b \in \underline{B}$; soit E l'espérance conditionnelle de $\underline{B}$ sur $L^\infty(X,C)$; E, étant unique, permute à tout automorphisme de $\underline{B}$ qui conserve $L^\infty(X,C)$ et en particulier à G ; notons ν_0 et ν des mesures de Haar à gauche et à droite sur X ; $\nu_0 \circ E$ est une trace n.s.f.f. sur $\underline{B}$, $\nu \circ E$ est un poids n.s.f. G - invariant sur $\underline{B}$, mais $\nu_0 \circ E$ n'est pas G - invariante puisque sa restriction à L^∞, égale à ν_0 , ne l'est pas.

Remarque III.3. On peut aussi déduire du lemme III.1 le résultat suivant, démontré par Kallman [1] lorsque $G = \mathbb{R}$: soit G un groupe localement compact

tel que tout 2 - cocycle borélien $\in Z^2(G, \mathbb{U})$ (pour l'action triviale de G dans $\mathbb{U}$) soit le cobord d'une application borélienne (ces hypothèses sont vérifiées notamment si G est le groupe des réels, ou un groupe de Lie semi-simple simplement connexe, ou le groupe de Poincaré) ; soient $\underline{A}$ une W^* - algèbre opérant dans un espace hilbertien séparable, r un morphisme continu de G dans Int $\underline{A}$; il existe un morphisme continu p de G dans $\underline{U}(\underline{A})$ tel que $r(g) = i_{p(g)}$ $\forall g \in G$. En effet choisissons une section borélienne s du morphisme canonique $\underline{U}(\underline{A}) \longmapsto$ Int $\underline{A}$ (cf. lemme I.1) ; avec les notations de l'Appendice D, le 2 - cocycle β est borélien ; d'après le lemme III.1, on peut supposer α borélien ; alors le morphisme p est borélien, donc continu.
(Cette remarque est due à C.C.Moore [1].)

§ III.2. Quelques conséquences.

Corollaire III.3. Soit $(\underline{A},G)$ un système dynamique où $\underline{A}$ est semi-finie et à prédual séparable ; on suppose qu'il existe un poids n.s.f.f. ω sur $\underline{A}$, G - invariant et tel que $\omega \mid \underline{C}$ et $\omega \mid \underline{A}^G$ soient semi-finis. Alors $\underline{A}^G$ est semi-finie.

D'après le corollaire III.2 il existe une trace n.s.f.f. G - invariante τ ; la densité de ω par rapport à τ est un élément h affilié à $\underline{A}^G$; pour tout réel t , σ_t^ω est l'automorphisme intérieur défini par h^{it} , donc conserve $\underline{A}^G$; d'après le § A.4, en posant $\omega' = \omega \mid \underline{A}^G$, $\sigma_t^{\omega'}$ est égal à $\sigma_t^\omega \mid \underline{A}^G$, donc à l'automorphisme intérieur de $\underline{A}^G$ défini par h^{it} ; d'où l'assertion.

Corollaire III.4 (Størmer [5]) Soient $\underline{A}$ une W*- algèbre semi-finie, G un groupe ergodique d'automorphismes de $\underline{A}$; s'il existe un état normal fidèle G - invariant ω , ω est une trace et $\underline{A}$ est finie.

Le corollaire III.2 montre qu'il existe une trace n.s.f.f. invariante, et celle-ci est nécessairement proportionnelle à ω d'après le théorème II.6.

Corollaire III.5 (Størmer [5]) Soient $\underline{A}$ une algèbre de von Neumann dans un espace hilbertien H , G un groupe d'opérateurs unitaires dans H vérifiant $U \underline{A} U^{-1} = \underline{A}$ $\forall$ $U \in G$; on suppose qu'il existe un vecteur ξ séparateur pour $\underline{A}$ et que ξ est, à un coefficient près, l'unique vecteur G-invariant. Alors si $\underline{A}$ n'est pas de type III, elle est finie et ξ est élément trace. (Ce résultat généralise le théorème 7 de Dixmier [1], ch. I, § 6)

Remplaçant $\underline{A}$ par $\underline{A}_F$ où F est le projecteur sur $\overline{\underline{A}\xi}$, on peut supposer ξ séparateur et totalisateur pour $\underline{A}$; la proposition V.2 ci-dessous montre que G est ergodique dans $\underline{A}$ (en effet ici dim K = 1 et L = I) ; le plus grand projecteur central semi-fini P de $\underline{A}$ est invariant par G (et même par tout automorphisme de $\underline{A}$), donc égal à 0 ou I ; comme $\underline{A}$ n'est pas de type III, $P = I$ et $\underline{A}$ est semi-finie ; il suffit alors d'appliquer le corollaire précédent avec $\omega = \omega_\xi$.

<u>Corollaire</u> III.6. Soit $(\underline{A},G)$ un système dynamique où $\underline{A}$ est semi-finie et à prédual séparable ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) le système $(\underline{A},G)$ est fini ;

(ii) il existe un poids n.s.f.f. G - invariant sur $\underline{A}$ dont la restriction à $\underline{A}^G$ est semi-finie ;

(iii) il existe une trace ayant les mêmes propriétés.

(E.Størmer a démontré dans [8] l'équivalence de (i) et (iii) sans supposer que $\underline{A}$ soit à prédual séparable, mais en supposant que G opère soit trivialement, soit ergodiquement sur $\underline{C}$)

<u>Démonstration</u>. (i) et (ii) sont équivalents d'après le théorème II.7 ; (iii) implique trivialement (ii) ; montrons que (ii) implique (iii) : comme $\underline{A}$ est à prédual séparable, il existe un état normal fidèle G - invariant (cf. § I.4), donc une trace n.s.f.f. G - invariante ; le théorème II.8 montre que la restriction de cette trace à $\underline{A}^G$ est semi-finie.

§ III.3. Cas où G opère trivialement sur $\underline{C}$.

Théorème III.2 (Hermann - Takesaki [1]) Soient $\underline{A}$ une W^* - algèbre, G un groupe d'automorphismes de $\underline{A}$ opérant trivialement sur $\underline{C}$, φ un état normal fidèle sur $\underline{A}$ tel que les automorphismes σ_t^{φ} permutent à G ; alors φ est G - invariant.

Pour tout $g \in G$ on a, d'après le § A.4,

$$\sigma_t^{g\varphi} = g \cdot \sigma_t^{\varphi} g^{-1} = \sigma_t^{\varphi} ,$$

donc $g\varphi$ admet par rapport à φ une densité affiliée à $\underline{C}$, soit $g\varphi = \alpha(g)\varphi$; comme G opère trivialement sur $\underline{C}$, α est un morphisme ; en particulier on a $\alpha(g^n) = \alpha(g)^n$; on peut écrire $\underline{C} = L^{\infty}(Z,\mu)$ où Z est un espace borélien et μ la mesure positive de masse 1 correspondant à φ ; on a alors

$$\mu(\alpha(g)^n) = \varphi(\alpha(g)^n) = \varphi(\alpha(g^n)) = (g^n\varphi)(I) = 1$$

d'où

$$\sup \mathrm{ess}\ \alpha(g) = \lim_{p=\infty} \| \alpha(g) \|_p = 1 ;$$

alors $\alpha(g) = 1$ μ - presque partout, et $g\varphi = \varphi$.

Corollaire III.7. Si G opère trivialement sur $\underline{C}$, toute trace normale finie est G - invariante.

Le support p de la trace φ appartient à $\underline{C}$; remplaçant $\underline{A}$ par $\underline{A}\,p$, on peut supposer φ fidèle, et le théorème III.2 fournit le résultat puisqu' alors $\sigma_t^{\varphi} = I$.

Lemme III.3. On suppose $\underline{A}$ semi-finie et G trivial sur $\underline{C}$; soient τ une trace n.s.f. sur $\underline{A}$ et e un projecteur de $\underline{A}^G$, fini relativement à $\underline{A}$ et vérifiant $\tau(e) = 1$. Alors l'état sur $\underline{A}$: $a \longmapsto \tau(e\,a\,e)$ est G - invariant.

Remplaçant $\underline{A}$ par $e\,\underline{A}\,e$, il suffit de prouver que si $\underline{A}$ est finie, toute trace normale finie sur $\underline{A}$ est G-invariante - ce que nous savons par le cor.III.7.

Théorème III.3. (Størmer [1]) Soit ($\underline{A}$,G) un système dynamique où G est trivial sur $\underline{C}$ et où $\underline{A}$ est semi-finie ; ce système est fini si et seulement si tout projecteur non nul de $\underline{A}^G$ majore un projecteur non nul de $\underline{A}^G$ fini relativement à $\underline{A}$.

Nous ferons la démonstration en supposant $\underline{A}_*$ séparable, pour pouvoir utiliser les résultats précédents.

Supposons le système fini ; il existe un état normal fidèle invariant ; d'après le corollaire III.2 il existe une trace n.s.f.f. invariante τ . Soit e un projecteur non nul de $\underline{A}^G$; remplaçant $\underline{A}$ par $e\underline{A}e$, on peut supposer $e = I$ et on a simplement à construire un projecteur non nul de $\underline{A}^G$ fini relativement à $\underline{A}$. Soit a un élément positif non nul de $\underline{A}$ vérifiant $\tau(a) < +\infty$; en vertu du théorème II.4, $E^G a$ est limite u.f. de combinaisons linéaires convexes $\sum k_i . g_i a$ et est positif et non nul ; on a $\tau(E^G a) \leq \tau(a) < +\infty$ puisque $\tau(\sum k_i . g_i a) = \tau(a)$ et que τ est semi-continue inférieurement. Soit f un projecteur spectral de $E^G a$ vérifiant $f \leq k.E^G a$ où k est réel > 0 ; alors $f \in \underline{A}^G$, $\tau(f) < +\infty$, donc f est fini relativement à $\underline{A}$.

Réciproquement montrons que la condition énoncée est suffisante. Soit a_o un élément positif non nul de $\underline{A}^G$, f un projecteur spectral de a_o vérifiant la relation $f \leq k\, a_o$ avec $k > 0$; il existe unprojecteur non nul e de $\underline{A}^G$, majoré par f et fini relativement à $\underline{A}$; soit τ une trace n.s.f. sur $\underline{A}$ telle que $\tau(e) = 1$. D'après le lemme III.3, l'état ρ sur $\underline{A}$ défini par $\rho(a) = \tau(e\,a\,e)$ est G - invariant ; de plus on a

$$\rho(a_o) \geqslant k^{-1}\, \rho(f) \geqslant k^{-1}\, \rho(e) > 0 ;$$

ceci prouve que pour tout élément a_o positif non nul de $\underline{A}^G$ il existe un état normal G - invariant sur $\underline{A}$ non nul en a_o ; cela prouve que le projecteur e du théorème I.1 est égal à I, i.e. que le système est fini.

Corollaire III.8. On reprend les hypothèses du théorème III.3 et on suppose le système fini ; si H est un autre groupe d'automorphismes vérifiant $\underline{A}^G = \underline{A}^H$, le système $(\underline{A},H)$ est fini.

Autrement dit la finitude du système $(\underline{A},G)$ est une propriété de $\underline{A}^G$, pourvu que celle-ci contienne $\underline{C}$; cette dernière hypothèse est essentielle comme le montre l'exemple suivant : prenons $\underline{A} = L^{\infty}(G)$ où G est un groupe compact, et faisons opérer G dans $\underline{A}$ par translations ; le système $(\underline{A},G)$ est fini puisque la mesure de Haar est un état normal fidèle invariant ; $\underline{A}^G$ est réduite aux scalaires ; prenons $H = \text{Aut}\,\underline{A}$; on a $\underline{A}^H = \underline{A}^G$, mais le système $(\underline{A},H)$ n'est pas fini, car le seul état normal G- invariant est la mesure de Haar, et il n'est pas H - invariant.

Corollaire III.9. Sous les hypothèses du corollaire III.8, on a $E^G \circ \alpha = E^G$ pour tout automorphisme α de $\underline{A}$ induisant l'identité sur $\underline{A}^G$.

Il suffit d'appliquer le corollaire III.8 au groupe H des automorphismes induisant l'identité sur $\underline{A}^G$.

Corollaire III.10. On suppose $(\underline{A},G)$ fini et $\underline{A}^G = \underline{C}$; on note G' le sous-groupe de Aut $\underline{A}$ engendré par G et Int $\underline{A}$. Alors le système $(\underline{A},G')$ est fini, et en particulier $\underline{A}$ est finie.

En effet $\underline{A}^{G'} = \underline{A}^G = \underline{C}$.

Remarque III.4. On peut déduire du théorème III.3 et du § II.4 le résultat suivant (Tomiyama [2]) : soit B une sous-algèbre commutative maximale de $\underline{A}$; pour qu'il existe une EC de $\underline{A}$ sur $\underline{B}$ il faut et il suffit que $\underline{B}$ soit engendrée par des projecteurs finis relativement à $\underline{A}$. Voici d'autre part un résultat dû à Pedersen-Takesaki [1] : G est trivial sur $\underline{C}$; soit φ une trace n.s.f.f., ψ un poids n.s.f. invariant ; on suppose qu'il existe des projecteurs $p_i \in \underline{C}$ de somme I tels que $a \in \underline{A}^+$, $\varphi(p_i a) < \infty \Longrightarrow \psi(p_i a) < \infty$. Alors si q est le support central de φ, la trace $\varphi(q\,.)$ est G - invariante.

Chapitre IV — ÉQUIVALENCE DES PROJECTEURS SELON E. STØRMER

§ IV.1. Le théorème fondamental.

Définition. Etant données une W^* - algèbre $\underline{A}$ et une relation réflexive et symétrique, notée $\sim$, sur l'ensemble $\underline{A}_p$ des projecteurs de $\underline{A}$, on dira qu'un projecteur e est $\sim$ fini si les relations $f \in \underline{A}_p$, $f \leq e$, $f \sim e$ impliquent $f = e$; e est dit $\sim$ semi-fini si tout projecteur non nul majoré par e majore un projecteur non nul $\sim$ fini.

Dans la suite on notera $\sim$ la relation d'équivalence usuelle sur $\underline{A}_p$: $e \sim f$ signifie qu'il existe un élément a de $\underline{A}$ tel que $e = a a^*$, $f = a^* a$.

Soit $(\underline{A},G)$ un système dynamique ; on définit sur $\underline{A}_p$ une relation symétrique et réflexive, notée $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$, de la façon suivante : $e \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} f$ s'il existe une famille $(a_g)_{g \in G}$ d'éléments de $\underline{A}$ telle que l'on ait

$$e = \sum_g a_g a_g^* \quad , \quad f = \sum_g g(a_g^* a_g)$$

où les familles sont supposées sommables pour la topologie ultra-faible.

Il est clair que $e \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} f$ implique $\tau(e) = \tau(f)$ pour toute trace normale G - invariante τ . La relation $\sim$ implique $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$; si G est trivial, ces relations sont identiques ; on montre en effet (cf. Kadison - Pedersen [1]) que $e \sim f$ si et seulement s'il existe une famille $a_i \in \underline{A}$ vérifiant

$$e = \sum a_i a_i^* \quad , \quad f = \sum a_i^* a_i \quad .$$

Théorème IV.1 (Størmer [8]) Notons G' le groupe d'automorphismes engendré par G et Int $\underline{A}$; alors le système $(\underline{A},G')$ est fini (resp. semi-fini) si et seulement si le projecteur I est $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ fini (resp. semi-fini).

Nous indiquerons plus loin le principe de la démonstration.

Remarque IV.1. Il serait intéressant de trouver une relation symétrique et réflexive sur $\underline{A}_p$, soit $\underset{G}{\sim}$, possédant les propriétés suivantes :

(i) si G est trivial, $\underset{G}{\sim}$ est l'identité ;

(ii) si $G = \mathrm{Int}\,\underline{A}$, $\underset{G}{\sim}$ est identique à $\sim$;

(iii) si $\underline{A}$ est commutative, $\underset{G}{\sim}$ est la relation d'équivalence de Hopf (cf. § B.7) ;

(iv) $\underset{G}{\hat{\sim}} = \underset{G'}{\sim}$;

(v) le système $(\underline{A},G)$ est fini (resp. semi-fini) si et seulement si le projecteur I est $\underset{G}{\sim}$ fini (resp. semi-fini) ;

(vi) si e est un projecteur de $\underline{A}$, le système induit dans $e\,\underline{A}\,e$ (à supposer qu'on l'ait défini, voir remarque I.1) est fini (resp. semi-fini) si et seulement si e est $\underset{G}{\sim}$ fini (resp. semi-fini).

Le théorème IV.1 serait alors une conséquence de (iv) et (v) ; (iii) et (v) donneraient une nouvelle démonstration des théorèmes de Hopf et de Halmos et Kawada. Il ne semble pas exclu qu'on puisse prendre la relation suivante : $e \underset{G}{\sim} f$ s'il existe une famille $(e_g)_{g\in G}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux telle que les $g.e_g$ soient aussi deux à deux orthogonaux et que l'on ait $e = \sum e_g$, $f = \sum g.e_g$.

Proposition IV.1 (Pedersen - Størmer [1]) Notons $\underline{B}$ le produit croisé de $\underline{A}$ par G , Φ le morphisme canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$; alors un projecteur e de $\underline{A}$ est $\underset{G}{\hat{\sim}}$ fini si et seulement si $\Phi(e)$ est fini relativement à $\underline{B}$.

Principe de la démonstration.

On commence par définir une relation $\underset{G}{\hat{\sim}}$ sur $\underline{A}^+$ de la façon suivante : pour a_1 et $a_2 \in \underline{A}^+$, $a_1 \underset{G}{\hat{\sim}} a_2$ signifie qu'il existe un ensemble I et des éléments $a_{i,g}$ de $\underline{A}$, $i \in I$, $g \in G$, vérifiant

$$a_1 = \sum_{i,g} a_{i,g}^* a_{i,g} \quad , \quad a_2 = \sum_{i,g} g(a_{i,g} a_{i,g}^*) .$$

De même pour une W^*- algèbre quelconque $\underline{D}$ on définit une relation $\sim$ sur $\underline{D}^+$: $d_1 \sim d_2$ s'il existe un ensemble I et des éléments d_i de $\underline{D}$ vérifiant :

$$d_1 = \sum d_i^* d_i \quad , \quad d_2 = \sum d_i d_i^* ;$$

on démontre que $\sim$ est une relation d'équivalence qui induit la relation habituelle sur $\underline{A}_p$.
On démontre alors ce qui suit : pour a_1 et $a_2 \in \underline{A}^+$ on a $a_1 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} a_2$ si et seulement si $\Phi(a_1) \sim \Phi(a_2)$, d'où résulte que $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ est une relation d'équivalence qui induit sur l'ensemble des projecteurs la relation définie au début du paragraphe. Notons E l'espérance conditionnelle de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ construite à la proposition I.2 ; alors pour b_1 et $b_2 \in \underline{B}^+$, $b_1 \sim b_2$ implique $E(b_1) \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} E(b_2)$. Enfin un projecteur e de $\underline{A}$ est $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ fini si et seulement si les relations $a \in \underline{A}^+$, $a \leq e$, $a \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} e$ entraînent $a = e$. Ceci fait la proposition est facile à démontrer.

<u>Démonstration du théorème</u> IV.1.

Cas fini : le système $(\underline{A},G')$ est fini si et seulement si $\underline{B}$ est finie (théorème II.11), donc si et seulement si $I_{\underline{B}} = \Phi(I_{\underline{A}})$ est fini relativement à $\underline{B}$, donc si et seulement si $I_{\underline{A}}$ est $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ fini (proposition IV.1).

Cas semi-fini. Si le système $(\underline{A},G')$ est semi-fini, il existe une trace n.s.f.f. invariante τ ; soit e un projecteur non nul ; il majore un projecteur non nul f vérifiant $\tau(f) < +\infty$; il est clair que f est $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ fini, donc I est $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ semi-fini.

Réciproquement supposons I $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ semi-fini ; on construit, à l'aide du théorème de Zorn, un projecteur e de $\underline{A}$, $\overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}}$ fini ayant I pour support dans $\underline{C}^G$; alors $\Phi(e)$ est fini dans $\underline{B}$ et de support central I, car

$$q \in \text{centre } \underline{B} \text{ et } q.\Phi(e) = 0 \Longrightarrow E(q) \in \underline{C}^G \text{ et } E(q).e = 0$$

$$\Longrightarrow E(q) = 0 \Longrightarrow q = 0 .$$

Il en résulte que $\underline{B}$ est semi-finie et qu'il existe une famille fidèle (σ_i) de traces n.s.f. sur $\underline{B}$, finies sur $\Phi(e)$; les fonctions $\omega_i = \sigma_i \circ \Phi$ sont des traces normales G - invariantes, formant une famille fidèle ; enfin elles sont semi-finies car dans le cas contraire l'ensemble m_i^+ des $a \in \underline{A}^+$ vérifiant $\omega_i(a) < +\infty$ serait annulé par un projecteur non nul de $\underline{C}^G$, ce qui contredit le fait que le support de e dans $\underline{C}^G$ est égal à I .

§ IV.2. <u>Autres résultats</u>.

a) Un projecteur e de $\underline{A}$ de genre dénombrable est $\hat{\underset{G}{\sim}}$ fini si et seulement si pour un (ou pour tout) état normal φ de support e, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$a , b \in \underline{A}^+ , \quad a , b \leq e , \quad \varphi(a) < \delta , \quad a \hat{\underset{G}{\sim}} b \Longrightarrow \varphi(b) < \varepsilon$$

(cf. Pedersen - Størmer [1]).

b) Supposons $\underline{A}$ commutative de genre dénombrable ; alors la relation $\hat{\underset{G}{\sim}}$ est identique à la relation de Hopf introduite au § B.7 (Størmer [8]) ; de plus le résultat a) reste vrai si l'on remplace " $a , b \in \underline{A}^+$ " par " $a , b \in \underline{A}_p$ ". (cf. Pedersen - Størmer [1])

Chapitre V | ÉTUDE DE DIVERSES PROPRIÉTÉS MOINS FORTES QUE LA COMMUTATIVITÉ DE $\underline{A}$

§ V.1. Quelques propriétés des systèmes dynamiques concrets.

On considère ici un système dynamique concret $(\underline{A},G,H,U)$ (voir § I.2) ; on pose $\underline{C}$ = centre $\underline{A}$, $\underline{U} = \{U_g\}''$, $\underline{R} = (\underline{A} \cup \underline{U})''$, K = projecteur sur l'ensemble des vecteurs de H invariants par les U_g ; d'après le théorème de Alaoglu - Birkhoff (§ C.1) on a $K \in \underline{U} \subset \underline{R}$. On a d'autre part

$$\underline{C}^G = \underline{C} \cap \underline{U}' \subset \underline{R} \cap \underline{R}' \subset \underline{R}'$$

$$\underline{I} = \underline{A}^G = \underline{A} \cap \underline{U}'$$

donc

$$K \in \underline{U} \subset \underline{I}' \quad ;$$

notons L le support de K dans $\underline{I} \cap \underline{I}'$, projecteur sur $\overline{\underline{I}'(K(H))} = \overline{\underline{A}'(K(H))}$; e le plus grand projecteur fini G - invariant de $\underline{A}$ (cf. Théorème I.1) ; on a $e \in \underline{I} \cap \underline{I}'$. Enfin pour $x , x' \in H$ on note ω_x et $\omega_{x,x'}$ les fonctions sur $\underline{A}$ définies par

$$\omega_x(a) = (a\,x \mid x) \quad \text{et} \quad \omega_{x,x'}(a) = (a\,x \mid x') \;;$$

si x et $x' \in K(H)$, $\omega_{x,x'}$ est G - invariante.

Proposition V.1. On a $L \leqslant e$, inégalité qui devient égalité si tout état normal invariant sur $\underline{A}$ est de la forme ω_x avec $x \in K(H)$.

Première assertion : on a pour tout $x \in K(H)$: $\omega_x(I-e) = 0$, $(I-e)x = 0$, $(I-e)\,a'\,x = a'\,(I-e)\,x = 0 \quad \forall\, a' \in \underline{A}'$, d'où $I-e \leqslant I-L$.

Deuxième assertion : le support de ω_x est le projecteur P_x sur $\overline{\underline{A}'x}$ car pour tout projecteur q de $\underline{A}$ on a

$$\omega_x(q) = 0 \iff q\,x = 0 \iff q\,a'\,x = 0 \;\forall\, a' \in \underline{A}'$$

$$\iff q \leqslant I - P_x \;;$$

il en résulte que

$$e = \sup_{x \in K(H)} \operatorname{supp} \omega_x = \sup_{x \in K(H)} P_x = L .$$

<u>Proposition</u> V.2. L'ensemble $\underline{A}_K$ des opérateurs dans $K(H)$ de la forme $K a \mid K(H)$ où $a \in \underline{A}$, est une algèbre de von Neumann égale à $\underline{R}_K$ et isomorphe à $\underline{I}\, L$. En particulier si $\underline{I}\, e$ est commutative, $\underline{A}_K$ l'est aussi.

On a $\underline{A}_K = \underline{R}_K$ puisque $\underline{R}$ est engendrée par $\underline{A}$ et les U_g qui opèrent trivialement sur $K(H)$; notons T l'application canonique de $\underline{A}$ sur $\underline{A}_K$; on a $T(\underline{I}) = \underline{A}_K$ car si $a \in \underline{A}$, $x, x' \in K(H)$

$$\begin{aligned} (T(E^G a)\, x \mid x') &= (E^G a . x \mid x') = \omega_{x,x'}(E^G a) \\ &= \omega_{x,x'}(a) \qquad \text{(théorème II.1)} \\ &= (T(a)\, x \mid x') . \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Ker}(T \mid \underline{I}) = \underline{I}\,(I-L)$, T induit un isomorphisme de $\underline{I}L$ sur $\underline{A}_K$.

§ V.2. Diverses propriétés moins fortes que la commutativité de $\underline{A}$.

Nous considérons ici un SD abstrait $\underline{F} = (\underline{A}, G)$; nous notons $\underline{C}$ le centre de $\underline{A}$, e le plus grand projecteur fini G - invariant de $\underline{A}$ (cf.th. I.1), E^G l'espérance conditionnelle canonique de $\underline{A}$ dans $\underline{A}^G$.

Définitions. Nous dirons que $\underline{F}$ vérifie la condition

(C 1) si l'algèbre $\underline{I}$ e est commutative ;

(C 2) si on a $\underline{I}\,e \subset \underline{C}\,e$, c'est-à-dire $\underline{I}\,e = \underline{C}^G e$;

(C 3) si on a $\underline{I}\,e \subset \underline{C}\,e$ et $e \in \underline{C}$, ou encore si $\underline{I}\,e \subset \underline{C}$;

(C 4) si on a $\underline{I} \subset \underline{C}$, i.e. $\underline{I} = \underline{C}^G$.

Pour introduire les conditions suivantes nous nous donnons en outre une sous - C^* - algèbre A de $\underline{A}$, ultrafaiblement dense et invariante par G ; nous considérons donc un système $\underline{F}' = (\underline{A}, G, A)$ au lieu du système $(\underline{A}, G)$. Nous supposons que G est localement compact et opère continûment dans A en ce sens que pour tout $a \in A$ et toute $\varphi \in \underline{A}_*$, la fonction $g \longmapsto \varphi(g\,a)$ est continue. Enfin nous utilisons les notations introduites au bas de la page 63.

Nous dirons que $\underline{F}'$ vérifie la condition

(C 5) si pour tout $s \in S$, tout $\omega \in (\underline{A}_s)_*$ et tous $a,b \in A$, la fonction $g \longmapsto \omega(\pi_s(g\,a))$ est faiblement presque périodique et

$$m_g\ \omega(\pi_s(ga.b - b.ga)) = 0 \ ; \qquad (1)$$

la deuxième condition est équivalente à $m_g\,\pi_s(ga) \in \underline{C}_s$ (voir définition de $m_g\,\pi_s(ga)$ au § II.2) ;

(C 6) : condition analogue à la précédente en remplaçant (1) par

$$m_g\ |\omega(\pi_s(ga.b - b.ga))| = 0$$

qui revient à dire que $m_g\,f(g).\,\pi_s(ga) \in \underline{C}_s \quad \forall f \in FPP(G)$;

(C 7) si G est non compact et si $\lim\limits_{g=\infty} \varphi(ga.b - b.ga) = 0 \quad \forall\, a,b \in A,\ \varphi \in \underline{A}_*$;

(C 8) si G est non compact et si $\lim_{g=\infty} \| ga.b - b.ga \| = 0 \quad \forall\, a,b \quad A$.

Il est clair que (C 8) implique (C 7) , (C 6) implique (C 5), (C 4) implique (C 3) implique (C 2) implique (C 1) ; nous verrons plus loin (cor.V.1) que (C 7) implique (C 6) et (C 5) implique (C 3).

Si $\underline{F}$ est un système dynamique concret avec vecteur totalisateur et invariant ξ, la condition (C 5) (resp. (C 6)) équivaut à la suivante : pour tout $\omega \in \underline{A}_*$ et tous $a,b \in A$, la fonction $g \longmapsto \omega(g\, a)$ est FPP et on a

$$m_g\ \omega(ga.b - b.ga) = 0 \quad (\text{resp. } m_g |\omega(ga.b - b.ga)| = 0).$$

Théorème V.1.

(i) On suppose que $\underline{F}$ est fini ; alors (C 4) $\Longleftrightarrow$ (C 3) $\Longleftrightarrow$ (C 2) .

(ii) On suppose que $\underline{F}$ est fini, que G est localement compact et opère continûment dans $\underline{A}$; alors $\varphi(g\, a)$ est FPP pour tous $a \in \underline{A}$, $\varphi \in \underline{A}_*$; (C 4) est vérifiée si et seulement si (C 5) l'est pour une sous-algèbre A , ou encore pour toute.

(iii) On suppose, en plus des hypothèses de (ii), que G est non compact ; alors (C 7) $\Longrightarrow$ (C 6) .

Comme $\underline{F}$ est fini, on a $e = I$, $\varphi(g\, a)$ est FPP pour tous $a \in \underline{A}$, $\varphi \in \underline{A}_*$ et $E^G a = m_g\, g.a$ (théorème II.4) ; (i) et (ii) sont alors immédiats ; (iii) résulte du fait que toute fonction continue nulle à l'infini a une moyenne nulle.

Lemme V.1. Le système $\underline{F}$ vérifie (C 1) si et seulement si $\underline{E}(\underline{A})^G$ est un simplexe, c'est-à-dire encore si $\underline{A}_*^G$ est réticulé.

D'après le théorème II.5, les ensembles ordonnés $\underline{A}_*^G$ et $(\underline{I}\, e)_*$ sont isomorphes ; si $\underline{I}\, e$ est commutative il est clair que $(\underline{I}\, e)_*$ est réticulé. Réciproquement supposons $(\underline{I}\, e)_*$ réticulé ; sa partie hermitienne l'est aussi ;

la partie hermitienne de $\underline{I}\,e$ l'est aussi comme dual du précédent, et cela entraîne que $\underline{I}\,e$ est commutative d'après Sherman [1].

Proposition V.3. On considère un système dynamique concret $\underline{F} = (\underline{A},G,H,U)$ avec vecteur totalisateur et invariant ξ. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{F}$ vérifie (C 3) ;

(ii) $\underline{F}$ vérifie (C 4) ;

(iii) il existe une sous- C^* - algèbre A de $\underline{A}$, u.f. dense dans $\underline{A}$, G-invariante et telle que $\overline{\text{co}\, G\, a}$ rencontre $\underline{C}$ pour tout $a \in A$;

(iv) $\overline{\text{co}\, G\, a}$ rencontre $\underline{C}$ pour tout $a \in \underline{A}$.

De plus ces conditions impliquent $\underline{F}$ fini et sont impliquées par (C 7) et par (C 5).

Démonstration. On utilise les notations du § V.1.

a) Nous savons déjà que (ii) implque (i) et (iv) implique (iii).

b) Montrons que (iii) implique (ii) et $\underline{F}$ fini. Comme ξ est séparateur pour $\underline{C}$, le système $(\underline{C},G)$ est fini ; notons F l'EC canonique de $\underline{C}$ sur $\underline{C}^G$. Soit a un élément de A ; d'après (iii) il existe $a' \in \overline{\text{co}\, G\, a} \cap \underline{C}$; d'après le théorème II.4, $F(a') \in \overline{\text{co}\, G\, a'} \cap \underline{C}^G$; comme $\overline{\text{co}\, G\, a'} \subset \overline{\text{co}\, G\, a}$, on voit que $\overline{\text{co}\, G\, a}$ rencontre $\underline{C}^G$; soit a'' un élément de $\overline{\text{co}\, G\, a} \cap \underline{C}^G$; pour tous $x,y \in K(H)$ on a $(b\,x \,|\, y) = (a\,x \,|\, y)$ $\forall\, b \in \overline{\text{co}\, G\, a}$, donc $K\,b \,|\, K(H) = K\,a \,|\, K(H)$; en particulier, comme $K \in (\underline{C}^G)'$, on peut écrire $a'' \,|\, K(H) = K\,a \,|\, K(H)$; comme K est séparateur pour $\underline{C}^G$, ceci montre que a'' est unique ; si on le note $E(a)$ on a donc $E(a) \in \underline{C}^G$ et $E(a) \,|\, K(H) = K\,a \,|\, K(H)$. Cette relation montre que E est une application u.f. continue de A dans $\underline{C}^G$; elle se prolonge par continuité en une application u.f. continue, encore notée E, de $\underline{A}$ dans $\underline{C}^G$, qui vérifie encore $E(a) \,|\, K(H) = K\,a \,|\, K(H)$ $\forall\, a \in \underline{A}$; il est clair que E

est positive, idempotente et G - invariante ; c'est une EC car pour $a \in \underline{A}$, $b \in \underline{C}^G$ on a

$$E(ab) \mid K(H) = K\, a\, b \mid K(H) = (K\, a \mid K(H)).\, b \mid K(H)$$
$$= (E(a) \mid K(H)).\, b \mid K(H) = (E(a).b) \mid K(H)$$

i.e. $E(a\, b) = E(a).b$; enfin pour tout $\varphi \in \underline{A}_*^G$ on a $\varphi(E(a)) = \varphi(a)$ pour tout $a \in A$ (puisque $E(a) \in \overline{\mathrm{co}\ G\ a}$), donc pour tout $a \in \underline{A}$ par continuité. Le théorème II.1 montre alors que $E = E^G$; comme $E(I) = I$, le système (A,G) est fini, $\underline{A}^G = E(\underline{A}) = \underline{C}^G$.

c) Montrons que (i) implique (iv). D'après la proposition V.1 on a $e \geqslant L$ = projecteur sur $\overline{\underline{A}'(K(H))}$; comme e appartient à $\underline{C}$, il permute à $\underline{A}$, donc majore le projecteur sur $\overline{\underline{A}(\underline{A}'(K(H)))} = \overline{\underline{A}'(\underline{A}(K(H)))}$, et ce sous-espace est égal à H puisque K est totalisateur pour $\underline{A}$; par suite $e = I$, le système $\underline{F}$ est fini. D'après le théorème II.4 on a $E^G(a) \in \overline{\mathrm{co}\ G\ a}$ pour tout $a \in \underline{A}$; comme $E^G(a) \in \underline{C}$, on a montré (iv).

d) Montrons que (C 7) implique (iii). Notons F le filtre des complémentaires des parties compactes de G et T l'application $g \longmapsto g\,a$ où a est fixé dans A ; le filtre T(F) admet un point ultra-faiblement adhérent a', qui appartient évidemment à $\overline{\mathrm{co}\ G\ a}$; enfin il est facile de voir que $a' \in \underline{C}$.

e) (C 5) implique (iii) car $m_g\, g.a \in \overline{\mathrm{co}\ G\ a}$ (voir § II.2).

<u>Proposition</u> V.4. On reprend les hypothèses de la proposition V.3 et les notations du § V.1 ;

(i) si $\underline{A}_K$ est commutative, $\underline{R}'$ l'est aussi, i.e. $\underline{R}' = \underline{R} \cap \underline{R}'$;

(ii) la condition (C 2) implique $\underline{A}_K$ commutative et $\underline{R}' = \underline{C}^G$.

<u>Démonstration</u>. (i) Si $\underline{A}_K = \underline{R}_K$ est commutative, comme elle admet le vecteur

totalisateur ξ , elle est commutative maximale, donc $\underline{R}_K = \underline{R}'_K$ et $\underline{R}'_K$ est commutative ; mais comme K est séparateur pour $\underline{R}'$, $\underline{R}'$ est isomorphe à $\underline{R}'_K$, donc commutative.

(ii) Supposons (C 2) vérifiée ; alors $\underline{I}\, e$ est commutative et la proposition V.2 montre que $\underline{A}_K$ l'est aussi ; elle est donc commutative maximale et on a

$$\begin{aligned} \underline{R}'_K = \underline{A}_K &= (\underline{I}\ L)_K \qquad \text{(prop. V.2)} \\ &\subset (\underline{I}\ e)_K \qquad \text{(prop. V.1)} \\ &= (\underline{C}^G\ e)_K = (\underline{C}^G)_K \qquad \text{puisque } e \geqslant K\ ; \end{aligned}$$

comme $\underline{C}^G \subset \underline{R}'$, cela entraîne $\underline{R}'_K = (\underline{C}^G)_K$; et comme K est séparateur pour $\underline{R}'$, on voit que $\underline{R}' = \underline{C}^G$.

__Proposition__ V.5. On reprend les hypothèses de la proposition V.3 et on suppose que G est localement compact et opère continûment dans $\underline{A}$. Alors

$$\begin{array}{l} (C\ 8) \Longrightarrow (C\ 7) \Longrightarrow (C\ 6) \Longrightarrow (C\ 5) \Longleftrightarrow (C\ 4) \Longleftrightarrow (C\ 3) \Longrightarrow (C\ 2) \Longrightarrow (C\ 1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow \underline{F} \text{ fini} \end{array}$$

D'après la prop. V.3, (C 4) $\Longleftrightarrow$ (C 3) $\Longrightarrow$ $\underline{F}$ fini ; d'après le th.V.1, (C 4) implique (C 5) pour toute sous-algèbre A ; d'après la prop. V.3, (C 5) $\Longrightarrow$ (C 4) , (C 7) $\Longrightarrow$ (C 4) $\Longrightarrow$ $\underline{F}$ fini, donc (th. V.1) (C 7) $\Longrightarrow$ (C 6).

__Notations__. Considérons un système dynamique abstrait $\underline{F} = (\underline{A}, G)$; notons S l'ensemble des états normaux invariants de $\underline{A}$; pour tout $s \in S$ on peut construire par la méthode de Gelfand - Segal un espace hilbertien H_s , une représentation normale π_s de $\underline{A}$ dans H_s , une représentation unitaire U_s de G dans H_s et un vecteur totalisateur et invariant ξ_s ; on pose $\underline{A}_s = \pi_s(\underline{A})$, $\underline{C}_s$ = centre $\underline{A}_s$, $\underline{F}_s$ = système dynamique concret $(\underline{A}_s, G, H_s, U_s)$. On posera aussi $H_S = \bigoplus_{s \in S} H_s$, $\pi_S = \oplus\, \pi_s$, $U_S = \oplus\, U_s$, $\underline{A}_S = \pi_S(\underline{A})$; enfin on note

$\underline{R}_s$, K_s , $\underline{I}_s$, L_s , e_s , $\underline{R}_S$, K_S , $\underline{I}_S$, L_S , e_S les objets analogues à ceux définis au § V.1 ; on a $K_S = \oplus K_s$; le support de π_S est égal au support de e dans $\underline{C}$. On voit facilement, comme dans Dixmier [2], § 2.5.1, que les formes positives normales invariantes dominées par un élément s de S correspondent bijectivement aux éléments positifs de $\underline{R}'_s$, à tout $T \in \underline{R}'^+_s$ correspondant la forme $a \longmapsto (T\, \pi_s(a)\, \xi_s \mid \xi_s)$; il en résulte que s <u>est extrémal si et seulement</u> si $\underline{R}'_s$ <u>est réduite aux scalaires</u> ; mais il n'existe pas nécessairement d'éléments extrémaux dans S : prendre par exemple $\underline{A}$ commutative et G trivial (voir aussi remarque V.2).

<u>Théorème</u> V.2 (Dang Ngoc - Ledrappier [1]) Soit $\underline{F} = (\underline{A},G)$ un système dynamique ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{F}$ vérifie (C 1) ;

(ii) S est un simplexe ;

(iii) $\underline{F}_s$ vérifie (C 1) pour tout $s \in S$;

(iv) $(\underline{A}_s)_{K_s}$ est commutative pour tout $s \in S$;

(v) $\underline{R}'_s$ est commutative pour tout $s \in S$.

<u>Démonstration</u>.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : lemme V.1.

(ii) implique (iii) : résulte de $\underline{I}_s\, e_s = \pi_s(\underline{I}\, e)$ (cf. prop. II.1).

(iii) implique (iv) : résulte de la prop. V.2.

(iv) implique (v) : prop. V.4.

(v) implique (ii) : il suffit de montrer que deux éléments quelconques s' et s" de $(\underline{A}_*^+)^G$ ont une borne inférieure, ou encore une borne inférieure dans l'ensemble des éléments majorés par $s = s' + s"$; et cela résulte de la correspondance bijective entre ces éléments et ceux de $\underline{R}'^+_s$.

<u>Théorème</u> V.3 (Dang Ngoc - Ledrappier [1]) Soit $\underline{F} = (\underline{A},G)$ un système dynamique ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{F}$ vérifie (C 2) ;

(ii) $\underline{F}_s$ vérifie (C 2) pour tout $s \in S$;

(iii) $\underline{R}'_s \subset \underline{C}_s$ (ou encore $\underline{R}'_s = \underline{C}_s^G$) pour tout $s \in S$;

(iv) $(\underline{A}_s)_{K_s}$ est commutative et $\underline{R}_s \cap \underline{R}'_s \subset \underline{C}_s$ (ou encore $\underline{R}_s \cap \underline{R}'_s = \underline{C}_s^G$) pour tout $s \in S$.

<u>Démonstration</u>.

(i) implique (ii) : résulte de $\underline{I}_s\, e_s = \pi_s(\underline{I}\, e)$ (prop. II.1).

(ii) implique (iii) : prop. V.4.

(iii) implique (iv) : si (iii) est vérifiée, $\underline{R}'_s$ est commutative pour tout s , donc $(\underline{A}_s)_{K_s}$ est commutative (th. V.2) ; de plus on a évidemment $\underline{R}_s \cap \underline{R}'_s \subset \underline{C}_s$.

(iv) implique (i) : d'après la prop. V.2, on a

$$(\underline{I}_S)_{K_S} = (\underline{A}_S)_{K_S} = (\underline{R}_S)_{K_S} \quad ;$$

par suite $(\underline{R}_S)_{K_S} = (\underline{R}_S \cap \underline{R}'_S)_{K_S}$. On doit montrer que pour tout $i \in \underline{I}$ il existe $c \in \underline{C}^G$ vérifiant $i\,e = c\,e$; d'après ce qui précède, $(\pi_S(i))_{K_S}$ appartient à $(\underline{R}_S \cap \underline{R}'_S)_{K_S}$, donc il existe $c' \in \underline{R}_S \cap \underline{R}'_S$ tel que $(\pi_S(i))_{K_S} = (c')_{K_S}$. L'hypothèse faite entraîne $\underline{R}_S \cap \underline{R}'_S = \underline{C}_S^G$, donc $c' \in \underline{C}_S^G$; soit $c \in \underline{C}^G$ tel que $\pi_S(c) = c'$. Pour montrer que $i\,e = c\,e$ il suffit, puisque $e \leq \operatorname{supp} \pi_S$, de montrer que $\pi_S(i\,e) = \pi_S(c\,e)$, i.e. encore $\pi_S(i)\,e_S = c'\,e_S$; d'après la prop. V.1 on a $L_S = e_S$; on est donc ramené à vérifier que $\pi_S(i)\,L_S = c'\,L_S$, ou encore (prop. V.2) que

$$(\pi_S(i)\,L_S)_{K_S} = (c'\,L_S)_{K_S} \quad ;$$

ou enfin, puisque $L_S \geqslant K_S$, que $(\pi_S(i))_{K_S} = (c')_{K_S}$ - ce que nous savons déjà.

Théorème V.4 (Dang Ngoc - Ledrappier [1]) Soit $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ un système dynamique ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{F}$ vérifie (C 3) ;

(ii) $\underline{F}_s$ vérifie (C 3) pour tout $s \in S$;

(iii) $\overline{\text{co } G\, a}$ rencontre $\underline{C}_s$ pour tout $a \in \pi_s(\underline{A})$ et tout $s \in S$;

(iv) il existe une sous - C^*- algèbre A de $\underline{A}$, ultra-faiblement dense et G - invariante, telle que $\overline{\text{co } G\, a}$ rencontre $\underline{C}_s$ pour tout $a \in \pi_s(A)$ et tout $s \in S$.

En outre les conditions ci-dessus sont impliquées par (C 5) et par (C 7).

Démonstration.

(i) implique (ii) : résulte de $\underline{I}_s\, e_s = \pi_s(\underline{I}\, e)$ et $e_s = \pi_s(e)$ (prop.II.1).

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) : prop. V.3.

(ii) implique (i) : pour tout $s \in S$ on a $e_s = I$ d'après la prop. V.3 ; par suite $e_S = I$, $\pi_S(I-e) = 0$, $\text{supp}\, \pi_S \leq e$; comme $\text{supp}\, \pi_S$ est le support de e dans $\underline{C}$, on voit que $e = \text{supp}\, \pi_S \in \underline{C}$. Reste à voir que $\underline{I}\, e$ est inclus dans $\underline{C}$; on peut identifier $\underline{A}_S$ à $\underline{A}\, e$, et $\pi_S(a)$ à $a\, e$ pour tout $a \in \underline{A}$; soit $i \in \underline{I}$; comme $\pi_s(i) \in \underline{C}_s$ pour tout s, on a

$$\pi_s(i\, a) = \pi_s(a\, i) \quad , \quad \pi_S(i\, a) = \pi_S(a\, i) \quad ,$$

$$i\, a\, e = a\, i\, e \quad , i\, e\, a = a\, i\, e \quad , \quad i\, e \in \underline{C} .$$

Dernière assertion : si $\underline{F}$ vérifie (C 5) ou (C 7), $\underline{F}_s$ la vérifie aussi pour tout s, donc aussi (C 3) d'après la prop. V.5.

Remarque V.1. Considérons une C^* - algèbre A et un groupe G opérant par automorphismes dans A ; G opère naturellement dans la W^* - algèbre enveloppante $\underline{A}$ de A ; on obtient ainsi des systèmes dynamiques particuliers . Pour les systèmes de ce type :

- les systèmes vérifiant (C 1) ont été introduits par Lanford et Ruelle [1] sous le nom de " G-abelian " ; en fait ces auteurs supposaient réalisée la condition (iv) du théorème V.2 et démontraient la condition (ii) du même théorème ;
- les systèmes vérifiant (C 2) ont été introduits dans Doplicher - Kastler - Størmer [1], page 430 ;
- les systèmes vérifiant (C 3) ont été introduits par Størmer [2] sous le nom de " large groups of automorphisms " ;
- la condition (C 6) est voisine de la condition " M - abelian " introduite dans Doplicher - Kastler [1] ;
- les systèmes vérifiant (C 7) ont été introduits dans Doplicher - Kadison - Kastler - Robinson [1] sous le nom de " weakly asymptotically abelian " ;
- les systèmes vérifiant (C 8) ont été introduits dans Doplicher - Kastler - Robinson [1] sous le nom de " asymptotically abelian ".

Toutes ces notions ont été exposées systématiquement dans Doplicher - Kastler - Størmer [1].

<u>Remarque</u> V.2. Les systèmes vérifiant (C 1) auront évidemment un intérêt en relation avec la théorie des représentations intégrales de Choquet ; en fait on ne pourra en général pas l'appliquer directement à S, car la boule unité de $\underline{A}_*$ n'est pas faiblement compacte, puisqu'elle est faiblement dense dans celle de $\underline{A}$; on pourra l'appliquer lorsque $\underline{A}$ sera la W^* - algèbre enveloppante d' une C^* - algèbre A , car alors $\underline{A}_*$ s'identifiera au dual de A , et on pourra mettre sur $\underline{A}_*$ la topologie faible de dual de A, pour laquelle la boule unité sera compacte.

<u>Corollaire</u> V.1. On a les implications

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (C\ 8) & \Longrightarrow & (C\ 7) & \Longrightarrow & (C\ 6) & \Longrightarrow & (C\ 5) & \Longrightarrow & (C\ 3) & \Longrightarrow & (C\ 2) & \Longrightarrow & (C\ 1) \\ & & & & & & (C\ 4) & \nearrow & & & & & \end{array}$$

§ V.3. Exemples.

Exemple 1. Tout système dynamique proprement infini vérifie (C 3) puisqu'alors e est nul.

Exemple 2. Exemple de système dynamique vérifiant (C 1) mais non (C 2) : $\underline{A}$ est un facteur fini, $G = \underline{U}(\underline{B})$ où $\underline{B}$ est une sous - algèbre commutative maximale (cf. § II.4) ; alors $e = I$, $\underline{I}\, e = \underline{I} = \underline{B} \neq \underline{C} = \underline{C}^G e$.

Exemple 3. Exemple de système dynamique vérifiant (C 2) mais non (C 3) : $\underline{A} = \underline{L}(H)$, G est un groupe localement compact opérant dans $\underline{A}$ par l'intermédiaire d'une représentation admettant un unique (à un coefficient près) vecteur invariant ξ et un spectre purement continu dans le sous-espace orthogonal à ξ ; alors e est le projecteur sur ξ , $\underline{I}\, e = \underline{C}\, e$, mais $e \notin \underline{C}$.

Exemple 4. Soi $\underline{A}$ une W^*- algèbre quelconque ; le système $(\underline{A}\, , \underline{U}(\underline{A}))$ vérifie (C 4), mais pas nécessairement (C 6) : prenons $\underline{A} = M(n\, , \mathbb{C})$ et notons s la trace canonique sur $\underline{A}$; comme s est fidèle, on peut remplacer $\underline{A}_s$ par $\underline{A}$ dans l'énoncé de la condition (C 6) ; si a et b sont deux éléments non permutables de $\underline{A}$, il existe $\varphi \in \underline{A}_*$ tel que $\varphi(ab - ba) \neq 0$; la fonction continue $g \longmapsto |\varphi\,(ga.b - b.ga)|$ est strictement positive en l'élément neutre, donc

$$m_g\, |\varphi\,(ga.b - b.ga)| = \int |\varphi(ga.b - b.ga)|\, dg > 0 .$$

Exemple 5. Soit H_o un espace hilbertien, ξ_o un vecteur unitaire de H_o ; posons

$$H = \bigotimes_{n=o}^{\infty(\xi_n)} H_n \qquad \text{avec } H_n = H_o\, ,\ \xi_n = \xi_o$$

$$\xi = \otimes\, \xi_n$$

(pour la définition des produits tensoriels infinis, voir § A.8)

Soit G le groupe des permutations de $\mathbb{N}$ ne déplaçant qu'un nombre fini de points (groupe symétrique dénombrable) ; on définit une représentation U de G dans H en faisant opérer G par permutation des indices : si $x_n \in H_n$, $x_n = \xi_n$ p.p., et $g \in G$, on a $U_g(\otimes x_n) = \otimes y_n$ où $y_n = x_{g^{-1}(n)}$.

Soit $\underline{A}_o$ une algèbre de von Neumann dans H_o admettant ξ_o pour vecteur totalisateur et séparateur ; posons $\underline{A} = \otimes \underline{A}_n$ où $\underline{A}_n = \underline{A}_o$; $\underline{A}$ est engendrée par les opérateurs de la forme $\otimes a_n$ avec $a_n \in \underline{A}_n$ et $a_n = I$ p.p. ; on a

$$U_g . \otimes a_n . U_g^{-1} = \otimes b_n \quad \text{où} \quad b_n = a_{g^{-1}(n)}$$

donc $U_g \underline{A} U_g^{-1} = \underline{A}$; on a donc ainsi défini un système dynamique concret $\underline{F} = (\underline{A}, G, H, U)$ avec vecteur totalisateur et invariant ξ. Comme $\underline{A}' = \otimes \underline{A}'_n$, ξ est totalisateur pour $\underline{A}'$, donc séparateur pour $\underline{A}$, et $\underline{F}$ est fini.

Montrons que $\underline{F}$ vérifie la condition (C 6) en prenant pour Ala C^* - algèbre engendrée par les opérateurs $\otimes a_n$. Comme $\underline{F}$ est fini, les fonctions $\varphi(g\, a)$ sont FPP ; on doit montrer que

$$m_g |\varphi(ga.b - b.ga)| = 0 \quad \forall \varphi \in \underline{A}_* , \; a,b \in A ;$$

par continuité on peut supposer que a et b appartiennent à un même produit tensoriel fini $\bigotimes_{n=o}^{m} \underline{A}_n$. D'après le § C.2 il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble fini X de G tel que

$$(\text{card } X)^{-1} \sum_{g \in X} |\varphi(hga.b - b.hga)| \leq \varepsilon \qquad \forall h \in G ;$$

pour tout entier N on peut trouver des éléments $g_1, \dots g_N$ de G transformant l'ensemble $\{1, \dots m\}$ en des sous-ensembles deux à deux disjoints ; posons $X = \{g_1, \dots g_N\}$; $hg_i a.b - b.hg_i a$ ne peut être différent de 0 que si $hg_i\{1, \dots m\}$ rencontre $\{1, \dots m\}$, i.e. si $g_i\{1, \dots m\}$ rencontre $h^{-1}\{1, \dots m\}$, et cela se produit au plus pour m indices i ; on a donc

$$(\text{card } X)^{-1} \sum_{g \in X} |\varphi(hga.b - b.hga)| = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} |\varphi(hg_i a.b - b.hg_i a)|$$

$$\leq 2\, m\, N^{-1} \|\varphi\| \; \|a\| \; \|b\|$$

ce qui établit notre assertion.

Montrons maintenant que $\underline{F}$ ne vérifie pas (C 7) si $\underline{A}_o$ n'est pas commutative. Prenons deux éléments a et b de la forme $a = a_1 \otimes I \otimes I \otimes \ldots$, $b = b_1 \otimes I \otimes I \otimes \ldots$ avec $a_1 b_1 - b_1 a_1 \neq 0$; il existe un état normal φ sur $\underline{A}$ tel que $\varphi(ab - ba) \neq 0$. Pour tout entier $k \geqslant 2$ notons g_k la permutation qui échange k et k+1 et laisse les autres indices inchangés ; on a $g_k a = a$, $\varphi(g_k a.b - b.g_k a) = \varphi(ab - ba) \neq 0$, donc $\varphi(ga.b - b.ga)$ ne tend pas vers 0 lorsque g tend vers l'infini.

Exemple 6 (Généralisation des systèmes dynamiques de Bernoulli). Soit G un groupe dénombrable que nous supposons pour simplifier sans sous-groupes finis. A tout espace hilbertien K de dimension finie ou dénombrable $\geqslant 2$ on peut associer canoniquement une représentation unitaire U de G : on choisit un vecteur unitaire η de K, on pose

$$H = \bigotimes_{g \in G}^{(\xi_g)} H_g \quad \text{où } H_g = K, \quad \xi_g = \eta ,$$

et on fait opérer G dans H par translation des indices, i.e. pour toute famille (x_g) avec $x_g = \eta$ p.p. on a

$$U_h(\otimes x_g) = \otimes y_g \qquad \text{où} \quad y_g = x_{h^{-1}g} .$$

Le vecteur $\xi = \otimes \xi_g$ est invariant par U.

On va voir que U se décompose en une fois la représentation triviale plus une infinité de fois la représentation régulière gauche de G. Soit (η_n), n=0,1,... une base orthonormale de K telle que $\eta_o = \eta$; on obtient une base orthonormale de H en posant $\varepsilon_\alpha = \otimes \eta_{\alpha(g)}$ où α parcourt l'ensemble A des applications de G dans $\mathbb{N}$ telles que $\alpha(g) = 0$ p.p. ; posons $\alpha_o(g) = 0 \ \forall g$; on a $\varepsilon_{\alpha_o} = \xi$; faisons opérer G à gauche dans A : $(h\alpha)(g) = \alpha(h^{-1}g)$;

il est facile de voir que le stabilisateur dans G d'un élément distinct de α_0 est réduit à l'élément neutre, et qu'il y a une infinité dénombrable d'orbites. D'autre part on a $U_h(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon_{h\alpha}$, donc H se décompose en autant de sous-espaces invariants qu'il y a d'orbites de G dans A ; d'où notre assertion. Ceci montre en particulier que la classe d'équivalence de U est indépendante du choix de K.

Soit maintenant $\underline{B}$ une algèbre de von Neumann dans K admettant η comme vecteur totalisateur ; posons $\underline{A} = \otimes \underline{A}_g$ où $\underline{A}_g = \underline{B}$; $\underline{A}$ est engendrée par les opérateurs de la forme $\otimes a_g$ où $a_g \in \underline{A}_g$ et $a_g = I$ p.p.; on a

$$U_h . \otimes a_g . U_h^{-1} = \otimes b_g \quad \text{où} \quad b_g = a_{h^{-1}g}$$

donc $U_h \underline{A} U_h^{-1} = \underline{A}$; nous avons donc défini un système dynamique concret $\underline{F} = (\underline{A}, G, H, U)$ avec vecteur totalisateur et invariant ξ.

Montrons que $\underline{F}$ vérifie la condition (C 8) en prenant pour A la C^*- algèbre engendrée par les opérateurs $\otimes a_g$. Il suffit de voir que

$$\lim_{h=\infty} \| ha.b - b.ha \| = 0$$

lorsque a et b sont de cette forme, soit $a = \otimes a_g$, $b = \otimes b_g$, avec $a_g = b_g = I$ en dehors d'un sous-ensemble fini F de G ; or l'ensemble $F' = \{ h \mid hF \cap F \neq \emptyset \}$ est fini, et si $h \notin F'$, on a $ha.b - b.ha = 0$.

On obtient en particulier les systèmes de Bernoulli classiques en prenant $G = \mathbb{Z}$, K de dimension finie, $\underline{B}$ commutative. Considérons deux systèmes de Bernoulli classiques $(\underline{A}, G)$ et $(\underline{A}', G)$ avec vecteurs ξ et ξ', provenant d'objets K, η, $\underline{B}$ et K', η', $\underline{B}'$; on démontre qu'il existe un isomorphisme de $\underline{A}$ sur $\underline{A}'$ compatible avec l'action de G et transformant $\omega_\xi | \underline{A}$ en $\omega_{\xi'} | \underline{A}'$ si et seulement si les deux systèmes ont même entropie, ce qui équivaut à dire que

$$\sum_{n=1}^{\dim K} |\eta_n|^2 . \log |\eta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\dim K'} |\eta'_n|^2 . \log |\eta'_n|^2$$

où $\eta_1, \dots \eta_{\dim K}$ (resp. $\eta'_1, \dots \eta'_{\dim K'}$) sont les coordonnées de η (resp. η') sur une base orthonormale de K (resp. K') diagonalisant $\underline{B}$ (resp $\underline{B}'$) [voir par exemple Arnold - Avez [1]]

Il serait évidemment du plus haut intérêt de généraliser la notion d'entropie au cas des systèmes dynamiques non commutatifs.

Exemple 7 (Algèbre des relations de commutation)

a) Faisons d'abord quelques rappels sur la W^*- algèbre des relations de commutation (voir par exemple Guichardet [7]). On se donne un espace préhilbertien complexe séparé E et on construit une W^*- algèbre $\underline{A}$ et une application W de E dans $\underline{U}(\underline{A})$ (groupe unitaire de $\underline{A}$) possédant les propriétés suivantes :

(i) W est u.f. continue sur chaque sous-espace de dimension finie de E ;

(ii) $W(x + y) = \exp(i \operatorname{Im}(x | y)) . W(x) . W(y) \quad \forall x,y \in E$

(iii) pour toute W^*- algèbre $\underline{B}$ et toute application V de E dans $\underline{U}(\underline{B})$ possédant les propriétés analogues à (i) et (ii), il existe un morphisme normal unique π de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ tel que $V = \pi \circ W$;

(iv) si a tout état normal φ sur $\underline{A}$ on associe la fonction $\psi = \varphi \circ W$ sur E , on obtient une correspondance bijective entre $\underline{E}(\underline{A})$ et l'ensemble $\underline{P}$ des fonctions complexes sur E vérifiant les conditions suivantes :

- $\psi(0) = 1$
- ψ est continue sour tout sous-espace de dimension finie
- $\sum_{j,k} c_j \bar{c}_k \exp(i \operatorname{Im}(x_j | x_k)) . \psi(x_j - x_k) \geq 0$ pour tout entier n, tous complexes $c_1, \dots c_n$ et tous éléments $x_1, \dots x_n$ de E ;

(v) les éléments $W(x)$ engendrent $\underline{A}$;

(vi) pour tout opérateur unitaire u dans E il existe un unique automorphisme α_u de $\underline{A}$ tel que $\alpha_u \circ W = W \circ u$.

b) Prenons $E = \mathbb{C}$. On peut réaliser $\underline{A}$ et W de la façon suivante (représentation de Fock - Schrödinger) : on prend un espace hilbertien H ayant une base orthonormale infinie ε_0 , ε_1 ,... ; les vecteurs de la forme

$$\mathrm{EXP}\ a = \sum_{n=0}^{\infty} (n\,!)^{-\frac{1}{2}} a^n \varepsilon_n \qquad \text{où } a \in \mathbb{C}$$

sont totaux dans H ; alors $\underline{A} = \underline{L}(H)$ et les $W(x)$ sont caractérisés par

$$W(x).\mathrm{EXP}\ a = \exp(-|x|^2/2 - a\,\bar{x}).\ \mathrm{EXP}\ (x+a)\ .$$

Un opérateur unitaire dans E s'identifie à un nombre complexe de module 1 ; notons G l'ensemble de ces nombres ; pour tout $g \in G$, α_g est l'automorphisme intérieur défini par l'opérateur unitaire U_g qui transforme chaque ε_n en $g^n \varepsilon_n$; $\underline{I} = \underline{A}^G$ est le commutant de la représentation U, c'est-à-dire l'ensemble de tous les opérateurs diagonaux, que nous identifions à 1^{∞} ; il est facile de voir que le système dynamique $(\underline{A},G)$ est fini ; il vérifie donc (C 1) , mais pas (C 2). L'espérance conditionnelle E^G associe à toute matrice sa diagonale ; l'isomorphisme $\omega \longmapsto \omega \circ E^G$ de $\underline{I}_* = 1^1$ sur $\underline{A}_*^G$ fait correspondre à tout élément $\omega = (\omega_n)$ de 1^1 la forme qui associe à toute matrice (a_{mn}) le nombre $\sum \omega_n a_{nn}$; on en déduit par un calcul facile que

$$(\omega \circ E^G \circ W)(x) = \exp(-|x^2|/2).\ \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \sum_{p=0}^{n} n!(p!)^{-2}((n-p)!)^{-1}(-|x|^2)^p\ .$$

En particulier pour $\omega_n = c^n(1-c)$ avec $0 \leq c < 1$, ω appartient à $\underline{E}(\underline{I})$ et $\omega \circ E^G \circ W = \psi_k$ où on a posé $k = (1+c)(2-2c)^{-1}$ et $\psi_k(x) = \exp(-k\,|x|^2)$. Si maintenant μ est une mesure positive de masse 1 sur

$[\frac{1}{2}, +\infty[$, $\int \psi_k . d\mu(k)$ est un élément de $\underline{P}^G$; l'application qui à μ associe $\int \psi_k . d\mu(k)$ est injective, mais pas surjective, car $\underline{E}(\underline{I})$ n'est visiblement pas isomorphe à l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

c) Supposons maintenant E quelconque et notons G le groupe des opérateurs unitaires dans E ; on peut encore définir des éléments ψ_k de $\underline{P}^G$ par la formule $\psi_k(x) = \exp(-k\|x\|^2)$ pour $k \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, puis des éléments $\int \psi_k d\mu(k)$ pour toute mesure μ positive de masse 1 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$; mais ici la situation est très différente de celle du cas $E = \mathbb{C}$: I.Segal [1] a en effet démontré que si E est de dimension infinie, l'application $\mu \longmapsto \int \psi_k d\mu(k)$ est une bijection de l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $\underline{P}^G$. Il en résulte que le système $(\underline{A}, G)$ vérifie encore (C 1).

d) Prenons maintenant $E = L^2(G)$ où G est un groupe localement compact non compact, et faisons opérer G dans E par translations à gauche ; on note $g.x$ l'action de $g \in G$ sur $x \in E$, et α_g l'automorphisme de $\underline{A}$ correspondant. Montrons que <u>le système</u> $(\underline{A}, G)$ <u>vérifie</u> (C 8) en prenant pour A la C^*- algèbre engendrée par les $W(x)$; pour cela il suffit de voir que pour x et $y \in E$ on a

$$\lim_{g=\infty} \| \alpha_g(W(x))\, W(y) - W(y)\, \alpha_g(W(x)) \| = 0 \;;$$

or l'expression considérée est égale à

$$| \exp(i \operatorname{Im}(g.x | y)) - \exp(-i \operatorname{Im}(g.x | y)) |$$

qui tend vers 0 puisque

$$(g.x | y) = \int x(g^{-1}h)\, \overline{y(h)}\, dh = (\bar{y} * \check{x})(g)$$

fonction qui est nulle à l'infini.

<u>Remarque</u> V.3. L'algèbre des relations d'anticommutation fournit un exemple de système dynamique vérifiant (C 7) mais non (C 8) (cf. § XI.3).

Chapitre VI | SYSTÈMES DYNAMIQUES CONCRETS, ERGODICITÉ, SPECTRE DE U

§ VI.1. Diverses propriétés analogues à l'ergodicité.

Nous considérons ici un système dynamique concret $\underline{F} = (\underline{A}, G, H, U)$ admettant un vecteur totalisateur et invariant ξ ; on pose $\omega = \omega_{\xi} \mid \underline{A}$ et on reprend les notations $\underline{C}$, $\underline{U}$, $\underline{R}$, K du § V.1.

Définitions. Nous dirons que $\underline{F}$ vérifie la condition :

(E 1) s'il est centralement ergodique, i.e. si $\underline{C}^G$ est réduit aux scalaires ;

(E 2) si $\underline{R} \cap \underline{R}'$ est réduit aux scalaires ;

(E 3) si $\underline{R}'$ est réduit aux scalaires ;

(E 4) si $\dim K = 1$, i.e. si $K = \mathbb{C}\xi$;

(E 5) s'il est ergodique, i.e. si $\underline{A}^G$ est réduit aux scalaires ;

(E 6) si G est localement compact, U continue et si on a

$$m_g \mid \omega(ga.b) - \omega(a).\omega(b) \mid = 0 \qquad \forall\, a,b \in \underline{A}$$

(la condition ci-dessus a bien un sens car la fonction

$$g \longmapsto \omega(ga.b) = (U_g\, a\, U_g^{-1}\, b\,\xi \mid \xi) = (U_g^{-1}\, b\,\xi \mid a^*\xi)$$

est faiblement presque périodique). On dira aussi que $\underline{F}$ est faiblement mélangeant.

(E 7) si G est localement compact non compact, U continue et si on a

$$\lim_{g=\infty} \omega(ga.b) = \omega(a).\omega(b) \qquad \forall\, a\,,\, b \in \underline{A}\ ;$$

on dira aussi que $\underline{F}$ est mélangeant.

<u>Théorème</u> VI.1. On suppose G localement compact et U continue ; soit A une sous - C^* - algèbre ultra-faiblement dense dans $\underline{A}$.

(i) (E 4) équivaut à $m_g (U_g x | y) = (x | \xi)\overline{(y | \xi)}$ $\forall$ $x,y \in H$, et aussi à $m_g\, \omega(ga.b) = \omega(a).\omega(b)$ $\forall$ $a,b \in A$ ou $\underline{A}$.

(ii) (E 6) équivaut à $m_g |(U_g x | y) - (x | \xi)\overline{(y | \xi)}| = 0$ $\forall$ $x,y \in H$ et aussi à $m_g |\omega(ga.b) - \omega(a).\omega(b)| = 0$ $\forall$ $a,b \in A$.

(iii) (E 7) équivaut à $\lim_{g=\infty} (U_g x | y) = (x | \xi)\overline{(y | \xi)}$ $\forall$ $x,y \in H$ et aussi à $\lim_{g=\infty} \omega(ga.b) = \omega(a).\omega(b)$ $\forall$ $a,b \in A$.

<u>Démonstration</u>.

(i) résulte de ce que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\dim K = 1$
- $K x = (x | \xi)\xi$ $\forall x \in H$ ou encore $K a\xi = (a\xi | \xi)$ $\forall$ $a \in A$ ou $\underline{A}$
- $(Kx | y) = (x | \xi)\overline{(y | \xi)}$ $\forall$ $x,y \in H$ ou encore $(K a\xi | b\xi) = (a\xi | \xi)\overline{(b\xi | \xi)}$ $\forall$ $a,b \in A$ ou $\underline{A}$
- (puisque $K = m_g U_g$, voir Appendice C.3) $m_g (U_g x | y) = (x | \xi)\overline{(y | \xi)}$ $\forall$ $x,y \in H$ ou encore

$$m_g (U_g a\xi | b\xi) = (a\xi | \xi)\overline{(b\xi | \xi)} \quad \forall\ a,b \in A \text{ ou } \underline{A}$$

ou

$$m_g (b U_g a\xi | \xi) = (a\xi | \xi)(b\xi | \xi) \quad \forall\ a,b \in A \text{ ou } \underline{A}$$

ou

$$m_g\, \omega(ga.b) = \omega(a).\ \omega(b) \quad \forall\ a,b \in A \text{ ou } \underline{A}\ .$$

(ii) Soient $x,y \in H$; ils sont limites d'éléments $a\xi$, $b\xi$, donc la fonction $g \longmapsto (U_g x | y) - (x | \xi)\overline{(y | \xi)}$ est limite uniforme des fonctions $g \longmapsto (U_g a\xi | b\xi) - (a\xi | \xi)\overline{(b\xi | \xi)}$; comme la moyenne est continue pour la convergence uniforme, la démonstration est analogue à celle de (i).

(iii) Démonstration analogue.

<u>Théorème</u> VI.2.

(i) On a

$$\begin{tikzcd}
(E\,7) \arrow[r, Rightarrow] & (E\,6) \arrow[r, Rightarrow] & (E\,4) \arrow[r, Rightarrow] & (E\,3) \arrow[r, Rightarrow] & (E\,2) \arrow[r, Rightarrow] & (E\,1) \\
& (E\,5) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \xi \text{ séparateur pour } \underline{A}\ .
\end{tikzcd}$$

(ii) Si $\underline{F}$ vérifie (C 1) on a $(E\,4) \Longleftrightarrow (E\,3)$.

(iii) Si $\underline{F}$ vérifie (C 2) on a $(E\,4) \Longleftrightarrow (E\,1)$.

(iv) Si $\underline{F}$ vérifie (C 3) on a

$$(E\,7) \Longrightarrow (E\,6) \Longrightarrow (E\,5) \Longleftrightarrow (E\,4) \Longleftrightarrow (E\,3) \Longleftrightarrow (E\,2) \Longleftrightarrow (E\,1).$$

<u>Démonstration</u>.

(i) (E 7) implique (E 6) : évident.

(E 6) implique (E 4) : résulte du th. VI.1.

(E 5) implique (E 4) : la prop. V.2 montre que $\underline{A}_K$ est réduite aux scalaires ; donc pour tout $a \in \underline{A}$, $K a \xi$ est proportionnel à ξ ; comme les éléments $K a \xi$ sont denses dans $K(H)$, cela entraîne $K(H) = \mathbb{C}\xi$.

(E 4) implique (E 3) : comme K est séparateur pour $\underline{R}'$, l'application canonique de $\underline{R}'$ sur $\underline{R}'_K$ est un isomorphisme, donc $\underline{R}'$ est réduite aux scalaires.

$(E\,3) \Longrightarrow (E\,2) \Longrightarrow (E\,1)$: résulte de ce que $\underline{C}^G \subset \underline{R} \cap \underline{R}' \subset \underline{R}'$.

$(E\,5) \Longrightarrow \xi$ séparateur pour $\underline{A}$: car le projecteur sur $\overline{\underline{A}'\xi}$ appartient à $\underline{A}^G$ donc est égal à I .

(ii) Supposons que $\underline{F}$ vérifie (C 1), i.e. que $\underline{I}\,e$ est commutative ; alors $\underline{A}_K = \underline{R}_K$ l'est aussi (prop. V.2) ; si $\underline{R}'$ est réduite aux scalaires, on a $\underline{R} = \underline{L}(H)$, $\underline{R}_K = \underline{L}(K(H))$, donc $\dim K = 1$.

(iii) Comme $\underline{R}' = \underline{C}^G$ (prop. V.4), on a $(E\,3) \Longleftrightarrow (E\,1)$.

(iv) D'après la prop. V.3 on a $\underline{A}^G = \underline{C}^G$, donc $(E\,5) \Longleftrightarrow (E\,1)$.

<u>Théorème</u> VI.3 (Doplicher - Kastler [1]) On suppose G localement compact, U continue et ξ séparateur pour **A** (condition certainement vérifiée si **F** est ergodique). Alors U est équivalente à sa contragrédiente (voir définition à l'Appendice C.3) ; de plus les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) **F** est faiblement mélangeant ;

(ii) $\mathbb{C}\xi$ est le seul sous-espace invariant de dimension finie non nul de H ;

(iii) $\xi \otimes \xi$ est, à un coefficient près, le seul vecteur $U \otimes U$ - invariant de $H \otimes H$.

Comme ξ est totalisateur et séparateur pour **A** et de plus U - invariant, l'opérateur antiunitaire J que lui associe la théorie de Tomita - Takesaki permute aux U_g , donc réalise une équivalence entre U et sa contragrédiente. L'équivalence de (i), (ii), (iii) résulte alors de la prop. C.2.

<u>Théorème</u> VI.4 (Kastler - Robinson [1]) On suppose que G est localement compact, que U est continue, et en outre que **A** est un facteur. Alors si **F** vérifie (C 5) (resp. (C 6), resp. (C 7)), il vérifie (E 4)(resp. (E 6), resp. (E 7)).

<u>Démonstration</u>. On doit montrer que pour a, b $\in$ A , la fonction

$$g \longmapsto \omega(ga.b) - \omega(a).\omega(b)$$

a une moyenne nulle (resp. que sa valeur absolue a une moyenne nulle, resp. est nulle à l'infini). Notons D la C^* - algèbre engendrée par A et **A**' ; il existe des éléments d_1 et d_2 de D vérifiant

$$b = (b\xi \mid \xi).I + d_1 + d_2 \quad , \quad d_1^*\xi = d_2\xi = 0$$

[en effet, d'après Dixmier [2], § 2.9.1, comme l'état $\omega_\xi \mid D$ est pur et comme $\omega_\xi(b - (b\xi \mid \xi).I) = 0$, $b - (b\xi \mid \xi).I$ peut s'écrire sous la forme $d' + d''$ avec d' , $d'' \in D$, $\omega_\xi(d'^* d') = \omega_\xi(d'' d''^*) = 0$]. On a alors

$$\omega(ga.b) - \omega(a).\omega(b) = \omega(ga.d_1 - d_1.ga) .$$

D'autre part d_1 est limite normique de combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{m} b_i\, b_i'$ avec $b_i \in A$, $b_i' \in \underline{A}'$; donc $\omega\,(ga.d_1 - d_1.ga)$ est limite uniforme par rapport à g des fonctions

$$\sum_i \omega(ga.b_i.b_i' - b_i.b_i'.ga) = \sum_i \varphi_i(ga.b_i - b_i.ga)$$

où φ_i est la forme linéaire u.f. continue sur $\underline{A}$ définie par $\varphi_i(T) = \omega(T.b_i')$.
Si $\underline{F}$ vérifie (C 5) on a

$$m_g\ \varphi_i(ga.b_i - b_i.ga) = 0 \qquad \text{pour tout } i$$

donc

$$m_g\ \omega\,(ga.d_1 - d_1.ga) = 0\ .$$

Les autres assertions se démontrent de façon analogue.

<u>Exemples</u>.

(i) Prenons $\underline{A} = \underline{L}(H)$, G quelconque, U représentation unitaire avec vecteur invariant (cf. § V.3, exemple 3) ; $\underline{F}$ vérifie évidemment (E 3) ; il vérifie (E 4) si et seulement si ξ est le seul vecteur invariant, mais pas (E 5) ; par contre il peut fort bien vérifier (E 7).

(ii) Reprenons l'exemple 5 du § V.3 ; $\underline{F}$ vérifie (E 6) mais pas (E 7) : la démonstration est analogue à celle du fait que $\underline{F}$ vérifie (C 6) mais pas (C 7) .

(iii) Reprenons l'exemple 6 du § V.3 ; on va voir que $\underline{F}$ vérifie (E 7). Pour cela on doit vérifier que

$$\lim_{g=\infty}\ (U_g\, x \mid y) = (x \mid \xi)\,\overline{(y \mid \xi)} \qquad \forall\ x,y \in H$$

et on peut prendre pour x et y des vecteurs de base, soient $x = \varepsilon_\alpha$, $y = \varepsilon_\beta$; si $\alpha = \beta = \alpha_0$, la vérification est immédiate car

$$(U_g\, \varepsilon_{\alpha_0} \mid \varepsilon_{\alpha_0}) = 1 = (\varepsilon_{\alpha_0} \mid \xi)\,\overline{(\varepsilon_{\alpha_0} \mid \xi)}\ ;$$

sinon on a $(U_g\, x \mid y) = (x \mid \xi)\,\overline{(y \mid \xi)} = 0$ sauf pour au plus une valeur de g .

Remarque VI.1. Reprenons les hypothèses du début du paragraphe et supposons en outre ξ séparateur pour $\underline{A}$. Alors K est totalisateur pour $\underline{A}'$, donc le projecteur L sur $\underline{A}'(K(H))$ est égal à I ; d'après la proposition V.2, $\underline{I}$ est isomorphe à $\underline{A}_K$. D'autre part l'opérateur antiunitaire J associé à ξ par la théorie de Tomita - Takesaki permute aux U_g, donc l'isomorphisme antilinéaire $a \longmapsto J a J$ de $\underline{A}$ sur $\underline{A}'$ transforme $\underline{I} = \underline{A}^G = \underline{A} \cap \underline{U}'$ en $\underline{R}' = \underline{A}' \cap \underline{U}'$. Ceci montre que les conditions (E 3), (E 4), (E 5) sont équivalentes . De plus $\underline{R}$ est engendrée par $\underline{A}$ et K ; en effet soit a un élément de $\underline{A}$ permutable à K ; notant E l'espérance conditionnelle canonique de $\underline{A}$ sur $\underline{A}^G$ on a (prop. V.3) $E(a)|K(H) = K a|K(H) = a|K(H)$; comme K est séparateur pour $\underline{A}$ cela entraîne $a = E(a)$, $a \in \underline{A}^G$; ceci montre que $\underline{A} \cap \{K\}' = \underline{A} \cap \underline{U}'$; à cause de l'isomorphisme antilinéaire $a \longmapsto J a J$ on a aussi $\underline{A}' \cap \{K\}' = \underline{A}' \cap \underline{U}'$, ce qui établit notre assertion. Les résultats de cette remarque sont dus à Jadczyk [1].

§ VI.2. Propriétés des états normaux invariants des systèmes dynamiques abstraits.

On considère un système dynamique $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ et on note S l'ensemble des états normaux invariants sur $\underline{A}$; à tout $s \in S$ on associe des objets H_s , π_s , ξ_s , U_s , $\underline{A}_s$, $\underline{C}_s$, $\underline{R}_s$, $\underline{F}_s$ comme au § V.2.

Définitions. On dit qu'un état normal invariant s vérifie la condition (E i) , i = 1,... 7, si le système $\underline{F}_s$ vérifie cette condition ; on dit aussi centralement ergodique pour (E 1), faiblement mélangeant pour (E 6), mélangeant pour (E 7) ; rappelons (§ V.2) que (E 3) équivaut au fait que s est un élément extrémal de S.

On a donc

$$\begin{array}{ccccccccccc} (E\ 7) & \Longrightarrow & (E\ 6) & \Longrightarrow & (E\ 4) & \Longrightarrow & (E\ 3) & \Longrightarrow & (E\ 2) & \Longrightarrow & (E\ 1) \\ & & (E\ 5) & \nearrow & & & & & & & \end{array}$$

Théorème VI.5.

(i) Si $\underline{F}$ vérifie (C 1) ona (E 4) $\Longleftrightarrow$ (E 2) ;

(ii) si $\underline{F}$ vérifie (C 2) on a (E 4) $\Longleftrightarrow$ (E 1) ;

(iii) si $\underline{F}$ vérifie (C 3) on a

$$(E\ 7) \Longrightarrow (E\ 6) \Longrightarrow (E\ 5) \Longleftrightarrow (E\ 4) \Longleftrightarrow (E\ 3) \Longleftrightarrow (E\ 2) \Longleftrightarrow (E\ 1).$$

Démonstration.

(i) On a (E 4) $\Longleftrightarrow$ (E 3) d'après le th. VI.2, et (E 3) $\Longleftrightarrow$ (E 2) puisque $\underline{R}'_s$ est commutative, i.e. $\underline{R}_s \cap \underline{R}'_s = \underline{R}'_s$ (th. V.2).

(ii) et (iii) résultent du th. VI.2.

Théorème VI.6 (Nagel [1]) Deux états normaux invariants centralement ergodiques sont ou disjoints ou quasi-équivalents. De plus les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) tout état normal invariant centralement ergodique est extrémal

(ii) deux états normaux invariants centralement ergodiques distincts sont disjoints.

Démonstration. La première assertion résulte du corollaire I.1 ; démontrons la seconde assertion.

(i) implique (ii) : soient s_1 et s_2 deux états normaux invariants centralement ergodiques non disjoints ; ils sont alors quasi-équivalents ; $(s_1 + s_2)/2$ est quasi-équivalent à s_1 et s_2 , donc centralement ergodique, donc extrémal ; par suite $s_1 = s_2$.

(ii) implique (i) : soit s un état normal invariant centralement ergodique, $s = k_1 s_1 + k_2 s_2$ une décomposition de s avec $k_1, k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 = 1$; π_{s_i} est quasi-contenue dans π_s , donc son support est majoré par celui de π_s ; comme ce dernier est un projecteur minimal de $\underline{C}^G$ (cf. § I.2) , on a $\operatorname{supp} \pi_{s_i} = \operatorname{supp} \pi_s$, s_i est quasi-équivalent à s , donc centralement ergodique ; s_1 et s_2 , étant centralement ergodiques et quasi-équivalents, sont égaux d'après l'hypothèse (ii) ; cela prouve que s est extrémal.

Corollaire VI.1 (Størmer [2]) Si $\underline{F}$ vérifie (C 2), deux états normaux invariants extrémaux distincts sont disjoints.

Théorème VI.7 (Kastler - Robinson [1]) Si $\underline{F}$ vérifie (C 2) (resp. (C 6) , resp. (C 7)), tout état normal invariant factoriel vérifie (E 4) (resp. (E 6), resp. (E 7)).

La première assertion résulte du théorème VI.5 , car tout état factoriel vérifie évidemment (E 1) ; les deux autres résultent du théorème VI.4.

<u>Théorème</u> VI.8. Si un état normal invariant s vérifie (E 4), l'algèbre $\pi_s(\underline{\mathbf{A}})'$ est soit de type III, soit finie, auquel cas ξ_s est élément-trace pour elle. Ces conclusions sont valables pour tout s extrémal si $\underline{F}$ vérifie (C 1), pour tout s centralement ergodique si $\underline{\mathbf{F}}$ vérifie (C 2).

Résulte du théorème VI.5 et du corollaire III.5.

<u>Remarque</u> VI.2. Considérons, comme à la remarque V.1, une C^* - algèbre **A** et un groupe G opérant par automorphismes dans A ; soit $\underline{A}$ la W^* - algèbre enveloppante de **A** ; les états invariants sur A s'identifient aux états normaux invariants sur $\underline{\mathbf{A}}$;

- ceux qui vérifient (E 1) ont été appelés " ergodiques " par Guichardet - Kastler [1] ;
- ceux qui sont extrémaux ont été appelés " ergodiques " par de nombreux auteurs ;
- ceux qui vérifient (E 4) ont été appelés " weakly clustering " par Doplicher - Kastler - Robinson [1] ;
- ceux qui sont faiblement mélangeants ont été appelés " weakly mixing " par Doplicher - Kastler [1] ;
- ceux qui sont mélangeants ont été appelés " clustering " par Doplicher - Kastler - Robinson [1].

§ VI.3. Propriétés du spectre de U .

On considère ici un système dynamique concret ($\underline{A}$, G, H, U) avec vecteur totalisateur et invariant ξ , et on suppose G localement compact et U continue ; on peut se poser, au sujet du spectre de U , des questions de trois types : simplicité (ou plus généralement multiplicité), stabilité par contragrédientation, stabilité par produit tensoriel ; le théorème VI.3 donne une réponse à la deuxième question : si ξ est séparateur pour $\underline{A}$, U est équivalente à sa contragrédiente. Nous donnerons des réponses aux questions 1 et 3 respectivement aux théorèmes VI.10 et VI.9.

Nous appellerons spectre ponctuel de U l'ensemble des sous-représentations irréductibles de dimension finie de U et nous dirons qu'il est simple si chacune d'elles est contenue une seule fois dans U ; nous noterons H' l'adhérence de la somme des sous-espaces irréductibles de dimension finie de H ; nous dirons que le spectre de U est purement ponctuel si H' = H , c'est-à-dire si U est somme de représentations irréductibles de dimension finie. Nous appellerons spectre ponctuel unidimensionnel de U l'ensemble des sous-représentations irréductibles de dimension 1 de U ; nous noterons $\tilde{G}$ le groupe des morphismes continus de G dans le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 , ε son élément neutre ; pour tout $\chi \in \tilde{G}$ nous poserons

$$H_\chi = \{ x \in H \mid U_g x = \chi(g).x \quad \forall g \in G \}$$

$$P_\chi = \text{projecteur sur } H_\chi ;$$

le spectre ponctuel unidimensionnel de U est donc l'ensemble des χ tels que $H_\chi \neq 0$; il est simple si $\dim H_\chi = 0$ ou $1 \quad \forall \chi \in \tilde{G}$.

<u>Théorème</u> VI.9 (Doplicher - Kastler [1]) On suppose que $\underline{F}$ est ergodique et vérifie (C 6). Alors si V_1 et V_2 sont deux sous-représentations irréductibles de dimension finie de U , $V_1 \otimes V_2$ n'est pas disjointe de U .

<u>Démonstration</u>.

a) Pour $x, y \in H$, $a \in A$ posons

$$M_{x,y,a} = m_g (x \mid U_g y).\, U_g a U_g^{-1} \in \underline{C}$$

$$N_{y,a}(x) = M_{x,y,a}(\xi) = m_g (x \mid U_g y).\, U_g a \xi .$$

On voit facilement que $N_{y,a}$ est un opérateur linéaire continu dans H qui permute aux U_g .

Notons I l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de dimension finie de G contenues dans U ; pour tout $i \in I$ choisissons un représentant U^i qui opère dans un sous-espace H^i de H .

b) Pour tout $y \in H$ et tout $a \in A$, $N_{y,a}$ transforme chaque H^i en un sous-espace invariant par U ; comme H^i est irréductible, $N_{y,a} \mid H^i$ est ou nul, ou injectif. Nous allons montrer que pour tout élément y non nul de H^i il existe $a \in A$ tel que $N_{y,a} \mid H^i$ soit injectif. Comme ξ est totalisateur pour A il existe a tel que $(a\xi \mid y) \neq 0$; notant P le projecteur sur H^i on a, pour tout $x \in H^i$:

$$(N_{y,a}(x) \mid x) = m_g (x \mid U_g y)(U_g a \xi \mid x)$$

$$= m_g (U_g P a \xi \mid x)\, \overline{(U_g y \mid x)} ;$$

comme x, y, $P a \xi$ appartiennent à H^i, on peut écrire

$$(N_{y,a}(x) \mid x) = m_g (U_g^i P a \xi \mid x)\, \overline{(U_g^i y \mid x)}$$

$$= (\dim H^i)^{-1} (P a \xi \mid y)(x \mid x) \quad \text{(voir § C.3)}$$

$$= (\dim H^i)^{-1} (a \xi \mid y) \; \| x \|^2$$

ce qui établit notre assertion.

c) Si $N_{y,a} \mid H^i$ est injectif, le sous-espace $N_{y,a}(H^i)$ est totalisateur pour A ; en effet il est non nul, invariant par U, et d'autre part A et les U_g engendrent $\underline{L}(H)$ puisque $\underline{F}$ est ergodique.

d) Soient i et i' deux éléments de I ; choisissons trois vecteurs non nuls $y \in H^i$, x' , $y' \in H^{i'}$; d'après b) il existe a et $a' \in A$ tels que $N_{y,a} \mid H^i$ et $N_{y',a'} \mid H^{i'}$ soient injectifs. Montrons qu'il existe $x \in H^i$ tel que

$$M_{x',y',a'} \cdot M_{x,y,a} \cdot \xi \neq 0 \quad ;$$

supposons le contraire ; on aura pour tout $x \in H^i$ et tout $b \in A$

$$\begin{aligned} M_{x',y',a'} \cdot b. N_{y,a} \cdot x &= M_{x',y',a'} \cdot b. M_{x,y,a} \cdot \xi \\ &= b. M_{x',y',a'} \cdot M_{x,y,a} \cdot \xi = 0 \; ; \end{aligned}$$

d'après c) cela entraîne $M_{x',y',a'} = 0$, $N_{y',a'}(x') = 0$ – ce qui est absurde.

Notons P le projecteur dans $H \otimes \overline{H^i}$ sur l'ensemble des vecteurs invariants par $U \otimes \overline{U^i}$, Q le projecteur analogue dans $H \otimes \overline{H^i} \otimes \overline{H^{i'}}$; il existe $\eta \in H$ tel que

$$\begin{aligned} 0 &\neq (M_{x',y',a'} \cdot M_{x,y,a} \cdot \xi \mid \eta) \\ &= (m_{g'} (x' \mid U_{g'} y') U_{g'} a' U_{g'}^{-1} [m_g (x \mid U_g y) U_g a \xi] \mid \eta) \\ &= (m_{g'} (x' \mid U_{g'} y') U_{g'} a' [m_g (x \mid U_{g'g} y) U_g a \xi] \mid \eta) \\ &= m_{g'} (x' \mid U_{g'} y') \cdot m_g (x \mid U_{g'g} y) \cdot (U_{g'} a' U_g a \xi \mid \eta) \\ &= m_{g'} \overline{(U_{g'} y' \mid x')} \cdot m_g \overline{(U_g y \mid U_{g'}^{-1} x)} \cdot (U_g a \xi \mid a'^* U_{g'}^{-1} \eta) \\ &= m_{g'} \overline{(U_{g'} y' \mid x')} \cdot m_g (U_g a \xi \otimes \overline{U_g y} \mid a'^* U_{g'}^{-1} \eta \otimes \overline{U_{g'}^{-1} x}) \; ; \end{aligned}$$

comme y et $U_{g'}^{-1} x$ appartiennent à H' , ceci s'écrit encore

$$\begin{aligned} 0 &\neq m_{g'} \overline{(U_{g'} y' \; x')} \cdot m_g (U_g \otimes \overline{U_g^i} \cdot a \xi \otimes \overline{y} \mid a'^* U_{g'}^{-1} \eta \otimes \overline{U_{g'}^{-1}} x) \\ &= m_{g'} \overline{(U_{g'} y' \mid x')} \cdot (P (a \xi \otimes \overline{y}) \mid a'^* U_{g'}^{-1} \eta \otimes \overline{U_{g'}^{-1} x}) \end{aligned}$$

$$= m_{g'}\,(\overline{U_{g'}\, y' \mid x'})\ .\ (U_{g'} \otimes \bar{U}_{g'}\ .\ a' \otimes I\ .\ P\ .\ a\xi \otimes \bar{y} \mid \eta \otimes \bar{x})$$

$$= m_{g'}\,(\overline{U_{g'}\, y' \mid x'})\ .\ (U_{g'} \otimes \bar{U}^{i}_{g'}\ .\ \theta \mid \eta \otimes \bar{x})$$

avec $\theta = a' \otimes I\ .\ P\ .\ a\xi \otimes \bar{y} \in H \otimes \bar{H}^{i}$; d'où

$$0 \neq m_{g'}\,(U_{g'} \otimes \bar{U}^{i}_{g'} \otimes \bar{U}^{i'}_{g'}\ .\ \theta \otimes \bar{y}' \mid \eta \otimes \bar{x} \otimes \bar{x}')$$

$$= (Q\ .\ \theta \otimes \bar{y}' \mid \eta \otimes \bar{x} \otimes \bar{x}') \quad ;$$

par suite Q est non nul, et d'après le corollaire C.2, $U^{i} \otimes U^{i'}$ n'est pas disjointe de U .

<u>Corollaire</u> VI.2. Sous les hypothèses du théorème VI.9, le spectre ponctuel unidimensionnel de U est un sous-groupe de $\tilde{G}$; en particulier si G est commutatif, le spectre ponctuel de U est un sous-groupe de $\hat{G}$.

<u>Remarque</u> VI.3. Le dernier résultat du corollaire VI.2 peut être amélioré de la façon suivante, suivant une idée due à E.Størmer [10]. Onsuppose $\underline{F}$ ergodique et G commutatif ; alors le support dans $\hat{G}$ de la mesure spectrale de U est un sous-groupe de $\hat{G}$ [Pour le voir, posons, pour toute $f \in L^{1}(G)$

$$\pi_{U}(f) = \int f(g)\, U_g\, dg$$

$$\pi_{\alpha}(f).\, a = \int f(g).\, U_g\, a\, U_g^{-1}\, dg \qquad \forall\, a \in \underline{A}\ ;$$

notons Sp U l'ensemble des $\chi \in \hat{G}$ tels que $\hat{f}(\chi) = 0$ pour toute $f \in \operatorname{Ker} \pi_U$; définition analogue pour Sp α ; on a Sp U = Sp α car

$$\pi_{\alpha}(f) = 0 \iff \pi_{\alpha}(f).\, a.\xi = 0 \quad \forall\, a \in \underline{A} \quad \text{(puisque } \xi \text{ est séparateur pour } \underline{A}\text{)}$$

$$\iff \int f(g)\, U_g\, a\, \xi\, dg = 0 \quad \forall\, a \in \underline{A}$$

$$\iff \pi_U(f)\, a\, \xi = 0 \qquad \forall\, a \in \underline{A}$$

$$\iff \pi_U(f) = 0 \quad .$$

D'autre part il est classique que Sp U est égal au support de la mesure spec-

trale de U ; enfin $Sp\,\alpha$ est un sous-groupe d'après Connes [1]]
On en déduit que le spectre ponctuel de U est un sous-groupe en passant au compactifié de Bohr de G .
Par contre si l'on suppose G commutatif et $\underline{F}$ vérifiant (C 1) et (E 4), le spectre ponctuel de U n'est pas nécessairement un sous-groupe : prendre $H = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\underline{A} = \underline{L}(H)$, U = le caractère trivial $\oplus$ un caractère non trivial .
Les théorèmes VI.3 et VI.9 généralisent dans une certaine mesure le résultat de G.W.Mackey mentionné au § B.3 ; toutefois on n'obtient pas ici de renseignements sur la multiplicité de chaque composante irréductible de dimension finie,[1] ni de forme simple pour le système dynamique analogue à celle de l'alinéa (v) du théorème de Mackey. Par contre on a un renseignement plus précis sur la contragrédiente de U . D'autre part le résultat du début de la présente remarque (sur le support de la mesure spectrale) ne semble pas avoir été connu en Théorie Ergodique classique.

<u>Remarque</u> VI.4. On ignore si sous les hypothèses du théorème VI.9, $V_1 \otimes V_2$ est quasi-contenue dans U ; mais cela est faux si l'on suppose seulement $\underline{F}$ ergodique comme le montre l'exemple suivant : soient G un groupe compact, V une représentation irréductible de G dans un espace de dimension finie K , $e_1, \ldots e_n$ une base orthonormale de K ; posons

$$H = K \otimes \overline{K} \ , \quad U = V \otimes \overline{V} \ , \quad \underline{A} = \underline{L}(K) \otimes I \ ,$$

$$\xi = e_1 \otimes e_1 + \ldots . \ e_n \otimes e_n \ ;$$

$\underline{F}$ est ergodique mais ne vérifie pas (C 6) car si f est voisine de δ_e , l'élément $m_g\ f(g)\ g.a = \int f(g).\ g.a.\ dg$ est voisin de a . Prenons par exemple G = SU(2), dont les représentations irréductibles sont notées $D_0, D_{\frac{1}{2}}, D_1, \ldots$; on a $\overline{D_j} = D_j$ et $D_j \otimes D_j = D_0 \oplus D_1 \oplus \ldots \oplus D_{2j}$; si $V = D_j$, D_{2j} est contenue dans U , mais $D_{2j} \otimes D_{2j}$ n'est pas quasi-contenue dans U .

---

1 voir cependant remarque VI.6

<u>Théorème</u> VI.10. (Kastler - Robinson [1]) Sous les hypothèses du théorème VI.9, le spectre ponctuel unidimensionnel de U est simple.

<u>Démonstration</u>. Comme A et les U_g engendrent $\underline{L}(H)$, les opérateurs $P_\chi \ a \,|\, H_\chi$, où a parcourt A, engendrent $\underline{L}(H_\chi)$, et il nous suffit de montrer que ces opérateurs sont deux à deux permutables, c'est-à-dire que

$$P_\chi a_1 P_\chi a_2 P_\chi = P_\chi a_2 P_\chi a_1 P_\chi \qquad \forall\, a_1, a_2 \in A . \tag{1}$$

On a

$$m_g\, \chi(g)^{-1} U_g = m_g\, \chi(g)\, U_g^{-1} = P_\chi \tag{2}$$

(immédiat en considérant la représentation $g \longmapsto \chi(g)^{-1} U_g$) ; comme $m_g\, \chi(g)\, U_g\, a_1\, U_g^{-1}$ appartient à $\underline{C}$ on a

$$m_g \quad P_\chi\, U_g\, a_1\, U_g^{-1}\, a_2\, P_\chi = m_g\, P_\chi\, a_2\, U_g\, a_1\, U_g^{-1}\, P_\chi$$

$$m_g \quad \chi(g)\, P_\chi\, a_1\, U_g^{-1}\, a_2\, P_\chi = m_g\, P_\chi\, a_2\, U_g\, a_1\, \chi(g)^{-1}\, P_\chi$$

$$P_\chi\, a_1\, (m_g\, \chi(g)\, U_g^{-1})\, a_2\, P_\chi = P_\chi\, a_2\, (m_g\, \chi(g)^{-1}\, U_g)\, a_1\, P_\chi$$

d'où (1) en vertu de (2).

<u>Corollaire</u> VI.3. Si G est commutatif, sous les hypothèses du théorème VI.9, le spectre ponctuel de U est simple.

<u>Remarque</u> VI.5. Si l'on suppose G commutatif et $\underline{F}$ vérifiant (E 4), le spectre ponctuel de U n'est pas nécessairement simple [prendre $H = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$, $\underline{A} = \underline{L}(H)$, U = représentation triviale $\oplus$ deux fois un caractère non trivial]. Si l'on suppose $\underline{A}$ commutative et $\underline{F}$ ergodique, le spectre ponctuel de U n'est pas nécessairement simple [prendre G compact, $H = L^2(G)$, $\underline{A} = L^\infty(G)$, U = représentation régulière]. Si l'on suppose $\underline{A}$ et G commutatifs et $\underline{F}$ ergodique, le spectre de U n'est pas nécessairement simple, i.e. $\underline{U}'$ n'est pas nécessairement commutatif [prendre un système de Bernoulli, § V.3, exemple 6].

Proposition VI.1. On reprend les hypothèses et les notations du théorème VI.9, on note Δ l'opérateur associé à ξ par la théorie de Tomita - Takesaki et H" l'ensemble des $x \in H$ tels que $\Delta^{it}(x) = x \quad \forall\, t$. Si le spectre ponctuel de U est simple, on a $H' \subset H''$.

Démonstration. On sait que Δ^{it} permute à $\underline{C}$; donc

$$\Delta^{it}\,(N_{y,a}(x)) = \Delta^{it}\,(M_{x,y,a}(\xi)) = M_{x,y,a}(\Delta^{it}(\xi))$$
$$= M_{x,y,a}(\xi) = N_{y,a}(x)$$

c'est-à-dire $N_{y,a}(x) \in H''$. On a vu au cours de la démonstration du th. VI.9 que pour tout $i \in I$ il existe un opérateur $N_{y,a}$ tel que $N_{y,a}\,|H^i \neq 0$; comme le spectre ponctuel de U est simple, on a $N_{y,a}(H^i) = H^i$ et par suite $H^i \subset H''$, $H' \subset H''$.

Corollaire VI.4 (Guichardet [5]) Si le spectre de U est purement ponctuel et simple (en particulier si G est commutatif et le spectre de U purement ponctuel) ξ est élément-trace pour $\underline{A}$, qui est donc finie.

En effet $H' = H$, donc $H'' = H$, $\Delta = I$, ce qui entraîne que ξ est élément-trace (cf. § A.2).

Remarque VI.6. On démontre (Doplicher - Kastler [1]) le résultat suivant : supposons que $\underline{F}$ vérifie (C 7) et que G est connexe ; notons P' le projecteur sur H' ; alors l'ensemble d'opérateurs $P'\,\underline{A}\,|\,H'$ est commutatif. On en déduit que si $\underline{F}$ est ergodique, la multiplicité dans U de chaque composante irréductible de dimension finie est inférieure ou égale à sa dimension : il suffit d'appliquer l'alinéa (ii) du théorème de Mackey (§ B.3) au système induit dans H'.

Chapitre VII | CONSTRUCTION DE KRIEGER

§ VII.1. Généralités.

Nous exposons dans ce chapitre une construction due à W.Krieger [1], qui permet d'associer à tout système dynamique commutatif séparable $\underline{F}$ (voir § B.1) une W^* - algèbre $\underline{A}$, de façon que l'application $\underline{F} \longmapsto \underline{A}$ fasse correspondre aux propriétés de $\underline{F}$ des propriétés analogues de $\underline{A}$ (finitude ou semi-finitude, discrétude ou continuité, comparaison des projecteurs, etc.) ; le produit croisé fournit une correspondance analogue, mais moins bonne.

Nous considérons un système dynamique commutatif séparable (X,C,G) où G est un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{Aut}\,(X,C)$; nous choisissons une mesure finie $\mu \in C$ et nous posons

$$\alpha\,(g,x) = (d\mu(g^{-1}x)/d\mu(x))^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \alpha\,(g) = \alpha\,(g,\,.)\ .$$

§ VII.2. Rappels sur le produit croisé.

Nous rappelons brièvement la construction du produit croisé, en adaptant l'étude du § I.2 au cas qui nous intéresse et en remplaçant la représentation régulière gauche de G par la droite (qui lui est équivalente) pour mieux montrer la ressemblance avec la construction de Krieger.

On se donne pour tout $x \in X$ un espace hilbertien H_x admettant une base orthonormale indexée par G, soit $(\varepsilon_{x,h})_{h \in G}$; pour tout $g \in G$ notons $\xi^{(g)}$ le champ de vecteurs ayant pour composantes $\xi^{(g)}_x = \varepsilon_{x,g} \in H_x$; on définit sur le champ $x \longmapsto H_x$ une structure de champ mesurable d'espaces hilbertiens en prenant pour famille fondamentale l'ensemble des $\xi^{(g)}$; autrement dit un champ de vecteurs $\xi = (\xi_x)$ est mesurable si et seulement si pour tout g la fonction $x \longmapsto (\xi_x \mid \xi_x^{(g)})$ est mesurable. Posons $H = \int^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$.

Pour tout $g \in G$ on a un isomorphisme

$$\psi_{g,x} : H_x \longrightarrow H_{gx}$$

$$\varepsilon_{x,h} \longmapsto \varepsilon_{gx,hg^{-1}} \quad ;$$

le champ d'isomorphismes $(\psi_{g,x})$ est mesurable car on a

$$\psi_{g,g^{-1}x}(\xi^{(h)}_{g^{-1}x}) = \xi_x^{(hg^{-1})} .$$

Pour tout $f \in L^{\infty}$ notons T_f l'opérateur de multiplication par f dans H ; pour tout $g \in G$ on définit un opérateur U_g dans H par

$$(U_g \xi)_x = \alpha(g,x) . \psi_{g,g^{-1}x}(\xi_{g^{-1}x}) \quad ; \tag{1}$$

U est une représentation unitaire de G dans H et on a

$$U_g T_f U_g^{-1} = T_{gf} \tag{2}$$

où l'on a posé $(g\,f)(x) = f(g^{-1}x)$, et aussi

$$U_g(\xi^{(h)}) = \alpha(g) . \xi^{(hg^{-1})} . \tag{3}$$

Le produit croisé est l'algèbre de von Neumann $\underline{A}$ engendrée par les opérateurs T_f et U_g ; notons $\underline{A}_0$ l'algèbre formée par les T_f . Pour avoir de bonnes propriétés de $\underline{A}$, et en particulier pour que $\underline{A}_0$ soit commutative maximale dans $\underline{A}$, on doit supposer que G opère presque librement dans L^{∞} ; sur tout ceci voir aussi Dixmier [1] ch. I, §. 9.

§ VII.3. Construction de Krieger : définition du couple $(\underline{A}, \underline{A}_0)$.

Nous allons définir des objets, que nous noterons encore H_x , H , $\xi^{(g)}$, $\Psi_{g,x}$, T_f , U_g , et qui nous serviront dans toute la suite de ce chapitre. On prend ici pour H_x l'espace hilbertien $l^2(Gx)$, où Gx est l'orbite de x, de base orthonormale canonique notée $\varepsilon_{x,y}$, $y \in Gx$; on pose $\xi_x^{(g)} = \varepsilon_{x,gx}$; pour $g, g' \in G$ la fonction $x \longmapsto (\xi_x^{(g)} \mid \xi_x^{(g')})$ est mesurable car égale à 1 si $g^{-1}g'x = x$, et à 0 sinon ; on peut donc prendre les $\xi^{(g)}$ comme famille fondamentale de champs de vecteurs mesurables ; on pose encore $H = \int^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$. On définit des isomorphismes

$$\Psi_{g,x} : H_x \longrightarrow H_{gx}$$

$$\varepsilon_{x,y} \longmapsto \varepsilon_{gx,y} \quad ;$$

($\Psi_{g,x}$ n'est autre que l'identité si l'on écrit $H_x = H_{gx} = l^2(Gx)$). On définit les opérateurs T_f et U_g comme ci-dessus et on a encore les formules (2) et (3). On remarquera que les vecteurs de la forme $\lambda . \xi^{(g)}$, où λ parcourt L^{∞} et g parcourt G , sont totaux dans H . On note $\underline{A}_0$ l'ensemble des T_f , $\underline{A}$ l'algèbre engendrée par $\underline{A}_0$ et les U_g , $\underline{C}$ son centre.

Nous allons aussi définir des opérateurs S_f et V_g qui seront décomposables ; V_g est défini par ses composantes :

$$(V_g)_x \, (\varepsilon_{x,y}) \quad = \quad \varepsilon_{x,gy} \quad ;$$

autrement dit, pour tout x , l'application $g \longmapsto (V_g)_x$ est la représentation quasi-régulière de G dans l'espace homogène Gx ; le champ d'opérateurs $(V_g)_x$ est bien mesurable car on a

$$(V_g)_x \, (\xi_x^{(g')}) \quad = \quad \xi_x^{(gg')} \quad .$$

Définissons maintenant les S_f ; pour cela munissons X d'une topologie compacte à base dénombrable compatible avec sa structure borélienne, et notons $\underline{C}(X)$ l'ensemble des fonctions complexes continues sur X. Pour toute $f \in \underline{C}(X)$, S_f est l'opérateur décomposable de composantes

$$(S_f)_x (\varepsilon_{x,y}) = f(y) . \varepsilon_{x,y} \ ;$$

autrement dit l'application $f \longmapsto (S_f)_x$ est la représentation naturelle de $\underline{C}(X)$ dans l'espace $L^2(X , \nu_x)$ où ν_x est la mesure borélienne sur X définie par la masse 1 en chaque point de Gx. Le champ d'opérateurs $(S_f)_x$ est bien mesurable car on a

$$(S_f)_x (\xi_x^{(g)}) = f(gx). \xi_x^{(g)} \ .$$

On vérifie facilement que les S_f et V_g permutent à $\underline{A}$. Les algèbres $\underline{A}_o$ et $\underline{A}$ sont <u>indépendantes du choix de</u> μ dans la classe C ; en effet soit $\mu' \in C$, posons

$$\beta(x) = d\mu'(x)/d\mu(x) \ , \ H' = \int^{\oplus} H_x . d\mu'(x) \ ;$$

l'isomorphisme $\xi \longmapsto \beta^{-\frac{1}{2}} \xi$ de H sur H' transforme les opérateurs T_f et U_g en les opérateurs analogues dans H', donc $\underline{A}_o$ et $\underline{A}$ en les algèbres analogues .

<u>Lemme</u> VII.1. Soit (f_n) une suite partout dense dans $\underline{C}(X)$; pour tout x les opérateurs $(S_{f_n})_x$ et $(V_g)_x$ forment un ensemble irréductible dans $\underline{L}(H_x)$.

<u>Démonstration</u>. Montrons d'abord que les fonctions $f_n | Gx$ sont faiblement denses dans $l^{\infty}(Gx)$; il suffit de l montrer pour les $f | Gx$ où $f \in \underline{C}(X)$; on doit montrer que pour tout élément non nul φ de $l^1(Gx)$ il existe f telle que $< \varphi , f > = \sum_{y \in Gx} \varphi(y) f(y)$ soit non nul, et cela résulte du fait que l'application $f \longmapsto \sum_{y \in Gx} \varphi(y) f(y)$ est une mesure de Radon sur X.

Si alors un opérateur T dans H_x permute aux $(S_{f_n})_x$ et $(V_g)_x$, permutant aux $(S_{f_n})_x$, il est égal à l'opérate ur de multiplication par une fonction, et comme T permute aux $(V_g)_x$, cette fonction est constante.

<u>Lemme</u> VII.2. Soient x_1 et x_2 deux points de X ; pour qu'il existe un isomorphisme de H_{x_1} sur H_{x_2} transformant $(S_f)_{x_1}$ en $(S_f)_{x_2}$ et $(V_g)_{x_1}$ en $(V_g)_{x_2}$ pour tout $f \in \underline{C}(X)$ et tout $g \in G$, il faut et il suffit que x_1 et x_2 appartiennent à une même orbite.

Condition suffisante : si $x_2 = h\,x_1$ où $h \in G$, l'isomorphisme ψ_{h,x_1} de H_{x_1} sur H_{x_2} répond à la question.

Condition nécessaire : les représentations $f \longmapsto (S_f)_{x_1}$ et $f \longmapsto (S_f)_{x_2}$ de $\underline{C}(X)$ dans $L^2(X, \nu_{x_1})$ et $L^2(X, \nu_{x_2})$ sont équivalentes, donc ν_{x_1} et ν_{x_2} sont équivalentes, d'où $G\,x_1 = G\,x_2$.

<u>Proposition</u> VII.1. $\underline{A}_o$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\underline{A}$.

Soit T un élément de $\underline{A} \cap \underline{A}'_o$; T est décomposable, soit $T = \int^{\oplus} T_x . d\mu(x)$; comme T permute aux S_{f_n} (voir lemme VII.1) et aux V_g, pour presque tout x, T_x permute aux $(S_{f_n})_x$ et $(V_g)_x$, donc est scalaire, et $T \in \underline{A}_o$.

<u>Définition</u>. Le couple $(\underline{A}, \underline{A}_o)$ sera appelé <u>couple associé au système dynamique</u> (X,C,G).

<u>Proposition</u> VII.2. Le centre $\underline{C}$ de $\underline{A}$ est l'ensemble $\underline{A}_o^G$ formé des T_f où f appartient à L^∞ et est G - invariante.

Résulte de la proposition VII.1 et de la formule (2).

<u>Corollaire</u> VII.1. $\underline{A}$ est un facteur si et seulement si le système (X,C,G) est ergodique.

§ VII.4. Propriétés du couple $(\underline{A}, \underline{A}_o)$.

Proposition VII.3. Le vecteur $\xi^{(e)}$ est totalisateur et séparateur pour $\underline{A}$.

Totalisateur : on a d'après (3) $U_g \, \xi^{(e)} = \alpha(g).\, \xi^{(g^{-1})}$; les vecteurs de la forme $f.\alpha(g).\, \xi^{(g^{-1})}$ sont totaux dans H (vérification facile), d'où notre assertion.

Séparateur : il suffit de vérifier qu'il est totalisateur pour les opérateurs S_f et V_g, qui appartiennent à $\underline{A}'$, et la démonstration est analogue.

Proposition VII.4. Notons ω l'état normal fidèle $\omega_{\xi^{(e)}} \mid \underline{A}$; les opérateurs Δ^{it} et J associés à ω par la théorie de Tomita - Takesaki sont les suivants : Δ^{it} est l'opérateur décomposable défini par ses composantes :

$$\Delta_x^{it}(\varepsilon_{x,gx}) = \alpha(g^{-1},x)^{-2it}.\, \varepsilon_{x,gx} \quad ;$$

J est caractérisé par

$$J(\lambda.\, \xi^{(g)}) = \alpha(g).\, \overline{g\lambda}.\, \xi^{(g^{-1})} \qquad \forall \lambda \in L^{\infty}, \; g \in G .$$

Démonstration. Notons Δ'^{it} et J' les opérateurs définis dans l'énoncé ; prenons deux éléments a et a'de $\underline{A}$ de la forme $a = T_f U_g$, $a' = T_{f'} U_{g'}$; on vérifie que

$$\omega(\Delta'^{it} a \, \Delta'^{-it} a') = \int_{gg'x=x} f(x).f'(g^{-1}x).\, \alpha(g,x)^{-2it}.d\mu(x)$$

$$\omega(a' \, \Delta'^{it} a \, \Delta'^{-it}) = \int_{gg'x=x} f(x).f'(g^{-1}x).\, \alpha(g,x)^{2-2it}.d\mu(x) \; ;$$

la fonction analytique

$$F(t) = \int_{gg'x=x} f(x).f'(g^{-1}x).\, \alpha(g,x)^{-2it}.d\mu(x)$$

(t complexe)

vérifie les conditions K.M.S

$$F(t) = \omega(\Delta'^{it} a \Delta'^{-it} a')$$

$$F(t+i) = \omega(a' \Delta'^{it} a \Delta'^{-it}) \qquad \text{pour } t \text{ réel ;}$$

cela entraîne

$$\Delta'^{it} c \Delta'^{-it} = \Delta^{it} c \Delta^{-it} \qquad \forall c \in \underline{A}$$

donc $\Delta'^{it} \Delta^{-it}$ est un élément d_t de $\underline{C}$; de plus on a

$$\Delta'^{it} \xi(e) = \xi(e) \qquad \text{(vérification facile)}$$

$$\Delta^{it} \xi(e) = \xi(e) \qquad \text{(d'après Tomita -Takesaki) ;}$$

donc $\Delta'^{it} = \Delta^{it}$.

Ensuite on vérifie facilement que pour tout $a = T_f U_g$ on a

$$a^* . \xi(e) = J' . \Delta^{\frac{1}{2}} . a . \xi(e) = J . \Delta^{\frac{1}{2}} . a . \xi(e) ;$$

comme les vecteurs $\Delta^{\frac{1}{2}} . a . \xi(e)$ sont totaux dans H et comme J est continu, on voit que $J' = J$.

<u>Corollaire</u> VII.2. $\underline{A}'$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par les S_f et V_g .

En effet on vérifie facilement que $J T_f J = S_{\bar{f}}$ et $J U_g J = V_g$; donc $J \underline{A} J$ est engendrée par les S_f et V_g ; mais $J \underline{A} J = \underline{A}'$ d'après Tomita-Takesaki.

<u>Corollaire</u> VII.3. Il existe une espérance conditionnelle de $\underline{A}$ sur $\underline{A}_o$; si on la note E , on a $\omega \circ E = \omega$.

Comme Δ^{it} est décomposable, il permute à $\underline{A}_o$; donc les automorphismes modulaires σ_t^{ω} induisent l'identité sur $\underline{A}_o$, et le corollaire résulte de l'Appendice A.6. En fait il résulte aussi de ce que le système $(\underline{A} , \underline{U}(\underline{A}_o))$ est fini (voir § II.4) ; en effet ω est invariant par $\underline{U}(\underline{A}_o)$ comme on le voit sans peine.

<u>Remarque</u> VII.1. On peut décrire E comme suit : notons P le projecteur de H sur le sous-espace H' engendré par les $T_f . \xi^{(e)}$; on a aussi

$$H' = \int^{\oplus} H'_x \, . \, d\mu(x) \qquad \text{où} \quad H'_x = \mathbb{C} . \varepsilon_{x,x} \ ;$$

alors pour tout $a \in \underline{A}$, E(a) est l'opérateur T_f tel que $P(a . \xi^{(e)}) = T_f . \xi^{(e)}$, i.e. f(x) est la composante de $(a . \xi^{(e)})_x$ sur le vecteur $\varepsilon_{x,x}$.

<u>Théorème</u> VII.1. L'algèbre $\underline{A}$ est finie (resp. semi-finie) si et seulement si le système (X,C,G) est fini (resp. semi-fini).

<u>Démonstration</u>.

a) D'après la théorie de Tomita - Takesaki, $\underline{A}$ est semi-finie si et seulement s'il existe un élément autoadjoint positif inversible h affilié à $\underline{A}$ vérifiant

$$\Delta^{it} \, a \, \Delta^{-it} = h^{it} \, a \, h^{-it} \qquad \forall \ a \in \underline{A} \ , \ t \in \mathbb{R} \quad ; \tag{4}$$

comme $\Delta^{it} \, a \, \Delta^{-it} = a$ pour tout $a \in \underline{A}_0$, un tel h est nécessairement affilié à $\underline{A}_0$, donc est de la forme T_f où f est une fonction mesurable strictement positive. Donc $\underline{A}$ est semi-finie si et seulement s'il existe f mesurable > 0 vérifiant

$$\Delta^{it} \, U_g \, \Delta^{-it} = T_{f^{it}} \, U_g \, T_{f^{-it}} \qquad \forall \ g \in G \ , \ t \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\Delta^{it} \, U_g \, \Delta^{-it} . \lambda . \xi^{(h)} = T_{f^{it}} \, U_g \, T_{f^{-it}} \ \lambda . \xi^{(h)}$$

$\forall \ \lambda \in L^{\infty}$, $h \in G$; ceci s'écrit encore

$$\alpha \, (g \, h^{-1})^{-2} . \, g(\alpha \, (h^{-1})^{2}) = f \, . \, g \, (f^{-1})$$

ou

$$d\mu(gx)/d\mu(x) = f(gx)/f(x) \quad . \tag{5}$$

Finalement on voit que $\underline{A}$ est semi-finie si et seulement s'il existe f mesurable

> 0 vérifiant (5) ; mais (5) est aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure G - invariante équivalente à μ , qui ne sera autre que $f^{-1}\mu$.

b) Supposons $\underline{A}$ semi-finie ; on a alors une trace n.s.f.f. $\omega(h^{-1}\,.\,)$ où ω a été défini à la prop. VII.4 ; $\underline{A}$ est finie si et seulement si on peut choisir h vérifiant (4) et aussi $\omega(h^{-1}\,.\,)$ finie, i.e. $(h^{-1}\xi^{(e)} \mid \xi^{(e)}) < +\infty$; or on a, avec les notations de a) :

$$(h^{-1}\xi^{(e)} \mid \xi^{(e)}) = \int f(x)^{-1}.d\mu(x)$$

donc $\underline{A}$ est finie si et seulement si on peut choisir h de façon que f^{-1} soit μ-intégrable ; mais ceci est aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure finie invariante équivalente à μ .

<u>Corollaire</u> VII.4. L'algèbre $\underline{A}$ est proprement ou purement infinie si et seulement si le système (X,C,G) a la même propriété.

Résulte de la prop. VII.2 et du th. VII.1.

<u>Remarque</u> VII.2. Le théorème VII.1 peut aussi se démontrer par une méthode analogue à celle employée pour le théorème II.11, à l'aide d'un lemme tout à fait analogue au lemme II.3 ; le seul point non trivial dans l'adaptation de ce lemme est le fait que si φ est un poids n.s.f.f. G - invariant sur $\underline{A}_o$, $\varphi \circ E$ est une trace sur $\underline{A}$; cela peut se démontrer de la façon suivante : notons Γ le sous-groupe de $\underline{U}(\underline{A})$ engendré par les U_g et par les unitaires de $\underline{A}_o$; E , étant l'unique espérance conditionnelle de $\underline{A}$ sur $\underline{A}_o$, est invariante par Γ , donc $\varphi \circ E$ l'est aussi ; d'autre part on démontre facilement qu'un poids n.s.f.f. ψ sur une W^*- algèbre $\underline{B}$ est invariant par un unitaire u si et seulement si u est invariant par les σ_t^{ψ} ; comme Γ engendre $\underline{A}$, cela montre que $\varphi \circ E$ est invariant par tous les unitaires de $\underline{A}$, donc est une trace.

Remarque VII.3. On pourrait tenter de généraliser la construction de Krieger au cas d'un groupe G localement compact séparable non discret de la façon suivante. On choisit une fonction continue strictement positive a sur G vérifiant $\int a(g)\, dg = 1$ où dg est une mesure de Haar à gauche ; pour tout point x de X on note Π_x l'application de G sur l'orbite Gx de x définie par

$$\Pi_x(g) = g x ;$$

λ_x la mesure image de $a(g)\, dg$ par Π_x ; on pose $H_x = L^2(Gx, \lambda_x)$. Pour tout $h \in G$, λ_{hx} est équivalente à λ_x [en effet λ_{hx} est aussi l'image de la mesure $\Delta_G(h)^{-1}. a(gh^{-1}).dg$ par Π_x , et cette dernière mesure est équivalente à $a(g)\, dg$] ; on définit un isomorphisme $\Psi_{h,x}$ de H_x sur H_{hx} par

$$(\Psi_{h,x}\varphi)(y) = (d\lambda_x(y)/d\lambda_{hx}(y))^{\frac{1}{2}}.\ \varphi(y) \qquad \forall \varphi \in H_x ;$$

les opérateurs U_g et T_f sont définis comme ci-dessus et vérifient (2). On définit les opérateurs S_f et V_g par

$$((S_f)_x . \varphi)(y) = f(y)\ \varphi(y)$$
$$((V_g)_x . \varphi)(y) = (d\lambda_x(g^{-1}y)/d\lambda_x(y))^{\frac{1}{2}}.\ \varphi(g^{-1}y) ;$$

les S_f et V_g permutent à $\underline{A}$; on a encore les prop. VII.1, VII.2 et le cor.VII.1. En réalité nous n'avons pas défini la structure de champ mesurable sur le champ (H_x) ; pour cela on pourrait remplacer les vecteurs $\xi^{(g)}$ utilisés ci-dessus par des vecteurs $\xi^{(\varphi)}$ où $\varphi \in \underline{K}(G)$, définis comme suit : on se donne un voisinage compact $\underline{V}$ de e dans G ; pour tout x on note ν_x la mesure de Haar à gauche sur le stabilisateur G_x de x dans G , vérifiant $\nu_x(\underline{V}) = 1$; $\xi^{(\varphi)}$ aurait pour composante d'indice x la fonction sur Gx :

$$gx \longmapsto \int \varphi(g\gamma).d\,\nu_x(\gamma) .$$

Il ne semble pas évident qu'on puisse trouver un vecteur totalisateur et séparateur, ni qu'il existe une espérance conditionnelle de $\underline{A}$ sur $\underline{A}_0$.

§ VII.5. Isomorphisme des couples associés à deux systèmes dynamiques.

Montrons d'abord comment on peut prolonger la représentation U au groupe plein $[G]$ de façon que la relation (2) soit encore vérifiée et que U_g appartienne à $\underline{A}$ pour tout $g \in [G]$. Soit g un élément de $[G]$, (X_n) une partition de X et g_n des éléments de G tels que $g \mid X_n = g_n \mid X_n$; comme μ est quasi-invariante par g on peut encore considérer $\alpha(g,x) = (d\mu(g^{-1}x)/d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$; on peut encore définir des isomorphismes

$$\psi_{g,x} : H_x \longmapsto H_{gx}$$
$$\varepsilon_{x,y} \longmapsto \varepsilon_{gx,y}$$

puisque $gx \in Gx$; on voit facilement que le champ d'isomorphismes $(\psi_{g,x})$ est mesurable ; on peut donc définir U_g par la formule (1) et on a encore trivialement (2) ; enfin U_g appartient à $\underline{A}$ car, comme on le vérifie aisément, on a $U_g = \sum_n U_{g_n} P_n$ où P_n est le projecteur diagonalisable associé à X_n.

Lemme VII.3. Tout élément unitaire U de $\underline{A}$ vérifiant $U \underline{A}_o U^{-1} = \underline{A}_o$ peut s'écrire sous la forme $U = U_g U'$ où $g \in [G]$ et $U' \in \underline{A}_o$.

Démonstration. On sait (voir par exemple Guichardet [1]) qu'il existe un automorphisme g de (X,C) et des isomorphismes $\Phi_{g,x} : H_x \longmapsto H_{gx}$ tels que

$$(U\xi)_x = (d\mu(g^{-1}x)/d\mu(x))^{\frac{1}{2}}.\ \Phi_{g,g^{-1}x}(\xi_{g^{-1}x}) \quad \forall\ \xi \in H ;$$

utilisant le fait que U permute aux S_f et V_g, on vérifie que $\Phi_{g,x}$ transforme, pour presque tout x, $(S_{f_n})_x$ en $(S_{f_n})_{gx}$ (voir lemme VII.1) et $(V_h)_x$ en $(V_h)_{gx}$ $\forall\ h \in G$; d'après le lemme VII.2, $gx \in Gx$ pour presque tout x ; et cela implique $g \in [G]$ (voir § B.5). D'autre part $\psi_{g,x}$ transforme aussi

$(S_{f_n})_x$ en $(S_{f_n})_{gx}$ et $(V_h)_x$ en $(V_h)_{gx}$; à cause de l'irréductibilité des $(S_{f_n})_x$ et $(V_h)_x$ (voir lemme VII.1) , il existe un scalaire de module 1, soit λ_x , tel que $\Phi_{g,x} = \lambda_x \cdot \Psi_{g,x}$; il suffit alors de poser $U' = T_\lambda$.

Théorème VII.2. Soient (X,C,G) et (X',C',G') deux systèmes dynamiques séparables, $(\underline{A}, \underline{A}_o)$ et $(\underline{A}', \underline{A}'_o)$ les couples associés ; il existe un isomorphisme de $\underline{A}$ sur $\underline{A}'$ transformant $\underline{A}_o$ en $\underline{A}'_o$ si et seulement si les deux systèmes dynamiques sont faiblement isomorphes.

a) Condition suffisante. Supposons qu'il existe un isomorphisme Π de (X,C) sur (X',C') transformant $[G]$ en $[G']$; le couple associé à (X,C,G) est isomorphe au couple associé à $(X', \Pi(C), G')$ par simple transport de structure, et comme $\Pi(C) = C'$, l'assertion est démontrée.

b) Condition nécessaire. Soit Ω un isomorphisme de $\underline{A}$ sur $\underline{A}'$ transformant $\underline{A}_o$ en $\underline{A}'_o$; comme $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ admettent des vecteurs totalisateurs et séparateurs, Ω provient d'un isomorphisme Λ de H sur H' ; ensuite il existe un isomorphisme Π de (X,C) sur (X',C') et pour tout $x \in X$ un isomorphisme Λ_x de H_x sur $H'_{\Pi(x)}$ de façon que

$$(\Lambda \xi)_{\Pi(x)} = ((d(\Pi(\mu)))(\Pi(x))/d\mu'(\Pi(x)))^{\frac{1}{2}} \Lambda_x \xi_x$$

(voir par exemple Dixmier [1], ch.II, § 6, th.3). Identifions (X',C') à (X,C) ; notons T'_f et $U'_{g'}$ les opérateurs analogues aux T_f et U_g , avec $f \in L^\infty$ et $g \in [G']$; on a alors $\Lambda T_f \Lambda^{-1} = T'_f \ \forall f \in L^\infty$; pour tout $g \in [G]$, $\Lambda U_g \Lambda^{-1}$ conserve $\underline{A}'_o$, donc s'écrit $U'_{g'} U''$ avec $g' \in [G']$ et $U'' \in \underline{A}'_o$; puis on vérifie que $T'_{gf} = T'_{g'f} \ \forall f \in L^\infty$, donc $g = g'$, ce qui montre que $[G] \subset [G']$; par symétrie on voit que $[G] = [G']$.

§ VII.6. Couple associé à un système dynamique induit.

Soit E un sous-ensemble mesurable non négligeable de X ; posons $G' = G_E$; rappelons (voir § B.6) que $[G']$ est l'ensemble des restrictions à E des éléments de $[G]$ qui conservent E . Notons P le projecteur S_{χ_E} où χ_E est la fonction caractéristique de E ; au système induit $(E , C|E , G_E)$ on associe des objets H'_x pour $x \in E$; $H' = \int_E^{\oplus} H'_x .d\mu(x)$; $\psi_{g'x}$ isomorphisme de H'_x sur $H'_{g'x}$ pour $x \in E$ et $g' \in [G']$; T'_f pour $f \in L^{\infty}(E , C|E)$; $U'_{g'}$ pour $g' \in [G']$; $\underline{A}'_o$ et $\underline{A}'$. P appartient au commutant de $\underline{A}$, et est décomposable de composantes P_x définies par

$$P_x (\varepsilon_{x,y}) = \begin{cases} \varepsilon_{x,y} & \text{si } y \in E \cap Gx \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour tout $x \in X$ notons H'_x le sous-espace de H_x engendré par les $\varepsilon_{x,y}$ où $y \in E \cap Gx$; si $x \in E$, H'_x est le sous-espace considéré plus haut ; on a

$$P(H) = \int_X^{\oplus} H'_x \,.\, d\mu(x)$$

$$H' = \int_E^{\oplus} H'_x \,.\, d\mu(x) \,.$$

Posons $Q = T_{\chi_E} \in \underline{A}_o$; le projecteur sur H' est égal à PQ .

Proposition VII.5 (Dang Ngoc [4]) Le couple $(\underline{A}' , \underline{A}'_o)$ est isomorphe au couple $(Q \underline{A} Q , Q \underline{A}_o Q)$ par l'application $Q \underline{A} Q \ni a \longmapsto a | H'$.

Démonstration.

a) Montrons que l'application ci-dessus est injective, i.e. que H' est totalisateur pour l'algèbre $Q \underline{A}' Q$ dans $Q(H)$ (ici $\underline{A}'$ est le commutant de $\underline{A}$!) ; on le voit facilement en appliquant un opérateur $Q V_g$ à un élément de H'.

b) Montrons que $a | H'$ appartient à $\underline{A}'_o$ si $a \in Q \underline{A}_o Q$ et à $\underline{A}'$ si $a \in Q \underline{A} Q$.

Première assertion : a s'écrit $Q\,T_f\,Q$ ou encore $T_{\chi_E . f}$ et sa restriction à H' n'est autre que $T'_{\chi_E . f} \in \underline{A}'_o$; on voit même que $Q\,\underline{A}_o\,Q \,|\, H' = \underline{A}'_o$.
Deuxième assertion : il suffit de voir que $Q\,U_g\,Q \,|\, H' \in \underline{A}'$ pour tout $g \in G$; comme le commutant de $\underline{A}'$ est engendré par les opérateurs S'_f et $V'_{g'}$, il suffit de vérifier que $Q\,U_g\,Q \,|\, H'$ permute à ces opérateurs, ce qui est facile.

c) Reste à voir que chaque opérateur $U'_{g'}$ appartient à $Q\,\underline{A}\,Q \,|\, H'$; cela résulte du fait que g' est la restriction à E d'un élément de $[G]$ conservant E .

<u>Corollaire</u> VII.5. Un sous-ensemble E est G - fini (resp. G - semi-fini) si et seulement si le projecteur diagonalisable correspondant est fini (resp. semi-fini) relativement à $\underline{A}$.

<u>Autres résultats</u> (voir Dang Ngoc [4]).

On démontre que deux sous-ensembles de X sont G - équivalents si et seulement si les projecteurs diagonalisables correspondants sont équivalents relativement à $\underline{A}$; que le système (X,C,G) est discret ou continu si et seulement si $\underline{A}$ a la même propriété. D'autre part on peut faire de l'application $(X,C,G) \longmapsto (\underline{A}\ ,\ \underline{A}_o)$ un foncteur qui transforme les sommes en produits et les produits en produits tensoriels. On déduit de là et des résultats connus sur les produits tensoriels de W^*- algèbres (cf. Sakaï [1]) que le produit de deux systèmes dynamiques commutatifs séparables est fini (resp. semi-fini, resp. discret) si et seulement si les deux systèmes sont finis (resp....) ; qu'il est purement infini si et seulement si l'un au moins des deux est purement infini.
Enfin on montre que le système (X,C,G) est discret si et seulement si tout automorphisme de (X,C) conservant chaque sous-ensemble mesurable G-invariant appartient à $[G]$; pour cela on utilise le fait, démontré dans Guichardet [1], qu'une

W^* - algèbre $\underline{A}$ est discrète si et seulement si pour une (ou pour toute) sous - W^* - algèbre commutative maximale $\underline{B}$ de $\underline{A}$, tout automorphisme de $\underline{B}$ induisant l'identité sur le centre de $\underline{A}$ provient d'un unitaire de $\underline{A}$ conservant $\underline{B}$.

On peut aussi démontrer que le foncteur $(X,C,G) \longmapsto (\underline{A}, \underline{A}_o)$ transforme les produits infinis en produits tensoriels infinis ; on déduit alors de Størmer [11] le résultat suivant : soit, pour $n = 1,2,\ldots$, $\underline{F}_n = (X_n, \mu_n, G_n)$ un système dynamique ergodique où X_n est standard, μ_n de masse totale 1, G_n dénombrable ; posons $X = \prod X_n$, $\mu = \otimes \mu_n$ et faisons opérer G, produit restreint des G_n, dans X composante par composante ; pour que le système (X,μ,G) soit semi-fini, il faut et il suffit que chaque $\underline{F}_n$ le soit et que, en notant h_n la densité par rapport à μ_n d'une mesure σ - finie invariante équivalente à μ_n , on ait

$$\sum_n \left(1 - \left| \int h_n^{it} \, d\mu_n \right| \right) < + \infty \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} .$$

Notons aussi le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Kakutani sur l'équivalence des produits infinis de mesures : pour que le système (X,μ,G) soit fini il faut et il suffit que chaque $\underline{F}_n$ le soit et que, en notant h_n la densité par rapport à μ_n de la mesure de masse 1 invariante équivalente à μ_n , on ait

$$\sum_n \left(1 - \int h_n^{\frac{1}{2}} \, d\mu_n \right) < + \infty .$$

Enfin, sans supposer les $\underline{F}_n$ ergodiques, on peut déduire de Elliott [1] le critère suivant : pour que (X,μ,G) soit semi-fini il faut et il suffit que chaque $\underline{F}_n$ le soit et que, en notant h_n la densité par rapport à μ_n d'une mesure

6 – finie invariante équivalente à μ_n , et E_n l'espérance conditionnelle de L^∞ sur $(L^\infty)^G$ conservant μ_n (cf. § A.6) , on ait

$$\sum_n \left(1 - \int |E_n(h_n^{it})| \,.\, d\mu_n\right) < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R} \quad .$$

Deuxième Partie : C^* - SYSTÈMES DYNAMIQUES

Chapitre VIII | GÉNÉRALITÉS, REPRÉSENTATIONS, PRODUITS CROISÉS

§ VIII.1. Généralités.

Nous utiliserons systématiquement les notations suivantes : A désignera une C^* - algèbre ; 1 l'élément unité de A s'il existe ; A^* le dual topologique de A ; A^{**} le bidual ou W^* - algèbre enveloppante de A ; Z le centre de A^{**} ; $\underline{E}$ ou $\underline{E}(A)$ l'ensemble des états sur A, muni de la topologie faible qui est compacte si A a une unité ; $\underline{F} = \underline{F}(A)$ l'ensemble des états factoriels ; $\underline{P} = \underline{P}(A)$ l'ensemble des états purs ; H_φ , π_φ , ξ_φ les objets associés à un état φ par la construction de Gelfand - Segal ; H_π l'espace d'une représentation π . Pour tout $a \in A$ nous noterons $\tilde{a}$ la fonction continue sur $\underline{E}$ définie par $\tilde{a}(\varphi) = \varphi(a)$. Le prolongement canonique à A^{**} d'un état φ ou d'une représentation π sera encore noté φ ou π .

Définition. Nous appellerons C^*- système dynamique , ou plus simplement système dynamique (en abrégé S D) tout couple (A,G) où A est une C^*- algèbre et G un groupe opérant dans A par $*$- automorphismes (nous dirons simplement automorphismes) ; nous noterons $g.a$ ou $g\,a$ l'action de $g \in G$ sur $a \in A$.

A un tel système dynamique nous associerons le W^* - système dynamique (A^{**}, G) où G opère dans A^{**} par bitransposition ; G opère aussi dans $\underline{E}$ par transposition : $(g\varphi)(a) = \varphi(g^{-1}a)$. Nous noterons A^G l'ensemble des éléments invariants de A ; définitions analogues pour A^{**G} , Z^G ; $\underline{E}^G$ sera aussi noté S et s'identifie à l'ensemble des états normaux invariants sur A . Lorsque G est localement compact, on dit qu'il opère continûment dans A si pour tout $a \in A$ l'application $g \longmapsto g.a$ est continue pour la topologie de la norme de A, ou encore (§ A.7) pour la topologie affaiblie.

Définition. On suppose G localement compact ; on appelle représentation du système dynamique (A,G) dans un espace hilbertien H tout couple (π, U) où π est une représentation de A dans H, et U une représentation unitaire continue de G dans H vérifiant

$$\pi(g.a) = U_g \; \pi(a) \; U_g^{-1} \qquad \forall a \in A, \; g \in G .$$

Une telle représentation se prolonge en une représentation du W^* - SD (A^{**}, G) et définit un SD concret $(\pi(A)'', G, H, U)$.

§ VIII.2. Représentations induites.

Considérons un SD (A,G) où G est localement compact et opère continûment, un sous-groupe fermé Γ de G, une représentation (ρ, V) du SD (A, Γ) dans un espace K ; on va construire canoniquement une représentation (π, U) du SD (A,G) dite induite par (ρ, V), où U sera la représentation induite par V au sens ordinaire.

Notons $X = \Gamma \backslash G$ l'ensemble des classes $\dot{g} = \Gamma g$, $g \in G$; G opère à droite dans X par $\dot{g}.g' = \dot{\widehat{gg'}}$; d'après Bourbaki [1], ch.VII, § 2, th.2, il existe sur X une mesure μ, positive, non nulle, quasi-invariante par G et telle que la fonction $(g,x) \longmapsto r(g,x) = d\mu(x\,g)/d\mu(x)$ soit continue. Notons H l'espace hilbertien formé des applications mesurables $f : G \longrightarrow K$ vérifiant

$$f(\gamma g) = V_\gamma \, . \, f(g) \qquad \forall g \in G, \; \gamma \in \Gamma$$

et

$$\int \| f(g) \|^2 \, d\mu(\dot{g}) < +\infty$$

(le second membre a un sens parce que $\|f(g)\|^2$ ne dépend que de $\dot{g}$) ; π et U opèrent dans H et sont définies par

$$(\pi(a).f)(g) = (g.a).f(g)$$

$$(U_{g_0} \, . \, f)(g) = r(g_0, \dot{g})^{\frac{1}{2}} . \, f(g\,g_0) \; .$$

Il est facile de voir que (π , U) ne dépend pas du choix de la mesure μ .

Cas particuliers.

a) Supposons Γ réduit à l'élément neutre e ; alors U est la représentation régulière droite de G et π est l'intégrale directe des transformées de ρ par les éléments de G .

b) Supposons G et H séparables ; il existe une section borélienne s pour l'application canonique de G sur X vérifiant $s(\dot{e}) = e$; on définit un isomorphisme Φ de H sur $L^2(X , \mu ; K)$ par $(\Phi f)(x) = f(s(x))$ $\forall f \in H$; les représentations π et U, transportées dans $L^2(X , \mu ; K)$ par Φ , deviennent respectivement

$$(\pi (a).F)(x) = \rho (s(x).a).\, F(x)$$
$$(U_g . F)(x) = r(g,x)^{\frac{1}{2}}.\, V_{s(x).g.s(xg)^{-1}} . F(xg) ;$$

on voit en particulier que π est l'intégrale directe des représentations π_x de A dans K définies par $\pi_x(a) = \rho (s(x).a)$.

§ VIII.3. Systèmes d'imprimitivité.

Définition. Soient (π , U) une représentation d'un SD (A,G) dans un espace H , et (X , μ) un espace mesuré dans lequel G opère à droite en laissant μ quasi-invariante ; on appelle système d'imprimitivité pour (π , U) basé sur (X , μ) tout morphisme normal T de $L^\infty (X , \mu)$ dans $\underline{L}(H)$ vérifiant

$$T_\varphi \in \pi (A)' \qquad \forall \varphi \in L^\infty (X , \mu)$$
$$T_{g.\varphi} = U_g T_\varphi U_g^{-1} \qquad \forall g \in G ,\ \varphi \in L^\infty (X , \mu)$$

où l'on a posé $(g.\varphi)(x) = \varphi(xg)$.

Exemple. Prenons pour (π , U) la représentation induite par une représentation (ρ , V) d'un SD (A, Γ) et reprenons les notations du § 2 ; on obtient un système d'imprimitivité en définissant T_φ par

$$(T_\varphi f)(g) = \varphi(\dot{g}) . f(g) \qquad \forall f \in H ;$$

on remarquera qu'ici G opère transitivement dans X . Réciproquement on a le résultat suivant :

<u>Théorème</u> VIII.1 (Takesaki [1]) On suppose A séparable, G localement compact séparable et opérant continûment ; soient (π, U) une représentation de (A,G) dans un espace séparable H , Γ un sous-groupe fermé de G , μ une mesure quasi-invariante sur $X = \Gamma \backslash G$, T un système d'imprimitivité pour (π, U) basé sur (X, μ). Alors le triplet (π, U, T) est équivalent à un triplet obtenu comme indiqué à l'exemple ci-dessus.

<u>Démonstration</u> (nous indiquons seulement son principe, sans tenir compte des difficultés dues au presque partout). D'après le théorème d'imprimitivité de Mackey (voir par exemple Varadarajan [2]), U est induite par une représentation V de Γ dans un espace K ; choisissant une section borélienne s on peut donc écrire

$$H = L^2(X, \mu ; K)$$

$$(U_g.F)(x) = r(g,x)^{\frac{1}{2}} . V_{s(x).g.s(xg)^{-1}} . F(xg) \qquad \forall g \in G, F \in H$$

$$T_\varphi = \text{opérateur de multiplication par } \varphi , \forall \varphi \in L^\infty(X, \mu).$$

Comme $T_\varphi \in \pi(A)'$ pour toute φ , on peut désintégrer π en des représentations π_x , i.e. écrire $(\pi(a).F)(x) = \pi_x(a).F(x)$; la relation $U_g \, \pi(a) \, U_g^{-1} = \pi(g\,a)$ s'écrit alors

$$V_{s(x).g.s(xg)^{-1}} . \pi_{xg}(a) . V^{-1}_{s(x).g.s(xg)^{-1}} = \pi_x(g\,a) \quad ; \tag{1}$$

prenons g de la forme $s(x)^{-1}.s(x')$ avec $x' \in X$; on a alors $xg = x'$, $s(x).g.s(xg)^{-1} = e$, et (1) devient

$$\pi_{x'}(a) = \pi_x(s(x)^{-1}\, s(x').\, a)$$

ce qui montre que $\pi_x(s(x)^{-1}.\, a)$ est indépendant de x ; il suffit alors, pour définir ρ, de poser $\rho(a) = \pi_x(s(x)^{-1}.\, a)$.

§ VIII.4. Produits croisés.

Soit (A,G) un système dynamique ; on munit l'espace $L^1(G;A)$, construit avec une mesure de Haar à gauche dg sur G, d'une structure d'algèbre de Banach involutive en définissant le produit par

$$(F_1\, F_2)(g) = \int F_1(h) \times (h.F_2(h^{-1}g)).dh \qquad \forall\ F_1,F_2 \in L^1(G;A)$$

et l'involution par

$$F^*(g) = \Delta(g)^{-1}.\, g.F(g^{-1})^* \qquad \forall\ F \in L^1(G;A)$$

où Δ est la fonction modulaire de G.

Définition. On appelle produit croisé de A par G et on note $C^*(A,G)$ la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G;A)$.

A toute représentation (π, U) de (A,G) dans un espace H on associe une représentation ρ de $L^1(G;A)$ définie par

$$\rho(F) = \int (F(g)).\, U_g.\, dg \ ;$$

on montre, en utilisant des unités approchées de $L^1(G)$ et de A, qu'on obtient ainsi une correspondance bijective entre les représentations (π, U) de (A,G) où π est non dégénérée, et les représentations non dégénérées de $L^1(G;A)$; et par suite aussi les représentations non dégénérées de $C^*(A,G)$. Prenons en particulier pour (π, U) la représentation induite par la représentation (π_0 , I) du SD $(A ,\{e\})$ où π_0 est la représentation universelle de A ; il est facile de voir que ρ est fidèle, ce qui entraîne que le morphisme canonique $L^1(G;A) \longrightarrow C^*(A,G)$ est injectif.

Notons enfin que si σ est la représentation de $C^*(A,G)$ associée à une représentation (π , U) de (A,G) , on a

$$\sigma (C^*(A,G))'' = (\pi (A) \cup U(G))'' .$$

Chapitre IX | ÉTATS INVARIANTS

§ IX.1. Généralités.

On considère ici un système dynamique (A,G) où G est localement compact et opère continûment ; on note S l'ensemble des états invariants. A tout élément φ de S la construction de Gelfand - Segal associe des objets H_φ, π_φ, ξ_φ et aussi une représentation unitaire continue U_φ de G dans H_φ telle que $(\pi_\varphi , U_\varphi)$ soit une représentation de (A,G) et que ξ_φ soit invariant par U_φ. Nous noterons $\underline{A}_\varphi$ l'algèbre de von Neumann $\pi_\varphi(A)''$; $\underline{U}_\varphi$ l'algèbre de von Neumann engendrée par U_φ ; $\underline{R}_\varphi$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\underline{A}_\varphi$ et $\underline{U}_\varphi$; $\underline{C}_\varphi$ le centre de $\underline{A}_\varphi$; $\underline{C}^G_\varphi = \underline{C}_\varphi \cap \underline{U}'_\varphi = \pi_\varphi(Z^G)$ l'ensemble des éléments G-invariants de $\underline{C}_\varphi$; K_φ le projecteur orthogonal sur l'ensemble des vecteurs invariants par U_φ ; $\underline{F}_\varphi$ le SD concret $(\underline{A}_\varphi, G, H_\varphi, U_\varphi)$ avec vecteur totalisateur et invariant ξ_φ.

L'algèbre $\underline{R}_\varphi$ est aussi engendrée par la représentation ρ de $C^*(A,G)$ associée à $(\pi_\varphi , U_\varphi)$; pour toute $F \in L^1(G;A)$ on a

$$(\rho(F).\xi_\varphi \mid \xi_\varphi) = \int (\pi_\varphi(F(g)).U_g.\xi_\varphi \mid \xi_\varphi)\, dg$$
$$= \int \varphi(F(g))\, dg \;;$$

par suite la fonction sur $L^1(G;A)$: $F \longmapsto \int \varphi(F(g))\, dg$ est la restriction d'un état de $C^*(A,G)$ que nous noterons $\bar{\varphi}$, et ρ est la représentation définie par $\bar{\varphi}$. Il est facile de voir que l'application $\varphi \longmapsto \bar{\varphi}$ de S dans $\underline{E}(C^*(A,G))$ est injective, affine et continue.

§ IX.2. Propriétés moins fortes que la commutativité de A.

On considère un SD (A,G), et on va introduire des propriétés analogues à certaines des propriétés étudiées au § V.2 dans le cas des W^* - SD. On dira que le SD (A,G) est

- simplicial si le W^* - SD (A^{**},G) vérifie la condition (C1) du § V.2 ; ou encore si S est un simplexe ; ou encore si l'algèbre $(\underline{A}_\varphi)_{K_\varphi}$ est commutative pour tout $\varphi \in S$; ou enfin si $\underline{R}'_\varphi$ est commutative pour tout $\varphi \in S$.
- semi-vaste si (A^{**},G) vérifie (C2) ; ou encore si on a $\underline{R}'_\varphi \subset \underline{C}_\varphi \; \forall \varphi \in S$.
- vaste si (A^{**},G) vérifie (C3) ; ou encore si pour tout $\varphi \in S$ et tout $a \in A$, l'enveloppe convexe ultra-faiblement fermée de l'ensemble des $\pi_\varphi(g.a)$ rencontre $\underline{C}_\varphi$.
- M-abélien si pour tout $\varphi \in S$, tout $\omega \in \pi_\varphi(A)''_*$ et tous $a,b \in A$, la fonction $g \longmapsto \omega(\pi_\varphi(g.a))$ est faiblement presque périodique et

$$m_g\, |\omega(\pi_\varphi(ga.b - b.ga))| = 0 .$$

- faiblement asymptotiquement abélien si G est non compact et si on a

$$\lim_{g=\infty} \varphi(ga.b - b.ga) = 0 \quad \forall\; a,b \in A\, ,\ \varphi \in A^*.$$

- asymptotiquement abélien si G est non compact et si on a

$$\lim_{g=\infty} \| ga.b - b.ga \| = 0 \quad \forall\; a,b \in A .$$

D'après ce qui a été dit au § V.2 on a les implications suivantes : asymptotiquement abélien $\Longrightarrow$ faiblement asymptotiquement abélien $\Longrightarrow$ M - abélien $\Longrightarrow$ vaste $\Longrightarrow$ semi-vaste $\Longrightarrow$ simplicial. L'intérêt des SD simpliciaux est évidemment lié à la théorie de Choquet, sur laquelle on peut trouver des renseignements par exemple dans Phelps [1] : pour un SD quelconque, tout état invariant est barycentre d'au moins une mesure positive normée sur S, maximale pour l'ordre introduit au § E.2 ; le SD est simplicial si et seulement si cette mesure est unique ; si l'ensemble S_e des éléments extrémaux de S est fermé, ou si A est séparable, les mesures maximales sont exactement les mesures portées par S_e.

§ IX.3. Etats invariants extrémaux, mélangeants,etc.

On dira qu'un état invariant φ est

- centralement ergodique si le SD concret $\underline{F}_{\varphi}$ vérifie la condition (E1) du § VI.1 , i.e. si $\underline{C}^G_{\varphi}$ est réduit aux scalaires ; ou encore si φ est Z^G - pur (voir définition au § E.4).
- sous-extrémal si $\underline{F}_{\varphi}$ vérifie (E2), i.e. si $\underline{R}_{\varphi} \cap \underline{R}'_{\varphi}$ est réduit aux scalaires ; ou encore si $\overline{\varphi}$ est factoriel (cf. § IX.1).
- extrémal si φ est un élément extrémal du convexe S ; ou encore si $\underline{F}_{\varphi}$ vérifie (E3), i.e. si $\underline{R}'_{\varphi}$ est réduit aux scalaires ; ou enfin si $\overline{\varphi}$ est pur. On remarquera qu'il existe toujours de tels états si S est non vide.
- à vide unique si $\underline{F}_{\varphi}$ vérifie (E4), i.e. $K_{\varphi} = \mathbb{C}\,\xi_{\varphi}$; ou encore si on a

$$m_g\ \varphi(ga.b) = \varphi(a).\varphi(b) \qquad \forall\ a,b \in A .$$

- faiblement mélangeant si $\underline{F}_{\varphi}$ vérifie (E6), i.e. si on a

$$m_g\ |\varphi(ga.b) - \varphi(a).\varphi(b)| = 0 \qquad \forall\ a,b \in A .$$

- mélangeant si $\underline{F}_{\varphi}$ vérifie (E7), i.e. si on a

$$\lim_{g=\infty} \varphi(ga.b) = \varphi(a).\varphi(b) \qquad \forall\ a,b \in A .$$

Les conditions ci-dessus sont de force croissante ; de plus le théorème VI.5 montre que

- si le SD est simplicial on a les équivalences : à vide unique $\Longleftrightarrow$ extrémal $\Longleftrightarrow$ sous-extrémal

- si le SD est semi-vaste on a les équivalences : à vide unique $\Longleftrightarrow$ extrémal $\Longleftrightarrow$ sous-extrémal $\Longleftrightarrow$ centralement ergodique.

Nous établirons plus loin (corollaire IX.1) des réciproques de certaines de ces propriétés.

En vertu du théorème VI.6, deux états invariants centralement ergodiques sont disjoints ou quasi-équivalents ; de plus les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) tout état invariant centralement ergodique est extrémal

(ii) deux états invariants centralement ergodiques distincts sont disjoints.

Enfin, d'après le théorème VI.8, si φ est un état invariant à vide unique, l'algèbre $\pi_\varphi(A)'$ est soit de type III, soit finie, auquel cas ξ_φ est élément trace pour elle.

§ IX.4. Désintégrations des états invariants.

On suppose ici A séparable et unifère. Nous avons dit au § IX.2 que tout état invariant est barycentre d'au moins une mesure positive normée portée par S_e ; nous nous proposons ici d'étudier ces désintégrations en états extrémaux (ainsi que d'autres désintégrations) en utilisant la théorie exposée à l'appendice E.

Soient donc φ un état invariant, H_φ, π_φ, ξ_φ, U_φ, $\underline{A}_\varphi$, $\underline{C}_\varphi$, $\underline{R}_\varphi$ les objets associés (cf. § IX.1). D'après l'appendice E on sait associer à toute sous-algèbre de von Neumann commutative $\underline{B}$ de $\underline{A}'_\varphi$ une mesure $\mu_{\underline{B}}$ sur $\underline{E}$; d'après la propriété (vi) du § E.2, $\mu_{\underline{B}}$ est G - invariante si et seulement si $\underline{B}$ est globalement invariante par les U_g ; et $\mu_{\underline{B}}$ est portée par S si et seulement si $\underline{B}$ est invariante point par point, i.e. si $\underline{B} \subset \underline{R}'_\varphi$. On a donc une application $\underline{B} \longmapsto \mu_{\underline{B}}$ de l'ensemble des sous-algèbres de von Neumann commutatives de $\underline{R}'_\varphi$ dans l'ensemble des mesures positives normées sur S.

Théorème IX.1.

(i) Si $\underline{B}$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\underline{R}'_\varphi$, $\mu_{\underline{B}}$ est portée par l'ensemble des états invariants extrémaux.

(ii) Si $\underline{B} = \underline{R}_\varphi \wedge \underline{R}'_\varphi$, $\mu_{\underline{B}}$ est portée par l'ensemble des états invariants sous-extrémaux.

Démonstration. Notons p l'application $\psi \longmapsto \overline{\psi}$ de S dans $\underline{E}(C^*(A,G))$ (cf. § IX.1) ; puisque ψ est extrémal (resp. sous-extrémal) si et seulement si $p(\psi)$ est pur (resp. factoriel), une mesure μ sur S est portée par l'ensemble des états extrémaux (resp. sous-extrémaux) si et seulement si son image $p(\mu)$ est portée par l'ensemble des états purs (resp. factoriels) ; nous savons (§ E.2) que la mesure $\mu'_{\underline{B}}$ sur $\underline{E}(C^*(A,G))$, associée à $\underline{B}$ au moyen de l'état $p(\varphi)$, est portée par l'ensemble des états purs (resp. factoriels) si $\underline{B}$ est commutative maximale dans $\underline{R}'_\varphi$ (resp. égale à $\underline{R}_\varphi \wedge \underline{R}'_\varphi$) ; il suffit donc de vérifier que $\mu'_{\underline{B}} = p(\mu_{\underline{B}})$. Ceci équivaut à vérifier que l'on a $\mu'_{\underline{B}}(f) = \mu_{\underline{B}}(f \circ p)$ pour toute fonction continue f sur $\underline{E}(C^*(A,G))$; par continuité on peut supposer que f est de la forme $\widetilde{F}_1 \dots \widetilde{F}_n$ avec $F_1,\dots,F_n \in L^1(G;A)$; notons ρ la représentation de $C^*(A,G)$ associée à $p(\varphi)$; on a alors, en notant P le projecteur sur $\overline{\underline{B}\,\xi_\varphi}$ et en remarquant que $U_g\, P = P\, U_g = P \quad \forall g \in G$:

$$\begin{aligned}
\mu'_{\underline{B}}(f) &= (\rho(F_1).P\dots P.\rho(F_n).\xi_\varphi \mid \xi_\varphi) \\
&= \int\!\!\cdots\!\!\int (\pi_\varphi(F_1(g_1)).U_{g_1}.P\dots P.\,\pi_\varphi(F_n(g_n)).U_{g_n}.P.\,\xi_\varphi \mid \xi_\varphi)\,dg_1\dots dg_n \\
&= \int\!\!\cdots\!\!\int (\pi_\varphi(F_1(g_1)).P\dots P.\,\pi_\varphi(F_n(g_n)).\,\xi_\varphi \mid \xi_\varphi)\,dg_1\dots dg_n \\
&= \int\!\!\cdots\!\!\int \mu_{\underline{B}}(\widetilde{F_1(g_1)})\dots\widetilde{F_n(g_n)})\,dg_1\dots dg_n \\
&= \mu_{\underline{B}}\left(\int \widetilde{F_1(g_1)}\,dg_1 \dots \int \widetilde{F_n(g_n)}\,dg_n\right) = \mu_{\underline{B}}(f \circ p) .
\end{aligned}$$

CQFD

On obtient donc une désintégration canonique de φ en états invariants sous-extrémaux, et des désintégrations en états invariants extrémaux, dont aucune n'est canonique si $\underline{R}'_{\varphi}$ n'est pas commutative. Le théorème suivant montre qu'il existe aussi une désintégration canonique de φ en états invariants centralement ergodiques.

<u>Théorème</u> IX.2. Si $\underline{B} = \underline{C}^G_{\varphi}$, la mesure $\mu_{\underline{B}}$ (qui n'est autre que la mesure Z^G-centrale de φ au sens du § E.4) est portée par l'ensemble des états invariants centralement ergodiques.

Cela sera démontré plus loin (théorème X.1) dans le cadre des états quasi-invariants.

<u>Corollaire</u> IX.1 (Dang Ngoc [5]). (i) Le SD (A,G) est simplicial si et seulement si tout état invariant sous-extrémal est extrémal.
(ii) Le SD est semi-vaste si et seulement si tout état invariant centralement ergodique est extrémal.

Nous savons déjà que les conditions énoncées sont nécessaires. Supposons que tout état invariant sous-extrémal soit extrémal ; soit φ un état invariant ; prenons $\underline{B} = \underline{R}_{\varphi} \wedge \underline{R}'_{\varphi}$; $\mu_{\underline{B}}$ est portée par les états sous-extrémaux, donc par les états extrémaux ; d'après la démonstration du théorème, son image par p est portée par les états purs de $C^*(A,G)$, et cela entraîne (cf. § E.2) que $\underline{B}$ est commutative maximale dans $\underline{R}'_{\varphi}$, i.e. que $\underline{R}'_{\varphi}$ est commutative ; comme ceci est valable pour tout $\varphi \in S$, le SD est simplicial. Supposons enfin que tout état invariant centralement ergodique soit extrémal ; prenons $\varphi \in S$ et $\underline{B} = \underline{C}^G_{\varphi}$; le même raisonnement montre que $\underline{B}$ est commutative maximale dans $\underline{R}'_{\varphi}$, et cela implique $\underline{B} = \underline{R}'_{\varphi}$ puisque $\underline{B}$ est contenue dans le centre de $\underline{R}'_{\varphi}$.

§ IX.5. Mesures centrales des états invariants.

On suppose encore A séparable et unifère. Soit φ un état invariant ; sa mesure centrale μ est la mesure associée à la sous-algèbre de von Neumann commutative $\underline{C}_\varphi$; comme celle-ci est globalement invariante, μ est invariante (cf. début du § IX.4) ; de plus si on note Λ' l'isomorphisme $T \longmapsto \Lambda(T_E)$ de $\underline{C}_\varphi$ sur $L^\infty(\underline{E}, \mu)$, on a

$$\Lambda'(U_g\, T\, U_g^{-1}) = g.\Lambda'(T) \ ; \qquad (1)$$

on voit donc que μ est ergodique si et seulement si φ est centralement ergodique. D'autre part (1) montre que si l'on pose $T_f = \Lambda'^{-1}(f)$ pour toute $f \in L^\infty(\underline{E}, \mu)$, T est un système d'imprimitivité pour (π_φ, U_φ) ; si on suppose μ transitive, le théorème VIII.1 montre que (π_φ, U_φ) est induite par une représentation de (A, Γ) où Γ est le stabilisateur d'un point de l'orbite portant μ ; on trouvera des applications de tout ceci dans Kastler - Mebkhout - Loupias - Michel [1] où, en prenant $G = \mathbb{R}^4$, les auteurs " expliquent " pourquoi les états invariants extrémaux rencontrés en Physique sont factoriels.

Notons maintenant ν_ψ la mesure centrale d'un état quelconque ψ, φ un état invariant, μ sa mesure Z^G - centrale ; on sait déjà que pour μ - presque tout ψ, ψ est invariant et centralement ergodique, donc ν_ψ est invariante et ergodique ; on montre en outre (cf. Guichardet - Kastler [1], th.9) que l'on a $\nu_\varphi = \int \nu_\psi \, .d\mu(\psi)$, c'est-à-dire que les ν_ψ réalisent la désintégration de ν_φ en mesures invariantes ergodiques, ce qui n'était pas évident a priori, puisque l'application $\psi \longmapsto \nu_\psi$ n'est pas affine.

Chapitre X | REPRÉSENTATIONS ET ÉTATS COVARIANTS ET QUASI-INVARIANTS

On considère ici un système dynamique (A,G) où G est localement compact mais n'opère pas nécessairement continûment dans A .

§ X.1. Généralités.

Pour toute représentation π de A on notera $g.\pi$ la représentation $a \longmapsto \pi(g^{-1}a)$ dans le même espace que π .

Définitions. On dit que π est covariante s'il existe une représentation unitaire continue U de G dans H_π telle que le couple (π , U) soit une représentation du SD (A,G) ; alors π et $g.\pi$ sont équivalentes pour tout g.

On dit que π est quasi-invariante si π et $g.\pi$ sont quasi-équivalentes pour tout g ; ou encore s'il existe un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}\ \pi(A)''$ tel que $\pi(g.a) = g.\pi(a)$ $\forall a \in A$, $g \in G$; cela revient encore à dire que le support de π dans Z (centre de A^{**}) est G - invariant, i.e. appartient à Z^G. Dans ces conditions $\pi(Z^G)$ est égal à l'ensemble des éléments G - invariants du centre de $\pi(A)''$ (cf. prop. II.1). Il est clair que toute représentation covariante est quasi-invariante.

Une représentation quasi-invariante π est dite centralement ergodique si le W^* - système dynamique $(\pi(A)'' , G)$ est centralement ergodique, i.e. si $\pi(Z^G)$ est réduit aux scalaires ; ou encore si le support de π dans Z est un projecteur minimal de Z^G (cf. § I.2) ; deux représentations quasi-invariantes centralement ergodiques sont ou quasi-équivalentes, ou disjointes.

Un état φ sur A est dit covariant (resp. quasi-invariant) si π_φ a la même propriété ; il est clair que

invariant $\Longrightarrow$ covariant $\Longrightarrow$ quasi-invariant.

Un état quasi-invariant φ est dit centralement ergodique si π_φ l'est ; ce qui équivaut à dire que φ est Z^G - pur (cf. § E.4).
Si A est commutative, les états quasi-invariants correspondent bijectivement aux mesures quasi-invariantes sur $\hat{A}$, et les états centralement ergodiques - aux mesures ergodiques ; si de plus $\hat{A}$ est polonais et si G opère continûment dans A, tout état quasi-invariant est covariant (cf. § B.2).

§ X.2. Etude des représentations et états quasi-invariants.

On notera $\underline{E}_{qi}$ l'ensemble des états quasi-invariants.

Proposition X.1. L'ensemble $\underline{E}_{qi}$ est convexe.

En effet si φ_1 , $\varphi_2 \in \underline{E}_{qi}$ et si k_1 , k_2 sont des nombres positifs de somme 1, $\pi_{k_1\varphi_1+k_2\varphi_2}$ est quasi-équivalente à $\pi_{\varphi_1} \oplus \pi_{\varphi_2}$ (voir § E.3), donc quasi-invariante.

La proposition suivante montre que dans les cas usuels il existe toujours suffisamment d'états quasi-invariants, alors qu'il n'existe pas toujours d'états invariants.

Proposition X.2 (Guichardet - Kastler [1]) Si G et A sont séparables et si G opère continûment dans A, pour tout élément positif non nul a de A il existe $\varphi \in \underline{E}_{qi}$ tel que $\varphi(a) > 0$.

Soit ν une mesure positive normée sur G équivalente à la mesure de Haar ; soit $\psi \in \underline{E}$ tel que $\psi(a) > 0$; posons $\varphi(a') = \int \psi(g^{-1}a').d\nu(g)$ pour tout $a' \in A$; φ est un état et on a $\varphi(a) > 0$ puisque la fonction $g \longmapsto \psi(g^{-1}a)$ est continue et de plus strictement positive en e. Reste à voir que φ est quasi-invariant ; comme $\varphi = \int g\psi \,.\, d\nu(g)$, π_φ est quasi-équivalente à $\int^\oplus \pi_{g\psi} \,.\, d\nu(g)$ (cf. § E.3), elle-même égale à $\int^\oplus g.\pi_\psi \,.d\nu(g)$, elle-même équivalente à $\int^{\oplus} g.\pi_{\psi} .dg$; celle-ci est covariante puisque c'est la représentation de A qui figure dans la représentation de (A,G) induite par la représentation (π_{ψ}, I) du SD $(A, \{e\})$ (cf. § VIII.2).

<u>Proposition</u> X.3. Si G et A sont séparables et si G opère continûment dans A, toute représentation quasi-invariante est quasi-équivalente à une représentation covariante (on notera que la réciproque est toujours vraie).

En effet si π est quasi-invariante, elle est quasi-équivalente à $g.\pi$ pour tout g, donc à $\int^{\oplus} g\pi .dg$, laquelle est covariante d'après la fin de la démonstration de la proposition précédente.

CQFD

Le théorème suivant donne un procédé canonique pour désintégrer un état quasi-invariant en états quasi-invariants centralement ergodiques.

<u>Théorème</u> X.1 (Guichardet - Kastler [1]) Si G et A sont séparables et si G opère continûment dans A, la mesure Z^G - centrale d'un état quasi-invariant est portée par l'ensemble des états quasi-invariants centralement ergodiques.

<u>Démonstration</u>. Soient φ un état quasi-invariant, H, π , ξ les objets associés, $\underline{C}$ le centre de $\pi(A)''$, μ la mesure Z^G - centrale de φ , c'est-à-dire la mesure associée à $\underline{C}^G$ par la construction du § E.1 ; d'après le § E.3 on peut écrire

$$H = \int^{\oplus} H_{\psi} . d\mu(\psi)$$

$$\pi = \int^{\oplus} \pi_{\psi} . d\mu(\psi)$$

$$\pi(A)'' = \int^{\oplus} \pi_{\psi}(A)''.d\mu(\psi)$$

$\underline{C}^G$ = algèbre des opérateurs diagonalisables ;

d'après la proposition I.2 on peut faire opérer G dans chaque $\pi_{\psi}(A)''$ de façon que $g.\pi(a) = \int^{\oplus} g.\pi_{\psi}(a). d\mu(\psi) \quad \forall\, a \in A$; cela entraîne $g.\pi_{\psi}(a) = \pi_{\psi}(g.a)$ presque partout, donc π_{ψ} est quasi-invariante pour presque tout φ ; enfin elle est centralement ergodique d'après la prop.I.2.

Remarque X.1. La mesure centrale d'un état quasi-invariant n'est pas nécessairement quasi-invariante (cela résulte du fait que les mesures centrales de deux états quasi-équivalents ne sont pas nécessairement équivalentes, voir § E.5) ; les états dont la mesure centrale est quasi-invariante ont été étudiés dans Guichardet - Kastler [1] sous le nom d'états " Z - invariants " ; il y est démontré que les états Z - invariants sont quasi-invariants, et même covariants si A et G sont séparables et si G opère continûment.

§ X.3. Etude des représentations et états covariants.

Rappelons que, étant donnée une représentation π de A, on appelle état associé à π tout état de la forme $a \longmapsto (\pi(a)\xi \mid \xi)$ où $\xi \in H$; et que l'ensemble de ces états est fermé dans A^* pour la topologie forte (Kadison [1]).

Définition. Un état φ sur A sera dit G - continu si l'application $g \longmapsto g.\varphi$ est continue pour la topologie forte de A^*.

Proposition X.4. (Borchers [2])

(i) Pour qu'une représentation donnée π soit contenue dans une représentation covariante, il faut et il suffit que tout état associé à π soit G - continu.

(ii) Si G opère continûment dans A, tout état G - continu est associé à une représentation covariante.

Démonstration.

a) Tout état φ associé à une représentation covariante π est G - continu puisque, si g_i tend vers g, on a

$$
\begin{aligned}
|\varphi(g_i a) - \varphi(ga)| &= |(\pi(a)\, U_{g_i}^{-1}\xi \mid U_{g_i}^{-1}\xi) - (\pi(a)\, U_g^{-1}\xi \mid U_g^{-1}\xi)| \\
&\leq |(\pi(a)\, U_{g_i}^{-1}\xi \mid U_{g_i}^{-1}\xi - U_g^{-1}\xi)| + |(\pi(a)(U_{g_i}^{-1}\xi - U_g^{-1}\xi) \mid U_g^{-1}\xi)| \\
&\leq 2\,\|a\|\, \|U_{g_i}^{-1}\xi - U_g^{-1}\xi\|
\end{aligned}
$$

qui tend vers 0 uniformément pour $\|a\| \leq 1$.

b) On va démontrer en même temps la partie (ii) de l'énoncé et la suffisance de la partie (i) ; pour cette dernière on peut supposer que π est cyclique, donc de la forme π_φ ; pour démontrer les deux résultats indiqués, il suffit de démontrer ce qui suit : un état φ est associé à une représentation covariante si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

(C') tout état associé à π_φ est G - continu

(C") φ est G - continu et G opère continûment dans A.

Pour cela montrons d'abord qu'on peut définir une représentation ρ de A dans $L^2(G, H_\varphi)$ par la formule

$$(\rho(a)\,\xi)(g) = \pi_\varphi(g\,a).\,\xi(g) \qquad \forall\ a \in A\ ,\ \xi \in L^2(G, H_\varphi)\ .$$

On doit montrer que l'application $g \longmapsto \pi_\varphi(g.a).\,\xi(g)$ est mesurable ; c'est clair - et nous le savons déjà d'après le § VIII.2 - si G opère continûment. Démontrons-le sous la condition (C') ; puisque ξ est mesurable, on peut supposer ξ continue et G compact ; puis, en approchant ξ par des fonctions en escalier, on peut supposer ξ constante ; on est alors ramené à montrer que, pour tous η_1 et $\eta_2 \in H_\varphi$, l'application $g \longmapsto (\pi_\varphi(g.a)\,\eta_1 \mid \eta_2)$ est mesurable - et cela résulte de la condition (C').

c) Ceci étant, ρ est covariante puisque l'on peut définir une représentation unitaire continue U de G dans $L^2(G, H_\varphi)$ par $(U_{g_0}\xi)(g) = \xi(g\,g_0)$. Reste à voir que l'état φ est associé à ρ . Choisissons, pour tout voisinage V de e dans G, une fonction f_V sur G, continue, positive, à support inclus dans V et vérifiant $\int f_V(g)^2\, dg = 1$; notons η_V l'élément de $L^2(G, H_\varphi)$ défini par $\eta_V(g) = f_V(g).\xi_\varphi$; on a

$$(\rho(a)\eta_V \mid \eta_V) - \varphi(a) = \int f_V(g)^2.(\pi_\varphi(g.a)\xi_\varphi \mid \xi_\varphi).dg - \varphi(a)$$
$$= \int f_V(g)^2.(\varphi(g.a) - \varphi(a)).dg$$

et le deuxième membre tend vers 0 lorsque V tend vers e, uniformément pour $\|a\| \leq 1$, puisque φ est G - continu ; donc φ est limite forte d'états associés à ρ, donc est lui-même associé à ρ.

Chapitre XI | EXEMPLES

§ XI.1. Automorphismes intérieurs.

On considère ici une C^* - algèbre unifère A et on prend pour G le groupe des éléments unitaires de A opérant dans A par automorphismes intérieurs. Les états invariants, s'il en existe, sont exactement les états centraux (ou traces normées, cf. Dixmier [2], § 6.8), c'est-à-dire vérifiant $\varphi(a\ b) = \varphi(b\ a)$ $\forall$ a, b $\in$ A . Le système dynamique (A,G) est vaste, car on voit immédiatement que pour tout état invariant φ , le SD concret $\underline{F}_\varphi$ vérifie la condition (C 4), donc aussi (C 3).

Supposons maintenant A séparable ; comme le SD est simplicial, tout état invariant est barycentre d'une unique mesure positive normée portée par l'ensemble des états invariants extrémaux (ou caractères normés), ce qui redémontre une partie du théorème 8.8.2 de Dixmier [2].

§ XI.2. Produits tensoriels infinis et permutations.

Nous rappelons d'abord quelques définitions, renvoyant pour plus de détails à Guichardet [4]. Etant données deux C^* - algèbres unifères A_1 et A_2 , on définit canoniquement deux C^* - algèbres produits tensoriels $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$ et $A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2$ de la façon suivante : pour la première on réalise A_1 et A_2 dans des espaces hilbertiens H_1 et H_2 , et $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$ est la C^* - algèbre d'opérateurs dans $H_1 \otimes H_2$ engendrée par les opérateurs $a_1 \otimes a_2$ avec $a_i \in A_i$. Quant à la seconde, elle est caractérisée par la propriété universelle suivante : si à toute représentation π de $A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2$ dans un espace hilbertien H on associe les représentations π_1 et π_2 de A_1 et A_2 définies par

$$\pi_1(a) = \pi(a \otimes 1)$$
$$\pi_2(a) = \pi(1 \otimes a)$$

on obtient une correspondance bijective entre représentations de $A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2$ et couples de représentations (π_1, π_2) de A_1 et A_2 vérifiant

$$\pi_1(a_1) . \pi_2(a_2) = \pi_2(a_2) . \pi_1(a_1) \qquad \forall\ a_i \in A_i .$$

Dans la suite nous désignerons par $\otimes$ l'un ou l'autre des produits tensoriels $\overset{*}{\otimes}$, $\overset{\vee}{\otimes}$. On peut alors définir le produit tensoriel $\otimes A_n$ d'une suite de C^*-algèbres unifères $A_1, A_2, \ldots$ comme limite inductive des produits tensoriels finis $\bigotimes_{n=1}^{N} A_n$; $\otimes A_n$ est engendrée par les éléments de la forme $\otimes a_n$ où $a_n \in A_n$ et $a_n = 1$ pour presque tout n, i.e. sauf pour un nombre fini de n. Si on a pour tout n un état φ_n sur A_n, on peut former l'état $\otimes \varphi_n$ sur $\otimes A_n$, caractérisé par $(\otimes \varphi_n)(\otimes a_n) = \Pi\, \varphi_n(a_n)$.

Nous nous donnons maintenant une C^*- algèbre unifère A_o et nous posons $A = \otimes A_n$ où $A_n = A_o$; nous notons G le groupe des permutations de l'ensemble des entiers > 0 qui ne déplacent qu'un nombre fini d'éléments ; G opère de façon naturelle dans A : $g(\otimes a_n) = \otimes b_n$ où $b_n = a_{g^{-1}(n)}$.

<u>Lemme</u> XI.1. Pour tout entier $k > 0$ notons g_k l'élément de G qui échange 1 et k+1, 2 et k+2,..., k et 2k, et laisse les autres nombres inchangés.

(i) On a $\lim_{k=\infty} \| g_k a . b - b . g_k a \| = 0 \quad \forall\ a, b \in A$.

(ii) Soit φ un état G - invariant sur A, $\underline{F}_\varphi = (\underline{A}_\varphi, G, H_\varphi, U_\varphi)$ le système dynamique concret associé ; alors $\underline{F}_\varphi$ est fini, $\underline{A}_\varphi^G = \underline{C}_\varphi^G$, et si on note E^G l'espérance conditionnelle canonique de $\underline{A}_\varphi$ sur $\underline{A}_\varphi^G$, on a $E^G(\pi_\varphi(a)) = \text{lim.faible}_{k=\infty}\ \pi_\varphi(g_k a) \quad \forall\ a \in A$.

Démonstration.

(i) On peut supposer, par continuité, que a et b sont de la forme $\otimes a_n$ et $\otimes b_n$ avec $a_n = b_n = 1$ pour $n > n_o$; alors pour $k > n_o$ on a

$$g_k\, a = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \underset{\uparrow \text{ rang } k+1}{a_1} \otimes \ldots \otimes a_k \otimes 1 \otimes \ldots .$$

donc $g_k\, a.b - b.g_k\, a = 0$.

(ii) Soit $a \in A$; l'ensemble des $\pi_\varphi(g_k\, a)$ est borné, donc admet un point faiblement adhérent T ; on a $T \in \underline{C}_\varphi$ car soit $b \in A$; il existe une famille filtrante $(k_i)_{i \in I}$ telle que $\pi_\varphi(g_{k_i}\, a)$ tende faiblement vers T ; on a alors

$$T.\pi_\varphi(b) - \pi_\varphi(b).T = \lim \pi_\varphi(g_{k_i}\, a.b - b.g_{k_i}\, a)$$

et le deuxième membre est nul d'après la partie (i).

Ceci montre que $\overline{\text{co}\, G.\pi_\varphi(a)}$ rencontre $\underline{C}_\varphi$ pour tout $a \in A$; en vertu de la proposition V.3, $\underline{F}_\varphi$ est fini et vérifie (C 4), i.e. $\underline{A}^G_\varphi = \underline{C}^G_\varphi$. Reste à démontrer la dernière assertion ; pour cela on peut supposer a de la forme $\otimes a_n$ avec $a_n = 1$ pour $n > n_o$; il suffit de montrer que tout élément faiblement adhérent à l'ensemble des $\pi_\varphi(g_k\, a)$ est égal à $E^G\pi_\varphi(a)$. D'après le théorème II.4, $E^G\,\pi_\varphi(a)$ est l'unique élément de $\overline{\text{co}\, G.\,\pi_\varphi(a)} \wedge \underline{A}^G$; il nous suffit donc de montrer que T est G - invariant. Comme plus haut, T est limite faible d'une famille $\pi_\varphi(g_{k_i}\, a)$; soit h un élément de G , n_1 un entier tel que $h(n) = n \quad \forall\, n > n_1$; lorsque $k_i > \max(n_o, n_1)$ on a $h\, g_{k_i} a = g_{k_i} a$ donc

$$h\,T = \lim \pi_\varphi(h\, g_{k_i}\, a) = \lim \pi_\varphi(g_{k_i}\, a) = T .$$

Notation. Pour tout état φ_o sur A_o on notera $\otimes \varphi_o$ l'état $\otimes \varphi_n$ où $\varphi_n = \varphi_o$.

Proposition XI.1 (Størmer [11])

(i) Le système dynamique (A,G) est M - abélien.

(ii) Les états invariants extrémaux sont exactement les états de la forme $\otimes \varphi_0$ où φ_0 est un état sur A_0 ; ils sont faiblement mélangeants.

(iii) L'application $\varphi_0 \longmapsto \otimes \varphi_0$ est un homéomorphisme de $\underline{E}(A_0)$ sur l'ensemble S_e des états invariants extrémaux.

(iv) Tout état invariant est barycentre d'une unique mesure positive normée sur S_e .

Démonstration.

(i) On doit montrer que, pour tout état invariant φ , tout $\omega \in (\underline{A}_\varphi)_*$ et tous $a, b \in A$; la fonction $g \longmapsto \omega(\pi_\varphi(g\,a))$ est FPP et

$$m_g \, |\omega(\pi_\varphi(ga.b - b.ga))| = 0 .$$

La première assertion résulte de ce que $\underline{F}_\varphi$ est fini (lemme XI.1) ; la démonstration de la deuxième assertion est identique à celle du fait que $\underline{F}$ vérifie (C 6) à l'exemple 5 du § V.3.

(ii) Soit φ un état de la forme $\otimes \varphi_n$ où $\varphi_n = \varphi_0$; alors $H_\varphi = \otimes H_{\varphi_n}$ et la représentation U est celle considérée à l'exemple 5 du § V.3 ; nous savons (§ VI.1, exemple 2) qu'elle vérifie la condition (E 6) ; par suite φ est faiblement mélangeant. Réciproquement soit φ un état invariant extrémal ; $\underline{C}^G_\varphi$ est réduit aux scalaires, donc, en vertu du lemme XI.1, $\pi_\varphi(g_k\,a)$ tend faiblement vers $\varphi(a).1$ pour tout $a \in A$; il en résulte que

$$\varphi(g_k\,a.b) \longrightarrow \varphi(a).\varphi(b) \qquad \forall\ a,b \in A . \tag{1}$$

Notons φ_n l'état sur A_0 obtenu par restriction de φ au n-ième facteur A_0 ; comme φ est G - invariant, φ_n est indépendant de n , soit $\varphi_n = \varphi_0$. On doit maintenant démontrer que $\varphi = \otimes \varphi_0$, c'est-à-dire que $\varphi(a) = \prod \varphi_0(a_n)$ pour tout $a = \otimes a_n$ avec $a_n = 1$ pour $n > m$. On procède par récurrence sur m ; supposons l'assertion vraie à l'ordre m-1 et considérons un élément

$$a \;=\; a_1 \otimes \ldots\ldots \otimes a_m \otimes 1 \otimes \ldots\ldots \;;$$

pour $k > m$ on a, puisque φ est invariant

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \varphi\,(a_1 \otimes \ldots\ldots \otimes a_{m-1} \otimes 1 \otimes \ldots\ldots \otimes 1 \otimes \underset{\text{rang } k+1}{a_m} \otimes 1 \otimes \ldots\ldots) \\
&= \varphi((1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \underset{\text{rang } k+1}{a_m} \otimes 1 \otimes \ldots) \times (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m-1} \otimes 1 \otimes \ldots\ldots)) \\
&= \varphi\,(\, g_k\,(a_m \otimes 1 \otimes \ldots\,) \times (\, a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m-1} \otimes 1 \otimes \ldots\ldots)) \;;
\end{aligned}$$

faisant tendre k vers l'infini et utilisant (1) on voit que

$$\begin{aligned}
\varphi\,(a) &= \varphi(\, a_m \otimes 1 \otimes \ldots\,).\,\varphi(\, a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m-1} \otimes 1 \otimes \ldots\ldots) \\
&= \prod \varphi_o(a_n)\;.
\end{aligned}$$

(iii) L'application en question est trivialement injective et continue, surjective d'après (ii) ; comme $\underline{E}(A_o)$ est compact, c'est un homéomorphisme.

(iv) Résulte de ce que le SD est simplicial et S_e fermé (voir § IX.2).

CQFD

On peut généraliser ce qui précède de la façon suivante : donnons-nous en outre un groupe H_o opérant par automorphismes dans A_o ; notons H le groupe formé des suites (h_n) où $h_n \in H_o$ et $h_n = e$ pour presque tout n ; H opère naturellement dans A : $h\,a = \otimes\, h_n\, a_n$ si $h = (h_n) \in H$ et $a = \otimes\, a_n \in A$; de plus on a $g\,H\,g^{-1} = H \quad \forall\, g \in G$. Notons $H \times G$ le produit semi-direct, ensemble des couples (h,g) muni de la loi de composition

$$(h,g)\;(h',g') \;=\; (h.gh'g^{-1}\;,\; g\,g')\;;$$

il opère dans A par $(h,g).a \;=\; h\,g\,a$.

<u>Proposition</u> XI.2 (Hulanicki - Phelps [1]). Les états $H \times G$ - invariants extrémaux sur A sont exactement les états $\otimes\,\varphi_o$ où φ_o est un état H_o - invariant sur A_o .

La démonstration utilise deux lemmes.

Lemme XI.2. Soient G et H deux groupes opérant par automorphismes dans une C^*-algèbre A de façon que $g\,H\,g^{-1} = H \quad \forall\, g \in G$; il existe une unique manière de faire opérer G dans le produit croisé $C^*(A,H)$ de façon que l'on ait

$$(g\,F)(h) = g.\,F(g^{-1}\,h\,g) \qquad \forall\ F \in L^1(H;A)\ .$$

De plus il existe un unique isomorphisme de $C^*(A\ ,\ H \times G)$ sur $C^*(C^*(A,H),G)$ transformant tout $F \in L^1(H \times G\ ,\ A)$ en l'application $g \longmapsto F_g$ où $F_g(h) = F(h,g)$.

La démonstration est une simple vérification laissée au lecteur.

Lemme XI.3. Soit (A_n) une suite de C^*- algèbres unifères ; pour tout n soit G_n un groupe opérant dans A_n ; notons G le produit restreint des G_n, ensemble des suites (g_n) où $g_n \in G_n$ et $g_n = e$ pour presque tout n. Alors G opère naturellement dans $A = \check{\otimes}\, A_n$, et il existe un unique isomorphisme de l'algèbre $\check{\otimes}\, C^*(A_n,G_n)$ sur $C^*(A,G)$ transformant tout élément $\otimes\, F_n$ (où F_n appartient à $L^1(G_n,A_n)$ et $F_n = 1$ pour presque tout n) en l'application $g = (g_n) \longmapsto \otimes\, F_n(g_n)$.

La démonstration - qui est un argument standard de type catégoriel - est exposée dans Guichardet [4].

Démonstration de la proposition.

a) Utilisant le fait que $\overset{*}{\otimes}\, A_n$ est un quotient de $\check{\otimes}\, A_n$, on voit facilement qu'il suffit de traiter le cas de $\check{\otimes}\, A_n$, que nous notons toujours $\otimes\, A_n$.
D'autre part il est clair qu'un état de la forme indiquée est $H \times G$ - invariant, et il est $H \times G$ - extrémal puisqu'il est G - extrémal (prop. XI.1).

b) Soit φ un état $H \times G$ - invariant extrémal sur A ; notons

- φ_o sa restriction à A_o, état H_o - invariant sur A_o ;
- $\bar{\varphi}$ l'état pur sur $C^*(A, H \times G)$ caractérisé par

$$\bar{\varphi}(F) = \sum_{h,g} \varphi(F(h,g)) \qquad \forall\ F \in L^1(H \times G, A)$$

(cf. §§ IX.1 et IX.3) ;
- ψ l'état pur sur $C^*(C^*(A,H),G)$ correspondant à $\bar{\varphi}$ par l'isomorphisme du lemme XI.2 ; on a donc

$$\psi(F) = \sum_{h,g} \varphi(F(g)(h)) \qquad \forall\ F \in L^1(G, L^1(H,A)) \ ;$$

- θ l'état sur $C^*(A,H)$ caractérisé par

$$\theta(f) = \sum_h \varphi(f(h)) \qquad \forall\ f \in L^1(H,A) \ . \tag{2}$$

L'état θ est G - invariant et on a

$$\psi(F) = \sum_g \theta(F(g)) \qquad \forall\ F \in L^1(G, L^1(H,A)) \ ;$$

comme ψ est pur, θ est G - invariant extrémal. Grâce au lemme XI.3, on peut considérer θ comme un état sur $\otimes C^*(A_n,H_n)$ G - invariant extrémal ; d'après la proposition XI.1 il existe un état θ_o sur $C^*(A_o,H_o)$ tel que

$$\theta(\otimes f_n) = \prod_n \theta_o(f_n) \tag{3}$$

pour $f_n \in C^*(A_o,H_o)$ et $f_n = 1$ pour presque tout n. A l'élément $\otimes f_n$ de $\otimes C^*(A_n,H_n)$ correspond l'élément f de $C^*(A,H)$ défini par

$$f(h) = \otimes f_n(h_n) \qquad \forall\ h = (h_n) \in H \ ;$$

(2) et (3) entraînent

$$\prod_n \theta_o(f_n) = \sum_h \varphi(\otimes f_n(h_n)) \ . \tag{4}$$

Prenons $f_n = 1$ pour tout $n \geqslant 2$; on obtient

$$\theta_o(f_1) = \sum_{h_1 \in H_o} \varphi(f_1(h_1) \otimes 1 \otimes \dots)$$
$$= \sum_{h_1 \in H_o} \varphi_o(f_1(h_1))$$

pour toute $f_1 \in L^1(H_o, A_o)$; (4) entraîne alors

$$\prod_n \sum_{h_n \in H_o} \varphi_o(f_n(h_n)) = \sum_h \varphi(\otimes f_n(h_n)) .$$

Prenons maintenant

$$f_n(h_n) = \begin{cases} a_n & \text{si } h_n = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les a_n sont des éléments de A_o égaux à 1 pour presque tout n ; on obtient

$$\prod_n \varphi_o(a_n) = \varphi(\otimes a_n)$$

i.e. $\varphi = \otimes \varphi_o$.

Corollaire XI.1. Les états centraux G - invariants de A, extrémaux dans l'ensemble des états centraux G - invariants, sont exactement les états de la forme $\otimes \varphi_o$ où φ_o est un état central de A_o .

§ XI.3. Algèbre des relations d'anticommutation.

a) Quelques rappels sur la C^* - algèbre des relations d'anticommutation.

(On pourra consulter par exemple Guichardet [7])

On se donne un espace hilbertien complexe séparable E et on construit une C^* - algèbre unifère A, appelée algèbre de Clifford de E, et une application $\mathbb{R}$ - linéaire W de E dans l'ensemble A_h des éléments hermitiens de A, possédant les propriétés suivantes :

(i) $W(x)\, W(y) + W(y)\, W(x) \;=\; 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y).I \qquad \forall\ x,y \in E$

ce qui entraîne immédiatement $W(x)^2 \;=\; \| x \|^2.I$ et

$$\| W(x)\, W(y) \| \;=\; \| x \| . \| y \| \quad . \tag{1}$$

(ii) Pour toute C^* - algèbre unifère B et toute application $\mathbb{R}$ - linéaire V de E dans B_h vérifiant la condition analogue à (i), il existe un unique morphisme π de A dans B tel que $V \;=\; \pi \circ W$.

(iii) Les éléments de la forme $W(x_1) \ldots .\ W(x_n)$ sont totaux dans A .

(iv) Si on note A_p (resp. A_i) le sous-espace vectoriel fermé de A engendré par les éléments $W(x_1) \ldots W(x_n)$ avec n pair (resp. impair), on a $A \;=\; A_p \oplus A_i$ et A_p est une sous - C^* - algèbre de A.

(v) Considérons deux éléments $a \;=\; W(x_1) \ldots W(x_n)$ et $b \;=\; W(y_1) \ldots W(y_m)$; alors $a\, b - (-1)^{mn}\, b\, a$ est une somme de termes de la forme

$$\pm\ 2\,\mathrm{Re}\,(x_i \mid y_j)\ .\ R_{i,j}$$

où $i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots m$, et où $R_{i,j}$ est le produit dans un certain ordre des éléments $W(x_1), \ldots W(x_n), W(y_1), \ldots W(y_m)$ exceptés $W(x_i)$ et $W(y_j)$; il en résulte que

$$\| a\, b - (-1)^{mn}\, b\, a \| \leq 2 \sum_{i,j} |(x_i | y_j)| \,.\, k_{ij} \qquad (2)$$

où k_{ij} ne dépend que des normes des x_i et y_j .

(vi) Pour tout opérateur unitaire u dans E il existe un unique automorphisme α_u de A tel que $\alpha_u(W(x)) = W(u(x)) \quad \forall\, x \in E$.

b) Propriétés générales de A .

Soit $e_1, e_2, \ldots$ une base orthonormale de E ; notons J l'opérateur de multiplication par i dans E ; on démontre (voir par exemple Guichardet [7]) qu'il existe un isomorphisme de A sur $\otimes A_n$, où $A_n = M(2, \mathbb{C})$, transformant $W(e_n)$ en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rang } n} \otimes I \otimes \ldots$$

et $W(J\, e_n)$ en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rang } n} \otimes I \otimes \ldots$$

Dans la suite nous identifierons A à $\otimes A_n$. A admet un unique état central $\chi = \otimes \chi_n$ où χ_n est la trace normalisée sur $M(2, \mathbb{C})$; étant unique, il est invariant par tout automorphisme de A ; de plus il est fidèle car A est simple.

Pour tout $\lambda \in [0,1]$ on construit un état φ_λ de A de la façon suivante : notons D l'automorphisme de A associé à l'opérateur unitaire $-I$ dans E ; pour tout $x \in E$ notons $V(x)$ l'opérateur linéaire dans A défini par

$$V(x)(a) = 2^{-\frac{1}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{2}}).W(x).a + i\, 2^{-\frac{1}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} - (1-\lambda)^{\frac{1}{2}}).Da.W(Jx) \ ;$$

on voit facilement que $V(x)$ est hermitien pour le produit scalaire défini par χ , et que

$$V(x)\, V(y) + V(y)\, V(x) = 2\, \mathrm{Re}\, (x | y).I \ ; \qquad (3)$$

par suite $V(x)$ se prolonge en un opérateur hermitien continu dans H_χ qui vérifie encore (3) ; d'après la propriété (ii) de a), il existe une unique représentation π_λ de A dans H_χ telle que $\pi_\lambda(W(x)) = V(x) \quad \forall\, x \in E$; on définit alors φ_λ par $\varphi_\lambda(a) = (\pi_\lambda(a)\, 1 \mid 1)$ où 1 est l'élément unité de A .

D'autre part on vérifie facilement que si u est un opérateur unitaire dans E on a $V(u(x)) = \alpha_u . V(x). \alpha_u^{-1} \quad \forall\, x \in E$; il en résulte que φ_λ est invariant par tous les α_u . On démontre d'ailleurs que les états invariants par tous ces automorphismes sont exactement les états de la forme $\int \varphi_\lambda\, d\mu(\lambda)$ où μ est une mesure positive normée sur $[0,1]$ (Shale - Stinespring [1]).

Par ailleurs on peut vérifier que φ_λ , considéré comme un état sur $\otimes A_n$, est égal à $\otimes\, \varphi_{\lambda,n}$ où

$$\varphi_{\lambda,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda\, a + (1-\lambda)\, d \quad ;$$

ceci montre en particulier que φ_1 est un état pur ; la représentation associée, dite <u>représentation de Fock</u>, est communément réalisée dans l'espace hilbertien antisymétrique de E .

c) <u>Etude d'un cas particulier</u>.

On prend maintenant $E = L^2(G)$ où G est un groupe localement compact non compact, et on fait opérer G dans E par translations à gauche ; on note g.x l'action de $g \in G$ sur $x \in E$ et g.a l'action de g sur $a \in A$; on a donc $g(W(x)) = W(g.x)$; on obtient ainsi des systèmes dynamiques (A,G) et (A_p,G).

<u>Proposition</u> XI.3 (Doplicher-Kadison-Kastler-Robinson [1]) Le système dynamique (A_p,G) est asymptotiquement abélien ; le système (A,G) est faiblement asymptotiquement abélien mais non asymptotiquement abélien ; enfin tout état invariant sur A est nul sur A_i .

Démonstration.

1) Reprenons les éléments a et b de la propriété (v) du § a) ; la formule (2) entraîne

$$\| ga.b - (-1)^{mn}\, b.ga \| \leq 2 \sum_{ij} |(gx_i \mid y_j)| \,.\, k_{ij}$$

d'où résulte que

$$\lim_{g=\infty} \| ga.b - (-1)^{mn}\, b.ga \| = 0 \;;$$

par continuité on a

$$\lim_{g=\infty} \| ga.b - b.ga \| = 0 \qquad \forall\; a \in A_p \,,\; b \in A \tag{4}$$

$$\lim_{g=\infty} \| ga.b + b.ga \| = 0 \qquad \forall\; a,b \in A_i \;; \tag{5}$$

la première de ces deux relations montre que le SD (A_p,G) est asymptotiquement abélien.

2) Montrons maintenant que

$$\lim_{g=\infty} \varphi(g\,a) = 0 \qquad \forall \varphi \in A^* ,\; a \in A_i \,. \tag{6}$$

On peut supposer a hermitien et $\varphi \in \underline{E}(A)$; il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence faible des vecteurs $\pi_\varphi(g\,a).\xi_\varphi$ est nulle ; soit donc η une telle valeur, limite faible d'une famille filtrante $\pi_\varphi(g_i\,a).\xi_\varphi$; on a

$$\begin{aligned}(\eta \mid \eta) &= \lim_i \;(\pi_\varphi(g_i\,a).\xi_\varphi \mid \lim_j \pi_\varphi(g_j\,a).\xi_\varphi)\\ &= \lim_i \lim_j \;(\pi_\varphi(g_j\,a.g_i\,a)\,\xi_\varphi \mid \xi_\varphi)\end{aligned}$$

puis, en vertu de (5),

$$\begin{aligned}(\eta \mid \eta) &= -\lim_i \lim_j (\pi_\varphi(g_i\,a.\,g_j\,a).\xi_\varphi \mid \xi_\varphi)\\ &= -\lim_i (\lim_j \pi_\varphi(g_j\,a).\xi_\varphi \mid \pi_\varphi(g_i\,a).\xi_\varphi)\\ &= -(\eta \mid \eta)\end{aligned}$$

d'où $\eta = 0$.

3) La dernière assertion de l'énoncé résulte immédiatement de (6).

4) Montrons que le SD (A,G) est faiblement asymptotiquement abélien, i.e. que

$$\lim_{g=\infty} \varphi(ga.b - b.ga) = 0 \qquad \forall \varphi \in A^*,\ a,b \in A .$$

On peut supposer que a appartient à A_p ou A_i ; si $a \in A_p$, l'assertion résulte de (4) ; si $a \in A_i$, elle résulte de (6) puisque les fonctions $a \longmapsto \varphi(a\ b)$ et $a \longmapsto \varphi(b\ a)$ sont des éléments de A^*.

5) Montrons enfin que le SD (A,G) n'est pas asymptotiquement abélien. Supposons qu'il le soit ; on aura d'après (5),

$$\lim_{g=\infty} \| ga.b \| = 0 \qquad \forall\ a,b \in A_i$$

et en particulier

$$\lim_{g=\infty} \| W(g\,x).\,W(y) \| = 0 \qquad \forall\ x,y \in E$$

ce qui est incompatible avec (1).

§ XI.4. Algèbre d'observables quasi-locales de la Mécanique Statistique.

Nous ne traitons que le cas des bosons, renvoyant à Ruelle [3], § 7.1.6 pour le cas des fermions, techniquement beaucoup plus difficile à exposer.

Posons $E = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ et définissons $\underline{A}$ et W comme au début de l'exemple 7 du § V.3 ; notons φ l'état normal sur $\underline{A}$ caractérisé par

$$\varphi(W(f)) = \exp(-\|f\|^2/2) \qquad \forall f \in E ;$$

on démontre que φ est pur et que H_φ s'identifie de façon naturelle à l'espace hilbertien symétrique de E (voir par exemple Guichardet [7]) ; la représentation irréductible π_φ est appelée représentation de Fock. Faisons opérer $\mathbb{R}^\nu$ dans E par translations ; il opère aussi dans $\underline{A}$ par des automorphismes α_x, $x \in \mathbb{R}^\nu$; φ est visiblement invariant par ces automorphismes, d'où une représentation U de $\mathbb{R}^\nu$ dans H_φ vérifiant

$$\pi_\varphi(\alpha_x(a)) = U_x . \pi_\varphi(a) . U_x^{-1} \qquad \forall a \in \underline{A}, x \in \mathbb{R}^\nu .$$

Pour tout ouvert borné Λ de $\mathbb{R}^\nu$ notons A_Λ l'algèbre de von Neumann (qui est en fait un facteur de type I) dans H_φ engendrée par les opérateurs $\pi_\varphi(W(f))$ où f appartient à E et est nulle en dehors de Λ ; on appelle algèbre des observables quasi-locales la C*- algèbre A engendrée par les A_Λ ; elle possède les propriétés suivantes :

(i) Chaque opérateur U_x conserve globalement A ; si on note τ_x l'automorphisme correspondant de A, on a $\tau_x(A_\Lambda) = A_{\Lambda+x}$ pour tout Λ et tout x.

(ii) Si Λ_1 et Λ_2 sont disjoints, A_{Λ_1} et A_{Λ_2} commutent ; en effet si f_i est nulle en dehors de Λ_i, on a $(f_1 | f_2) = 0$ d'où

$$W(f_1).W(f_2) = W(f_1 + f_2) = W(f_2).W(f_1) .$$

(iii) Le SD $(A, \mathbb{R}^\nu)$ est asymptotiquement abélien ; pour le voir on doit montrer que $\lim\limits_{x=\infty} \|\tau_x a.b - b.\tau_x a\| = 0 \quad \forall a,b \in A$; on peut supposer que a et b appartiennent à une même algèbre A_Λ, et alors l'assertion est triviale.

Appendice A | W^* - ALGÈBRES

§ A.1. Généralités.

Pour plus de détails on renvoie à Dixmier [1] et Sakaï [1].

Reppelons qu'on peut donner des W^* - algèbres la définition abstraite suivante : une W^* - algèbre est une C^* - algèbre à unité $\underline{A}$ possédant les deux propriétés qui suivent :

- toute famille filtrante majorée d'éléments positifs de $\underline{A}$ admet une borne supérieure
- pour tout élément positif non nul a de $\underline{A}$ il existe une forme linéaire positive normale φ sur $\underline{A}$ vérifiant $\varphi(a) > 0$; l'adjectif <u>normal</u> signifie qu'on a $\varphi(\sup a_i) = \sup \varphi(a_i)$ pour toute famille filtrante majorée d'éléments positifs a_i.

On note $\underline{A}^+$ l'ensemble des éléments positifs de $\underline{A}$.

Nous appellerons <u>algèbre de von Neumann</u> toute algèbre d'opérateurs dans un espace hilbertien, autoadjointe et égale à son bicommutant ; on sait que toute W^*- algèbre est isomorphe à une algèbre de von Neumann.

On appelle topologie <u>ultra-faible</u> (en abrégé u.f.) sur une W^*- algèbre $\underline{A}$ la topologie définie par les formes linéaires positives normales ; l'ensemble $\underline{A}_*$ des formes linéaires u.f. continues est un sous-espace de Banach du dual topologique $\underline{A}^*$ (dual de $\underline{A}$ munie de la topologie normique) ; on l'appelle <u>prédual</u> de $\underline{A}$; $\underline{A}$ s'identifie avec sa norme au dual de $\underline{A}_*$ et la topologie u.f. - à la topologie faible de dual. L'ensemble des formes linéaires positives normales n'est autre que la partie positive de $\underline{A}_*$, notée $\underline{A}_*^+$; on notera $\underline{E}$ ou $\underline{E}(\underline{A})$ l'ensemble des états normaux sur $\underline{A}$. $\underline{A}$ peut être réalisée dans un espace hilbertien séparable si et seulement si $\underline{A}_*$ est séparable pour la topologie normique.

Une W^*- algèbre est dite de genre dénombrable si toute famille de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\underline{A}$ est dénombrable.

Si e est un projecteur (nous sous-entendons toujours " hermitien ") de $\underline{A}$, $e\underline{A}e$ est une sous - W^* - algèbre que nous appellerons induite [1]. Un facteur est une W^* - algèbre dont le centre est réduit aux scalaires ; exemple : l'algèbre $\underline{L}(H)$ de tous les opérateurs linéaires continus dans un espace hilbertien H . On dit qu'un état φ est dominé par un état ψ s'il existe un réel positif k tel que $\varphi \leq k\,\psi$, i.e. $\varphi(a) \leq k\,\psi(a) \quad \forall\, a \in \underline{A}^+$. Un morphisme f d'une W^* - algèbre dans une autre est u.f. continu si et seulement s'il est normal, i.e. si $f(\sup a_i) = \sup f(a_i)$ pour toute famille filtrante majorée (a_i) .

Les W^* - algèbres commutatives sont exactement les algèbres $L^\infty(X,C)$ où (X,C) est un espace quasi-mesuré (voir § B.1) ; il est clair que $L^\infty(X,C)$ est de genre dénombrable si et seulement si (X,C) a la même propriété. Pour toute mesure $\mu \in C$, la dualité naturelle entre $L^1(X,\mu)$ et $L^\infty(X,C)$ permet d'identifier $L^1(X,\mu)$ au prédual de $L^\infty(X,C)$.

---

1 et qui est appelée " réduite " dans Dixmier [1].

§ A.2. Poids.

(Pour plus de détails on pourra consulter Combes [1] ou Pedersen - Takesaki [1])

On appelle poids sur une W^*- algèbre $\underline{A}$ toute application φ de $\underline{A}^+$ dans $[0, +\infty]$, additive et vérifiant $\varphi(k\,a) = k\,\varphi(a)$ pour k réel > 0.

A tout poids φ on associe les objets suivants :

$\mathcal{N}_\varphi = \{ a \in \underline{A} \mid \varphi(a^* a) < +\infty \}$, idéal à gauche de $\underline{A}$

$\mathcal{M}_\varphi^+ = \{ a \in \underline{A}^+ \mid \varphi(a) < +\infty \}$, cône convexe

$\mathcal{M}_\varphi =$ sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{M}_\varphi^+$, sous-algèbre autoadjointe de $\underline{A}$

$N_\varphi = \{ a \in \underline{A} \mid \varphi(a^* a) = 0 \}$, idéal à gauche de $\underline{A}$.

On a entre ces objets les relations suivantes :

$$\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi^* . \mathcal{N}_\varphi$$

$$\mathcal{M}_\varphi^+ = \mathcal{M}_\varphi \cap \underline{A}^+$$

$$a\,,\,c \in \mathcal{M}_\varphi\,,\, b \in \underline{A} \Longrightarrow a\,b\,c \in \mathcal{M}_\varphi\ ;$$

la restriction de φ à $\mathcal{M}_\varphi^+$ se prolonge en une forme linéaire positive sur $\mathcal{M}_\varphi$ qu'on désigne par φ.

On dit que φ est

- fidèle si $a \in \underline{A}^+$, $\varphi(a) = 0$ impliquent $a = 0$
- normal s'il existe une famille de formes linéaires positives normales φ_i vérifiant $\varphi(a) = \sup \varphi_i(a)$ $\forall\, a \in \underline{A}^+$ [1] ; φ est alors semi-continu inférieurement pour la topologie ultra-faible ;
- semi-fini si $\mathcal{M}_\varphi$ est u.f. dense dans $\underline{A}$; cela équivaut à dire que l'élément I est limite u.f. d'éléments de $\mathcal{M}_\varphi^+$;

---

[1] ou encore si $\varphi(\sup a_i) = \sup \varphi(a_i)$ pour toute famille filtrante majorée (a_i) (cf. Haagerup [2])

- <u>central</u> (on dit aussi que φ est une <u>trace</u>) si $\varphi(a^* a) = \varphi(a a^*)$ $\forall$ $a \in \underline{A}$; alors $\mathfrak{m}_\varphi$ et $\mathfrak{n}_\varphi$ sont des idéaux bilatères et $\dot{\varphi}$ est centrale, i.e. $\dot{\varphi}(a b) = \dot{\varphi}(b a)$ $\forall$ $a,b \in \mathfrak{m}_\varphi$.

Les poids normaux finis sont exactement les formes linéaires positives normales. Nous considèrerons presque uniquement des poids normaux semi-finis (en abrégé poids n.s.f.), souvent fidèles (poids n.s.f.f.) ; nous noterons $\underline{P}(\underline{A})$ (resp. $\underline{P}_f(\underline{A})$) l'ensemble des poids n.s.f. (resp. n.s.f.f.).
Tout poids n.s.f. admet un <u>support</u>, noté supp φ , égal à $I-p$ où p est le plus grand projecteur de $\underline{A}$ vérifiant $\varphi(p) = 0$; posant $e = \text{supp}\ \varphi$, on a $\varphi(e a e) = \varphi(a)$ pour tout $a \in \underline{A}^+$, et $\varphi \mid e \underline{A} e$ est un poids n.s.f.f. Soit q un projecteur de $\underline{A}$ et ψ un poids n.s.f. sur $q \underline{A} q$; la fonction sur $\underline{A}^+$: $\varphi(a) = \psi(q a q)$ est un poids n.s.f. de même support que ψ . Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille de poids n.s.f. de supports e_i deux à deux orthogonaux ; la fonction $\sum \varphi_i$ sur $\underline{A}^+$ est un poids n.s.f. de support $\sum e_i$.

Si $\underline{A}$ est commutative, soit $\underline{A} = L^\infty(X,C)$, les poids n.s.f. sur $\underline{A}$ correspondent bijectivement aux mesures sur X dont la classe est majorée par C ; les poids n.s.f.f. - aux mesures de classe C .

§ A.3. Classification des W^* - algèbres. Comparaison des projecteurs.

(Nous rappelons ici sous forme condensée des notions et résultats qui se trouvent dans Dixmier [1] ; leur lecture peut aider le lecteur non spécialiste à s'orienter, mais ne prétend pas remplacer celle du livre de Dixmier.)

On dit qu'une W^* - algèbre est

- semi-finie si pour tout élément non nul a de $\underline{A}^+$ il existe une trace n.s.f. φ vérifiant $\varphi(a) > 0$; cela équivaut à dire qu'il existe une trace n.s.f.f.;
- finie si pour tout élément non nul a de $\underline{A}^+$ il existe une trace normale finie φ vérifiant $\varphi(a) > 0$; si $\underline{A}$ est de genre dénombrable cela équivaut à dire qu'il existe une trace normale finie fidèle ;
- infinie si elle n'est pas finie ;
- proprement infinie si elle n'admet aucune trace n. f. non nulle ;
- purement infinie si elle n'admet aucune trace n.s.f. non nulle.

Deux projecteurs e et f d'une W^* - algèbre $\underline{A}$ sont dits équivalents ($e \sim f$) s'il existe un élément u (isométrie partielle) de $\underline{A}$ vérifiant $u^* u = e$ et $u u^* = f$. On écrit $e_1 \prec e_2$ si e_1 est équivalent à un projecteur majoré par e_2. Un projecteur e est dit fini si les relations $e' \sim e$, $e' \leq e$ impliquent $e' = e$; cela équivaut à dire que la W^* - algèbre $e \underline{A} e$ est finie ; en particulier $\underline{A}$ est finie si et seulement si le projecteur I est fini. Un projecteur e est dit semi-fini si tout projecteur non nul majoré par e majore un projecteur fini non nul ; cela équivaut à dire que $e \underline{A} e$ est semi-finie ; en particulier $\underline{A}$ est semi-finie si et seulement si I est semi-fini.

Un projecteur e de $\underline{A}$ est dit abélien si $e \underline{A} e$ est commutative, ou encore si on a $e \underline{A} e = \underline{C} e$ où $\underline{C}$ est le centre de $\underline{A}$; $\underline{A}$ est dite discrète si tout projecteur non nul majore un projecteur abélien non nul ; continue si elle n'admet aucun projecteur abélien non nul. Toute W^*- algèbre commutative est discrète ; toute W^*- algèbre discrète est semi-finie ; les facteurs discrets sont exactement les facteurs $\underline{L}(H)$. Une W^*- algèbre $\underline{A}$ est dite _homogène_ si le projecteur I est somme de projecteurs abéliens, deux à deux orthogonaux et deux à deux équivalents ; le cardinal n de la famille est alors bien déterminé, et $\underline{A}$ est dite _homogène de type_ I_n . Toute W^*- algèbre discrète est un produit d'algèbres homogènes des divers types ; toute algèbre homogène de type I_n est produit tensoriel d'une algèbre commutative par $\underline{L}(H_n)$ où H_n est l'espace hilbertien de dimension n .

§ A.4. Automorphismes modulaires associés à un poids.

(Voir aussi Takesaki [2] ou Pedersen - Takesaki [1])

Nous rappelons d'abord la construction de Gelfand - Segal. Soit φ un poids n.s.f. sur une W^* - algèbre $\underline{A}$; on définit un produit scalaire sur $\mathcal{N}_\varphi$ par $(a \mid b) = \varphi(b^* a) \quad \forall\, a,b \in \mathcal{N}_\varphi$, ce qui a bien un sens puisque $b^* a$ appartient à $\mathcal{N}_\varphi^* \mathcal{N}_\varphi = \mathcal{M}_\varphi$; soit H_φ l'espace hilbertien séparé-complété de $\mathcal{N}_\varphi$, Λ_φ l'application canonique de $\mathcal{N}_\varphi$ dans H_φ . On définit une représentation normale π_φ de $\underline{A}$ dans H par

$$\pi_\varphi(a).\ \Lambda_\varphi(b) = \Lambda_\varphi(a\,b) \qquad \forall\ a \in \underline{A}\ ,\ b \in \mathcal{N}_\varphi \ ;$$

si φ est fidèle, π_φ l'est aussi.

On suppose maintenant φ fidèle[1]; $\mathcal{N}_\varphi$ se trouve plongé dans H_φ ; l'opérateur $a \longmapsto a^*$ de $\mathcal{N}_\varphi^* \cap \mathcal{N}_\varphi$ dans lui-même, considéré comme opérateur non borné dans H_φ , admet une fermeture S ; soit $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de S , où Δ est un opérateur autoadjoint positif inversible ; pour tout réel t l'opérateur unitaire Δ^{it} laisse $\underline{A}$ invariante, et $\Delta^{it} \mid \underline{A}$ est un automorphisme qu'on note σ_t ou σ_t^φ ; l'application $t \longmapsto \sigma_t$ est un groupe u.f. continu[2] à un paramètre d'automorphismes de $\underline{A}$, appelé groupe d'automorphismes modulaires associés à φ . Ces automorphismes conservent φ et induisent l'identité sur le centre $\underline{C}$ de $\underline{A}$. On note $\underline{A}_\varphi$ l'ensemble des éléments de $\underline{A}$ invariants par tous les σ_t^φ .

Pour tout a et tout $b \in \mathcal{N}_\varphi^* \cap \mathcal{N}_\varphi$ il existe une fonction F d'une variable complexe, définie, continue et bornée sur la bande $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, holomorphe à l'intérieur, vérifiant pour tout réel t les conditions dites K.M.S. :

$$\begin{aligned} F(t) &= \varphi(\sigma_t(a).\ b) \\ F(t+i) &= \varphi(b\ .\ \sigma_t(a)) \ ; \end{aligned}$$

1 et on identifie $\underline{A}$ à $\pi_\varphi(\underline{A})$

2 voir § A.7.

l'existence d'une telle fonction caractérise les σ_t. Les σ_t sont triviaux si et seulement si φ est central.

Considérons un automorphisme α de $\underline{A}$ et définissons un poids n.s.f.f. $\alpha\varphi = \varphi \circ \alpha^{-1}$; alors $\sigma_t^{\alpha\varphi} = \alpha \cdot \sigma_t^{\varphi} \cdot \alpha^{-1}$; en particulier si α conserve φ, il permute aux σ_t, donc conserve globalement $\underline{A}_{\varphi}$.

Supposons $\underline{A}$ semi-finie et considérons une trace n.s.f.f. τ sur $\underline{A}$; les poids n.s.f. sont exactement les fonctions de la forme $\varphi = \tau\,(h\ .\ )$ où h est un élément autoadjoint positif (non nécessairement borné) affilié à $\underline{A}$, appelé <u>densité</u> de φ par rapport à τ ; $\tau\,(h\ .\ )$ est fidèle si et seulement si h est inversible ; dans ce cas σ_t^{φ} est l'automorphisme intérieur défini par h^{it}.

Réciproquement supposons qu'il existe un poids n.s.f.f. φ et un élément positif inversible h affilié à $\underline{A}$ tel que σ_t^{φ} soit l'automorphisme intérieur défini par h^{it} ; alors $\underline{A}$ est semi-finie et $\varphi\,(h^{-1}\ .\ )$ est une trace n.s.f.f.

Soit $\underline{B}$ une sous - W^* - algèbre de $\underline{A}$, φ un poids n.s.f.f. sur $\underline{A}$ tel que $\varphi \mid \underline{B}$ soit semi-fini et que les σ_t^{φ} conservent globalement $\underline{B}$; alors on a

$$\sigma_t^{\varphi \mid \underline{B}} = \sigma_t^{\varphi} \mid \underline{B} .$$

L'opérateur J de la formule $S = J\,\Delta^{\frac{1}{2}}$ a aussi des propriétés intéressantes ; d'abord il est antiunitaire, i.e. $J\,(k\,x) = \bar{k}\,Jx$, $(Jx \mid Jy) = \overline{(x \mid y)}$; l'application $a \longmapsto J\,a\,J$ est un isomorphisme antilinéaire de $\underline{A}$ sur son commutant ; s'il existe un vecteur $x \in H$, totalisateur et séparateur pour $\underline{A}$, tel que $\varphi(a) = (a\,x \mid x)$ $\forall\ a \in \underline{A}$, x est invariant par Δ et J .

§ A.5. Densités.

(Voir Connes [1] et Pedersen - Takesaki [1])

Soit φ un poids n.s.f.f. sur une W^*- algèbre $\underline{A}$; à tout autre poids n.s.f.f. ψ on peut associer canoniquement une famille $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $t \longmapsto u_t$ est une application u.f. continue de $\mathbb{R}$ dans $\underline{U}(\underline{A})$ (ensemble des éléments unitaires de $\underline{A}$) vérifiant $u_{s+t} = u_s \,.\, \sigma_s^{\varphi}(u_t)$; autrement dit cette application est un 1-cocycle continu pour l'action de dans $\underline{U}(\underline{A})$ définie par les σ_t^{φ} ;

(ii) $\sigma_t^{\psi} \circ \sigma_{-t}^{\varphi}$ est l'automorphisme intérieur défini par u_t ;

(iii) l'application $\psi \longmapsto (u_t)$ est une bijection de $\underline{P}_f(\underline{A})$ sur l'ensemble des 1-cocycles continus ;

(iv) la bijection du (iii) définit par restriction une bijection de l'ensemble des poids n.s.f.f. σ_t^{φ}- invariants sur l'ensemble des éléments positifs inversibles h affiliés à $\underline{A}_{\varphi}$; on a alors $u_t = h^{it}$, $\psi = \varphi(h\,.\,)$, $\sigma_t^{\psi}(a) = h^{it}.\ \sigma_t^{\varphi}(a).\ h^{-it}$ $\forall\, a \in \underline{A}$; en particulier h appartient au centre de $\underline{A}$ si et seulement si $\sigma_t^{\psi} = \sigma_t^{\varphi}$;

(v) si φ est une trace, ce qui précède donne une bijection de $\underline{P}_f(\underline{A})$ sur l'ensemble des éléments positifs inversibles affiliés à $\underline{A}$;

(vi) soit α un automorphisme de $\underline{A}$ conservant φ ; alors α conserve ψ si et seulement s'il conserve chaque u_t .

On note aussi $(\psi : \varphi)$ la famille (u_t).

§ A.6. Espérances conditionnelles.

(Voir Takesaki [3])

Soient $\underline{A}$ une W^* - algèbre et $\underline{B}$ une sous - W^* - algèbre ne contenant pas nécessairement l'élément I (unité de $\underline{A}$). On appelle espérance conditionnelle (en abrégé EC) de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$ toute application E de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$, linéaire, positive, normale (i.e. u.f. continue), idempotente et vérifiant $E(a\,b) = E(a).b$ pour tout $a \in \underline{A}$ et tout $b \in \underline{B}$.

On a alors $E(a^*) = (E(a))^*$, $E(b\,a) = b.E(a)$, $E(b\,a\,b') = b.E(a).b'$ $\forall\ a \in \underline{A}$, $b,b' \in \underline{B}$. Si $\underline{B}$ contient I on a $E(\underline{A}) = \underline{B}$ si et seulement si $E(I) = I$.

Soit φ un poids n.s.f.f. tel que $\varphi \mid \underline{B}$ soit semi-fini ; on dit qu'une EC E de $\underline{A}$ sur $\underline{B}$ conserve φ si on a $\varphi(E(a)) = \varphi(a)$ $\forall\ a \in \underline{A}^+$; on a alors $E(\mathcal{M}_\varphi) \subset \mathcal{M}_\varphi$, $\dot{\varphi}(E(a)) = \dot{\varphi}(a)$ $\forall\ a \in \mathcal{M}_\varphi$, $\dot{\varphi}(a.E(b).c) = \dot{\varphi}(abc)$ $\forall$ $a,c \in \mathcal{M}_\varphi \cap \underline{B}$, $b \in \underline{A}$. Une telle espérance conditionnelle, s'il en existe, est unique et fidèle ; de plus pour tout $a \in \mathcal{M}_\varphi$, $E(a)$ est la projection orthogonale (pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_\varphi$ associé à φ) de a sur $\mathcal{M}_\varphi \cap \underline{B}$. Pour qu'il existe une telle EC il faut et il suffit que $\underline{B}$ soit invariante par les σ_t^φ . En particulier il en existe toujours une si $\underline{B}$ est contenue dans le centre de $\underline{A}$; dans ce cas, pour tout $a \in \underline{A}^+$, $E(a)$ est la densité de $\varphi(a\ .\ ) \mid \underline{B}$ par rapport à $\varphi \mid \underline{B}$; si enfin $\underline{A}$ est commutative on retrouve la notion habituelle d'espérance conditionnelle.

Reprenons $\underline{B}$ et φ comme ci-dessus ; soit α un automorphisme de $\underline{A}$ conservant $\underline{B}$ et φ ; s'il existe une EC de $\underline{A}$ sur $\underline{B}$ conservant φ , elle permute à α ; en effet $\alpha \circ E \circ \alpha^{-1}$ est encore une EC conservant φ , donc est égale à E .

§ A.7. Quelques propriétés des automorphismes des W^* - algèbres.

Etant donnée une W^* - algèbre $\underline{A}$ nous appelons automorphismes de $\underline{A}$ les $*$ - automorphismes de $\underline{A}$ et nous notons $\text{Aut}\,\underline{A}$ le groupe qu'ils forment, $\text{Int}\,\underline{A}$ le sous-groupe distingué formé des automorphismes intérieurs, i.e. de la forme $a \longmapsto i_u(a) = u\,a\,u^{-1}$ où $u \in \underline{U}(\underline{A})$.

Sur $\text{Aut}\,\underline{A}$ on peut considérer (au moins) quatre topologies :

$\underline{T}_1$ définie par le fait qu'une suite généralisée $\alpha_i \in \text{Aut}\,\underline{A}$ converge vers l'élément neutre e si $\varphi(\alpha_i\, a)$ tend vers $\varphi(a)$ pour tout $\varphi \in \underline{A}_*$ et tout $a \in \underline{A}$; c'est la topologie de la convergence simple ultra-faible, et c'est à peu près la seule que nous utiliserons dans ce séminaire ;

$\underline{T}_2$: α_i converge vers e si $\|\alpha_i \varphi - \varphi\|$ tend vers 0 pour tout $\varphi \in \underline{A}_*$ en posant $\alpha\varphi = \varphi_\circ \alpha^{-1}$;

$\underline{T}_3$: α_i converge vers e si $\|\alpha_i\, a - a\|$ tend vers 0 pour tout $a \in \underline{A}$;

$\underline{T}_4$: α_i converge vers e si $\|\alpha_i - e\| = \sup\limits_{\|a\| \leq 1} \|\alpha_i\, a - a\|$ tend vers 0.

On a $\underline{T}_1 \leq \underline{T}_2 \leq \underline{T}_4$ et $\underline{T}_1 \leq \underline{T}_3 \leq \underline{T}_4$.

Les topologies $\underline{T}_3$ et $\underline{T}_4$ sont assez voisines puisqu'elles définissent les mêmes suites convergentes (cf. Elliott [1]) ; $\underline{T}_4$ est trop forte pour la plupart des applications : pour cette topologie la composante connexe de e est égale à $\text{Int}\,\underline{A}$ (cf. Kadison - Ringrose [1]) ; signalons aussi que tout automorphisme α vérifiant $\|\alpha - e\| < 2$ est intérieur (ibid.).

Si G est un groupe localement compact, tout morphisme de G dans $\text{Aut}\,\underline{A}$, continu pour $\underline{T}_1$, est aussi continu pour $\underline{T}_2$; ceci est un cas particulier du résultat classique suivant : soient E un espace de Banach, U un morphisme de G dans le groupe des automorphismes isométriques de E ; on suppose que pour tout $x \in E$ l'application $g \longmapsto U_g\, x$ est continue pour la topologie affaiblie de E ; alors elle est continue pour la topologie initiale (voir par exemple Johnson [1], § 2).

APPENDICE A

Si $\underline{A}$ est discrète, tout automorphisme de $\underline{A}$ induisant l'identité sur son centre est intérieur ; en particulier tout automorphisme d'une algèbre $\underline{L}(H)$ est intérieur (cf. Dixmier [1], ch.III, § 3). Si $\underline{A}$ est le facteur hyperfini de type II_1, tout groupe localement compact séparable admet un morphisme fidèle α : $G \longmapsto \text{Aut}\,\underline{A}$ tel que $\alpha(g)$ soit non intérieur si $g \neq e$ (cf. Blattner [1]).

Supposons maintenant que $\underline{A}$ est réalisée dans un espace hilbertien H , notons Γ le groupe des opérateurs unitaires u dans H qui vérifient $u\,\underline{A}\,u^{-1} = \underline{A}$, et p le morphisme naturel de Γ dans $\text{Aut}\,\underline{A}$; alors p est continu si on munit Γ de la topologie faible et $\text{Aut}\,\underline{A}$ de la topologie $\underline{T}_2$. Supposons en outre que $\underline{A}$ admet un vecteur totalisateur et séparateur ; alors il existe un morphisme $q : \text{Aut}\,\underline{A} \longrightarrow \Gamma$, continu pour les topologies ci-dessus et vérifiant $p \circ q$ = identité (cf. Connes [2]). Enfin toute W^*- algèbre est isomorphe à une algèbre dans un espace hilbertien pour laquelle il existe un morphisme q ayant les propriétés ci-dessus (Haagerup [1]).

§ A.8. Produits tensoriels infinis.

(Voir Guichardet [4])

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces hilbertiens et, pour tout i, u_i un vecteur unitaire de H_i ; si J et K sont deux sous-ensembles finis de I vérifiant $J \subset K$, on définit une application isométrique T_{JK} de $\bigotimes_{i \in J} H_i$ dans $\bigotimes_{i \in K} H_i$ par $T_{JK}(x) = x \otimes (\bigotimes_{i \in K-J} u_i)$; on obtient ainsi un système inductif d'espaces hilbertiens ; on note $H = \bigotimes_{i \in I}^{(u_i)} H_i$ la limite inductive de ce système inductif. Soit (x_i) une famille telle que $x_i \in H_i$ et $x_i = u_i$ pour presque tout i (i.e. sauf pour un nombre fini d'indices i), soit pour $i \notin J$; on note $\otimes x_i$ l'image canonique de $\bigotimes_{i \in J} x_i$ dans H ; les éléments de ce type engendrent H ; leurs produits scalaires sont donnés par $(\otimes x_i \mid \otimes y_i) = \prod_{i \in I} (x_i \mid y_i)$.

On obtient des bases orthonormales de H de la façon suivante : soit, pour tout i, (e_α) une base orthonormale de H_i où α parcourt un ensemble A_i contenant un élément β_i tel que $e_{\beta_i} = u_i$; soit $\prod'_{i \in I} A_i$ le sous-ensemble de $\prod_{i \in I} A_i$ formé des familles $(f(i))$ telles que $f(i) = \beta_i$ pour presque tout i ; alors les vecteurs $\otimes e_{f(i)}$ forment une base orthonormale de H.

Soit (T_i) une famille telle que $T_i \in \underline{L}(H_i)$ pour tout i et $T_i = I$ pour presque tout i ; il existe un unique opérateur linéaire continu dans H, noté $\otimes T_i$, vérifiant $(\otimes T_i)(\otimes x_i) = \otimes T_i x_i$ pour toute famille $x_i \in H_i$, $x_i = u_i$ pour presque tout i. Donnons-nous pour tout i une algèbre de von Neumann $\underline{A}_i$ dans H_i ; on note $\otimes \underline{A}_i$ l'algèbre de von Neumann dans H engendrée par les opérateurs $\otimes T_i$ où $T_i \in \underline{A}_i$ et $T_i = I$ pour presque tout i. On a $(\otimes \underline{A}_i)' = \otimes \underline{A}_i'$; cela est démontré dans Guichardet [4] en supposant les $\underline{A}_i$ semi-finies ; en fait la démonstration est valable sans restriction puisqu'on sait maintenant que le résultat est vrai pour les produits tensoriels finis d'algèbres de von Neumann non nécessairement semi-finies (cf. Takesaki [2]).

Appendice B | SYSTÈMES DYNAMIQUES COMMUTATIFS

Nous exposons ici très brièvement quelques idées et résultats de la théorie des systèmes dynamiques commutatifs (ou théorie ergodique) ; certaines ont déjà été généralisées au cas non commutatif, d'autres pourraient probablement l'être.

§ B.1. Généralités.

Nous appellerons espace mesuré un couple (X, μ) où

- X est un espace borélien, i.e. un ensemble muni d'une tribu $\underline{T}$ dont les éléments sont appelés sous-ensembles boréliens
- μ est une mesure positive sur X, i.e. une application de $\underline{T}$ dans $[0, +\infty]$ vérifiant les conditions suivantes :
  a) $\mu(\emptyset) = 0$
  b) $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$ si les A_n sont deux à deux disjoints
  c) X est réunion de sous-ensembles de mesure finie.

Un espace mesuré (X, μ) est dit fini si $\mu(X)$ est fini ; σ - fini si X est réunion dénombrable de sous-ensembles de mesure finie.

Un automorphisme d'un espace mesuré (X, μ) est une permutation de X, bimesurable et conservant μ. Deux espaces mesurés (X, μ) et (X', μ') sont dits isomorphes s'il existe deux sous-ensembles $Y \subset X$, $Y' \subset X'$ respectivement μ - et μ' - négligeables, et une bijection bimesurable de $X - Y$ sur $X' - Y'$ transformant $\mu \mid X - Y$ en $\mu' \mid X' - Y'$.

Deux mesures sur X sont dites équivalentes si elles définissent les mêmes sous-ensembles négligeables ; elles définissent alors les mêmes sous-ensembles mesurables, les mêmes fonctions mesurables et les mêmes espaces L^∞ ; on pourra donc écrire $L^{\infty}(X,C)$ au lieu de $L^{\infty}(X,\mu)$, en notant C la classe d'équivalence de μ. On écrira $C \prec C'$ si tout sous-ensemble C' - négligeable est C - négligeable.

Nous appellerons espace <u>quasi-mesuré</u> un couple (X,C) où X est un espace borélien et C une classe de mesures sur X ; nous parlerons alors de classes de sous-ensembles mesurables (sous-entendu : modulo les sous-ensembles C - négligeables) ; rappelons que toute famille de telles classes admet une borne supérieure et une borne inférieure ; deux telles classes sont dites <u>disjointes</u> si leur borne inférieure est la classe de l'ensemble vide. Un espace quasi-mesuré est dit <u>de genre dénombrable</u> si toute famille de classes de sous-ensembles mesurables non négligeables deux à deux disjointes est dénombrable ; il revient au même de dire que C contient une mesure finie, ou encore une mesure σ - finie. La définition des espaces quasi-mesurés isomorphes est tout à fait analogue à celle des espaces mesurés isomorphes : il suffit de remplacer partout μ et μ' par C et C'.

Un <u>automorphisme</u> d'un espace quasi-mesuré (X,C) est une permutation de X, bimesurable et conservant C ; on dit aussi que la permutation laisse les éléments de C <u>quasi-invariants</u>. Un <u>système dynamique</u> (commutatif), en abrégé SD, est un triplet $\underline{F} = (X,C,G)$ où G est un groupe opérant par automorphismes dans (X,C) ; <u>nous supposerons toujours dans la suite que</u> (X,C) <u>est de genre dénombrable</u>. $\underline{F}$ sera dit <u>séparable</u> si X est standard et G dénombrable ; il sera dit <u>avec mesure invariante</u> si C contient une mesure G - invariante. Deux systèmes dynamiques (X,C,G) et (X',C',G) avec même groupe G sont dits <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme de (X,C) sur (X',C') compatible avec l'action de G.

§ B.2. Représentations associées à un système dynamique.

Soient (X,C,G) un système dynamique et μ un élément de C ; pour tout $p \in [1,+\infty]$ on peut définir une représentation $U^{(p)}$ de G dans $L^p(X,\mu)$ par des opérateurs isométriques :

$$(U_g^{(p)} f)(x) = (d\mu(g^{-1}x)/d\mu(x))^{1/p} \cdot f(g^{-1}x) ;$$

$U^{(p)}$ est indépendante du choix de μ dans C car si $\mu' = \varphi.\mu \in C$, l'isomorphisme $f \longmapsto \varphi^{-1/p} f$ de $L^p(X,\mu)$ sur $L^p(X,\mu')$ entrelace les deux représentations.

Supposons maintenant G topologique ; on peut se demander dans quels cas $U^{(p)}$ est continue, ce qui signifie que pour toute $f \in L^p$, l'application $g \longmapsto U_g^{(p)} f$ de G dans L^p est continue ; la réponse est donnée par les résultats suivants :

a) Si G est localement compact, X localement compact polonais, si C contient une mesure de Radon, et si l'application $(g,x) \longmapsto g.x$ est continue, $U^{(p)}$ est continue pour tout $p \in [1,+\infty[$ (voir Bourbaki [1], ch.VIII, § 4, exercice 13).

b) Si G est localement compact séparable, X borélien standard, et l'application $(g,x) \longmapsto g.x$ borélienne, $U^{(2)}$ est continue (voir Varadarajan [2]).

c) On suppose que X est un espace vectoriel réel, et on considère un sous-espace vectoriel Y du dual de X, et un sous-espace vectoriel Z de Y muni d'une topologie d'espace de Fréchet plus fine que la topologie faible ; on suppose que μ est une mesure positive bornée sur la tribu cylindrique de Y, quasi-invariante par les translations par des éléments de Z ; alors la représentation unitaire U de Z dans $L^2(Y,\mu)$ définie par

$$(U_z f)(y) = (d\mu(y-z)/d\mu(y))^{\frac{1}{2}} \cdot f(y-z)$$

est continue (cf. Hegerfeldt [1]).

Ayant choisi un élément μ de C nous écrirons souvent U au lieu de $U^{(2)}$; pour toute $f \in L^{\infty}(X, \mu)$ on notera T_f l'opérateur de multiplication par f dans $L^2(X, \mu)$; on a

$$U_g T_f U_g^{-1} = T_{g.f} \qquad \text{où} \quad (g.f)(x) = f(g^{-1}x) .$$

Remarquons que U est toujours équivalente à sa contragrédiente (voir définition au § C.3) puisqu'elle permute à l'opérateur antiunitaire $f \longmapsto \bar{f}$ de L^2 dans lui-même. Si C contient une mesure invariante finie ν, la fonction 1 est un vecteur de $L^2(X, \nu)$ invariant par U et totalisateur pour les T_f ; réciproquement si $L^2(X, \mu)$ contient un tel vecteur, C contient une mesure invariante finie.

§ B.3. Systèmes ergodiques.

On peut donner des systèmes ergodiques plusieurs définitions équivalentes :

(i) la classe C est minimale parmi les classes invariantes ;

(ii) tout élément invariant de $L^{\infty}(X,C)$ est constant ;

(iii) pour toute mesure $\mu \in C$ l'ensemble des opérateurs U_g et T_f est irréductible dans $L^2(X,\mu)$.

Propriétés du spectre de U.

G.W.Mackey a démontré les résultats suivants (voir Mackey [1]). On suppose G localement compact séparable, X borélien standard, $(g,x) \longmapsto gx$ borélienne, de sorte que U est continue ; on suppose que U est somme (discrète) de représentations irréductibles de dimension finie ; alors

(i) C contient une mesure invariante finie ;

(ii) toute composante irréductible de U apparaît avec une multiplicité au plus égale à sa dimension ;

(iii) la contragrédiente de toute composante irréductible de U est aussi une composante irréductible de U ;

(iv) si V_1 et V_2 sont des composantes irréductibles de U, $V_1 \otimes V_2$ n'est pas disjointe de U ;

(v) $\underline{F}$ est isomorphe à un système dynamique $\underline{F}'$ obtenu de la façon suivante : on prend un groupe compact K , un sous-groupe fermé K_0 de K , un morphisme continu à image dense φ de G dans K ; on pose $X' = K/K_0$, $\mu' =$ mesure sur X' , K - invariante et de masse totale 1 , enfin on fait opérer G dans X' de façon naturelle via φ .

[Le principe de la démonstration est le suivant. Notons K le compactifié de Bohr de G , φ le morphisme canonique de G dans K ; choisissons $\mu \in C$; il existe une unique représentation U' de K dans $L^2(X, \mu)$ telle que $U' \circ \varphi = U$; on a

$$U'_k \, . \, L^\infty \, . \, U'^{-1}_k = L^\infty \qquad \forall \; k \in K$$

car cela est vrai pour $k \in \varphi(G)$ et se prolonge par continuité ; on en déduit une action de K dans (X,C) qui vérifie

$$U'_k \; T_f \; U'^{-1}_k = T_{k.f} \qquad \text{où} \quad (k.f)(x) = f(k^{-1}x) \qquad \forall \; f \in L^\infty$$

$$k.x = g.x \qquad \text{si } k = \varphi(g) \; ;$$

le système (X,C,K) est évidemment ergodique ; comme K est compact, C est portée par une orbite de K dans X ; on peut remplacer X par un espace homogène K/K_o, et ceci démontre (v) ; les autres assertions en sont des conséquences classiques ; on remarquera que (iii) résulte trivialement du fait que U est équivalente à sa contragrédiente (voir § B.2)]

Supposons maintenant G commutatif ; alors le spectre de U (ensemble des éléments de $\hat{G}$ contenus dans U) est simple et est un sous-groupe dénombrable Γ de $\hat{G}$; si on définit K et K_o comme dans la démonstration ci-dessus, on a $K_o = \operatorname{Ker} U' = \Gamma^\perp$, donc K/K_o est le groupe dual du groupe Γ muni de la topologie discrète ; $\underline{F}$ est isomorphe au système dynamique construit comme indiqué en (v) en prenant $K = \hat{\Gamma}$, K_o trivial, φ = morphisme dual de l'injection $\Gamma \longrightarrow \hat{G}$; on voit que la classe d'équivalence de U détermine $\underline{F}$ à isomorphisme près (propriété qui ne subsiste pas lorsque G n'est pas commutatif), et aussi que tout sous-groupe dénombrable de $\hat{G}$ s'obtient de cette façon.

Remarque. Le résultat précédent se généralise de la façon suivante (Mackey [1]) : considérons un système dynamique concret $\underline{F} = (\underline{A}, G, H, U)$ (voir définition au § I.2) avec G localement compact séparable, $\underline{A}$ commutative, H séparable, U continue ; on suppose $\underline{F}$ ergodique et U somme de représentations irréductibles de dimension finie ; alors il existe un groupe compact K, un sous-groupe fermé K_o , un morphisme continu à image dense φ de G dans K , une représentation V de K_o et un isomorphisme de H sur l'espace de la représentation de K induite par V, notée Ind V , transformant $\underline{A}$ en l'algèbre des opérateurs diagonalisables et U en la représentation Ind V $\circ \varphi$.

<u>Désintégration des mesures quasi-invariantes en mesures quasi-invariantes ergodiques</u>.

Soit (X,C,G) un système dynamique où G est localement compact séparable, X standard et l'application $(g,x) \longmapsto g.x$ borélienne ; soit $\mu \in C$; il existe

- un espace mesuré standard (Y , ν)
- une application mesurable p de X sur Y vérifiant $p(\mu) = \nu$ et $p \circ g = p$ $\forall g \in G$
- une désintégration $\mu = \int \mu_y . d\nu(y)$ où pour tout $y \in Y$, μ_y est une mesure positive de masse 1 portée par $p^{-1}(\{y\})$, quasi-invariante et ergodique pour G .

[Voir Guichardet [2] ; l'hypothèse " G dénombrable " qui y est faite est en réalité inutile car, avec les notations de cet article, on peut supposer $\varphi(\zeta) = \varphi(s\zeta)$ pour tout s et tout ζ même si G n'est pas dénombrable : voir aussi Dang Ngoc [3]]

§ B.4. Classification des systèmes dynamiques.

(Voir Dang Ngoc [1])

Un système dynamique (X,C,G) est dit

- fini si C contient une mesure invariante finie
- semi-fini si C contient une mesure invariante σ - finie
- infini s'il n'est pas fini
- proprement infini s'il n'existe aucune mesure invariante finie de base C
- purement infini s'il n'existe aucune mesure invariante σ - finie de base C .

Tout système dynamique se décompose d'une façon unique en somme directe d'un système fini, d'un système semi-fini proprement infini et d'un système purement infini.

Soit E un sous-ensemble de X (ici comme souvent dans la suite nous disons " sous-ensemble " au lieu de " classe de sous-ensembles mesurables ") ; on appelle G-support de E la borne inférieure des sous-ensembles invariants contenant E, qui est aussi la borne supérieure des $g.E$ pour $g \in G$; on dit que E est un G - atome si pour tout sous-ensemble F de X il existe un sous-ensemble F' invariant et vérifiant $F \wedge E = F' \wedge E$; cela revient à dire que E est minimal parmi les sous-ensembles ayant même G - support que E. Le système (X,C,G) est dit discret s'il existe un G - atome ayant pour G - support X , ou encore si tout sous-ensemble non négligeable contient un G - atome non négligeable ; il est dit continu s'il n'existe aucun G - atome non négligeable. Tout système se décompose d'une façon unique en somme directe d'un système discret et d'un système continu ; les systèmes ergodiques[1] discrets sont exactement les systèmes transitifs (ce qui signifie que C est portée par une orbite).

---

[1] séparables

§ B.5. Groupes pleins d'automorphismes.

(Voir Dye [1], [2] et Dang Ngoc [1])

Un groupe G d'automorphismes d'un espace quasi-mesuré (X,C) est dit plein si la condition suivante est réalisée : soit T un automorphisme de (X,C) ; supposons qu'il existe une partition (X_n) $n = 1,2,\ldots$ de X et des éléments g_n de G vérifiant $T \mid X_n = g_n \mid X_n$ pour tout n ; alors $T \in G$. Soit maintenant G un groupe d'automorphismes quelconque ; l'ensemble des automorphismes vérifiant la condition ci-dessus est un groupe plein, appelé groupe plein engendré par G et noté $[G]$. Les sous-ensembles invariants par G et $[G]$ sont les mêmes ; mais un automorphisme de (X,C) qui laisse invariants tous les sous-ensembles G - invariants n'appartient pas nécessairement à $[G]$ (voir § VII.6). Il est clair que les orbites de $[G]$ sont les mêmes que celles de G ; si $\underline{F}$ est séparable, les éléments de $[G]$ sont exactement les automorphismes T tels que $T x \in G x \quad \forall x \in X$.

Soient (X,C,G) et (X',C',G') deux systèmes dynamiques ; on dit qu'ils sont faiblement isomorphes s'il existe un isomorphisme de (X,C) sur (X',C') transformant $[G]$ en $[G']$.

§ B.6. Systèmes dynamiques induits.

(Voir Dang Ngoc [1])

Soient $\underline{F} = (X,C,G)$ un système dynamique et E un sous-ensemble mesurable non négligeable ; on va définir un système dynamique $\underline{F}_E = (E, C|E, G_E)$ dit induit. Définissons d'abord l'automorphisme T_E de $(E,C|E)$ induit par un automorphisme quelconque T de (X,C) ; il suffit d'indiquer l'action de T_E sur l'intersection de E avec une orbite quelconque 0 de T dans X ; pour cela nous distinguerons quatre cas :

a) $E \cap 0$ est infini à droite et à gauche (infinie à droite signifie que pour tout $x \in E \cap 0$ on a $T^n x \in E \cap 0$ pour une infinité de $n > 0$) ; dans ce cas on pose $T_E x = T^n x$ où n est le plus petit entier > 0 tel que $T^n x \in E \cap 0$;

b) $E \cap 0$ est fini à droite et à gauche ; notons $x_1, \dots x_k$ les points de $E \cap 0$ de façon que pour tout $i > 1$, x_i se déduise de x_{i-1} par une puissance strictement positive de T ; on pose alors

$$T_E x_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots k-1 \\ x_1 & \text{pour } i = k ; \end{cases}$$

enfin si $k = 1$, $T_E x_1 = x_1$;

c) $E \cap 0$ est fini à gauche et infini à droite ; notons $x_1, x_2, \dots$ ses éléments ordonnés comme en b) ; on pose

$$T_E x_i = \begin{cases} x_2 & \text{si } i = 1 \\ x_{i+2} & \text{si } i \text{ est pair} \\ x_{i-2} & \text{si } i \text{ est impair} \geqslant 3 ; \end{cases}$$

d) $E \cap 0$ est fini à droite et infini à gauche : analogue.

On vérifie facilement que l'automorphisme de (X,C) obtenu en prolongeant T_E par l'identité sur $X - E$ appartient au groupe plein engendré par T .
On définit alors G_E comme étant le groupe d'automorphismes de $(E, C \mid E)$ engendré par les g_E où $g \in G$; $[G_E]$ est l'ensemble des restrictions à E des éléments de $[G]$ qui conservent E .
Soit $\bar{E}$ le G - support de E ; l'application $\nu \longmapsto \nu \mid E$ est une bijection de l'ensemble des mesures ν de base C , G - invariantes sur $\bar{E}$, sur l'ensemble des mesures sur E, de base $C \mid E$, G_E - invariantes.

§ B.7. Comparaison des sous-ensembles.

(Voir Hopf [1] ou Dang Ngoc [1])

Soit $\underline{F} = (X,C,G)$ un système dynamique ; on dit que deux sous-ensembles E et F de X sont G - équivalents, et on écrit $E \underset{G}{\sim} F$, s'il existe une partition (E_n) de E et des éléments g_n de G tels que les $g_n.E_n$ constituent une partition de F. Alors les systèmes induits dans E et F sont faiblement isomorphes. On écrit $E \underset{G}{\prec} F$ si E est G - équivalent à un sous-ensemble de F ; on dit qu'un sous-ensemble F est G - fini (resp. G - semi - fini) si les relations $E \subset F$, $E \underset{G}{\sim} F$ impliquent $E = F$ (resp. si tout ensemble non négligeable majoré par F majore un sous-ensemble non négligeable G - fini).

Si E et F sont deux sous-ensembles il existe un sous-ensemble G - invariant A tel que $E \cap A \underset{G}{\prec} F \cap A$ et $F \cap (X-A) \underset{G}{\prec} E \cap (X-A)$; en particulier si $\underline{F}$ est ergodique on a toujours $E \underset{G}{\prec} F$ ou $F \underset{G}{\prec} E$.

Le système $\underline{F}$ est continu si et seulement si tout sous-ensemble est réunion de deux sous-ensembles disjoints équivalents.

Un sous-ensemble E est G - fini (resp. semi-fini) si et seulement si le système $\underline{F}_E$ est fini (resp. semi-fini) ; lorsque $E = X$ on retrouve un résultat dû à Hopf pour le cas fini, et à Halmos et Kawada pour le cas semi-fini.

Si $\underline{F}$ est ergodique, deux sous-ensembles donnant des systèmes induits infinis sont équivalents.

Structure des systèmes dynamiques discrets.

Le système $\underline{F}$ est dit homogène si X est réunion d'une suite finie ou infinie de G - atome deux à deux disjoints et deux à deux équivalents ; le cardinal de la suite est alors unique et on dit que $\underline{F}$ est de type I_n . Tout système discret est somme de systèmes homogènes des divers types ; tout système séparable de type I_n est faiblement isomorphe à un système $\underline{F}_n \times \underline{F}'$ où $\underline{F}'$ est un système avec groupe trivial, et où $\underline{F}_n = (X_n, C_n, G_n)$, X_n étant un ensemble à n éléments, C_n la classe de la mesure définie par la masse 1 en chaque point, G_n le groupe des permutations de X_n qui ne déplacent qu'un nombre fini de points. Ceci montre en particulier que tout système discret est semi-fini.

§ B.8. Propriétés particulières aux systèmes dynamiques avec mesures invariantes.

Nous considérons ici un système dynamique (X,C,G) et nous supposons que C contient une mesure invariante finie de masse totale 1, soit μ .

Théorèmes ergodiques moyens et ponctuels.

D'après le § C.1, pour toute $f \in L^2$ l'enveloppe convexe fermée des $U_g f$ contient un élément invariant et un seul ; si on le note $P(f)$, P est le projecteur orthogonal de L^2 sur l'ensemble $(L^2)^G$ des éléments invariants. Si $|f|$ est presque partout inférieure ou égale à 1, il en est de même de $|P(f)|$; donc pour toute $f \in L^2$ et toute $f' \in L^\infty$ vérifiant $|f'| \leq 1$ p.p. on a

$$|\mu(P(f).f')| = |\mu(f.P(f'))| \leq \|f\|_1$$

donc $\|P(f)\|_1 \leq \|f\|_1$, et P se prolonge en un opérateur linéaire continu de L^1 dans lui-même, que nous notons encore P ; il est facile de voir que P n'est autre que l'espérance conditionnelle E^B où B est la sous-tribu formée des ensembles invariants.

Si G est localement compact et admet une famille moyennante (φ_i) (voir § C.4) et si U est continue, pour $f \in L^2$, $P(f)$ est la limite en moyenne quadratique des fonctions $x \longmapsto \int \varphi_i(g).f(g^{-1}x).dg$; par passage à la limite on voit que pour $f \in L^1$, $P(f)$ est limite en moyenne des mêmes fonctions (théorème ergodique moyen).

Le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff est relatif à des familles moyennantes particulières : on suppose que G contient une suite croissante (H_n) d'ouverts relativement compacts contenant e et vérifiant les conditions suivantes :

$$\lim_{n=\infty} \lambda(g H_n \Delta H_n)/\lambda(H_n) = 0 \qquad \forall g \in G$$

$$\lambda(H_n H_n^{-1}) \leq K \lambda(H_n)$$

où K est une constante positive et λ une mesure de Haar à gauche sur G ; on suppose en outre X compact métrisable, μ de Radon, et l'application $(g,x) \longmapsto g.x$ continue. Alors pour toute $f \in L^1$ la fonction

$$x \longmapsto (\lambda(H_n))^{-1} \int_{H_n} f(g\,x).\,d\lambda(g)$$

converge en moyenne et presque partout vers $P(f)$ (voir Chatard [1]). On obtient en particulier le théorème ergodique de Birkhoff sous sa forme primitive en prenant $G = \mathbb{Z}$ et $H_n = \{0, 1, \dots n\}$; en fait celui-ci est valable dès que μ est σ - finie ; d'autre part le théorème général ci-dessus reste probablement valable pour des familles moyennantes plus générales que celles considérées ci-dessus.

Systèmes ergodiques.

Les conditions (i), (ii), (iii) du § B.3 sont encore équivalentes aux suivantes :

(iv) μ est extrémale dans l'ensemble des mesures invariantes

(v) les constantes sont les seuls éléments U - invariants de L^2

(vi) (en supposant G localement compact et U continue) : $P(f) = \mu(f).1$ pour toute $f \in L^2$, ce qui, d'après le § C.3, équivaut à

$$m_g\ \mu(U_g f_1 . f_2) = \mu(f_1).\mu(f_2) \qquad \forall\ f_1, f_2 \in L^2 .$$

On considère aussi deux propriétés plus fortes que l'ergodicité : on dit que F est faiblement mélangeant si les constantes constituent le seul sous-espace U - invariant de dimension finie non nul de L^2 ; cela équivaut (prop. C.2) à dire que le système $(X \times X, \mu \otimes \mu, G)$ est ergodique ; ou encore, si G est localement compact et U continue, que

$$m_g \left| \mu(U_g f_1 . f_2) - \mu(f_1).\mu(f_2) \right| = 0 \quad \forall f_1, f_2 \in L^2$$

(on rappelle que U est équivalente à sa contragrédiente, cf. § B.2)

On dit que <u>F</u> est <u>mélangeant</u> si on a

$$\lim_{g=\infty} \mu(U_g f_1 \cdot f_2) = \mu(f_1) \cdot \mu(f_2) \qquad \forall\ f_1, f_2 \in L^2$$

(on suppose ici G localement compact non compact et U continue).

<u>Classification des mesures invariantes</u> (voir Varadarajan [1]).

Les mesures finies invariantes , contrairement aux mesures quasi-invariantes (pour lesquelles le problème est entièrement ouvert), admettent une classification relativement simple. Considérons un espace borélien standard X et un groupe localement compact séparable G opérant dans X de façon que l'application $(g,x) \longmapsto g.x$ soit borélienne ; appelons <u>mesures</u> les mesures positives de masse totale 1 et supposons qu'il existe une mesure invariante. Alors il existe un espace borélien standard Y et une application borélienne p de X dans Y telle que

- $p \circ g = p$ pour tout $g \in G$
- chaque fibre $p^{-1}(\{y\})$ porte une unique mesure invariante ν_y (qui est ergodique)
- toute mesure ergodique est de cette forme
- toute mesure invariante μ est l'intégrale des mesures ν_y par rapport à la mesure $p(\mu)$.

§ C.1. Le théorème ergodique de Ryll-Nardzewski.

Théorème C.1. Soient X un espace vectoriel topologique localement convexe quasi-complet, G un groupe, U une représentation de G dans X, c'est-à-dire un morphisme de G dans le groupe des automorphismes bicontinus de X ; on suppose les U_g équicontinus et les orbites de G dans X relativement compactes pour la topologie affaiblie de X ; on note X^G l'ensemble des vecteurs invariants par G . Alors pour tout $x \in X$ l'ensemble $\overline{\mathrm{co}\, G\, x}$ (enveloppe convexe fermée pour la topologie initiale de l'orbite de x) contient un élément et un seul de X^G ; si on le note $P(x)$, P est un projecteur continu sur X^G , vérifiant $P \circ U_g = P$ $\forall\ g \in G$; le noyau de P est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs de la forme $U_g x - x$.

On trouvera dans Aribaud [1] une démonstration basée sur le théorème suivant (théorème de point fixe de Ryll-Nardzewski) : soient X un EVTLC , G un groupe d'opérateurs dans X , équicontinu et tel que ses orbites soient bornées, K un sous-ensemble de X, convexe, compact pour la topologie affaiblie de X , et invariant par G ; alors K contient au moins un vecteur invariant.

On notera que le théorème C.1 ne s'applique pas si X est le dual d'un espace de Banach Y et si on remplace " topologie affaiblie " par " topologie faible de dual ", à moins bien sûr que Y ne soit réflexif (prendre par exemple un groupe G discret non moyennable opérant par translations dans l'espace des fonctions complexes bornées sur G). Lorsque X est hilbertien et U unitaire on retrouve le théorème de Alaoglu - Birkhoff, qui affirme en outre que P appartient à l'enveloppe convexe fermée (pour la topologie simple forte) de l'ensemble des U_g , et que $P(x)$ est la projection orthogonale de 0 sur $\overline{co\ G\ x}$ (cf. Riesz - Nagy [1], § 146) ; de plus P est le projecteur orthogonal sur X^G .

§ C.2. Fonctions faiblement presque périodiques sur les groupes localement compacts.

(Voir Aribaud [1])

Soit G un groupe localement compact, $\underline{C}^{\infty}(G)$ l'espace des fonctions complexes continues bornées sur G , muni de la topologie de la convergence uniforme. On peut faire opérer G par translations à droite dans $\underline{C}^{\infty}(G)$, soit

$$(U_g f)(h) = f(h\, g) \qquad \forall\ f \in \underline{C}^{\infty}(G)\ ,\ g,\ h \in G\ ;$$

on dit que f est faiblement presque périodique (en abrégé FPP) si son orbite est relativement compacte pour la topologie affaiblie de $\underline{C}^{\infty}(G)$; on note FPP(G) l'ensemble des fonctions faiblement presque périodiques, et on montre que FPP(G) est une sous - C^* - algèbre de $\underline{C}^{\infty}(G)$. Le théorème de Ryll-Nardzewski montre que pour toute $f \in$ FPP(G) l'enveloppe convexe uniformément fermée de l'ensemble des translatées à droite de f contient une fonction constante et une seule ; on appelle cette constante moyenne de f et on la note M(f) ou encore $m_g\, f(g)$. Si on remplace translations à droite par translations à gauche on obtient le même ensemble FPP(G) et la même moyenne M.

Si G est compact, toute fonction continue est FPP et la moyenne n'est autre que la mesure de Haar normalisée sur G . Si G est moyennable, toute moyenne invariante sur $\underline{C}^{\infty}(G)$ coïncide avec M sur FPP(G) . Si G est non compact, toute fonction continue bornée admettant une limite à l'infini est FPP et sa moyenne est égale à sa limite à l'infini.

La moyenne est un état sur la C^*- algèbre FPP(G), qui est fidèle si et seulement si G est compact. Pour $f \in$ FPP(G) on a $M(|f|) = 0$ si et seulement si $M(|f|^2) = 0$, ou encore si et seulement si $M(f\, f') = 0$ pour toute $f' \in$ FPP(G).

Voici un procédé de calcul pratique de la moyenne d'une FPP f : soit k un nombre complexe ; supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble fini A de G tel que l'on ait

$$\left| (\text{card } A)^{-1} \sum_{g \in A} f(h\, g) - k \right| \leq \varepsilon \quad \forall\, h \in G \;;$$

alors $M(f) = k$ [Principe de la démonstration : il existe des nombres k_i positifs de somme 1 et des éléments h_i de G tels que

$$\left| \sum_i k_i\, f(h_i\, g) - M(f) \right| \leq \varepsilon \quad \forall\, g \in G \;;$$

alors le nombre

$$(\text{card } A)^{-1} \sum_{g \in A} \sum_i k_i\, f(h_i\, g) = \sum_i k_i \; (\text{card } A)^{-1} \sum_{g \in A} f(h_i\, g)$$

sera voisin à la fois de $M(f)$ et de k].

§ C.3. Application aux représentations.

Dans tout ce paragraphe G désigne un groupe localement compact. Considérons un EVTLC quasi-complet X et une représentation U de G dans X vérifiant les conditions suivantes :

(i) U est faiblement continue, i.e. la fonction $g \longmapsto < v , U_g x >$ est continue pour tout $x \in X$ et tout $v \in X'$ (dual topologique de X)

(ii) les U_g sont équicontinus

(iii) les orbites de G dans X sont relativement compactes pour la topologie affaiblie.

Soit v une forme linéaire continue sur X ; pour tout $x \in X$ notons $A(x)$ la fonction $g \longmapsto < v , U_g x >$ (une telle fonction est appelée coefficient de U) ; on a $A(x) \in \underline{C}^{\infty}(G)$, A est une application linéaire continue de X dans $\underline{C}^{\infty}(G)$, donc aussi continue pour les topologies affaiblies ; de plus la relation $A(x)(gh) = A(U_h x)(g)$ montre que $A(x)$ est FPP ; notons P le projecteur dont le théorème de Ryll-Nardzewski affirme l'existence ; $A(P(x))$ est une constante qui appartient à l'enveloppe convexe uniformément fermée de l'ensemble des translatées à droite de $A(x)$; donc $A(P(x)) = M(A(x))$. En résumé :

Théorème C.2. Sous les hypothèses (i), (ii), (iii) ci-dessus, tout coefficient de U est une fonction FPP ; pour tout $x \in X$ et tout $v \in X'$ on a

$$< v , P(x) > \quad = \quad m_g < v , U_g x > \quad .$$

Corollaire C.1. Toute fonction continue de type positif sur G est FPP ; si U est une représentation unitaire continue de G dans un espace hilbertien X , pour tout x et tout $y \in X$ on a $(P(x) | y) = m_g (U_g x | y)$ où P est le projecteur orthogonal sur l'ensemble des vecteurs invariants.

Nous exprimerons cette dernière relation par $P = m_g U_g$.

Pour tout espace hilbertien X nous noterons $\overline{X}$ l'espace hilbertien conjugué et $x \longmapsto \overline{x}$ l'isomorphisme antilinéaire canonique de X sur $\overline{X}$ (on peut prendre $\overline{X} = X$ avec l'opération externe $(k,x) \longmapsto \overline{k}\, x$ et le produit scalaire $(x,y) \longmapsto \overline{(x \mid y)}$, et $\overline{\overline{x}} = x$) ; nous noterons $\overline{U}$ la représentation contragrédiente d'une représentation unitaire U (si on prend $\overline{X} = X$ comme ci-dessus on a $\overline{U}_g = U_g$).

Soient U et U' deux représentations unitaires dans des espaces X et X' ; pour $x,y \in X$, $x',y' \in X'$ on a, d'après le corollaire C.1

$$m_g\,(U_g\, x \mid y)\ \overline{(U'_g\, x' \mid y')} = m_g\,(U_g \otimes \overline{U}'_g\, .\, x \otimes \overline{x}' \mid y \otimes \overline{y}'\,)$$
$$= (\,Q\, .\, x \otimes \overline{x}' \mid y \otimes \overline{y}'\,) \qquad (1)$$

où Q est le projecteur orthogonal dans $X \otimes \overline{X}'$ sur les vecteurs invariants par $U \otimes \overline{U}'$. Notons $L_{HS}\,(X',X)$ l'ensemble des applications de Hilbert - Schmidt de X' dans X ; T l'isomorphisme de $X \otimes \overline{X}'$ sur $L_{HS}\,(X',X)$ caractérisé par

$$T\,(x \otimes \overline{x}')(y') = (y' \mid x')\, .\, x\ ;$$

on voit facilement que

$$T\,(\,U_g \otimes \overline{U}'_g\, .\, a) = U_g\, .\, T(a)\, .\, {U'_g}^{-1} \qquad \forall\, a \in X \otimes \overline{X}'\ ;$$

en particulier a est invariant par $U \otimes \overline{U}'$ si et seulement si T(a) entrelace U et U' . Ceci, joint à (1) entraîne le

<u>Corollaire</u> C.2. Si U et U' ne contiennent pas de sous-représentations de dimension finie équivalentes, on a

$$m_g\,(U_g\, x \mid y)\ \overline{(U'_g\, x' \mid y')} = 0 \qquad \forall\, x,y \in X\, ,\ x',y' \in X'\ .$$

<u>Proposition</u> C.1. Si U est une représentation irréductible dans un espace X de dimension finie on a

$$m_g\,(U_g\, x \mid y)\ \overline{(U_g\, x' \mid y')} = (\dim X)^{-1}\,(x \mid x')\ \overline{(y \mid y')} \qquad \forall\, x,y,x',y' \in X.$$

Démonstration. U se prolonge au compactifié de Bohr de G et notre assertion résulte des relations d'orthogonalité classiques relatives aux groupes compacts.

Considérons encore une représentation unitaire continue d'un groupe localement compact G dans un espace X ; supposons qu'il existe un vecteur invariant a non nul ; dire que a est le seul (à un coefficient près) vecteur invariant équivaut à dire que le projecteur P du corollaire C.1 est égal au projecteur sur a , ou encore que l'on a $(P(x) \mid y) = (x \mid a)\overline{(y \mid a)} \quad \forall\, x,y \in X$, ou enfin (corollaire C.1) que

$$m_g\,(U_g\, x \mid y) = (x \mid a)\,\overline{(y \mid a)} \qquad \forall\, x,y \in X .$$

Proposition C.2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $m_g \left| (U_g\, x \mid y) - (x \mid a)\,\overline{(y \mid a)} \right| = 0 \qquad \forall\, x,y \in X$

(ii) $\mathbb{C}\,a$ est le seul sous-espace invariant de dimension finie non nul

(iii) $a \otimes \bar{a}$ est, à un coefficient près, le seul vecteur de $X \otimes \bar{X}$ invariant par $U \otimes \bar{U}$.

Démonstration.

Notons tout d'abord que (iii) équivaut à

$$m_g\,(U_g\, x \mid y)\,\overline{(U_g\, x' \mid y')} = (x \mid a)\,\overline{(x' \mid a)}\,\overline{(y \mid a)}\,(y' \mid a) \quad \forall\, x,y,x',y' \in X. \tag{2}$$

Montrons que (i) implique (iii). On aura pour toute $f \in FPP(G)$

$$m_g\,((U_g\, x \mid y) - (x \mid a)\,\overline{(y \mid a)}).\, f(g) = 0 \ ;$$

en particulier pour $f(g) = \overline{(U_g\, x' \mid y')}$ on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= m_g\,(U_g\, x \mid y)\,\overline{(U_g\, x' \mid y')} - (x \mid a)\,\overline{(y \mid a)}\; m_g\,\overline{(U_g\, x' \mid y')} \\ &= \quad '' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \quad \overline{(x' \mid a)}\,(y' \mid a) \end{aligned}$$

c'est-à-dire (2).

Montrons que (iii) implique (i). On a

$$\begin{aligned} m_g \left|(U_g x \mid y) - (x \mid a)\overline{(y \mid a)}\right|^2 &= m_g \left[\left|(U_g x \mid y)\right|^2 + \left|(x \mid a)\right|^2 \left|(y \mid a)\right|^2 \right. \\ &\qquad \left. - 2 \operatorname{Re} (U_g x \mid y)\, \overline{(x \mid a)}\, (y \mid a) \right] \\ &= m_g \left|(U_g x \mid y)\right|^2 + \left|(x \mid a)\right|^2 \left|(y \mid a)\right|^2 \\ &\qquad - 2 \left|(x \mid a)\right|^2 \left|(y \mid a)\right|^2 \end{aligned}$$

et ceci est nul d'après (2) où l'on a pris $x' = x$, $y' = y$; enfin cette égalité entraîne (i) (voir § C.2).

Dans ce qui suit on note comme plus haut T l'isomorphisme canonique de $X \otimes \overline{X}$ sur $L_{HS}(X,X)$.

Montrons que (iii) implique (ii). Soit X' un sous-espace invariant de dimension finie non nul de X ; le projecteur P sur X' est un opérateur de Hilbert - Schmidt permutable à U ; $T^{-1}(P)$ est invariant par $U \otimes \overline{U}$, donc proportionnel à $a \otimes \overline{a}$, d'où $P = P_a$.

Montrons enfin que (ii) implique (iii). Soit b un élément invariant de $X \otimes \overline{X}$; T(b) permute à U , donc aussi Re T(b) et Im T(b) ; tout projecteur propre de Re T(b) ou Im T(b) correspondant à une valeur propre non nulle est de dimension finie et permute à U , donc est égal à P_a ; par suite T(b) est proportionnel à P_a , et b est proportionnel à $a \otimes \overline{a}$.

§ C.4. Familles moyennantes sur les groupes localement compacts.

Définition. Nous appellerons famille moyennante sur un groupe localement compact G toute famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble ordonné filtrant, φ_i une fonction sur G , positive, d'intégrale 1 pour une mesure de Haar à droite dg , et vérifiant $\lim\limits_i \int |\varphi_i(g\,h) - \varphi_i(g)|\, dg = 0$, i.e. $\lim\limits_i \|(\varphi_i)_h - \varphi_i\|_1 = 0$ pour tout $h \in G$.

On peut démontrer (voir Chatard [1]) que si G admet une famille moyennante, il est moyennable [on considère les états $f \longmapsto \int \varphi_i\, f\, dg$ sur $\underline{C}^{\infty}(G)$; ils ont un point d'adhérence faible dans l'ensemble des états, et un tel point est un état invariant à droite], et que réciproquement si G est moyennable et σ-compact, il admet une famille moyennante où $I = \mathbb{N}$ et où φ_i est la fonction caractéristique d'un ouvert relativement compact U_i , les U_i formant en outre une suite croissante.

Théorème C.3. Soit U une représentation continue et uniformément bornée de G dans un espace de Banach X , et telle en outre que les orbites de G dans X soient relativement compactes pour la topologie affaiblie de X (cette dernière condition est évidemment automatiquement vérifiée si X est réflexif). Alors le projecteur P dont le théorème C.1 assure l'existence est limite simple forte des opérateurs $U(\varphi_i) = \int \varphi_i(g).\, U_g.\, dg$.

Démonstration (inspirée de celle de Chatard [1], th. 1). Il existe un nombre C tel que $\| U_g \| \leq C \quad \forall \ g \in G$; soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$; il existe des nombres $c_1, \dots c_n$ positifs de somme 1 et des éléments $g_1, \dots g_n$ de G vérifiant

$$\| P x - \sum c_k U_{g_k} x \| \leq \varepsilon / 2C ;$$

puis il existe $i_o \in I$ tel que $i \geqslant i_o$ implique

$$\| (\varphi_i)_{g_k^{-1}} - \varphi_i \|_1 \leq \varepsilon / 2C\|x\| \quad \forall\ k = 1,\dots n .$$

Alors pour $i \geqslant i_o$ on a

$$\| Px - U(\varphi_i).x \| \leq \| Px - \sum c_k . U((\varphi_i)_{g_k^{-1}}).x \| +$$

$$\| \sum c_k . U((\varphi_i)_{g_k^{-1}}).x - U(\varphi_i).x \|$$

$$\leq \| U(\varphi_i)(Px - \sum c_k . U_{g_k} x) \| +$$

$$\sum c_k . \| U((\varphi_i)_{g_k^{-1}}) - U(\varphi_i) \| . \| x \|$$

$$\leq C\ \varepsilon/2C + (\varepsilon / 2C\|x\|)\, C\|x\| = \varepsilon .$$

<u>Corollaire</u> C.3. Pour toute fonction faiblement presque périodique f sur G on a $M(f) = \lim\limits_{i} \int \varphi_i(g).f(g).dg$.

<u>Exemple</u>. Pour $G = \mathbb{Z}$ on peut prendre $I = \mathbb{N}$ et φ_i = produit de $1/(i+1)$ par la fonction caractéristique de $[0,i]$; on voit que pour tout opérateur unitaire U dans un espace hilbertien, $(I + U + \dots U^i)/(i+1)$ tend fortement vers le projecteur orthogonal sur le noyau de $U - I$ (théorème ergodique moyen de von Neumann).

Définitions générales (voir Eilenberg - Mac Lane [1]).

Considérons un groupe G opérant par automorphismes dans un groupe commutatif Γ et notons $g.\gamma$ l'action de $g \in G$ sur $\gamma \in \Gamma$; pour tout entier n positif ou nul on note C^n ou $C^n(G, \Gamma)$ le groupe commutatif des applications de G^n dans Γ ; ses éléments sont appelés n - cochaînes ; en particulier $C^o = \Gamma$. On définit un morphisme $\delta^n : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ - l'application cobord - par

$$(\delta^n f)(g_1,\dots g_{n+1}) = g_1 . f(g_2,\dots g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1,\dots,g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2},\dots g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots g_n)$$

pour toute $f \in C^n$; on a en particulier

$$(\delta^o \gamma)(g) = g.\gamma - \gamma \qquad \forall \gamma \in C^o$$

$$(\delta^1 f)(g_1,g_2) = g_1.f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) \qquad \forall f \in C^1 .$$

La propriété fondamentale de δ^n est $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. On pose

$$Z^n = Z^n(G, \Gamma) = \operatorname{Ker} \delta^n$$
$$B^n = B^n(G, \Gamma) = \operatorname{Im} \delta^{n-1}$$
$$H^n = H^n(G, \Gamma) = Z^n / B^n \quad ;$$

les éléments de Z^n et B^n sont appelés respectivement n - cocycles et n - cobords . En particulier Z^o est l'ensemble Γ^G des éléments G - invariants de Γ ; par convention $B^o = 0$; Z^1 est l'ensemble des applications f de G dans Γ vérifiant $f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1 . f(g_2)$; B^1 est l'ensemble de celles qui sont de la forme $f(g) = g.\gamma - \gamma$ avec $\gamma \in \Gamma$. H^n est appelé n - ième groupe de cohomologie ; si G opère trivialement dans Γ on a $H^1 = Z^1 = \operatorname{Hom}(G, \Gamma)$.

Applications.

Le premier groupe de cohomologie intervient souvent dans les problèmes de points fixes, pour la raison élémentaire suivante : considérons un ensemble E, un groupe commutatif Γ opérant dans E de façon simplement transitive, un groupe G opérant à la fois dans Γ (par automorphismes) et dans E de façon que $g.(\gamma . e) = (g.\gamma).(g. e)$; choisissons un élément e_0 de E ; pour tout g il existe un unique élément $a(g)$ de Γ vérifiant $g. e_0 = a(g). e_0$; alors a est un 1 - cocycle et E contient un point G - invariant si et seulement si a est un cobord.

Le deuxième groupe de cohomologie intervient dans les problèmes de relèvement de morphismes : considérons deux groupes X et Y , un morphisme surjectif v de X sur Y , ayant pour noyau un sous-groupe commutatif Γ de X , un groupe G et un morphisme r de G dans Y ; choisissons une section $s : Y \longrightarrow X$ pour v ; on peut faire opérer G dans Γ de la façon suivante :

$$g.\gamma = s(r(g)).\gamma . s(r(g))^{-1} ;$$

l'application β de $G \times G$ dans Γ définie par

$$\beta(g, g') = s(r(g g')). s(r(g'))^{-1}. s(r(g))^{-1}$$

est un 2 - cocycle ; enfin il existe un morphisme p de G dans X vérifiant $v \circ p = r$ si et seulement si β est un cobord [si β est le cobord d'une application α , on peut prendre $p(g) = \alpha(g). s(r(g))$].

On démontre que si G est le groupe des réels, ou un groupe de Lie semi-simple simplement connexe, ou le groupe de Poincaré, et si Γ est le groupe des complexes de module 1 avec action triviale de G dans Γ , tout 2 - cocycle borélien β est le cobord d'une application borélienne α (Varadarajan [2], th. 10.38) ; si de plus β est continu au point (e,e), α est continu en e (voir par exemple Størmer [5]).

Appendice E | DÉSINTÉGRATIONS

§ E.1. Mesure associée à une sous-algèbre commutative du commutant.

Considérons une C^* - algèbre unifère A et un état φ sur A ; notons H, π, ξ les objets associés à φ par la construction de Gelfand - Segal, $\underline{E}$ l'ensemble des états sur A, compact pour la topologie faible, $\underline{P}$ l'ensemble des états purs, $\underline{F}$ celui des états factoriels.

Soit B une sous-algèbre de von Neumann commutative de $\pi(A)'$; posons $E = \overline{B\xi}$ et notons P le projecteur orthogonal sur E ; il appartient à B' ; l'algèbre commutative B_E admet le vecteur totalisateur ξ, donc est commutative maximale, i.e. $B_E = (B_E)' = B'_E$; l'ensemble $\pi(A)_E$ des opérateurs $\pi(a)_E$ où $a \in A$ est inclus dans B_E puisque $\pi(A) \subset B'$; l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)_E$ est identique à B_E puisqu'elle admet aussi le vecteur totalisateur ξ ; enfin, puisque E est séparateur pour B, l'application canonique $B \longmapsto B_E$ est un isomorphisme. Ceci étant, on sait (cf. Sakaï [1]) associer à B une mesure positive normée μ sur $\underline{E}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) μ a pour barycentre φ, i.e. $\varphi(a) = \int \psi(a).d\mu(\psi) = \mu(\tilde{a})$ pour tout $a \in A$, en notant $\tilde{a}$ la fonction sur $\underline{E}$: $\psi \longmapsto \psi(a)$;

(ii) $$\mu(\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n) = (\pi(a_1).P.\pi(a_2).P\dots P.\pi(a_n).\xi \mid \xi) \qquad (1)$$ pour tous $a_1, \dots a_n \in A$;

(iii) il existe un isomorphisme Λ de B_E sur $L^{\infty}(\underline{E}, \mu)$ tel que
$$\mu(\Lambda(T).\tilde{a}) = (T.P.\pi(a).\xi \mid \xi) \quad \forall\, T \in B_E,\ a \in A \quad ; \quad (2)$$

(iv) Λ transforme, pour tout $a \in A$, $\pi(a)_E$ en l'image canonique de $\tilde{a}$ dans $L^{\infty}(\underline{E}, \mu)$;

(v) μ peut être construite comme suit : notons C la sous - C^*- algèbre de B_E engendrée par $\pi(A)_E$, $\hat{C}$ son spectre, et ν la mesure positive normée sur $\hat{C}$ correspondant à l'état $\omega_\xi \mid C$ par l'isomorphisme de Gelfand ; soit V l'application continue de $\hat{C}$ dans $\underline{E}$ définie par $V(\chi)(a) = \chi(\pi(a)_E)$ pour tout $\chi \in \hat{C}$; alors μ est l'image de ν par V ;

(vi) la propriété (ii) caractérise μ (cela résulte du théorème de Stone - Weierstrass, d'après lequel les fonctions $\tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_n$ sont totales dans $\underline{C}(\underline{E})$);

(vii) la propriété (iii) caractérise μ et la relation (2) caractérise Λ .

Dans la suite nous noterons μ_B et Λ_B les objets μ et Λ définis ci-dessus.

§ E.2. Propriétés de l'application $B \longmapsto \mu_B$.

Nous désignerons par Ω l'ensemble des mesures positives normées sur $\underline{E}$ de barycentre φ , et $\prec$ la relation d'ordre de Choquet - Bishop - de Leeuw sur Ω, c'est-à-dire que l'on a $\mu \prec \nu$ si et seulement si $\mu(f) \leq \nu(f)$ pour toute fonction f convexe continue sur $\underline{E}$; $B \longmapsto \mu_B$ est donc une application de l'ensemble des sous-algèbres de von Neumann commutatives de $\pi(A)'$ dans Ω .

Deux états φ_1 et φ_2 sont dits disjoints si les représentations associées sont disjointes, ce qui revient à dire qu'il existe un projecteur z de Z (centre de A^{**}) vérifiant $\varphi_1(z) = 1$ et $\varphi_2(z) = 0$. Une mesure positive normée μ sur $\underline{E}$ sera dite déliée si, pour tout sous-ensemble μ - mesurable X de $\underline{E}$ tel que X et $\underline{E}$ - X soient non μ- négligeables, les états

$$\int_X \psi \,.d\mu(\psi)/\mu(X) \quad \text{et} \quad \int_{\underline{E}-X} \psi \,.d\mu(\psi)/\mu(\underline{E}-X)$$

sont disjoints.

Ceci étant, on a les propriétés suivantes :

(i) on a $\mu_{B_1} \prec \mu_{B_2}$ si et seulement si $B_1 \subset B_2$; en particulier l'application $B \longmapsto \mu_B$ est injective (cf. Ruelle [1], cor.1.5).

(ii) Si A est séparable, μ_B est portée par $\underline{P}$ si et seulement si $\underline{B}$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\pi(A)'$ (cf. Sakaï [1] et Dang Ngoc [1]).

(iii) L'application $B \longmapsto \mu_B$ est surjective si et seulement si $\pi(A)'$ est commutative (cf. Dang Ngoc [1]).

(iv) Si $B = \pi(A)' \cap \pi(A)''$ et si A est séparable, μ_B est portée par $\underline{F}$.

(v) μ_B est déliée si et seulement si $B \subset \pi(A)' \cap \pi(A)''$, et toute mesure déliée de Ω s'obtient de cette façon (cf. Sakaï, th. 3.5.5).

(vi) Soit α un automorphisme de A conservant φ , U l'opérateur unitaire dans H caractérisé par $\pi(\alpha(a)) = U.\pi(a).U^{-1}$ $\forall a \in A$ et $U\xi = \xi$; alors $\mu_{UBU^{-1}}$ est la transformée de μ_B par la permutation ${}^t\alpha$ de $\underline{E}$, transposée de α (on le voit facilement en utilisant la relation (1)). En particulier μ_B est invariante par ${}^t\alpha$ si et seulement si B est globalement invariante par U ; si ces conditions sont réalisées, la relation (2) montre aisément que Λ_B est covariante en ce sens que pour tout $T \in B_E$, $\Lambda_B((UTU^{-1})_E)$ est transformée de $\Lambda_B(T)$ par ${}^t\alpha$.

§ E.3. Relations avec la théorie de la réduction.

On suppose ici A séparable. En utilisant une suite partout dense dans A, on peut munir le champ d'espaces hilbertiens $\underline{E} \ni \psi \longmapsto H_\psi$ d'une structure canonique de champ borélien (voir définition dans Dixmier [2], App. A 96 ; pour la suite, voir Guichardet- Kastler [1]). Soit μ une mesure positive normée sur $\underline{E}$; les champs $\psi \longmapsto H_\psi$, ξ_ψ, π_ψ sont mesurables ; posons

$$\varphi = \int \psi . d\mu(\psi) \ , \ H = H_\varphi \ , \ \pi = \pi_\varphi \ , \ \xi = \xi_\varphi$$

$$\bar{H} = \int^{\oplus} H_\psi . d\mu(\psi) \ , \ \bar{\pi} = \int^{\oplus} \pi_\psi . d\mu(\psi) \ , \ \bar{\xi} = \int^{\oplus} \xi_\psi \, d\mu(\psi)$$

$\underline{Z}$ = algèbre des opérateurs diagonalisables dans $\bar{H} \subset \bar{\pi}(A)'$.

Il existe une application linéaire isométrique V de H dans $\bar{H}$ telle que

$$V(\pi(a).\xi) = \bar{\pi}(a).\bar{\xi} \qquad \forall \, a \in A \ ;$$

V entrelace π et $\bar{\pi}$; son image est le sous-espace $K = \overline{\bar{\pi}(a).\bar{\xi}}$; le support de K dans le centre de $\bar{\pi}(A)''$ contient tous les vecteurs de la forme $T\bar{\pi}(a)\bar{\xi}$ où $T \in \underline{Z}$; il est donc égal à $\bar{H}$, et π <u>est quasi-équivalente à</u> $\bar{\pi}$; si $\underline{Z}$ est incluse dans $\pi(A)''$ (ce qui se produit si et seulement si μ est déliée), V est surjective, et π <u>est équivalente à</u> $\bar{\pi}$.

Revenons maintenant à la situation décrite au § 1, où l'on a des objets A, φ, H, ξ, π, $B \subset \pi(A)'$, μ_B, Λ_B noté Λ ; ce qui précède montre que π est quasi-équivalente à la représentation $\int^{\oplus} \pi_\psi . d\mu_B(\psi)$; si B est commutative maximale dans $\pi(A)'$, μ_B est portée par $\underline{P}$, et on a obtenu une désintégration d'une représentation quasi-équivalente à π en représentations irréductibles. Supposons $B \subset \pi(A)' \cap \pi(A)''$; d'après la propriété (v) du § 2, μ_B est déliée, donc V est surjective ; de plus V transforme tout élément b de B en l'opérateur $T_{\Lambda(b_E)}$ de multiplication par la fonction $\Lambda(b_E)$ [on le voit en vérifiant que

$$(V\, b\, \pi(a')\, \xi \mid \bar{\pi}(a)\, \bar{\xi}) = (T_{\Lambda(b_E)}\, V\pi(a')\, \xi \mid \bar{\pi}(a)\, \bar{\xi}) \qquad \forall\, a, a' \in A\,];$$

on a donc ici une désintégration de π qui diagonalise B ; si en particulier on prend $B = \pi(A)' \cap \pi(A)''$, cette désintégration est la désintégration centrale de π .

§ E.4. Mesures Y - centrales.

Nous reprenons ici une C^* - algèbre unifère séparable A et nous nous donnons une sous - W^* - algèbre Y de Z (centre de A^{**}).

Soit φ un état de A ; nous savons, d'après l'étude faite au § E.1, associer à la sous-algèbre $B = \pi_\varphi(Y)$ une mesure sur $\underline{E}$ de barycentre φ ; nous la noterons μ ou μ_φ et l'appellerons mesure Y - centrale de φ . Nous dirons qu' une mesure positive normée sur $\underline{E}$ est Y - centrale si c'est la mesure Y - centrale de son barycentre ; lorsque $Y = Z$ on dit centrale au lieu de Z - centrale. La mesure μ_φ jouit donc des propriétés suivantes :

(i) $\mu_\varphi(\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n) = (\pi_\varphi(a_1).P.\pi_\varphi(a_2)\dots P.\pi_\varphi(a_n).\xi_\varphi \mid \xi_\varphi)$

$\forall\, a_1, \dots a_n \in A$, où P est le projecteur sur $\overline{\pi_\varphi(Y).\xi_\varphi}$;

(ii) il existe un morphisme normal Λ_φ de Y sur $L^\infty(\underline{E}, \mu_\varphi)$ tel que

$$\mu_\varphi(\Lambda_\varphi(y).\tilde{a}) = \varphi(y\, a) \qquad \forall\, y \in Y\, ,\ a \in A\ ; \tag{3}$$

(iii) chacune des propriétés (i) et (ii) caractérise μ_φ , et (3) caractérise Λ_φ ;

(iv) μ_φ est déliée .

De plus toute mesure centrale est portée par $\underline{F}$.

Définition. Un état φ est dit Y - pur si la restriction à Y de son prolongement canonique à A^{**} est multiplicative (i.e. est un caractère de Y) ; ou encore si l'algèbre $\pi_\varphi(Y)$ est réduite aux scalaires. Les états Z - purs sont exactement les états factoriels.

Il est clair que la mesure Y - centrale d'un état Y - pur φ est égale à δ_φ. On ignore si toute mesure Y - centrale est portée par l'ensemble des états Y - purs.

Si A est commutative, la mesure centrale d'un état φ n'est autre que la mesure sur $\hat{A}$ associée à φ par la transformation de Gelfand ; l'ensemble des mesures centrales est donc convexe ; on peut montrer que réciproquement, si l'ensemble des mesures centrales est convexe, A est commutative. On voit donc qu'en général l'application $\varphi \longmapsto \mu_\varphi$ ne peut pas être affine.

§ E.5. Comparaison des mesures Y - centrales de deux états.

Soit φ un état ; la relation (3) entraîne que pour tout $y \in Y$ on a $\mu_\varphi(\Lambda_\varphi(y)) = \varphi(y)$, d'où aussi $\mu_\varphi(|\Lambda_\varphi(y)|) = \varphi(|y|)$; si donc on note $L^1(Y, \varphi)$ le séparé-complété de Y pour la semi-norme $y \longmapsto \varphi(|y|)$, Λ_φ se prolonge en un isomorphisme $\bar{\Lambda}_\varphi$ de $L^1(Y, \varphi)$ sur $L^1(\underline{E}, \mu_\varphi)$. D'autre part $L^1(Y, \varphi)$ s'identifie à $L^1(\hat{Y}, \nu)$ où ν est la mesure sur $\hat{Y}$ associée à φ, et on peut parler de $L^1(Y, \varphi)^+$. Soit x un élément de cet espace vérifiant $\varphi(x) = 1$; on peut considérer x comme un élément non borné affilié à Y et définir un état normal $\psi = x\varphi$ sur A^{**} par

$$\psi(a) = \varphi(x\, a) \qquad \forall\ a \in A^{**} ;$$

enfin on peut considérer ψ comme un état sur A. Ceci étant, on démontre que $\mu_\psi = \bar{\Lambda}_\varphi(x).\mu_\varphi$ et que Λ_ψ est le composé de Λ_φ avec l'application canonique de $L^\infty(\underline{E}, \mu_\varphi)$ dans $L^\infty(\underline{E}, \bar{\Lambda}_\varphi(x).\mu_\varphi)$ [pour le voir, on approche x par une suite croissante d'éléments de Y]. On déduit facilement de là que, étant donné un état φ, un autre état ψ est de la forme $x\varphi$ avec

$x \in L^1(Y, \varphi)^+$, $\varphi(x) = 1$, si et seulement si μ_ψ est absolument continue par rapport à μ_φ ; et que toute mesure positive sur $\underline{E}$, absolument continue par rapport à une mesure Y - centrale, est elle-même Y - centrale.

BIBLIOGRAPHIE

Akemann C.A. [1] The Dual Space of an Operator Algebra. Trans.Amer.Math.Soc., t. 126, 1967, p. 286-302.

Aribaud F. [1] Sur le théorème de Alaoglu - Birkhoff. Séminaire Choquet (Initiation à l'analyse), 1970/71, n° 15.

Arnold V.I. - Avez A. [1] Problèmes ergodiques de la Mécanique classique. Gauthier-Villars, Paris 1967.

Blattner R. [1] Automorphic group representations. Pacific J.Math., t.8, 1958, p. 665-677.

Borchers H.J. [1] Strongly Continuous Automorphism Groups on C^* - algebras. Institut d'études scientifiques de Cargèse, Ecole d'été 1969.

[2] On the Implementability of Automorphism Groups. Commun.Math. Phys., t.14, 1969, p.305-314.

Bourbaki N. [1] Intégration.

Brunel A. - Dang Ngoc N. [1] Systèmes dynamiques associés aux caractères réels

Chatard J. [1] Applications des propriétés de moyenne d'un groupe localement compact à la théorie ergodique. Thèse, Paris, juin 1972.

Combes F. [1] Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann. Bull.Soc.Math.France, t.99, 1971, p.73-112.

Connes A. [1] Une classification des facteurs de type III. Ann.Sci.Ec.Norm.Sup.

[2] Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann. C.R.Acad.Sci., t. 274, 1972, p. 1923-1926.

Dang Ngoc N. [1] On the classification of dynamical systems. Ann.Inst.H.Poincaré.

[2] Partie finie d'un système dynamique etc. Zeitsch.für Wahrsch.

[3] Décomposition des systèmes dynamiques etc. Bull.Soc.Math.France.

[4] Classification of dynamical systems etc. Ibid.

[5] On the integral representation of states on a C^*-algebra (a paraître).

[6] Classification des systèmes dynamiques non commutatifs. J.Funct.Anal.

Dang Ngoc N. - Ledrappier F. [1] Systèmes dynamiques simpliciaux (à paraître).

Dixmier J. [1] Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier - Villars, Paris, 1969.

[2] Les C^* - algèbres et leurs représentations. Gauthier - Villars, Paris, 1969.

[3] Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive. Trans. Amer.Math.Soc., t.104, 1962, p.278-283.

Doplicher S. - Kadison R.V. - Kastler D. - Robinson D.W. [1] Asymptotically Abelian Systems. Commun.Math.Phys., t.6, 1967, p.101-120.

Doplicher S. - Kastler D. [1] Ergodic States in a Non Commutative Ergodic Theory. Commun.Math.Phys., t.7, 1968, p.1-20.

Doplicher S. - Kastler D. - Robinson D.W. [1] Covariance Algebras in Field Theory and Statistical Mechanics. Commun.Math.Phys., t.3, 1966, p. 1-28.

Doplicher S. - Kastler D. - Størmer E. [1] Invariant States and Asymptotic Abelianness. J.Funct.Anal., t.3, 1969, p. 419-434.

Dye H.A. [1] On groups of measure preserving transformations I. Amer.J.Math., t.81, 1959, p. 119-159.

[2] idem II. ibid. t.8 5, 1963, p. 551-576.

Eberlein W.F. [1] Abstract Ergodic Theorems and Weak Almost Periodic Functions. Trans.Amer.Math.Soc., t. 67, 1949, p. 217-240.

Effros E.G. [1] Order Ideals in a C^* - algebra and its Dual. Duke Math.J., t. 30, 1963, p. 391-412.

Eilenberg S. - Mac Lane S. [1] Cohomology Theory in Abstract Groups. I, II, Ann.Math., t.48, 1947, p. 51-78 et 326-341.

Elliott G. [1] Finite projections in tensor products of von Neumann algebras.

[2] Convergence of automorphisms in certain C^* - algebras. J.Funct. Anal., t.11, 1972, p.204-206.

Guichardet A. [1] Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes. Bull.Soc.Math.France, t.89, 1961, p.77-101.

[2] Sur la décomposition des mesures quasi-invariantes en mesures ergodiques. C.R.Acad.Sci., t.257, 1963, p. 1747-1748.

[3] Sur la décomposition des représentations des C^* - algèbres. C.R.Acad.Sci., t. 258, 1964, p. 768-770.

[4] Tensor products of C^* - algebras, I, II. Aarhus University Lecture Notes Series, N° 12, 1969.

[5] Sur les systèmes dynamiques non commutatifs. C.R.Acad.Sci.

[6] Sur la catégorie des algèbres de von Neumann. Bull.Sciences Math., t.90, 1966, p. 41-64.

[7] Algèbres d'observables associées aux relations de commutation. A.Colin, Paris, 1968

Guichardet A. - Kastler D. [1] Désintégration des états quasi-invariants des C^* - algèbres. J.Math.pures et appl.,t.49, 1970, p. 349-380

Haag R. - Kadison R.V. - Kastler D. [1] Nets of C^* - algebras and Classification of states. Commun.Math.Phys., t.16, 1970, p. 81-104.

Haagerup U. [1] The standard form of von Neumann algebras. Math.Inst.Copenhagen, Preprint Series, n° 15, 1973.

[2] Normal weights on W^*- algebras. Ibid, n°17, 1973.

Hajian A. - Ito K. - Kakutani S. [1] Invariant Measures and Orbits of Dissipative Transformations. Advances in Math., t.8, 1972, p. 52-65.

Halmos P.R. [1] Lectures on Ergodic Theory. Math.Soc.Japan, Tokyo, 1956.

[2] Invariant Measures. Ann.Math., t.48, 1947, p.735-754.

Hegerfeldt G. [1] On canonical commutation relations and infinite dimensional measures. J.Math.Phys., t. 13, 1972, p. 45-50.

Herman R.H. [1] Invariant States. Trans.Amer.Math.Soc., t.158, 1971, p.503-512.

Herman R.H.-Takesaki M. [1] States and automorphism groups of operator algebras (a paraître).

Hopf E. [1] Theory of measures and invariant integrals. Trans.Amer.Math.Soc., t. 34, 1932, p. 373-393.

Hugenholtz N.M. [1] On the factor type of equilibrium states in quantum statistical mechanics. Commun.Mayh.Phys., t.6, 1967, p. 189-193.

Hulanicki A.- Phelps R.R. [1] Some applications of tensor products of partially ordered linear spaces. J.Funct.Anal., t.2, 1968, p. 177-201.

Jadczyk A.Z. [1] On some groups of automorphisms of von Neumann algebras with cyclic and separating vectors. Commun.Math.Phys.,t.13,1969,142-153.

Johnson B.E. [1] Cohomology in Banach algebras. Mem.Amer.Math.Soc., n° 127.

Kadison R.V. [1] States and representations. Trans.Amer.Math.Soc., t. 103, 1962, p. 304-319.

Kadison R.V. - Pedersen G.K. [1] Equivalence in operator algebras. Math.Scand., t. 27, 1970, p. 205-222.

Kallman R.R. [1] Groups of inner automorphisms of von Neumann algebras. J.Funct. Anal., t. 7, 1971, p. 43-60.

Kastler D. - Mebkhout M. - Loupias G. - Michel L. [1] Central decomposition of invariant states ... Commun.Math.Phys., t.27, 1972, p.195-222.

Kastler D. - Robinson D.W. [1] Invariant states in statistical mechanics. Commun.Math.Phys., t. 3, 1966, p. 151-180.

Kawada Y. [1] Über die Existenz des invarianten Integrals. Jap.J.Math., t. 19, 1944, p. 81-95.

Kovacs I. - Szücs J. [1] Ergodic type theorems in von Neumann algebras. Acta Sc.Math., t. 27, 1966, p. 233-246.

Krieger W. [1] On constructing non - * - isomorphic hyperfinite factors of type III. J.Funct.Anal., t. 6, 1970, p. 97-109.

Lanford O. - Ruelle D. [1] Integral representations of invariant states on B^*-algebras. J.Math.Phys., t.8, 1967, p. 1460-1463.

Mackey G.W. 1 Ergodic transformation groups with a pure point spectrum. Illinois J.Math. , t.8, 1964, p.593.

Moore C.C. [1] Restriction of unitary representations to subgroups and ergodic theory. Battelle Seattle 1969 Rencontres on Group Representations in Math. and Physics. Lecture Notes in Physics n° 6. Springer V.

Nagel B. [1] Some results in non-commutative ergodic theory. Commun.Math.Phys., t. 26, 1972, p. 247-258.

Nest R. [1] Invariant weights of operator algebras satisfying the K.M.S. condition. Math.Inst. Copenhagen, Preprint Series, n° 10, 1973.

Pedersen G.K. - Størmer E. [1] Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras II (à paraître).

Pedersen G.K. - Takesaki M. [1] The Radon - Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta Math., t. 130, 1973, p. 53-87.

Petersen N.H. [1] Invariant weights on semi-finite von Neumann algebras. (à paraître).

Riesz F. - Nagy B.Sz. [1] Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars,

Robinson D.W. [1] Statistical mechanics of quantum spin system II. Commun. Math.Phys., t. 7, 1968, p. 337.

Robinson D.W. - Ruelle D. [1] Extremal invariant states. Ann.Inst.Henri Poincaré, t. 6, 1967, p. 299.

Ruelle D. [1] Integral representation of states on a C^* - algebra. J.Funct. Anal., t. 6, 1970, p. 116-151.

[2] Symmetry breakdown in statistical mechanics. Institut d'études scientifiques de Cargèse, Ecole d'été 1969.

[3] Statistical Mechanics, Benjamin 1969.

Ryll-Nardzewski G. [1] On fixed points of semi-groups of endomorphisms of linear spaces. Proc.V th.Berkeley Symp.Math.Stat.Prob., vol.II, part II, p.51-61, 1967.

Saito K. [1] Automorphism groups of von Neumann algebras and ergodic type theorems (à paraître).

Sakaï S. [1] C^* - algebras and W^* - algebras. Erg.Math., n° 60 (Springer V.)

Segal I.E. [1] Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field. Illinois J.Math., t.6, 1962, p. 500-523.

Shale D.-Stinespring W.F. [1] States of the Clifford algebra. Ann.Math., t.80, 1964, p. 365-381.

Sherman S. [1] Order in operator algebras. AmerJ.Math., t.73, 1951, p.227-232.

Størmer E. [1] States and invariant maps of operator algebras. J.Funct.Anal., t. 5, 1970, p. 44-65.

[2] Large groups of automorphisms of C^*- algebras. Commun.Math.Phys., t. 5, 1967, p. 1-22.

[3] Types of von Neumann algebras associated with extremal invariant states. Commun.Math.Phys., t. 6, 1967, p. 194-204.

[4] Symmetric states of infinite tensor products of C^*- algebras. J.Funct.Anal., t. 3, 1969, p. 48-68.

[5] Automorphisms and invariant states of operator algebras. Acta Math., t. 127, 1971, p. 1-9.

[6] Asymptotically abelian systems. Institut d'études scientifiques de Cargèse, Ecole d'été 1969.

[7] Invariant states of von Neumann algebras. Math.Scand., t. 30, 1972, p. 253-256.

[8] Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras. Pac.J. Math., t.44, 1973, p. 371-383.

[9] Spectra of states and asymptotically abelian C^* - algebras. Commun.Math.Phys., t.28, 1972, p. 279-294.

[10] Spectra of ergodic transformations (à paraître).

[11] On infinite tensor products of von Neumann algebras. Amer.J.Math., t. 43, 1971, p. 810-818.

Takesaki M. [1] Covariant representations of C^*- algebras and their locally compact automorphism groups. Acta Math.,t.111,1967,p.273-303.

[2] Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. Lecture Notes in Math. n° 128 (Springer V.).

[3] Conditional expectations in von Neumann algebras. J.Funct. Anal., t. 9, 1972, p. 306-321.

Van Daele A. [1] The upper envelope of invariant functionals majorized by an invariant weight (à paraître).

Tomiyama J. [1] Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras. University of Copenhagen , 1970.

[2] On some types of maximal abelian subalgebras. J.Funct.Anal., t. 9, 1972, p. 373-386.

Varadarajan V.S. [1] Groups of automorphisms of Borel spaces. Trans.Amer.Math. Soc., t. 109, 1963, p. 191-220.

[2] Geometry of quantum theory. II. Van Nostrand, 1970.

Zeller-Meier G. [1] Produits croisés d'une C^*- algèbre par un groupe d'automorphismes. J.Math.pures appl., t.47, 1968, p. 101-239.

Index terminologique

Index des notations

ENGLISH SUMMARY

The first part of this seminar is devoted to the study of W^*- dynamical systems, that is pairs $\underline{F} = (\underline{A},G)$ where $\underline{A}$ is a (abstract) W^*- algebra and G a group acting on $\underline{A}$ by automorphisms ; since W^*- algebras are the non-commutative analogue of the L^∞ - algebras, the theory of these systems can be viewed as a Non-commutative Ergodic Theory ; actually a number of results of this last theory are extended to the non-commutative case ; these extensions give in turn some classical results on W^*- algebras when applied to the case where G is the group of all inner automorphisms. The non-commutative aspect of the present theory is, of course, related to physical considerations : roughly speaking, in the applications to Quantum Physics, $\underline{A}$ is the algebra of all observables of a physical system, while G is a group of symmetries of the system ; similarly in the Wightman axiomatic Quantum Field Theory, the reconstruction of a field from the so-called Wightman functionals is achieved by a Gelfand - Segal type construction applied to a state of an algebra acted upon by the Poincaré group.

The second (and shortest) part is devoted to C^*- dynamical systems, that is pairs (A,G) where A is a C^* - algebra acted upon by a group G.

Our main tools in the present study are : (i) W^*- algebras (the by now classical theory of traces, and the more recent theory of weights, modular automorphisms, densities and conditional expectations) ; (ii) weakly almost periodic functions on locally compact groups and their means, replacing the use of amenable groups, Godement's and Wiener's means ; (iii) to a less extent the cohomology of topological groups, used principally in connection with the search for weights or traces which are invariant under groups of automorphisms.

The seminar is divided into eleven chapters and five appendices devoted to short expositions of W^*- algebras, Ergodic Theory, Abstract Ergodic Theorems, Cohomology of groups, Desintegration of states. The eleven chapters are as follows.

Chapter I : various notions, among others crossed products which are used at several places, and also the definition of finite or semi-finite dynamical systems, and of the largest invariant projection e such that the induced system $(e\,\underline{A}\,e\ ,\ G)$ is finite (théorème I.1).

Chapter II : the main result (théorème II.1) is the existence (and uniqueness for a few natural properties) of a conditional expectation E^G of $\underline{A}$ into $\underline{A}^G$, the set of invariant elements in $\underline{A}$; its image is $\underline{A}^G e$; it is used to give various characterizations of finite dynamical systems. If $\underline{F}$ is finite, G is locally compact and acts continuously, $E^G(a)$ can be considered as the mean of the elements g.a (théorème II.4). We also give several properties of invariant weights, and applications to conditional expectations of W^*- algebras onto their maximal commutative subalgebras (théorème II.10).

Chapter III : one of the main results (corollaire III.2) is the existence of a G - invariant normal semi-finite faithful trace provided that $\underline{A}$ and $\underline{F}$ are semi-finite together with an additional requirement which is fulfilled in particular if $\underline{A}$ or $\underline{F}$ is finite. The same proof applies to yield a result in ergodic theory (corollaire III.1) concerning the existence of measures invariant under two transformation groups. We give applications to the type of $\underline{A}$ when G is, roughly speaking, ergodic (corollaires III.4 and III.5).

Chapter IV : we introduce an equivalence relation between the projections of $\underline{A}$ which generalizes both the ordinary (von Neumann) equivalence relation between the projections of an arbitrary W^* - algebra, and the Hopf equivalence relation between the subsets in ergodic theory ; this relation yields new characterizations of finite or semi-finite dynamical systems (théorème IV.1).

Chapter V : we introduce a number of conditions weaker than the commutativity of $\underline{A}$; the weakest of them demands that the set of all G - invariant normal states is a simplex, and is shown to be equivalent to the G - abelianness introduced by Lanford and Ruelle ; another condition (Størmer's "largness") also admits a global characterization (condition (C 3) in § V.2) ; the two strongest conditions are the "weak asymptotic abelianness" and the "asymptotic abelianness" introduced by Doplicher, Kadison, Kastler and Robinson.

ChapterVI:we consider a dynamical system $\underline{F}$ where $\underline{A}$ acts in a Hilbert space, G is implemented by a unitary representation, and we assume that there exists a vector which is cyclic for $\underline{A}$ and invariant under G ; we introduce various conditions analogous to the ergodicity (ergodicity itself, ergodicity on the center of $\underline{A}$, unicity of the G - invariant vector, mixing and weak mixing, etc.) ; many of them collapse if $\underline{F}$ satisfies some of the conditions of chapter V. Then we give several properties of the spectrum of the representation, generalizing known properties of ergodic theory : stability under conjugation or tensor product, multiplicity of the spectrum.

Chapter VII is devoted to Krieger's construction associating W^*- algebras to some commutative dynamical systems, and yielding a good (better than the crossed product) correspondance between properties of the dynamical system and of the W^*- algebra. This allows us to give several new results on commutative dynamical systems.

Chapter VIII : general properties of C^* - dynamical systems, e.g. induced representations and crossed products.

Chapter IX : various properties of subcommutativity in the spirit of chapter V ; various properties of ergodicity for the invariant states, and the relations between them ; for instance a dynamical system is semi-large iff every centrally ergodic state is extremal (corollary IX.1).

Chapter X : study of various properties of states, weaker than the invariance : covariance and quasi-invariance. Existence, characterization and desintegration of such states.

Chapter XI is devoted to a number of examples, principally symmetric states of infinite tensor products, and the algebra of the canonical anticommutation relations of quantum mechanics.

×

× ×

We now indicate, for the use of mathematicians having worked on Non Commutative Dynamical Systems, the principal new results which have been obtained while the seminar was held :

Theorem I.1 : definition and properties of the largest finite invariant projection.

Theorem II.1 (generalisation of a result of Kovács and Szücs) : construction of a canonical conditional expectation of $\underline{A}$ into the fixed algebra $\underline{A}^G$.

Theorem II.6 : unicity of invariant weight for an ergodic system.

Theorem II.8 : if the dynamical system is finite, the restriction to $\underline{A}^G$ of an invariant normal semi-finite weight is also semi-finite.

Lemma II.2 : a new characterization of finite von Neumann algebras by means of the various dynamical systems $(\underline{A}, \{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ where $g \in \mathrm{Int}\, \underline{A}$.

Theorem III.1 : existence of weights which are invariant under two automorphism groups, with application to commutative dynamical systems (corollary III.1).

Theorems V.2, V.4 : new characterizations for G - abelian or large systems ; equivalence of known notions, like G - abelian, G'-abelian, simplicial.

Corollary VI.4 : a property of the ergodic M - abelian systems with pure point spectrum.

Proposition VII.5 and what follows : further properties of the von Neumann algebras constructed by W.Krieger.

Corollary IX.1 : characterization of simplicial or semi-large dynamical systems by the fact that various notions of ergodicity for states are identical.