

# *Astérisque*

JOËL BRIANÇON

**Weierstrass préparé à la Hironaka**

*Astérisque*, tome 7-8 (1973), p. 67-73

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1973\\_\\_7-8\\_\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__67_0)

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# WEIERSTRASS PRÉPARÉ A LA HIRONAKA

WEIERSTRASS PREPARE A LA HIRONAKA

José BRIANÇON

INTRODUCTION . - On donne une démonstration d'une généralisation du théorème de préparation classique de Weierstrass : généralisation en ce sens que l'on divise un germe de fonction analytique par plusieurs autres, par rapport à plusieurs coordonnées.

La démonstration donnée ici s'inspire de la démonstration du théorème classique faite par M. HOUZEL dans le cours de C 4 qui consiste à perturber un isomorphisme d'espaces de Banach ; ici, perdant l'unicité de la division, on se contentera de perturber un épimorphisme.

L'intérêt du théorème est de pouvoir construire, étant donné un idéal de séries convergentes, un changement de coordonnées et un système de générateurs de l'idéal plus "simple" que les autres, ce que HIRONAKA [1] appelle une "donnée distinguée" .

## NOTATIONS .

1 . -  $K$  étant une algèbre de Banach commutative et  $\rho = (\rho_1 \dots \rho_r) \in (\mathbb{R}^{+*})^r$  un poly-rayon, on désigne par  $K(\rho)$  l'algèbre des séries entières à  $r$  indéterminées à coefficients dans  $K$ ,  $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_A Y^A$

telles que  $\|f\| = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} \|f_A\| \rho^A < +\infty$  .

$K(\rho)$  munie de la norme ci-dessus est une algèbre de Banach.

2 . - Etant donné  $p$ -multiindices  $E_1, E_2 \dots E_p$  de  $\mathbb{N}^r$ , on note  $\Delta = \bigcup_{i=1}^p (E_i + \mathbb{N}^r)$ , et  $R(\Delta, \rho)$  le sous-espace de Banach de  $K(\rho)$  des

séries  $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_A Y^A$  de  $K(\rho)$  telles que  $f_A = 0$  pour tout  $A \in \Delta$  .

## BRIANÇON

3. -  $L$  désignera une forme linéaire positive non nulle  $L : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $L(a_1, \dots, a_r) = \sum_{j=1}^r \ell_j a_j$ , les coefficients  $\ell_j$  étant des nombres réels positifs non tous nuls.

On remarquera que pour tout  $B \in \mathbb{N}^r$ , il existe un nombre  $\alpha(B)$  réel positif strictement tel que  $A \in \mathbb{N}^r$  et  $L(A - B) > 0$  implique  $L(A - B) \geq \alpha(B)$ .

En effet, on peut supposer tout d'abord que les  $\ell_j$  sont tous strictement positifs, et s'apercevoir alors que  $L(A) \leq L(A')$  implique que pour tout  $j = 1 \dots r$ ,  $a_j \leq \frac{1}{\ell_j} L(A')$ ; il n'y a donc qu'un nombre fini de multiindices  $A$  tels que  $L(A) \leq L(A')$ .

### I. - DIVISIONS ELEMENTAIRES.

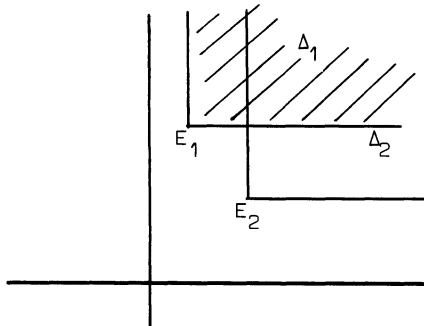
Dans un élément  $f$  de  $K(\rho)$ , on va mettre en facteur  $Y^{E_i}$  ( $i = 1 \dots p$ ) autant de fois qu'il est possible de le faire. Plus précisément, soit  $H(\rho) = K(\rho)^p \otimes R(\Delta, \rho)$  l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|(g_1 \dots g_p ; h)\| = \sum_{i=1}^p \rho^{E_i} \|g_i\| + \|h\| \quad ; \quad \text{et}$$

$$\varphi_1 : H(\rho) \rightarrow K(\rho) \text{ le morphisme } \varphi_1(g_1 \dots g_p ; h) = \sum_{i=1}^p g_i Y^{E_i} + h.$$

LEMME 1. -  $\varphi_1$  est un épimorphisme qui envoie la boule unité de  $H(\rho)$  sur la boule unité de  $K(\rho)$ .

Preuve. - On choisit une partition  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \dots \cup \Delta_p$  de  $\Delta$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $\Delta_i \subset E_i + \mathbb{N}^r$ . (Par exemple  $\Delta_1 = E_1 + \mathbb{N}^r$ ,  $\Delta_2 = (E_2 + \mathbb{N}^r) - \Delta_1, \dots$ )



Tout élément  $f$  de  $K(\rho)$  s'écrit : 
$$\sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_A Y^A = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{A \in \Delta_i} f_A Y^A \right) + \sum_{A \notin \Delta} f_A Y^A$$
, autrement dit,  $f = \sum_{i=1}^p g_i Y^{E_i} + h$  où l'on a posé :

$$\begin{cases} g_i = \sum_{A \in \Delta_i} f_A Y^{A-E_i} & \text{pour } i = 1 \dots p \\ h = \sum_{A \notin \Delta} f_A Y^A \end{cases}$$

De plus, comme l'on a fait une partition de  $\mathbb{N}^r = (\Delta_1 \cup \Delta_2 \dots \cup \Delta_p) \cup (\mathbb{N}^r - \Delta)$  on a égalité des normes :

$$\|f\| = \sum_{i=1}^p \|Y^{E_i} g_i\| + \|h\| = \sum_{i=1}^p \rho^{E_i} \|g_i\| + \|h\| .$$

II . - PERTURBATION DE  $\varphi_1$  .

Soient  $\tau > 0$ ,  $0 < \eta < 1$ ,  $\rho$  le poly-rayon  $\rho = (\tau\eta^{\ell_1}, \tau\eta^{\ell_2}, \dots, \tau\eta^{\ell_r})$ .

Pour chaque indice  $i = 1, \dots, p$ , on se donne des séries  $u_i = \sum_{L(A) > L(E_i)} u_{iA} Y^A$ ,

et  $v_i$  de  $K(\tau)$  (où  $\tau$  désigne ici le poly-rayon  $(\tau, \tau, \dots, \tau)$ ) .

Soit  $\varphi_2 = H(\rho) \rightarrow K(\rho)$  le morphisme défini par  $\varphi_2(g_1, \dots, g_p; h) = \sum_{i=1}^p (u_i + v_i)g_i$ .

LEMME 2 . -

$$\|\varphi_2\| \leq \sup_{i=1 \dots p} \{ \tau^{-|E_i|} (\eta^{\alpha_i} \|u_i\|_{K(\tau)} + \eta^{-L(E_i)} \|v_i\|_{K(\tau)}) \}$$

où  $|E_i|$  désigne la longueur du multiindice  $E_i$   
 $\alpha_i = \alpha(E_i)$  défini dans les notations au n° 3 .

Preuve . - Il suffit de calculer :

$$\|\varphi_2(g_1 \dots g_p; h)\| \leq \sum_{i=1}^p \rho^{E_i} \|g_i\| [ \|u_i\| \rho^{-E_i} + \|v_i\| \rho^{-E_i} ]$$

où les normes sont calculées dans  $K(\rho)$  sauf indication contraire.

BRIANÇON

$$\|u_i\|_{\rho}^{-E_i} = \sum_{L(A - E_i) > 0} \|u_{iA}\|_{\rho}^{A - E_i} = \sum_{L(A - E_i)} \|u_{iA}\|_{\tau}^{|A - E_i|} \eta^{L(A - E_i)}$$

donc 
$$\|u_i\|_{\rho}^{-E_i} \leq \tau^{-|E_i|} \eta^{\alpha_i} \|u_i\|_{K(\tau)} .$$

Conséquence . -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \eta^{\alpha_i} < \frac{\tau^{|E_i|}}{2} (\|u_i\|_{K(\tau)})^{-1} \\ \text{(ii)} \quad \|v_i\|_{K(\tau)} < \frac{\tau^{|E_i|} \eta^{L(E_i)}}{2} \end{array} \right.$$

pour  $i = 1 \dots p$ , impliquent  $\|\varphi_2\| < 1$  et donc  $\varphi_1 + \varphi_2$  épimorphisme.

(Si l'on perturbe un épimorphisme  $\varphi_1$  par un épimorphisme  $\varphi_2$  de norme inférieure à la conorme de  $\varphi_1$ , l'on obtient encore un épimorphisme  $\varphi_1 + \varphi_2$ ).

III . - THEOREME I . - Etant donnés :

L une forme positive sur  $\mathbb{R}^r$

$f_1, \dots, f_p$  des éléments de  $\mathbb{C}\{X, Y\}$  où  $X = (X_1; \dots; X_q)$ ,

$Y = (Y_1, \dots, Y_r)$  vérifiant :

(\*)  $\forall i = 1 \dots p$ ,  $\exists E_i \in \mathbb{N}^r$  tel que, dans le développement de  $f_i$

$f_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_{iA} Y^A$  par rapport à  $Y$  à coefficients dans  $\mathbb{C}\{X\}$ , on a

1)  $f_{iE_i}(0) \neq 0$

2)  $f_{iA}(0) = 0$  pour tout  $A \in \mathbb{N}^r$ ,  $A \neq E_i$  et  $L(A) \leq L(E_i)$ .

Alors, pour tout  $g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ , il existe des séries  $g_1 \dots g_p$ ,  $h$  de  $\mathbb{C}\{X, Y\}$  telles que

1) 
$$g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$$

2) 
$$h = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} h_A Y^A \text{ avec } h_A = 0 \text{ pour } A \in \Delta = \bigcup_{i=1}^p (E_i + \mathbb{N}^r) .$$

Preuve . - On peut évidemment supposer  $f_{iE_i}(0) = 1$ , et, à cause de la condition

(\*) écrire :  $f_i - Y^{E_i} = u_i + v_i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = \sum_{L(A - E_i) > 0} f_{iA} Y^A \\ v_i = \sum_{\substack{L(A - E_i) \leq 0 \\ A \neq E_i}} f_{iA} Y^A \end{array} \right. \text{ avec } v_i(0, Y) = 0$$

On suppose les séries convergentes dans le polydisque  $|x| \leq v_0$ ,  $|y| \leq \tau_0$ , et pour tout  $v < v_0$ , on pose  $K_v = \mathbb{C}(v)$  (voir notations n° 1); pour tout  $\tau < \tau_0$  on a :

(iii)  $\|u_i\|_{K_v}(\tau) \leq \|u_i\|_{K_{v_0}}(\tau_0)$

(iv) pour tout coefficient  $f_{iA}$  tel que  $f_{iA}(0) = 0$ , on a

$$\|f_{iA}\|_{K_v} \leq \frac{v}{v_0} \|f_{iA}\|_{K_{v_0}} \text{ et par conséquent}$$

$$\|v_i\|_{K_v}(\tau) \leq \frac{v}{v_0} \|v_i\|_{K_{v_0}}(\tau_0)$$

Pour tout  $\tau < \tau_0$  on choisit successivement :

-  $\eta$  assez petit pour que  $\eta^{\alpha_i} < \frac{\tau |E_i|}{2} (\|u_i\|_{K_{v_0}}(\tau_0))^{-1}$

quel que soit  $i = 1 \dots p$ , ce qui implique (i) pour  $K = K_v$  quel que soit  $v < v_0$  en vertu de (iii).

-  $v$  assez petit pour que  $\frac{v}{v_0} \|v_i\|_{K_{v_0}}(\tau_0) < \frac{1}{2} \cdot \tau \frac{|E_i|}{\eta} L(E_i)$

quel que soit  $i = 1 \dots p$ , ce qui implique (ii) pour  $K = K_v$  en vertu de (iv).

On sait donc trouver un système fondamental de poly-disques  $(v, \rho)$  de  $\mathbb{C}^{q+r}$  tels que l'application

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(g_1 \dots g_p; h) = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$$

soit un épimorphisme de  $H_v(\rho)$  sur  $K_v(\rho)$ .

Le passage à la limite inductive prouve le théorème.

## BRIANÇON

IV . - ADDENDUM : où il est question d'unicité .

Dans le théorème I , on n'a pas en général l'unicité du reste de la division ; plus précisément, il y a équivalence entre les deux propositions :

(i) Pour tout élément  $g$  de  $\mathbb{C}\{X, Y\}$  le reste de la division est unique.

(ii) Si  $f = \sum_{A \notin \Delta} f_A Y^A$  est dans l'idéal engendré par  $f_1, \dots, f_p$ , alors

il est nul.

Il suffit donc de donner quelques définitions dans ce sens pour obtenir le théorème de division par un idéal, avec unicité du reste.

On impose dorénavant les conditions :  $q = 0$  et

(\*\*)  $L$  est une forme linéaire positive dont les coefficients  $(l_j)_{j=1 \dots r}$  sont indépendants sur  $\mathbb{Z}$  .

DEFINITION 1 . - Etant donné un élément non nul  $f$  de  $\mathbb{C}\{Y\}$ , on appelle exposant privilégié de  $f$  pour la direction  $L$  le multi indice  $E = \exp_L(f)$  tel que :

$$1) f_E(0) \neq 0$$

$$2) f_A(0) = 0 \text{ pour tout } A \in \mathbb{N}^r \text{ et } L(A) < L(E)$$

(la condition (\*\*)) implique l'unicité de  $E$  ) .

DEFINITION 2 . - Etant donné un idéal  $I$  de  $\mathbb{C}\{Y\}$ , on appelle ensemble des privilégiés de  $I$  pour la direction  $L$  l'ensemble  $E_L(I)$  des exposants privilégiés des éléments de  $I$  .

On vérifie facilement :  $\exp_L(fg) = \exp_L(f) + \exp_L(g)$  et  $A \in E_L(I)$  implique  $A + \mathbb{N}^r \subset E_L(I)$  .

DEFINITION 3 . - On appelle frontière distinguée de  $E_L(I)$  la plus petite partie (finie)  $F_L(I)$  telle que  $E_L(I) = \bigcup_{E \in F_L(I)} [E + \mathbb{N}^r]$  .

Enfin une base standard de  $I$  pour la direction  $L$  est une famille  $(f^E)_E \in F_L(I)$  d'éléments de  $I$  telle que  $\exp_L(f^E) = E$  pour tout multi indice de  $F_L(I)$  .

Le théorème II est une conséquence triviale du théorème I et des définitions :

THEOREME II . - Etant donnés :

L une forme linéaire positive sur  $\mathbb{R}^r$  vérifiant :

(\*\*) les coefficients  $(l_j)_{j=1\dots r}$  de L sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$  .

I un idéal de  $\mathbb{C}\{Y\}$  ,  $E_L(I)$  l'ensemble des privilégiés de I dans la direction L ,  $F_L(I)$  la frontière distinguée de  $E_L(I)$  et  $(f^E)_E \in F_L(I)$  une base standard de I ; on a

1) I est engendré par  $(f^E)_E \in F_L(I)$

2) Tout élément  $g \in \mathbb{C}\{Y\}$  est équivalent modulo I à un unique élément h de la forme : 
$$h = \sum_{A \notin E_L(I)} h_A Y^A$$

Remarque . - La condition (\*\*), commode pour la démonstration du Théorème II , n'est pas indispensable : en faisant varier la forme linéaire L on pourrait, par un passage à la limite assez délicat, obtenir un théorème analogue sans la condition (\*\*).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. HIRONAKA - M. LEJEUNE - B. TEISSIER  
 Résolution des singularités des espaces analytiques complexes. (à paraître).