JEAN-PAUL SPEDER

Éclatements jacobiens et conditions de Whitney

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 47-66

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__47_0>

ECLATEMENTS JACOBIENS ET CONDITIONS DE WHITNEY

Jean-Paul SPEDER

INTRODUCTION : Ce papier fait suite à l'article "Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney" ([1]) dont nous rappelons les principaux résultats.

Nous étudions ici la situation "relative" suivante :

Soient X un espace $\mathbb{C}$-analytique réduit de dimension pure et Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X. Nous supposons qu'il existe une "bonne" rétraction $\rho : X \longrightarrow Y$ et nous notons $X_{sing,\rho}$ le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ), $X_{lisse,\rho} = X - X_{sing,\rho}$.

Nous donnons un critère qui permet de vérifier les conditions de Whitney pour le couple $(X_{lisse,\rho}, Y)$ le long de Y ([6] page 540) et qui est stable par changement de base (sur Y).

Plus précisément, soient $\omega_\rho : \hat{X}_\rho \longrightarrow X$ l'éclatement de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ) J_ρ, $\hat{H}_\rho$ et $\hat{Y}_\rho$ les espaces réduits de support respectif $\omega_\rho^{-1}(X_{sing,\rho})$ et $\omega_\rho^{-1}(Y)$. Nous montrons, d'après une idée d'H.Hironaka ([2] page 9, Définition 2), le :

THEOREME : Si en tout point de $\hat{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho : \hat{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, le couple $(X_{lisse,\rho}, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y.

Les démonstrations s'inspirent souvent de celles de ([1]), nous nous contentons alors de les donner brièvement en renvoyant le lecteur à celles-là.

Ayant identifié $\mathbb{C}^M$ au produit cartésien $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p$ (où $M = s+p$, $s > 1$, $p \geq 0$) à l'aide du système canonique de coordonnées $(z_1,\dots,z_M)$, considérons un sous-ensemble $\mathbb{C}$-analytique réduit X d'un ouvert $D \times Y$ de $\mathbb{C}^M$ de codimension r en tout point ($s > r > 0$) et défini par des fonctions holomorphes $f_1,\dots,f_q$ (i.e $f_1,\dots,f_q$ engendrent l'idéal des fonctions qui s'annulent sur X).

Nous notons ρ: $X \longrightarrow Y$ la rétraction de X sur Y induite par la projection canonique $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$ et nous supposons que :

* ρ est un morphisme plat de X sur Y
* pour tout point $S \in Y$, la fibre $X_s = \rho^{-1}(\{S\})$ est réduite
* Y est inclus dans le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ) : $X_{sing,\rho}$.

Dans ces conditions, si I est l'idéal de Y dans X et J l'idéal jacobien de X, I est l'idéal engendré par $z_1,\dots,z_s$ et J est l'idéal engendré par les déterminants :

$$D(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{i_1},\dots,z_{i_r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_1}}, \dots, \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_{i_r}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_1}}, \dots, \frac{\partial f_{j_r}}{\partial z_{i_r}} \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} j_1,\dots,j_r \in \{1,\dots,q\} \\ i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,M\} \end{array}$$

De même, l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ) J_ρ (qui définit $X_{sing,\rho}$) est engendré par les déterminants :

$$D(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{i_1},\dots,z_{i_r}) \text{ où } j_1,\dots,j_r \in \{1,\dots,q\} \text{ et } i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,s\}$$

Notons $\omega : \hat{X} \longrightarrow X$ (resp $\tilde{\omega} : \tilde{X} \longrightarrow X$) l'éclatement (resp. l'éclatement normalisé) de X le long de IJ, $\hat{Y}$ (resp. $\tilde{Y}$) l'espace réduit de support $\omega^{-1}(Y)$ (resp. $\tilde{\omega}^{-1}(Y)$) ; $\omega_\rho : \hat{X}_\rho \longrightarrow X$ (resp $\tilde{\omega}_\rho$: $\tilde{X}_\rho \longrightarrow X$) l'éclatement (resp. l'éclatement normalisé) de X le long de IJ_ρ , $\hat{Y}_\rho$ (resp $\tilde{Y}_\rho$) l'espace réduit de support $\omega_\rho^{-1}(Y)$ (resp. $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(Y)$), $\hat{H}_\rho$ (resp $\tilde{H}_\rho$) l'espace réduit de support $\omega_\rho^{-1}(X_{sing,\rho})$ (resp. $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(X_{sing,\rho})$).

Enfin, pour $j_1,\dots,j_r \in \{1,\dots,q\}$ et $i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,M\}$, notons

$\tilde{D}(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{i_1},\dots,z_{i_r})$

(resp. $\tilde{D}_\rho\,(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{i_1},\dots,z_{i_r})$) la fonction $D(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{i_1},\dots,z_{i_r}) \circ \tilde{\omega}$ (resp. $D(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{i_1},\dots,z_{i_r}) \circ \tilde{\omega}_\rho$) .

<u>PROPOSITION $\tilde{1}$.</u> ([1] PROPOSITION 1).

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{Y}$ la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega}$: $\tilde{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : dim $\tilde{Y}$ - dim Y , alors les conditions suivantes sont satisfaites :

<u>Condition $\tilde{A}$)</u> : Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$, tout (r-1)-uple $(i_2,\dots,i_r)$ de $\{1,\dots, M\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$, nous avons :

$$\tilde{D}(f_{j_1},\dots f_{j_r} \; ; \; z_{s+k} \, , \, z_{i_2},\dots,z_{i_r})_{\tilde{Q}} \in IJ\,\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{Q}}$$

<u>Condition $\tilde{B}$)</u> :

Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, il existe un entier $\sigma(\tilde{Q}) > 0$ tel que, pour tout $(r-1)$-uple $(i_2,\ldots i_r)$ de $\{1,\ldots, M\}$ et tout r-uple $(j_1,\ldots,j_r)$ de $\{1,\ldots,q\}$, nous ayons :

$$\left(\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}\, \tilde{D}(f_{j_1},\ldots,f_{j_r} \; ; \; z_i, z_{i_2},\ldots,z_{i_r})\right)_{\tilde{Q}}^{\sigma(\tilde{Q})} \in I^{\sigma(\tilde{Q})+1} J^{\sigma(\tilde{Q})} \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{Q}}$$

<u>REMARQUE $\tilde{1}$</u> : Si X est une hypersurface définie par une fonction f , les conditions $\tilde{A}$) et $\tilde{B}$) deviennent :

<u>Condition $\tilde{A}$)</u> :

Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$ et tout indice $k \in \{1,\ldots,p\}$ nous avons :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega}\right]_{\tilde{Q}} \in IJ\, \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{Q}}$$

<u>Condition $\tilde{B}$)</u> :

Pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}$, il existe un entier $\sigma(\tilde{Q}) > 0$ tel que nous ayons :

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega} \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega}\right]_{\tilde{Q}}^{\sigma(\tilde{Q})} \in I^{\sigma(\tilde{Q})+1} J^{\sigma(\tilde{Q})} \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{Q}}$$

PROPOSITION 1 :

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de $\hat{Y}$, la fibre correspondante du morphisme $\omega : \hat{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y} - \dim Y$, alors les conditions $\tilde{A})$ et $\tilde{B})$ sont satisfaites.

Preuve :

Comme la normalisation est un morphisme à fibres finies, l'hypothèse de la PROPOSITION 1 entraîne immédiatement l'hypothèse de la PROPOSITION $\tilde{1}$.

PROPOSITION $\tilde{1}_\rho$:

Si en tout point de $\tilde{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \tilde{\omega}_\rho \; : \; \tilde{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{H}_\rho - \dim Y$, alors les conditions suivantes sont satisfaites :

Condition $\tilde{A}_\rho$) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$, tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$, tout $(r-1)$-uple $(i_2,\dots,i_r)$ de $\{1,\dots,M\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots,j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$ nous avons :

$$\tilde{D}_\rho \; (f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{s+k} \; , \; z_{i_2},\dots z_{i_r})_{\tilde{S}} \in IJ_\rho \, \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$$

Condition $\tilde{B}_\rho$) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$, il existe un entier $\sigma(\tilde{S}) > 0$ tel que pour tout $(r-1)$-uple $(i_2,\dots i_r)$ de $\{1,\dots,M\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots j_r)$ de $\{1,\dots q\}$, nous ayons :

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \;\; \tilde{D}_\rho \; (f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_i \; , \; z_{i_2},\dots z_{i_r})\right]_{\tilde{S}}^{\sigma(\tilde{S})}$$

$$\in I^{\sigma(\tilde{S})+1} \quad J_\rho^{\sigma(\tilde{S})} \; \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$$

Preuve :

Elle s'inspire de celle de la PROPOSITION 1 de ([1]).
Soit $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$. Il existe un voisinage ouvert $\tilde{W}$ de $\tilde{S}$ dans $\tilde{X}_\rho$ tel qu'en tout point de $\tilde{W} \cap \tilde{H}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme :

$$\rho o \tilde{\omega}_\rho \ : \tilde{H}_\rho \longrightarrow Y$$

soit de dimension : dim $\tilde{H}_\rho$ - dim Y .

Nous montrons la PROPOSITION $\tilde{I}_\rho$ (qui est trivialement vérifiée en tout point de $\tilde{W} - \tilde{H}_\rho$) en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{W} \cap \tilde{H}_\rho$ puis, comme $\tilde{W}$ est un espace normal et les idéaux $I\mathcal{O}_{\tilde{W}}$ et $J_\rho \mathcal{O}_{\tilde{W}}$ sont inversibles, nous en déduisons alors la proposition en tout point de $\tilde{W}$ (c.f [1] PROPOSITION 1).
Plus précisément, soit :

$$\tilde{U} = \tilde{X}_{\rho\,lisse} \cap \{\tilde{Q} \in \tilde{H}_{\rho\,lisse} \cap \tilde{W} : \rho \circ \tilde{\omega}_\rho : \tilde{H}_{\rho\,lisse} \longrightarrow Y \text{ est une submersion en } \tilde{Q}\}.$$

C'est un ouvert analytique dense de $\tilde{W} \cap \tilde{H}_\rho$, l'espace $\tilde{W} - \tilde{U}$ est donc de codimension ≥ 2 dans $\tilde{W}$.
Nous avons, d'autre part, de façon évidente, le :

LEMME $\tilde{I}_\rho$:

Soient $\tilde{I}_\rho$ l'idéal $\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho}$ définissant $\tilde{Y}_\rho$ et $\tilde{Y}_{\rho\,lisse} = \bigcup_\alpha \tilde{Y}_{\rho,\alpha}$ la décomposition de $\tilde{Y}_{\rho\,lisse}$ en composantes connexes.

Pour tout indice α, il existe un et un seul entier $\sigma_\alpha > 0$ tel que, pour tout point $\tilde{Q} \in \tilde{X}_{\rho\,lisse} \cap \tilde{Y}_{\rho,\alpha}$, nous ayons :

$$I\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{Q}} = \tilde{I}^{\sigma_\alpha}_{\rho,\tilde{Q}}$$

Prenons alors un point $\tilde{Q} \in \tilde{U}$ et quitte à transporter l'origine des coordonnées dans $\mathbb{C}^M$ au point $\tilde{\omega}_\rho(\tilde{Q})$, supposons que $\tilde{\omega}_\rho(\tilde{Q}) = 0$.

Il existe un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de $\tilde{Q}$ dans $\tilde{X}_{\rho\,\text{lisse}}$ et des fonctions $y, v_1, \ldots, v_{s-r-1}$ holomorphes dans $\tilde{V}$ tels que :

1) $\tilde{V} \cap \tilde{H}_\rho = \tilde{V} \cap \tilde{H}_{\rho\,\text{lisse}}$

2) $\tilde{V} \cap \tilde{H}_\rho = \{\tilde{p} \in \tilde{V} : y(\tilde{p}) = 0\}$

3) $\{\tilde{V} ; (y, v_1, \ldots, v_{s-r-1}, z_{s+1} \circ \tilde{\omega}_\rho, \ldots, z_M \circ \tilde{\omega}_\rho)\}$ soit une carte de $\tilde{X}_{\rho\,\text{lisse}}$ au voisinage de $\tilde{Q}$ adaptée à la submersion $\rho \circ \tilde{\omega}_\rho : \tilde{H}_{\rho\,\text{lisse}} \longrightarrow Y$.

De plus, si $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_\rho$, il existe un indice α tel que $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\rho,\alpha}$; il résulte alors du LEMME $\tilde{1}_\rho$ que, pour tout i, $1 \leq i \leq s$, $(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)_{\tilde{Q}}$ peut se mettre sous la forme $(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)_{\tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^{\sigma_\alpha} g_{i\tilde{Q}}$ où $g_{i\tilde{Q}}$ est un germe de $\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho, \tilde{Q}}$ qui est inversible si $(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)_{\tilde{Q}}$ engendre $I\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho, \tilde{Q}}$.

Démonstration de la condition $\tilde{A}_\rho$) en $\tilde{Q}$:

Nous avons (c.f [1] PROPOSITION 1) :

$$\tilde{D}_\rho(f_{j_1}, \ldots, f_{j_r} ; z_{s+k}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r})_{\tilde{Q}} = -\left[\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)}{\partial(z_{s+k} \circ \tilde{\omega}_\rho)} \times \tilde{D}_\rho(f_{j_1}, \ldots, f_{j_r} ; z_i, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r})\right]_{\tilde{Q}}$$

d'où la condition $\tilde{A}_\rho$) si $\tilde{Q} \notin \tilde{Y}_\rho$ (par induction sur le nombre des indices $i_2, \ldots, i_r$ qui sont $\geq s+1$) .

Si $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\rho,\alpha}$, la condition $\tilde{A}_\rho$) résulte alors de l'égalité :

$$\left[\frac{\partial(z_i \circ \tilde{\omega}_\rho)}{\partial(z_{s+k} \circ \tilde{\omega}_\rho)}\right]_{\tilde{Q}} = y_{\tilde{Q}}^{\sigma_\alpha} \left[\frac{\partial g_i}{\partial(z_{s+k} \circ \tilde{\omega}_\rho)}\right]_{\tilde{Q}}$$

Démonstration de la condition $\tilde{B}_\rho$) en $\tilde{Q}$:

Nous pouvons maintenant supposer que $i_2,\dots,i_r \in \{1,\dots,s\}$ (sinon $\sigma(\tilde{Q})=1$ convient d'après la condition $\tilde{A}_\rho$)) . La condition $\tilde{B}_\rho$) est alors évidente si $\tilde{Q} \notin \tilde{Y}_\rho$ ($\sigma(\tilde{Q}) = 1$) . Si $\tilde{Q} \in \tilde{Y}_{\rho,\alpha}$, la condition $\tilde{B}_\rho$) résulte alors de l'égalité (c.f [1] PROPOSITION 1) :

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \, \tilde{D}_\rho(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \,;\, z_i \,,\, z_{i_2},\dots,z_{i_r})\right]_{\tilde{Q}} = \frac{-1}{\sigma_\alpha} y_{\tilde{Q}}^{\sigma_\alpha+1} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial g_i}{\partial y} \tilde{D}_\rho(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \,;\, z_i \,,\, z_{i_2},\dots,z_{i_r})\right]_{\tilde{Q}}$$

REMARQUE $\tilde{\Upsilon}_\rho$: Si X est une hypersurface définie par une fonction f , les conditions $\tilde{A}_\rho$) et $\tilde{B}_\rho$) deviennent :

Condition $\tilde{A}_\rho$) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$ et tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$, nous avons :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega}_\rho\right]_{\tilde{S}} \in IJ_\rho \, \sigma_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$$

Condition $\tilde{B}_\rho$) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{Y}_\rho$, il existe un entier $\sigma(\tilde{S}) > 0$ tel que nous ayons :

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega}_\rho\right]_{\tilde{S}}^{\sigma(\tilde{S})} \in I^{\sigma(\tilde{S})+1} J_\rho^{\sigma(\tilde{S})} \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$$

PROPOSITION 1_ρ :

Si en tout point de $\hat{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho : \hat{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : dim $\hat{H}_\rho$ - dim Y , alors les conditions $\tilde{A}_\rho$) et $\tilde{B}_\rho$) sont satisfaites .

Preuve :

Analogue à celle de la PROPOSITION 1.

PROPOSITION 2 ([1] PROPOSITION 2) :

Soit S un point de Y .

Les conditions a) et b) de Whitney pour le couple (X_{lisse} - Y, Y) en S le long de Y sont équivalentes aux :

Condition A) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$, tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$, tout (r-1)-uple $(i_2,\dots i_r)$ de $\{1,\dots,M\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots,j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$:

$$\tilde{D}(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_{s+k} \; , \; z_{i_2},\dots,z_{i_r})_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $J\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{S}}$.

Condition B) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}$ (S) tout(r-1)-uple $(i_2,\dots i_r)$ de $\{1,\dots,M\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$:

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega} \, \tilde{D}(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \; ; \; z_i \; , \; z_{i_2},\dots z_{i_r})\right]_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $IJ\,\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{S}}$

REMARQUE 2 : Si X est une hypersurface définie par une fonction f , les conditions A) et B) deviennent :

Condition A) :

Pour tout point $S \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$ et tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega}\right]_{\tilde{S}} \text{ n'engendre pas } J\,\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{S}}$$

Condition B) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$:

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}\ \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega}\right]_{\tilde{S}} \text{ n'engendre pas } IJ\,\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{S}}$$

PROPOSITION 2_ρ :

Soit S un point de Y . Les conditions a) et b) de Whitney pour le couple $(X_{lisse,\rho}\,;\, Y)$ en S le long de Y sont équivalentes aux :

Condition A_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$, tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$, tout indice $\ell \in \{1,\dots,r\}$, tout r-uple $(i_1,\dots,i_r)$ de $\{1,\dots,s\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots,j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$ tel que

$\tilde{D}_\rho(f_{j_1},\dots,f_{j_r}\,;\, z_{i_1},\dots,z_{i_r})_{\tilde{S}}$ engendre $J_\rho\,\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$, nous avons :

$$\tilde{D}_\rho(f_{j_1},\dots,f_{j_r}\,;\, z_{s+k}, z_{i_1},\dots,\hat{z}_{i_\ell},\dots,z_{i_r})\,\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}} \subsetneq J_\rho\,\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$$

Condition B_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$, tout indice $\ell \in \{1,\dots,r\}$, tout r-uple $(i_1,\dots,i_r)$ de $\{1,\dots,s\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots,j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$ tel que

$$\tilde{D}_\rho(f_{j_1},\dots,f_{j_r}\,;\, z_{i_1},\dots,z_{i_r})_{\tilde{S}} \text{ engendre } J_\rho\,\mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}\ ,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \quad \tilde{D}_\rho(f_{j_1},\dots,f_{j_r} \,;\, z_i \,,\, z_{i_1},\dots,\hat{z}_{i_\ell},\dots,z_{i_r})\right]_{\tilde{S}}$$

n'engendre pas $IJ_\rho \, \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho}, \tilde{S}$

Preuve :

Elle s'inspire de celle de la PROPOSITION 2 de ([1]).

Les conditions A_ρ) et B_ρ) entraînent les conditions a) et b) :

Soit $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$.

Nous pouvons supposer que $i_1 = j_1 = 1,\dots,i_r = j_r = r$.

Dans ces conditions, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$ et tout $\ell \in \{1,\dots,r\}$, nous avons, d'après la condition A_ρ) :

$$\lim_{\substack{\tilde{R} \longrightarrow \tilde{S} \\ \tilde{R} \in \tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho}} \frac{\tilde{D}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_{s+k} \,,\, z_1,\dots,\hat{z}_\ell,\dots,z_r)(\tilde{R})}{\tilde{D}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_1,\dots z_r)(\tilde{R})} = 0$$

et, d'après la condition B_ρ) :

$$\lim_{\substack{\tilde{R} \longrightarrow \tilde{S} \\ \tilde{R} \in \tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho}} \frac{\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\tilde{R})\, \tilde{D}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_i,\, z_1,\dots,\hat{z}_\ell,\dots,z_r)(\tilde{R})}{\sqrt{\sum_{1 \le i \le s} | z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\tilde{R})|^2 \tilde{D}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_1,\dots,z_r)(\tilde{R})}} = 0$$

Les conditions a) et b) en S se montrent alors comme dans la PROPOSITION 2 de ([1]).

Les conditions a) et b) entraînent les conditions A_ρ) et B_ρ) :

Soit $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$.

Nous pouvons encore supposer que $i_1 = j_1 = 1,\dots i_r = j_r = r$.

Pour toute suite : $(\tilde{R}_m)_m$ de points de $\tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho$ telle que $\lim_{m\to\infty} \tilde{R}_m = \tilde{S}$, nous avons, d'après la condition a) en S, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$ et tout $\ell \in \{1,\dots,r\}$:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\tilde{\mathcal{D}}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_{s+k}, z_1,\dots,\hat{z}_\ell,\dots,z_r)(\tilde{R}_m)}{\tilde{\mathcal{D}}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_1,\dots,z_r)(\tilde{R}_m)} = 0 \text{ (c.f [1] PROPOSITION 2)}$$

d'où

$$\lim_{\substack{\tilde{R} \longrightarrow \tilde{S} \\ \tilde{R} \in \tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho}} \frac{\tilde{\mathcal{D}}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_{s+k}, z_1,\dots,\hat{z}_\ell,\dots,z_r)(\tilde{R})}{\tilde{\mathcal{D}}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_1,\dots,z_r)(\tilde{R})} = 0$$

Nous en déduisons que $\tilde{\mathcal{D}}_\rho\, (f_1,\dots,f_r \,;\, z_{s+k}, z_1,\dots,\hat{z}_\ell,\dots,z_r)_{\tilde{S}}$ appartient à $J_\rho \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$ ([4] page 114 Remark) mais ne l'engendre pas.

De même, d'après la condition b) en S, nous avons, pour tout $\ell \in \{1,\dots,r\}$:

$$\lim_{\substack{\tilde{R} \longrightarrow \tilde{S} \\ \tilde{R} \in \tilde{X}_\rho - \tilde{H}_\rho}} \frac{\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\tilde{R})\, \tilde{\mathcal{D}}_\rho\, (f_1,\dots,f_r : z_i, z_1,\dots,\hat{z}_\ell,\dots,z_r)(\tilde{R})}{\sqrt{\sum_{1 \le i \le s} |\, z_i \circ \tilde{\omega}_\rho(\tilde{R})\,|^2}\; \tilde{\mathcal{D}}_\rho(f_1,\dots,f_r \,;\, z_1,\dots,z_r)(\tilde{R})} = 0 \text{ (c.f [1] PROPOSITION 2)}$$

d'où la condition B_ρ) .

<u>REMARQUE</u> 2_ρ : Si X est une hypersurface définie par une fonction f, les conditions A_ρ) et B_ρ) deviennent :

<u>Condition</u> A_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$ et tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$ nous avons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_{s+k}} \circ \tilde{\omega}_\rho\right)_{\tilde{S}} \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}} \subsetneq J_\rho \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\tilde{S}}$$

<u>Condition</u> B_ρ) :

Pour tout point $\tilde{S} \in \tilde{\omega}_\rho^{-1}(S)$:

$$\left[\sum_{i=1}^{s} z_i \circ \tilde{\omega}_\rho \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ \tilde{\omega}_\rho\right]_{\tilde{S}} \quad \text{n'engendre pas} \quad IJ_\rho\, \mathcal{O}_{\tilde{X}_\rho,\, \tilde{S}} .$$

<u>PROPOSITION 3</u> :

Si le couple $(X_{lisse} - Y\ ,\ Y)$ vérifie la condition a) de Whitney le long de Y , nous avons :

i) $J\,\mathcal{O}_{\tilde{X}/\tilde{Y}} = J_\rho\,\mathcal{O}_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ et $J\,\mathcal{O}_{X/\hat{Y}} = J_\rho\,\mathcal{O}_{X/\hat{Y}}$

ii) X_{sing} et $X_{sing,\rho}$ coïncident au voisinage de Y .

iii) Il existe un isomorphisme canonique $\varphi : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}_\rho$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \hat{Y} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\omega"'] & & \hat{Y}_\rho \arrow[dl, "\omega_\rho"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

iv) Si $Y = X_{sing,\rho}$ (cas où les fibres X_s sont lisses en dehors de Y) , il existe un isomorphisme canonique $\psi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}_\rho$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\tilde{\omega}"'] & & \tilde{X}_\rho \arrow[dl, "\tilde{\omega}_\rho"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u> :

i) C'est une conséquence immédiate de la PROPOSITION 2 .

ii) Supposons le contraire : il existe un point $S \in Y$ et une suite $(R_m)_m$ de points de $X_{lisse} \cap X_{sing,\rho}$ telle que $\lim_{m \to \infty} R_m = S$. Pour tout m , il existe un et un seul point $\tilde{R}_m \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{\omega}(\tilde{R}_m) = R_m$ et comme $\tilde{\omega}$ est propre, nous pouvons supposer qu'il existe $S \in \tilde{\omega}^{-1}(S)$ tel que $\lim_{m\to\infty} \tilde{R}_m = \tilde{S}$.

Or, puisque nous avons la condition a) en S , pour tout indice $k \in \{1,\dots,p\}$, tout $(r-1)$-uple $(i_2,\dots,i_r)$ de $\{1,\dots,M\}$ et tout r-uple $(j_1,\dots j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$, $\tilde{D}(f_{j_1},\dots,f_{j_r}\ ;\ z_{s+k}\ ,\ z_{i_2},\dots,z_{i_r})_{\tilde{S}}$ n'engendre pas $\mathcal{J}\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{S}}$

Il existe donc un r-uple $(i_{o,1},\dots,i_{o,r})$ de $\{1,\dots,s\}$ et un r-uple $(j_{o,1},\dots,j_{o,r})$ de $\{1,\dots,q\}$ tel que $D(f_{j_{o,1}},\dots,f_{j_{o,r}}\ ;\ z_{i_{o,1}},\dots,z_{i_{o,r}})(R_m) = 0$ entraîne $D(f_{j_1},\dots,f_{j_r}\ ;\ z_{i_1},\dots,z_{i_r})(R_m) = 0$ pour tout r-uple $(i_1,\dots,i_r)$ de $\{1,\dots,M\}$, tout r-uple $(j_1,\dots,j_r)$ de $\{1,\dots,q\}$ et tout m suffisamment grand. D'où $R_m \in X_{sing}$ pour m suffisamment grand : contradiction.

iii) D'après ii) nous pouvons supposer que $X_{sing} = X_{sing,\rho}$. Intéressons-nous au cas où X est une hypersurface définie par une fonction f et prenons comme modèle d'éclatement de X le long de IJ et IJ_ρ les projections canoniques respectives sur X des fermetures dans $X \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^M$ et $X \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s$ respectivement, des graphes de :

$$X_{lisse} \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^M$$

$$Q \longmapsto \left[((z_1(Q),\dots,z_s(Q)))\ ,((\frac{\partial f}{\partial z_1}(Q),\dots,\frac{\partial f}{\partial z_M}(Q)))\right]$$

et de $$X_{lisse} \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^s \times \mathbb{P}\mathbb{C}^s$$

$$Q \longmapsto \left[((z_1(Q),\dots,z_s(Q)))\ ,\ ((\frac{\partial f}{\partial z_1}(Q),\dots,\frac{\partial f}{\partial z_s}(Q)))\right]$$

L'isomorphisme canonique $Y \times \mathbb{PC}^s \times \mathbb{PC}^M_p \longrightarrow Y \times \mathbb{PC}^s \times \mathbb{PC}^s$, où $\mathbb{PC}^M_p$ désigne la sous-variété de $\mathbb{PC}^M$ formée des éléments dont les p dernières composantes sont nulles, induit, d'après la PROPOSITION 2, un isomorphisme $\hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}_\rho$ commutant avec les projections sur Y. Cet isomorphisme est obtenu par "passage à la limite" de l'isomorphisme canonique $\omega^{-1}(X_{lisse}) \longrightarrow \omega_\rho^{-1}(X_{lisse})$.

Le cas général (r quelconque) se traite de la même façon.

iv) D'après i) nous avons $IJ\,\sigma_{\hat{X}} = IJ_\rho\,\sigma_{\hat{X}}$.

Il existe donc, d'après la propriété universelle de l'éclatement, un morphisme (unique) : $\varphi : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}_\rho$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\omega"'] & & \hat{X}_\rho \arrow[dl, "\omega_\rho"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Le morphisme φ induit les isomorphismes canoniques $\hat{X} - \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_\rho - \hat{Y}_\rho$ et $\hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}_\rho$ (cf iii)), il est donc bijectif. Nous en déduisons que le morphisme canonique $\tilde{X} \longrightarrow \hat{X}_\rho$ ainsi défini est surjectif, à fibres finies et qu'il induit un isomorphisme : $\tilde{X} - \tilde{Y} \longrightarrow \hat{X}_\rho - \hat{Y}_\rho$; comme $\tilde{X} - \tilde{Y}$ et $\hat{X}_\rho - \hat{Y}_\rho$ sont denses dans $\tilde{X}$ et $\hat{X}_\rho$ respectivement, il s'ensuit que $\tilde{X} \longrightarrow \hat{X}_\rho$ est une normalisation de $\hat{X}_\rho$ d'où iv).

Nous allons maintenant donner des théorèmes "globaux" correspondants aux propositions "locales" que nous venons de démontrer.

Soient X un espace $\mathbb{C}$-analytique réduit de dimension pure et Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X.

Soient $\omega : \hat{X} \longrightarrow X$ (resp $\tilde{\omega} : \tilde{X} \longrightarrow X$) l'éclatement (resp l'éclatement normalisé) de X le long du produit de l'idéal de Y par l'idéal jacobien de X, et $\hat{Y}$ (resp $\tilde{Y}$) l'espace réduit de support $\omega^{-1}(Y)$ (resp $\tilde{\omega}^{-1}(Y)$).

THEOREME I :

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de $\hat{Y}$, la fibre correspondante du morphisme $\omega : \hat{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y} - \dim Y$, le couple $(X_{lisse} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y.

Preuve :

Ce théorème étant de nature locale, nous sommes ramenés à la situation décrite au début de l'article (sans tenir compte toutefois des hypothèses relatives à la rétraction ρ).

Il suffit de remarquer que les conditions $\tilde{A}$) et $\tilde{B}$) de la PROPOSITION 1 entraînent de façon évidente les conditions A) et B) de la PROPOSITION 2.

Nous obtenons en fait directement les conditions de Whitney strictes au sens d'Hironaka ([3] p.135 Définition 5.1).

THEOREME $\tilde{I}$ ([1]) :

Si en tout point d'un ouvert analytique dense de $\tilde{Y}$, la fibre correspondante du morphisme $\tilde{\omega} : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : dim $\tilde{Y}$ - dim Y, le couple $(X_{lisse} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y.

Preuve :

Elle résulte des PROPOSITIONS $\tilde{I}$ et 2. Il est à noter que ce résultat peut aussi se déduire de l'équivalence de la PROPOSITION 2 à l'aide de ([4] p.132 Proposition 4) et de ([6] Lemma 19.3).

Considérons maintenant la situation "relative" suivante :

Soient Z un espace $\mathbb{C}$-analytique lisse, X un sous-espace réduit fermé de Z de dimension pure et Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X.

Soit $\rho : Z \longrightarrow Y$ une rétraction holomorphe de Z sur Y telle que, si l'on note encore $\rho : X \longrightarrow Y$ la rétraction induite de X sur Y, :

* ρ soit un morphisme plat de X sur Y
* pour tout point $S \in Y$, la fibre $X_S = \rho^{-1}(\{S\})$ soit réduite
* Y soit inclus dans le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ) $X_{sing,\rho}$ (on pose $X_{lisse,\rho} = X - X_{sing,\rho}$).

Soient $\omega_\rho : \hat{X}_\rho \longrightarrow X$ (resp $\tilde{\omega}_\rho : \tilde{X}_\rho \longrightarrow X$) l'éclatement (resp l'éclatement normalisé) de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ) J_ρ, $\hat{H}_\rho$ (resp $\tilde{H}_\rho$) et $\hat{Y}_\rho$ (resp $\tilde{Y}_\rho$) les espaces réduits de support respectif $\omega_\rho^{-1}(X_{sing,\rho})$ et $\omega_\rho^{-1}(Y)$ (resp $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(X_{sing,\rho})$ et $\tilde{\omega}_\rho^{-1}(Y)$).

<u>THEOREME</u> I_ρ :

Si en tout point de $\hat{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\rho\circ\omega_\rho : \hat{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, le couple $(X_{lisse,\rho}, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

<u>Preuve</u> :

Ce théorème étant de nature locale, nous sommes encore ramenés à la situation décrite au début de l'article.

Il suffit alors de remarquer que les conditions $\tilde{A}_\rho$) et $\tilde{B}_\rho$) de la PROPOSITION 1_ρ entraînent de façon évidente les conditions A_ρ) et B_ρ) de la PROPOSITION 2_ρ .

Nous obtenons encore en fait directement les conditions de Whitney strictes au sens d'Hironaka.

<u>THEOREME</u> $\tilde{I}_\rho$:

Si en tout point de $\tilde{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\rho\circ\tilde{\omega}_\rho : \tilde{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \tilde{H}_\rho - \dim Y$, le couple $(X_{lisse,\rho}, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

<u>Preuve</u> :

Elle résulte des PROPOSITIONS $\tilde{1}_\rho$ et $\tilde{2}_\rho$. Il est à noter que ce résultat peut aussi se déduire de l'équivalence de la PROPOSITION 2_ρ et du fait que $\tilde{X}_\rho$ est normal à l'aide de([4] p.132, Proposition 4) et de ([6] Lemma 19.3).

Nous montrons, pour terminer, que <u>le THEOREME I_ρ donne un critère pour les conditions de Whitney de $(X_{lisse,\rho}, Y)$ le long de Y qui est stable par changement de base (sur Y)</u>.

Plus précisément soient $g : Y' \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces lisses de dimensions pures et $Z' = Z \times_Y Y'$, $X' = X \times_Y Y'$, $\rho' : Z' \longrightarrow Y'$ les éléments déduits de Z, X, ρ par le changement de base g.

Si l'on note encore $\rho' : X' \longrightarrow Y'$ la rétraction induite de X' sur Y' :

* ρ' est un morphisme plat de X' sur Y' ([5] Exposé 13, Proposition 2.4).
* pour tout point $S' \in Y'$, la fibre $X'_{S'} = \rho'^{-1}(\{S'\})$ est réduite
* X' est un sous-espace fermé de Z' de dimension pure et réduit ([5] Exposé 21-B)
* Y' est le sous-espace lisse fermé de X' défini par l'idéal $I' = I\mathcal{O}_{X'}$, et est de dimension pure strictement inférieure à la dimension de X'.
* Y' est inclus dans le lieu singulier relatif (à la rétraction ρ') $X'_{sing,\rho'}$ qui est défini par l'idéal $J'_{\rho'} = J_\rho \mathcal{O}_{X'}$.

Soient alors $\omega'_{\rho'} = \hat{X}'_{\rho'} \longrightarrow X'$ l'éclatement de X' le long de $I'J'_{\rho'}$, $\hat{H}'_{\rho'}$ et $\hat{Y}'_{\rho'}$ les espaces réduits de support respectif $\omega'^{-1}_{\rho'}(X'_{sing,\rho'})$ et $\omega'^{-1}_{\rho'}(Y')$

THEOREME II :

Si en tout point de $\hat{Y}_\rho$ la fibre correspondante du morphisme $\rho\circ\omega_\rho : \hat{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$, alors, en tout point de $\hat{Y}'_{\rho'}$, la fibre correspondante du morphisme $\rho'\circ\omega'_{\rho'} : \hat{H}'_{\rho'} \longrightarrow Y'$ est de dimension : $\dim \hat{H}'_{\rho'} - \dim Y'$ et le couple $(X'_{lisse,\rho'}, Y')$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y'.

Preuve :

Comme nous éclatons X' le long de $IJ_\rho\mathcal{O}_{X'}$, nous avons un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \hat{X}'_{\rho'} \arrow[r] \arrow[d, "\omega'_{\rho'}"'] & \hat{X}_\rho \arrow[d, "\omega_\rho"] \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

qui induit le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \hat{H}'_{\rho'} \arrow[r] \arrow[d, "\rho'\circ\omega'_{\rho'}"'] & \hat{H}_\rho \arrow[d, "\rho\circ\omega_\rho"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

d'où la première assertion puisque, d'après la platitude de ρ et ρ', nous avons $\dim X - \dim Y = \dim X' - \dim Y'$.

La seconde assertion résulte alors du Théorème I_ρ..

REMARQUES :

1) - La PROPOSITION 3, qui est de nature "locale", est encore valable sous les hypothèses "globales" précédentes.

2) - En résumé, sous l'hypothèse $X_{sing} = X_{sing,\rho}$, nous avons les implications suivantes :

i) - En tout point de $\hat{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\rho \circ \omega_\rho = \hat{H}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{H}_\rho - \dim Y$.

$\Downarrow$

ii) - En tout point d'un ouvert analytique dense de $\hat{Y}_\rho$, la fibre correspondante du morphisme $\omega_\rho : \hat{Y}_\rho \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y}_\rho - \dim Y$ et le couple (X_{lisse}, Y) vérifie la condition a) de Whitney le long de Y .

$\Updownarrow$

iii) - En tout point d'un ouvert analytique dense de $\hat{Y}$, la fibre correspondante du morphisme $\omega : \hat{Y} \longrightarrow Y$ est de dimension : $\dim \hat{Y} - \dim Y$.

$\Downarrow$

iv) - Le couple (X_{lisse}, Y) vérifie les conditions de Whitney le long de Y .

L'implication i) $\Longrightarrow$ ii) résulte du THEOREME I_ρ , l'équivalence ii) $\Longleftrightarrow$ iii) est une conséquence de la PROPOSITION 3 et du THEOREME I , l'implication iii) $\Longrightarrow$ iv) résulte du THEOREME I ; nous ne savons pas si les implications ii) $\Longrightarrow$ i) et iv) $\Longrightarrow$ iii) sont vraies.

REFERENCES

[1] G. CANUTO - J.P. SPEDER : Un critère d'éclatement pour les conditions de WHITNEY. A paraître aux "Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa".

[2] H. HIRONAKA : Equivalences and deformations of isolated singularities. Woodshole Seminar in algebraic geometry (1964).

[3] H. HIRONAKA : Normal cones in analytic Whitney stratifications. Publications Mathématiques N°31, I.H.E.S. (1970)

[4] R. NARASIMHAN : Introduction to the theory of analytic spaces. Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, Vol 25 (1966).

[5] Séminaire Henri CARTAN : 13ème année 1960-1961. Fondements de la géométrie analytique. Exposés n° 13 par A. Grothendieck
n° 21 par C. Houzel.

[6] H. WHITNEY : Tangents to analytic variety. Annals of Mathematics, Vol 81 (1965).

==============