Astérisque

JEAN-PAUL SPEDER

L'équisingularité « à la Zariski » implique les conditions de Whitney

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 41-46
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__41_0>

L'EQUISINGULARITE "A LA ZARISKI" IMPLIQUE LES CONDITIONS DE WHITNEY.

Jean-Paul SPEDER

Nous donnons ici, en résumé, les principaux aspects de ([3]).

Soient X une hypersurface réduite d'un ouvert de $\mathbb{C}^{N+1}$, Y un sous-espace lisse fermé de X de dimension pure p et n = N - p sa codimension dans X.

<u>DEFINITION 1.</u> - Soient d une direction de $\mathbb{C}^{N+1}$ (i.e un élément de $\mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$) et Q un point de $\mathbb{C}^{N+1}$.
Un système linéaire de coordonnées de $\mathbb{C}^{N+1}$ de centre Q : $x = (x_o, -, x_N)$ tel que l'axe des x_o ait pour direction d, est dit <u>système ambiant de coordonnées en Q adapté à la direction d.</u> La projection $\Pi_x : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ définie par $\Pi_x(x_o, - ,x_N) = (x_1, - ,x_N)$ est dite <u>projection associée à x.</u>

<u>DEFINITION 2.</u> - Soit Q un point de Y.
On appelle <u>direction de projection permise</u> pour le couple (X,Y) en Q un élément de $\mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$ tel que la droite passant par Q qu'il définit, n'est incluse au voisinage de Q ni dans X, ni dans l'espace tangent à Y en Q.

<u>DEFINITION 3.</u> - Soient Q un point de Y, d une direction de projection permise pour le couple (X,Y) en Q, x un système ambiant de coordonnées en Q adapté à d, P le polynôme distingué en x_o définissant X au voisinage de Q.

On appelle <u>contour apparent</u> de X au voisinage de Q suivant la projection Π_x associée à x, l'hypersurface Δ_x de $\mathbb{C}^N$ définie par le discriminant de P (suivant x_o).

De même, si n > o, l'image de Y par Π_x (au voisinage de Q) est appelée le contour apparent de Y au voisinage de Q suivant Π_x : c'est une variété isomorphe à Y.

LEMME 1. - (O.Zariski) ([3] Lemme 2)

Plaçons nous sous les hypothèses de la définition 3 et supposons de plus que Y est inclus dans X_{sing} (X_{sing} = lieu singulier de X) au voisinage de Q.

Si le contour apparent de X au voisinage de Q suivant Π_x est équimultiple en 0 le long du contour apparent de Y au voisinage de Q suivant Π_x, alors X est équimultiple en Q le long de Y et, au voisinage de Q, $X \cap \Pi_x^{-1}(\Pi_x(Y)) = Y$.

DEFINITION 4. - Soient Q un point de X_{sing} et $\omega : \hat{X} \longrightarrow X$ l'éclatement de X le long du produit de l'idéal I de Y par l'idéal jacobien J de X (C.f [2] Définition 2).

On appelle direction de projection ω-permise pour le couple (X,Y) en Q, une direction transverse à X en Q (i.e non tangente à X en Q) telle qu'au dessus d'un voisinage de Q dans X_{sing}, presque tout point de $\hat{X}$ définisse un espace tangent limite à X transverse à cette direction.

REMARQUE. Presque toute direction de $\mathbb{C}^{N+1}$ est une direction de projection ω-permise pour (X,Y) en Q.

DEFINITION 5. - : (C.f [6] Définition 3).

Soit Q un point de Y.

Nous dirons que X est équisingulière en Q le long de Y :

1) - dans le cas où n = o, si $Q \in X_{lisse}$ ($X_{lisse} = X - X_{sing}$).

2) - dans le cas où n > o, si $Y \subset X_{sing}$ au voisinage de Q et s'il existe d : une direction de projection ω-permise pour (X,Y) en Q et $z = (z_0, -, z_N)$ un système ambiant de coordonnées en Q adapté à d pour lesquels le contour apparent de X au voisinage de Q suivant la projection Π associée à z est équisingulier en 0 le long du contour apparent de Y au voisinage de Q suivant Π.

Le lemme 1 permet de montrer facilement le :

LEMME 2. - L'équisingularité est une propriété locale et ouverte qui implique l'équimultiplicité.

<u>THEOREME I.</u> - Si $n > o$ et si l'hypersurface X est équisingulière le long de Y (i.e pour tout point Q de Y, X est équisingulière en Q le long de Y), alors, pour tout point Q de Y, la fibre $\omega^{-1}(Q)$ est de dimension pure = dimension $\omega^{-1}(Y)$ - dimension $Y = n - 1$.

<u>PREUVE</u>. - Elle se fait par induction sur n.

Soit $Q \in Y \subset X_{sing}$.

Nous continuons de noter par z le système ambiant en Q induit par l'équisingularité de X en Q le long de Y, par Π sa projection associée et par P le polynôme distingué en z_o définissant X au voisinage de Q.

Le théorème I étant de nature locale, X désignera dans la suite un voisinage ouvert convenablement choisi de Q dans l'hypersurface donnée.

Considérons alors le sous-espace (réduit) $\hat{Z}$ de $\hat{X}$ défini par

$$\hat{Z} = \{ \hat{R} \in \hat{X} \ : \ \left(\frac{\partial P}{\partial z_o} o\omega\right)_{\hat{R}} \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}} \neq J\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{R}} \}$$

et notons $Z = \omega(\hat{Z})$.

Les espaces $\hat{Z}$ et Z vérifient les propriétés suivantes :

* $\hat{Z}$ est une hypersurface de $\hat{X}$ ou est vide.

** $\hat{Z} - \omega^{-1}(X_{sing})$ est un ouvert dense de $\hat{Z}$ (car l'axe des z_o est transverse à presque tous les espaces tangents limites aux points de X_{sing}) et donc $\omega : \hat{Z} \longrightarrow Z$ définit l'éclatement de Z le long de $I\,J\,\mathcal{O}_Z$ et $Z - X_{sing}$ est dense dans Z.

*** $\Pi\,(Z) \subset \Delta$ et si $\mu : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$ est la projection canonique de $\hat{X}$ dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$ relative à $(z_o, -, z_N)$ et $\mathbb{P}\mathbb{C}^N$ désigne la sous-variété de $\mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$ formée des éléments dont la première composante est nulle, $\hat{Z} = \mu^{-1}(\mathbb{P}\mathbb{C}^N)$.

Le raisonnement par induction sur n repose sur le :

<u>LEMME 3.</u> - Soit $\omega_\Pi : \hat{\Delta} \longrightarrow \Delta$ l'éclatement de Δ le long du produit de l'idéal I_Π de $\Pi(Y)$ (réduit) par l'idéal jacobien J_Π de Δ.

Il existe un morphisme à fibres finies $\hat{\Pi} : \hat{Z} \longrightarrow \hat{\Delta}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{Z} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\hat{\Pi}"'] & Z \arrow[d, "\Pi"] \\ \hat{\Lambda} \arrow[r, "\omega_{\Pi}"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

<u>PREUVE DU LEMME 3.</u> - Comme $Z - X_{sing}$ est dense dans Z, $J\,\mathcal{O}_Z$ et $J_{\Pi}\,\mathcal{O}_Z$ définissent le même éclatement de Z. D'autre part, comme l'axe des z_o est transverse à X en Q et X est équimultiple le long de Y, l'éclatement $\omega_1 : X_1 \longrightarrow X$ de X le long de I se factorise à travers l'éclatement $\omega_1' : X_1' \longrightarrow X$ de X le long de l'idéal I' induit par l'idéal de $\Pi(Y)$ dans $\mathbb{C}^N$, à l'aide d'un morphisme à fibres finies $\zeta_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$.

Ainsi, si l'on note $\omega' : \hat{Z}' \longrightarrow Z$ l'éclatement de Z le long de $I'\,J\,\mathcal{O}_Z$ ($I'\,J\,\mathcal{O}_Z = I_{\Pi}\;J\,\mathcal{O}_Z$), il existe deux morphismes à fibres finies $\zeta : \hat{Z} \longrightarrow \hat{Z}'$ et $\hat{\Pi}' : \hat{Z}' \longrightarrow \hat{\Lambda}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \hat{Z} \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\omega"] & \\ \hat{Z}' \arrow[rr, "\omega'"'] \arrow[d, "\hat{\Pi}'"'] & & Z \arrow[d, "\Pi"] \\ \hat{\Lambda} \arrow[rr, "\omega_{\Pi}"'] & & \Lambda \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\hat{\Pi} = \zeta \circ \hat{\Pi}'$ est alors solution du lemme 3.

Pour finir la démonstration du théorème I, considérons alors une composante irréductible T de $\omega^{-1}(Q)$ (réduit) et montrons que dimension $T \leq n - 1$.

Si $\hat{Z} \cap T = \emptyset$ (c'est le cas si $n = 1$) la preuve est triviale.

Si $\hat{Z} \cap T \neq \emptyset$, notons $k = \dim \mu\,(T)$ et considérons le morphisme :

$$\mu : \hat{Z} \cap T \longrightarrow \mu(T) \cap \mathbb{PC}^N.$$

La dimension de $\mu(T) \cap \mathbb{P}\mathbb{C}^N$ est $\geq k - 1$ en tout point. D'après le lemme 3, nous avons $\hat{Z} \cap \omega^{-1}(Q) = \hat{\Pi}^{-1}(\omega_{\Pi}^{-1}(0))$ et, par hypothèse de récurrence, $\omega_{\Pi}^{-1}(0)$ est de dimension pure $n - 2$, il en résulte que $\hat{Z} \cap T$ est de dimension $\leq n - 2$. Il existe alors une fibre de $\mu_{/T}$ de dimension $\leq n - k - 1$ et donc dimension $T \leq n - 1$ C.Q.F.D.

Le théorème I est ainsi démontré

THEOREME II. - ([1]) : Si $n > o$ et si, pour tout point Q de Y, la fibre $\omega^{-1}(Q)$ est de dimension pure = dimension $\omega^{-1}(Y)$ - dimension Y, alors, le couple$(X_{lisse} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y. ([4] page 540).

Les théorèmes I et II entraînent de façon évidente le :

THEOREME III. - (c.f [5] Théorème 8.1) Si l'hypersurface X est équisingulière le long de Y, alors, le couple $(X_{lisse} - Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney le long de Y.

REFERENCES

[1] G. CANUTO - J.P. SPEDER : Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney. A paraître aux "Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa"

[2] H. HIRONAKA : Equivalences and deformations of isolated singularities Woodshole seminar in algebraic geometry (1964)

[3] J.P. SPEDER : Equisingularité et conditions de Whitney. A paraître à l'"American J. of Mathematics".

[4] H. WHITNEY : Tangents to an analytic variety. Annals of Mathematics vol.81 (1965).

[5] O. ZARISKI : Studies in Equisingularity II American J. of Mathematics vol.87 (1965)

[6] O. ZARISKI : Some open questions in the theory of singularities. Bull. Amer. Math. Soc vol 77 (1971).