HEISUKE HIRONAKA

La voûte étoilée

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 415-440
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__415_0>

LA VOUTE ETOILEE

Heisuke HIRONAKA

En géométrie algébrique, Zariski [5] introduisit une notion de " Riemann manifold " $\mathfrak{R}$ (K/k) pour un corps K de fonctions algébriques sur un corps de base k . C'est l'espace limite inverse (topologique), par rapport aux transformations birationnelles, de toutes les variétés projectives (ou bien, ce qui revient au même, toutes les variétés algébriques propres sur k) qui ont K/k comme corps commun de fonctions rationnelles. Le fait que $\mathfrak{R}$ (K/k) est compact à l'égard de sa topologie naturelle (facilement déduit du Théorème de Tichonov) a été utile pour extraire un système fini complet de modèles locaux parmi tous ceux de K/k qui sont obtenus par considération strictement locale. Cette technique a été typiquement appliquée par Zariski [4] dans sa démonstration du théorème de l'uniformisation locale (une forme strictement locale de désingularisation). Du seul point de vue de la désingularisation, cette méthode semblerait avoir perdu son intérêt initial puisque l'on a déjà découvert une méthode de nature globale qui donne directement une désingularisation globale aussi bien pour les espaces analytiques-complexes que pour les espaces algébriques de caractéristique nulle. Néanmoins, une analogue analytique-complexe de la " Riemann manifold " de Zariski, appelée la voûte étoilée dans cet article, est-elle utile d'une façon essentielle pour étudier des morphismes analytiques-complexes qui ne sont pas propres, surtout ceux qui n'admettent aucun prolongement propre. En géométrie analytique réelle, en particulier, on trouve des applications effectives de la technique des voûtes étoilées pour étudier des morphismes propres d'espaces analytiques-réels, qui n'admettent en général aucun complexifié propre. En fait, cet article est actuellement motivé afin de démontrer le théorème suivant, fondamental dans l'étude des sous-ensembles sous-analytiques (au sens de Hironaka [2]):

THEOREME . - Soit A un sous-ensemble sous-analytique d'une variété analytique réelle lisse M (c'est-à-dire que A est localement une union finie de la forme

$\bigcup_i (\mathrm{Im}(f_i) - \mathrm{Im}(g_i))$ où f_i et g_i sont des morphismes analytiques-réels propres d'espaces analytiques réels dans M). Alors, étant donné un point $m \in M$ il existe un nombre fini de morphismes analytiques réels $f_i : \mathbb{R}^n \to M$, $n = \dim M$, tels que

(1) si B désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$, alors $\bigcup_i f_i(B)$ est un voisinage de m dans M.

(2) Pour tout i, $f_i^{-1}(A)$ est une union de quadrants dans $\mathbb{R}^n$ (un quadrant étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0 \ , \ i \in I_o \ , \ x_j > 0 \ , \ j \in I_+ \ , \ x_k < 0 \ , \ k \in I_-\}$ où $I_o \cup I_+ \cup I_- = \{1,2,\ldots,n\}$) .

(3) Pour tout i, f_i induit un plongement ouvert de $\mathbb{R}^n - f_i^{-1}(A)$ dans M.

En ce qui concerne la technique des voûtes étoilées à laquelle nous nous limitons dans cet article, il s'agit exactement de la finitude du système $\{f_i\}$ de ce théorème. Une démonstration complète du théorème sera donnée dans un autre article. Elle exigera, en outre, un théorème de désingularisation (Hironaka [1]) et aussi un théorème platifiant des morphismes analytiques-complexes " non-propres " (un analogue de nature strictement local du théorème platifiant " propre " de Hironaka [3]) .

A l'égard de la théorie actuellement développée dans cet article, nous voulons signaler quelques points d'intérêt :

I) La voûte étoilée $p_Y : \mathcal{E}_Y \to Y$ d'un espace analytique-complexe Y est définie comme l'espace de certaines limites inverses des morphismes $Y_\alpha \to Y$ qui sont obtenus par suites finies d'éclatements <u>locaux</u>. (cf. (2.1) et (3.1)) . Soit $q_Y : B_Y \to Y$ la limite inverse de tous les morphismes $Y_\alpha \to Y$ obtenus par suites finies d'éclatements <u>globaux</u> dont les centres sont tous rares. Alors on trouve une application canonique $\beta_Y : \mathcal{E}_Y \to B_Y$, continue et surjective, telle que $q_Y \beta_Y = p_Y$. Mais si $\dim Y > 1$, alors β_Y <u>n'est jamais bijectif</u> . On peut donner une structure d'espace annelé sur $\mathcal{E}_Y$ aussi bien que sur B_Y d'une façon naturelle. (En fait, on peut vérifier facilement qu'il existe une et une seule structure d'espace annelé sur $\mathcal{E}_Y$ telle que toutes les applications

$p_\pi : \mathcal{E}_\pi \to Y'$ de (2.4) deviennent des morphismes d'espaces annelés. D'autre part, on peut considérer q_r comme la limite inverse dans la catégorie des espaces annelés) . Si $\dim Y > 1$, on voit que $\mathrm{Pic}(B_Y) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{E}_Y)$ défini par β_Y n'est jamais surjectif.

II) Soit $q'_Y : B'_Y \to Y$ la limite inverse de tous les morphismes propres qui sont étales presque partout. Alors on a un morphisme canonique $\alpha_Y : B'_Y \to B_Y$ même en tant qu'espaces annelés. Si Y est dénombrable à l'infini, le théorème platifiant " propre " (Hironaka [3]) implique que α_Y est un isomorphisme.

III) On peut définir $p'_Y : \mathcal{E}'_Y \to Y$ d'une façon analogue à $p_Y : \mathcal{E}_Y \to Y$ en considérant (au lieu de morphismes qui sont obtenus par des suites finies d'éclatements locaux) tous les morphismes analytiques-complexes $\pi_\alpha : Y_\alpha \to Y$ qui sont presque partout des plongements localement isomorphes (i.e., il existe un ouvert dense U_α de Y_α tel que π_α induise un isomorphisme $Y_\alpha|U_\alpha \to Y|V_\alpha$ où $V_\alpha = \pi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de Y) . Alors, on a un morphisme canonique $\beta_Y : \mathcal{E}'_Y \to \mathcal{E}_Y$ même en tant qu'espaces annelés. Le théorème platifiant " non-propre " (que nous allons préciser et démontrer dans un autre article) impliquera que β_Y est toujours un isomorphisme.

IV) Dans notre définition d'étoile (2.1) , la condition 3) est essentielle pour notre but immédiat . Si l'on omet 3) de (2.1) , on arrivera à une notion effectivement plus générale que celle d'étoile(objets quasi-stellaires, y inclus ?) qui correspond aux points de ce qu'on appelle la " frontière idéale " d'un espace analytique-complexe. L'étude des points des frontières idéales (sur les espaces éclatés) est une autre direction d'intérêt.

§ 1 . - SUITES D'ECLATEMENTS LOCAUX

Soit Y un espace analytique-complexe. Etant donné un sous-espace analytique-complexe fermé E de Y , il existe un morphisme $\pi : Y' \to Y$ qui satisfait les conditions suivantes (appelées la propriété universelle d'éclatement) :

(1.1) L'idéal de $\pi^{-1}(E)$ dans $\mathcal{O}_{Y'}$ (= l'idéal engendré par celui de E dans $\mathcal{O}_Y$) est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module.

(1.2) Pour tout morphisme $h : Y'' \to Y$ ayant la propriété (1.1), il existe un et un seul morphisme $q : Y'' \to Y'$ tel que $\pi q = h$.

On appelle (E,π) un <u>éclatement</u> (global) de Y (de <u>centre</u> E). π est déterminé par E à Y-isomorphisme près. Si U est un ouvert quelconque de Y, alors $(E|U, \pi|\pi^{-1}(U))$ est un éclatement de Y. En outre, si $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de Y, alors un système quelconque d'éclatements $(E|U_\alpha, \pi_\alpha)$ se recolle d'une façon unique afin de donner un éclatement (E,π). Si $h = (h_0, h_1, \dots, h_m)$ est un système de générateurs de l'idéal de E dans $\mathcal{O}_Y|U$, alors $\pi|U$ est réalisé comme la projection du plus petit sous-espace analytique complexe fermé de $(Y|U) \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ qui contient le graphe G_h du morphisme $(Y|U) - E \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ défini par h. Ainsi $Y'|\pi^{-1}(U-E)$ est identifié avec $G_h = H - (E|U) \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ où $H \subset (Y|U) \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ est défini par l'idéal $(t_i - h_i,\ 0 \leq i \leq m)$ par rapport aux coordonnées homogènes $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$. (En fait, cela donne une méthode pour vérifier l'existence de (E,π) pour E donné). Cette réalisation locale démontre, en particulier, que si Y est Hausdorff alors Y' l'est, et que π est propre. Remarquons que π induit un isomorphisme $Y' - \pi^{-1}(E) \xrightarrow{\sim} Y - E$ et que (ϕ, id_Y) est un éclatement.

On appelle <u>éclatement local</u> de Y une donnée (U,E,π) où U est un ouvert de Y, E est un sous-espace analytique-complexe de $Y|U$ et π est la composée de l'inclusion $Y|U \to Y$ avec $\pi_0 : Y' \to Y|U$ obtenu par un éclatement (E,π_0). Une <u>suite d'éclatements locaux</u> de Y signifiera un système $\{(U_i,E_i,\pi_i)\}_{0 \leq i < m}$, m étant ou bien fini > 0 ou bien infini, tel que $Y_0 = Y$ et (U_i,E_i,π_i) est un éclatement local de Y_i avec $\pi_i : Y_{i+1} \to Y_i$.

<u>LEMME</u> (1.3). - Soit Z un espace analytique-complexe et soit D un sous-espace analytique-complexe fermé de Z. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1.3.1) Si J est l'idéal de D dans $\mathcal{O}_Z$, alors l'annulateur $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_Z}(J)$ (= <u>Ker</u> $(\mathcal{O}_Z \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Z}(J, \mathcal{O}_Z))$ par définition) est nul.

(1.3.2) Le couple (Z,D) a la <u>propriété de minimalité</u>, i.e., si Z' est un sous-espace analytique-complexe fermé de Z tel que $Z' - D = Z - D$ alors $Z' = Z$.

(1.3.3) Pour tout point $z \in Z$ il existe un voisinage ouvert U de z dans Z tel que $(Z|U, D|U)$ ait la propriété de minimalité.

(1.3.4) Pour tout ouvert U de Z, $(Z|U, D|U)$ l'a.

<u>Preuve</u>. - La définition de l'annulateur est locale. Par conséquent, il suffit de démontrer l'équivalence entre (1.3.1) et (1.3.2). En outre, pour tout entier $m > 0$, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_Z}(J^m) = (0)$ si et seulement si $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_Z}(J) = (0)$. Supposons (1.3.2). Soit $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_Z}(J)$. Alors $\mathrm{Supp}(I) \subset |D|$. I étant cohérent, il définit un sous-espace analytique complexe fermé Z' de Z. On a $Z' - D = Z - D$. Par hypothèse, $Z' = Z$, i.e., $I = (0)$. Ainsi (1.3.2) $\Longrightarrow$ (1.3.1). Or, supposons (1.3.1). Si Z' est un sous-espace analytique complexe fermé de Z avec $Z' - D = Z - D$, alors l'idéal I de Z' dans $\mathcal{O}_Z$ vérifie $\mathrm{Supp}(I) \subset |D|$. Donc, pour tout ouvert relativement compact V de Z, il existe un entier $m = m(V) > 0$ tel que $J^m\, I|V = (0)$. Si (1.3.1) est vérifié, alors $I|V = (0)$. Ceci montre que $Z' = Z$. Ainsi (1.3.1) $\Longrightarrow$ (1.3.2).

<u>DEFINITION</u> (1.4). - On appelle <u>strict</u> un morphisme d'espaces analytiques complexes $\pi : Y' \to Y$ s'il existe un sous-espace analytique complexe E' de Y' tel que

(1.4.1) π soit étale en tout point de $Y' - E'$, et

(1.4.2) (Y', E') ait la propriété de minimalité (cf. (1.3.2)).

<u>LEMME</u> (1.5). - La propriété d'être strict est locale. En effet, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1.5.1) $\pi : Y' \to Y$ est strict.

(1.5.2) Si D' est le plus petit sous-espace analytique complexe fermé de Y' tel que π soit étale en tout point de $Y' - D'$, alors (Y', D') a la propriété de minimalité (cf. (1.3.1)).

(1.5.3) Pour tout ouvert V de Y', π induit un morphisme strict $Y'|V \to Y$.

(1.5.4) Pour tout point y' de Y', il existe un voisinage ouvert V de y'

dans Y' tel que π induise un morphisme strict $Y'|V \to Y$.

Preuve . Il est évident que (1.5.2) $\Longrightarrow$ (1.5.1) . Grâce à (1.3) , (1.5.1) $\Longrightarrow$ (1.5.3) $\Longrightarrow$ (1.5.4) . Il est connu que, la définition de D' étant celle de (1.5.2), π est étale en $y' \in Y'$ si et seulement si $y' \in Y' - D'$. Par conséquent, si F' est un sous-espace analytique complexe fermée de $Y'|V$ avec un ouvert V de Y' , tel que $\pi|V$ soit étale en tout point de $Y'|V - F'$, alors $F' \supset D'|V$. Il est évident que si $(Y'|V,F')$ a la propriété de minimalité, alors $(Y'|V,D'|V)$ l'a. Ainsi (1.5.4) implique que $(Y'|V,D'|V)$ a cette propriété pour au moins un voisinage ouvert V de chaque point y' de Y' , d'où (Y',D') l'a. Ainsi (1.5.4) $\Longrightarrow$ (1.5.2) .

LEMME (1.6) . - Si $\pi_i : Y_{i+1} \to Y_i$, $i = 0,1$, sont stricts, alors $\pi = \pi_0 \pi_1$ l'est.

Preuve . Par définition, on a un sous-espace analytique complexe fermé E_{i+1} de Y_{i+1} , $i = 0,1$, tel que (π_i,E_{i+1}) ait les propriétés (1.4.1) et (1.4.2) . Soit $E = E_2 \cup \pi_1^{-1}(E_1)$. Il suffit de démontrer que (Y_2,E) a la propriété de minimalité. Soit Y' un sous-espace analytique complexe fermé de Y_2 tel que $Y'- E = Y_2 - E$. Soit y_2 un point quelconque de $Y' - E_2$. Soit $y_1 = \pi_1(y_2)$. Puisque π_1 est étale en y_2 , il existe des voisinages ouverts V_j de y_j dans Y_j , où $j = 1,2$, tels que π_1 induise un isomorphisme $Y_2|V_2 \longrightarrow Y_1|V_1$. Soit Y_1' l'image de $Y'|V_2$ par cet isomorphisme. Puisque $Y' - E = Y_2 - E$ et π_0 induit un morphisme strict $Y_1|V_1 \to Y_0$ par (1.5) , on obtient $Y_1' = Y_1|V_1$ et donc $Y'|V_2 = Y_2|V_2$. On a démontré que $Y'- E_2 = Y_2 - E_2$. Puisque π_1 est strict par rapport à E_2 , on a $Y' = Y_2$.

PROPOSITION (1.7) . - Si $\pi : Y' \to Y$ est un morphisme déduit par composition d'une suite finie d'éclatements locaux, alors π est strict.

Preuve . - Grâce à (1.6) , il suffit de considérer le cas où il existe un éclatement local (U,E,π) . Soit $E' = \pi^{-1}(E)$. Alors il est évident, d'après la propriété universelle d'éclatement que π est étale en chaque point de $Y' - E'$. D'autre part, l'idéal J de E' dans $\mathcal{O}_{Y'}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module et donc satisfait la condition (1.3.1) . Grâce à (1.3) , (Y',E') a la propriété de minimalité (1.4.2) .

<u>LEMME</u> (1.8) . - Soit $\pi : Y' \to Y$ un morphisme strict. Si J est un idéal de $\mathcal{O}_Y$ inversible en tant que $\mathcal{O}_Y$-module, alors l'idéal $J\mathcal{O}_{Y'}$ l'est en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module.

<u>Preuve</u> . - Soit E' un sous-espace analytique complexe fermé de Y' tel que (π,E') satisfasse (1.4.1) et (1.4.2) . Soit $J' = J\mathcal{O}_{Y'}$. Alors il est évident que J' est localement principal partout et que $J'|Y' - E'$ est inversible en tant que $(\mathcal{O}_{Y'}|Y' - E')$-module. Si Y'' est le sous-espace analytique complexe fermé de Y' défini par l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{Y'}}(J')$, alors $Y'' - E' = Y' - E'$. Donc $Y'' = Y'$, i.e., $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{Y'}}(J') = (0)$. Donc J' , localement principal, est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module.

<u>COROLLAIRE</u> (1.9) . - Si $\pi : Y' \to Y$ est déduit par composition d'une suite finie d'éclatements locaux, alors pour tout idéal J de $\mathcal{O}_Y$ inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y}$-module, $J\mathcal{O}_{Y'}$ l'est en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module.

<u>LEMME</u> (1.10) . - Soit (E,π) un éclatement avec $\pi : Y' \to Y$. S'il existe une π-section $s : Y \to Y'$, alors π est un isomorphisme et l'idéal I de E dans $\mathcal{O}_Y$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_Y$-module.

<u>Preuve</u> . - Soit $Y'' = s(Y)$, un sous-espace analytique complexe fermé de Y' isomorphe à Y par π . Puisque π induit un isomorphisme $Y' - \pi^{-1}(E) \xrightarrow{\sim} Y - E$, $Y' - E' = Y'' - E'$ avec $E' = \pi^{-1}(E)$. Grâce à (1.3) (où J est l'idéal de E' dans $\mathcal{O}_{Y'}$) , $Y' = Y''$. Donc π est un isomorphisme et I est inversible en tant que $\mathcal{O}_Y$-module.

<u>PROPOSITION</u> (1.11) . - Soit $f : Z \to Y$ un morphisme strict. Soit (U,E,π) un éclatement avec $\pi : Y' \to Y$. Soit J l'idéal de E dans $\mathcal{O}_Y|U$. Il existe un Y-morphisme $h : Z \to Y'$ si et seulement si $f(|Z|) \subset U$ et $J\mathcal{O}_Z$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_Z$-module. En outre, un tel Y-morphisme $h : Z \to Y'$ est strict.

<u>Preuve</u> . - D'abord, nous nous proposons de démontrer que h est strict. Il existe un sous-espace analytique complexe fermé F_o de Z tel que (f,F_o) satisfasse (1.4.1) et (1.4.2) . Soit $F_1 = f^{-1}(E)$. Soit z un point quelconque de $Z - F_o$. Alors il existe un voisinage ouvert V de z dans Z et un voisinage

ouvert U_o de $f(z)$ dans Y tels que f induise un isomorphisme $Z|V \xrightarrow{\sim} Y|U_o$. L'existence de h signifie celle d'une section pour $\pi|U_o$. Grâce à (1.10) , $J|U_o$ est inversible en tant que $(\mathcal{O}_Y|U_o)$-module. Donc $J\mathcal{O}_Z|V$ est inversible en tant que $(\mathcal{O}_Z|V)$-module. Par (1.3) , $(Z|V,F_1|V)$ a la propriété de minimalité. Par conséquent, si Z' est un sous-espace analytique complexe fermé de Z tel que $Z' - F_1 \cup F_o = Z - F_1 \cup F_o$, alors $Z' - F_o$ $Z' - F_o = Z - F_o$. Donc $Z' = Z$. Autrement dit, $(Z,F_o \cup F_1)$ a la propriété de minimalité. Il est évident que f est étale en chaque point de $Z - F_o \cup F_1$, d'où h est strict. Puisque $J' = J\mathcal{O}_{Y'}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module, $J\mathcal{O}_Z = J'\mathcal{O}_Z$ l'est en tant que $\mathcal{O}_Z$-module grâce à (1.8) .

<u>COROLLAIRE</u> (1.11.1) . - Soit $\pi : Y' \to Y$ un morphisme obtenu par une suite finie d'éclatements locaux. Si $f : Z \to Y$ est un morphisme strict, alors il existe au plus un Y-morphisme $h : Z \to Y'$. En outre, si h existe, il est strict.

<u>Preuve</u> . - Conséquence immédiate de (1.11) par récurrence sur le nombre des éclatements.

<u>PROPOSITION</u> (1.12) . - Soient (U_i,E_i,π_i) , $i = 1,2$, deux éclatements locaux quelconques avec $\pi_i : Y_i \to Y$. Soit E_3 le sous-espace analytique complexe fermé de $Y|U_1 \cap U_2$ dont l'idéal est le produit de ceux des E_i dans $\mathcal{O}_Y|U_1 \cap U_2$, $i = 1,2$. Soit $(U_1 \cap U_2,E_3,\pi_3)$ un éclatement avec $\pi_3 : Y_3 \to Y$. Alors il existe un et un seul morphisme $q_i : Y_3 \to Y_i$ tel que $\pi_3 = \pi_i q_i$ pour chaque $i = 1,2$. En outre, on a :

(1.12.1) $(\pi_i^{-1}(U_j)$, $\pi_i^{-1}(E_j)$, $q_i)$ est un éclatement local pour $1 \leq i,j \leq 2$ et $i \neq j$.

(1.12.2) Pour tout morphisme strict $f : Z \to Y$, il existe un Y-morphisme $Z \to Y_3$ si et seulement s'il existe deux Y-morphismes $Z \to Y_1$ et $Z \to Y_2$.

Le lemme suivant est la clé de la démonstration de (1,12) .

<u>Petit LEMME</u> (1.12.3) . - Soit A un anneau local. Soient J_i , $i = 1,2$, deux idéaux de A . Alors les J_i sont inversibles en tant que A-module si et seulement si le produit J_1J_2 l'est.

<u>Preuve</u> . - Supposons que J_1J_2 est inversible en tant que A-module, i.e., il est engendré par un élément qui n'est pas diviseur de zéro dans A . L'anneau A étant local, il existe $b_i \in J_i$, $i = 1,2$, tels que $J_1J_2 = b_1b_2A$. Dans ce cas-ci, b_1b_2 n'est pas diviseur de zéro dans A . Donc, b_i ne l'est pas pour $i = 1,2$. On a $b_1b_2A = J_1J_2 \supset b_1J_2 \supset b_1b_2A$, d'où $b_1b_2A = b_1J_2$. Puisque b_1 n'est pas diviseur de zéro dans A , $b_2A = J_2$. Par symétrie, $b_1A = J_1$. L'assertion de (1,12,3) est vérifiée.

<u>Preuve</u> de (1.12) . - En remplaçant les π_i par leurs restrictions à $U_1 \cap U_2$, on peut supposer que $U_1 = U_2 = |Y|$. Soit I_i l'idéal de E_i dans $\mathcal{O}_Y$. Alors $I_1I_2\mathcal{O}_{Y_3}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y_3}$-module.
Grâce à (1.12.3) , $I_i\mathcal{O}_{Y_3}$ l'est pour tout $i = 1,2$. La propriété universelle de l'éclatement π_3 implique l'existence unique des q_i , $i = 1,2$. Soit $I' = I_2\mathcal{O}_{Y_1}$, l'idéal de $\pi_1^{-1}(E_2)$ dans $\mathcal{O}_{Y_1}$. Soit $(\pi_1^{-1}(E_2),q')$ un éclatement avec $q' : Y' \to Y_1$. Puisque $I'\mathcal{O}_{Y_3} = I_2\mathcal{O}_{Y_3}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y_3}$-module, il existe $h : Y_3 \to Y'$ tel que $q_1 = q'h$. D'autre part, grâce à (1.7) et (1.8) , $I_1\mathcal{O}_{Y'} = (I_1\mathcal{O}_{Y_1})\mathcal{O}_{Y'}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module, d'où $I_1I_2\mathcal{O}_{Y'} = (I_1\mathcal{O}_{Y_1})(I'\mathcal{O}_{Y'})$ l'est. Grâce à la propriété universelle de π_3 , il existe $h' : Y' \to Y_3$ tel que $\pi_3 h' = \pi_1 q'$. On a $\pi_3(h'h) = (\pi_3h')h = \pi_1 q'h = \pi_1 q_1 = \pi_3$. Par la propriété universelle de π_3 , on déduit $h'h = id_{Y_3}$. D'autre part, $\pi_1 q'(hh') = \pi_1 q_1 h' = \pi_3 h' = \pi_1 q'$. Par la propriété universelle de π_1 et q' , on déduit $hh' = id\ Y'$. Ainsi h est un isomorphisme, d'où (1.12.1) . Enfin (1.12.2) est une conséquence immédiate de (1.11) et de la propriété universelle d'éclatement.

<u>PROPOSITION</u> (1.13) . - Soient $\pi_i : Y_i \to Y$, $i = 1,2$, deux morphismes obtenus par suites finies d'éclatements locaux. Alors il existe au plus un Y-morphisme $q : Y_2 \to Y_1$. S'il existe, q est encore obtenu par une composition d'une suite d'éclatements locaux.

<u>Preuve</u>. - L'unicité de q est déjà vérifiée par (1.11.1) en vertu de (1.7) . La dernière assertion de (1.13) se ramène au cas où π_1 est obtenu par un seul éclatement local, par une récurrence évidente. Dans ce cas-là, l'assertion est vérifiée par applications successives du (1.12) (autant de fois que la longueur

de la suite d'éclatements qui donne π_2) .

COROLLAIRE (1.13.1) . - Soient $\pi_i : Y_i \to Y$, $i = 1,2,3,$ trois morphismes obtenus par composition de suites finies d'éclatements locaux. Si $r_j : Y_j \to Y_1$, $j = 2,3$ et $s : Y_3 \to Y_2$ sont des Y-morphismes, alors $r_2 s = r_3$, i.e., s est un Y_1-morphisme.

Preuve . - Conséquence immédiate de l'unicité du Y-morphisme $Y_3 \to Y_1$.

PROPOSITION (1.14) . - Soit (U,E,π) un éclatement local avec $\pi : Y' \to Y$. soit X un sous-espace analytique complexe localement fermé de Y . Soit X' le plus petit sous-espace analytique complexe fermé de $\pi^{-1}(X)$ tel que $\pi^{-1}(X) - \pi^{-1}(E) = X' - \pi^{-1}(E)$. Soit $p : X' \to X$ le morphisme induit par π . Alors $(|X| \cap U, X \cap E, p)$ est un éclatement local.

Preuve . - Soit $(|X| \cap U, X \cap E, q)$ un éclatement local avec $q : X" \to X$. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe un X-isomorphisme $h : X" \to X'$. Puisque $\mathrm{Im}(q) \subset |X| \cap U \subset U$ et puisque $I\mathcal{O}_{X"}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{X"}$-module, I désignant l'idéal de E dans $\mathcal{O}_Y|U$, il existe un Y-morphisme $h' : X" \to Y'$. Evidemment, $\mathrm{Im}(h') \subset |\pi^{-1}(X)|$. En outre, si $I' = I\mathcal{O}_{Y'}$, alors $I'\mathcal{O}_{X"} = I\mathcal{O}_{X"}$. Donc, grâce à (1.3) , si $E' = \pi^{-1}(E)$ alors $(X", h'^{-1}(E'))$ a la propriété de minimalité. Par conséquent, h' se factorise à travers un morphisme $h : X" \to X'$. D'autre part, $(X', X' \cap E')$ a la propriété de minimalité par définition de X' et donc, grâce à (1.3), $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X'}}(I'\mathcal{O}_{X'}) = (0)$. Evidemment $I'\mathcal{O}_{X'}$ est localement principal. Donc $I'\mathcal{O}_{X'}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{X'}$-module. On a $I'\mathcal{O}_{X'} = J\mathcal{O}_{X'}$ avec l'idéal J de $X \cap E$ dans $\mathcal{O}_X||X| \cap U$. La propriété universelle d'éclatement pour q implique l'existence d'un X-morphisme $g : X' \to X"$. En plus, elle implique $gh = \mathrm{id}_{X"}$. Donc h est un plongement fermé. Puisque π et g sont isomorphismes au-dessus de l'ouvert $U-|E|$, h induit un isomorphisme de $X" - q^{-1}(X \cap E)$ sur $\pi^{-1}(X) - \pi^{-1}(E) = X' - \pi^{-1}(E)$. Donc la minimalité de $(X', X' \cap E')$ implique que l'image de h coïncide avec X' ; i.e., h est un isomorphisme.

Remarque (1.14.1) . - Pour un éclatement (U,E,π) avec $\pi : Y' \to Y$, Y' est vide si et seulement si $U = |E|$. En fait, si $U \neq |E|$, alors on a un ouvert non vide $U - |E|$ au-dessus duquel π est un isomorphisme. Réciproquement, si $U = |E|$ alors $Y' = |\pi^{-1}(E)|$. La propriété de minimalité de $(Y',\pi^{-1}(E))$ implique que Y' est vide.

PROPOSITION (1.15) . - Soient X_i, $i = 1,2$ deux sous-espaces analytiques complexes fermés de Y tel que $Y = X_1 \cup X_2$, i.e., si I_i est l'idéal de X_i dans $\mathcal{O}_Y$ alors $I_1 \cap I_2 = (0)$. Soit $E = X_1 \cap X_2$. Soit (E,π_i) un éclatement de X_i avec $\pi_i = X'_i \to X_i$ pour chaque $i = 1,2$. Soit Y' l'union disjointe des X'_i et soit $\pi : Y' \to Y$ le morphisme défini par les π_i , $i = 1,2$. Alors (E,π) est un éclatement de Y .

Preuve . - Soit (E,π') un éclatement avec $\pi' : Y'' \to Y$. Soit $E'' = \pi'^{-1}(E)$. Soit X''_i le plus petit sous-espace analytique complexe fermé de Y'' tel que $\pi'^{-1}(X_i) - E'' = X''_i - E''$. Puisque $Y'' = \bigcup_i \pi'^{-1}(X_i)$ et (Y'',E'') a la propriété de minimalité, on obtient $Y'' = \bigcup_i X''_i$. Grâce à (1.14) , π' induit $\pi'_i : X''_i \to X_i$ tel que (E,π'_i) soit un éclatement de X_i . Pour (1.15) , il suffit de démontrer que $X''_1 \cap X''_2 = \emptyset$. Soit z un point quelconque de Y' . L'idéal $(I_1+I_2)\mathcal{O}_{Y'}$ est celui de E'' et donc inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module. Alors, au point z , $(I_1+I_2)\mathcal{O}_{Y'}$ coïncide localement avec $I_i\,\mathcal{O}_{Y'}$ pour au moins un $i = 1,2$. Disons $i = 1$. Alors cela signifie que, dans un voisinage assez petit de z , E'' coïncide avec $\pi'^{-1}(X_1)$. Puisque $|X''_1|$ est l'adhérence de $|\pi'^{-1}(X_1) - E''|$ dans $|Y''|$, z n'est pas dans X''_1 .

PROPOSITION (1.16) . - Soit $\pi : Y' \to Y$ un morphisme obtenu par composition d'une suite finie d'éclatements locaux. Si π est propre, alors π est aussi bien obtenu par une suite finie d'éclatements globaux.

Preuve . - Soit $\{(U_i,E_i,\pi_i)\}_{0 \leq i < m}$ une suite finie d'éclatements locaux qui donne π , où $\pi_i : Y_{i+1} \to Y_i$, $Y_0 = Y$ et $Y_m = Y'$. Soient $f_i : Y' \to Y_i$ et $g_i : Y_i \to Y$ les morphismes définis par les π_j . Par l'hypothèse sur π , les f_i sont tous propres. Soit Z_i l'image de f_i , i.e., le sous-espace analytique complexe fermé de Y_i dont l'idéal est le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y_i} \to (f_i)_*(\mathcal{O}_{Y'})$. (La cohérence de cette image directe est dûe à Grauert). En particulier, $Z_m = Y'$. Si I_i est l'idéal de E_i dans

$\mathcal{O}_{Y_i}|U_i$, alors $I_i\,\mathcal{O}_{Y'}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module parce que $I_i\,\mathcal{O}_{Y_{i+1}}$ l'est en tant que $\mathcal{O}_{Y_{i+1}}$-module (cf. (1.9)) . Donc $\Pi_{i=0}^{m-1} I_i\,\mathcal{O}_{Y'}$ l'est en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module. Grâce à (1.3) , $(Y', \bigcup_{i=0}^{m-1} f_i^{-1}(E_i))$ a la propriété de minimalité. Cela entraîne que $(Z_{i+1}, \pi_i^{-1}(E_i))$ a la propriété de minimalité pour tout i . D'autre part, π_i est un isomorphisme au-dessus de $Y_i - E_i$ et donc il induit un isomorphisme $Z_{i+1} - \pi_i^{-1}(E_i) \xrightarrow{\sim} Z_i - E_i$ pour tout i .

Grâce à (1.14) , si $F_i = Z_i \cap E_i$ et $p_i : Z_{i+1} \to Z_i$ est le morphisme induit par π_i , alors (F_i, p_i) est un éclatement. (Ici, remarquons que $|Z_i| \subset U_i$ pour tout i) . On voit que Z_i est fermé dans Y_i , car π est propre, et donc F_i l'est. Soit $\{(F_i, \pi_i')\}_{0 \leq i \leq m}$ une suite d'éclatements globaux de $Y = Y_0'$, où $\pi_i' : Y_{i+1}' \to Y_i$. Grâce à (1.14) , on a un plongement fermé canonique de Z_i dans Y_i' de sorte que π_j' induise p_j , où $0 \leq i \leq m$ et $0 \leq j < m$. Or, nous nous proposons de montrer que Z_m est ouvert dans Y_m' . Soit H_i l'idéal de Z_i dans $\mathcal{O}_{Y_i'}$. Soit G_i l'idéal de F_i dans $\mathcal{O}_{Y_i'}$. Si $q_o = \pi_o'\,\pi_1' \cdots \pi_{m-1}'$ et $W_o = q_o^{-1}(U_o)$, alors $G_o\,\mathcal{O}_{Y_m'}|W_o = (I_o\,\mathcal{O}_{Y_m'} + H_o\,\mathcal{O}_{Y_m'})|W_o$ qui est inversible en tant que module. Puisque $I_o\,\mathcal{O}_{Z_m}$ est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Z_m}$-module et $H_o\,\mathcal{O}_{Z_m} = (0)$, il existe un voisinage ouvert W_1 de Z_m Y_m' tel que $W_1 \subset W_o$ et $G_o\,\mathcal{O}_{Y_m'}|W_1 = I_o\,\mathcal{O}_{Y_m'}|W_1$. Donc, par la propriété universelle de l'éclatement π_o , il existe un Y-morphisme $q_1 : Y_m'|W_1 \to Y_1$. Evidemment $G_1\,\mathcal{O}_{Y_m'}|W_1 = (I_1\,\mathcal{O}_{Y_m'} + H_1\,\mathcal{O}_{Y_m'})|W_1$, par rapport aux π_j' et q_1 . Plus généralement, supposons qu'il existe un voisinage W_i de Z_m dans Y_m' et un Y-morphisme $q_i : Y_m'|W_i \to Y_i$. Alors on a

$G_i\,\mathcal{O}_{Y_m'}|W_i = (I_i\,\mathcal{O}_{Y_m'} + H_i\,\mathcal{O}_{Y_m'})|W_i$ par rapport aux π_j' , $j \geq i$, et q_i . Alors, par le même raisonnement que ci-dessus, on peut montrer qu'il existe un voisinage ouvert W_{i+1} de Z_m dans W_i et un Y-morphisme $q_{i+1} : Y_m'|W_{i+1} \to Y_{i+1}$. Ainsi, par récurrence, on obtient un voisinage ouvert W_m de Z_m dans Y_m' et un Y-morphisme $q_m : Y_m'|W_m \to Y_m = Y'$. Grâce à (1.11.1) , la composée des q_m et de l'inclusion $Y' = Z_m \subset Y_m'$ coïncide avec l'identité sur W_m , c'est-à-dire que $Z_m = Y_m'|W_m$, d'où Z_m est ouvert dans Y'_m . Donc, $T = Y'_m - Z_m$ est un sous-espace analytique complexe fermé de Y'_m . Il est évident que (T,k) avec l'inclusion $k : Y' \to Y'_m$ est un éclatement global. On a démontré que $\pi : Y' \to Y$ est obtenu par composition de la suite $\{(F_i,\pi'_i) , 0 \leq i < m , (T,k)\}$.

§ 2 . - ETOILES AU DESSUS D'UN ESPACE ANALYTIQUE-COMPLEXE

Désignons par $\mathcal{E}(Y)$ la catégorie des morphismes $\pi : Y' \to Y$ qui sont obtenus par composition de suites finies d'éclatements locaux de Y . Les morphismes dans $\mathcal{E}(Y)$ sont, par définition, les Y-morphismes. Rappelons le fait (1.7) + (1.11.1) , que $\mathrm{Hom}(\pi_1,\pi_2)$, pour deux objets π_i de $\mathcal{E}(Y)$ contient au plus un élément.

<u>DEFINITION</u> (2.1) . - Une <u>étoile</u> au-dessus de Y est une sous-catégorie e de $\mathcal{E}(Y)$ ayant les propriétés suivantes :

1) Si $\pi : Y' \to Y$ appartient à e , alors Y' n'est pas vide.

2) Si les π_i appartiennent à e , $i = 1,2$, alors il existe π_3 dans e qui <u>domine</u> π_1 et π_2 , i.e., $\mathrm{Hom}(\pi_3,\pi_i) \neq \emptyset$ pour tout $i = 1,2$.

3) Pour tout $\pi_1 : Y_1 \to Y$ dans e , il existe $\pi_2 : Y_2 \to Y$ dans e tel qu'il existe $q \in \mathrm{Hom}(\pi_2,\pi_1)$ et l'image $q(Y_2)$ soit relativement compacte dans Y_1 .

4) (maximalité) si e' est une sous-catégorie de $\mathcal{E}(Y)$ qui contient e et satisfait les conditions 1) - 3) ci-dessus, alors $e' = e$.

Nous désignons par $\mathcal{E}_Y$ l'ensemble des étoiles au-dessus de Y .

<u>Remarque</u> (2.1.1) . - Une étoile est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y)$.

<u>LEMME</u> (2.2) . - Pour toute sous-catégorie e_o de $\mathcal{E}(Y)$ ayant les propriétés 1) - 3) de (2.1) , il existe au moins une étoile qui contient e_o .

<u>Preuve</u> . - Immédiate d'après le Lemme de Zorn.

<u>LEMME</u> (2.3) . - Soit $\pi : Y' \to Y \in \mathcal{E}(Y)$ et soit e une étoile au-dessus de

Y , qui contient π . Alors il existe un et un seul point $y' \in Y'$ tel que pour tout $\pi_1 : Y_1 \to Y$ dans e et pour q dans $\mathrm{Hom}(\pi_1,\pi) \neq \emptyset$ l'image $q(Y_1)$ contienne y' .

Preuve . - Regardons l'ensemble $\{K_\alpha\}$ des sous-ensembles compacts K_α de Y' pour lesquels il existe $\pi' : Y'' \to Y \in e$ et $q \in \mathrm{Hom}(\pi',\pi) \neq \emptyset$ tels que $K_\alpha = \overline{q(Y'')}$. Grâce à 3) de (2.1) , $\{K_\alpha\}$ n'est pas vide. En plus, grâce aux 1) et 2) de (2.1) , l'intersection d'un nombre fini de K n'est pas vide. Donc $K = \bigcap_\alpha k_\alpha$ n'est pas vide.

Soit y' un point quelconque de K . Soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble de tous les voisinages ouverts de y' dans Y' . Pour tout couple (U,π_β) avec $U \in \mathfrak{U}$ et $\pi_\beta \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi_\beta,\pi) \neq \emptyset$, définissons $\pi(\beta,U)$ comme étant la composée :

$$Y_\beta | U_\beta \xrightarrow{\lambda_\beta} Y_\beta \xrightarrow{\pi_\beta} Y$$

où $U_\beta = q^{-1}(U)$ avec $q \in \mathrm{Hom}(\pi_\beta, \pi)$ et λ_β est l'inclusion canonique. Soit e' la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y)$ dont les objets sont ou bien objets de e ou bien les $\pi(\beta,U)$ obtenus comme ci-dessus. Alors e' vérifie les conditions 1) - 3) de (2.1) . Donc $e' = e$ par 3) de (2.1) . Autrement dit, e contient tous les $\pi(\beta,U)$. Donc K est contenu dans $\overline{U}$ pour tout $U \in \mathfrak{U}$, i.e., $K = \{y'\}$. Pour démontrer la propriété de y' dans (2,3) , il suffit de remarquer que le morphisme $\pi_0 : Y' - \{y'\} \to Y$, induit par π , n'est pas dans e . En effet, s'il existait $\pi_1 \in e$ avec $q \in \mathrm{Hom}(\pi_1,\pi)$ tel que $y' \notin q(Y_1)$, où $\pi_1 : Y_1 \to Y$, alors on pourrait augmenter e en lui ajoutant tous les

$$Y_\beta | q^{-1}(Y' - y') \longrightarrow Y$$

induits par $\pi_\beta : Y_\beta \to Y$ avec $q \in \mathrm{Hom}(\pi_\beta,\pi)$ de façon que les conditions 1) - 3) de (2.1) restent vérifiées. C'est-à-dire que π_0 appartiendrait à e . Supposons que $\pi_0 \in e$. Par un raisonnement comme ci-dessus, en tenant π_0 au lieu de π , on trouve que K contient un point autre que y' .

Etant donné $\pi : Y' \to Y \in \mathcal{E}(Y)$, nous désignons par $\mathcal{E}_\pi$ l'ensemble des étoiles $\in \mathcal{E}(Y)$ qui contiennent π . Grâce à (2.3) , il existe une application $p_\pi : \mathcal{E}_\pi \to Y'$ définie par $p_\pi(e) = y'$ avec le point $y' \in Y'$ ayant la propriété de (2.3) .

LEMME (2.4) . - $p_\pi : \mathcal{E}_\pi \longrightarrow Y'$ est surjective.

Preuve . - Soit y' un point quelconque de Y' . Soit e_o la sous-catégorie de $\mathcal{E}(Y)$ dont les objets sont les morphismes $Y'|U \to Y$, induits par π , pour les voisinages ouverts U de y' dans $|Y'|$. Alors e_o satisfait les conditions 1) - 3) de (2.1) . Donc, il existe une étoile $e \in \mathcal{E}_Y$ qui contient e_o . Il est facile de vérifier que $e \in \mathcal{E}_\pi$ et $p_\pi(e) = y'$.

LEMME (2.5) . - Soit $\pi : Y' \to Y \in \mathcal{E}(Y)$. Soit $e \in \mathcal{E}_\pi$. Alors il existe une étoile e' et une seule au-dessus de Y' tel que

(2.5.1) $\pi' \in e'$ si et seulement si $\pi\pi' \in e$.

Preuve . - Soit e'_o la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y')$ dont les objets sont les $\pi' \in \mathcal{E}(Y')$ tels que $\pi\pi' \in e$. Alors, en vertu de (1.13.1) , on vérifie facilement que e'_o satisfait 1) - 3) de (2.1) . Soit e' une étoile au-dessus de Y' qui contient e'_o . Nous nous proposons de démontrer que $e'_o = e'$. Soit $\overline{e}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y)$ dont les objets sont ou bien dans e ou bien de la forme $\pi\pi'$ avec $\pi' \in e'$. Evidemment $\overline{e}$ satisfait 1) et 2) de (2.1) . Pour vérifier 3) de (2.1) , soient $\pi_1 \in e$ et $\pi'_1 \in e'$. On a $\pi_2 \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi_2,\pi_1) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Hom}(\pi_2,\pi) \neq \emptyset$. Soit $\pi'_2 \in \mathrm{Hom}(\pi_2,\pi)$. Alors, grâce à (1.3) , $\pi'_2 \in e'_o$. Donc il existe $\pi'_3 \in e'$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi'_3,\pi'_i) \neq \emptyset$ pour $i = 1,2$. Alors $\mathrm{Hom}(\pi\pi'_3,\pi_1) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Hom}(\pi\pi'_3,\pi\pi'_1) \neq \emptyset$. Il en résulte que $\overline{e}$ satisfait 3) de (2.1) . La maximalité de e implique que $e = \overline{e}$. Par définition de e'_o , cela entraîne que $e'_o = e'$.

LEMME (2.6) . - Pour $\pi \in \mathcal{E}(Y)$ et $e' \in \mathcal{E}_{Y'}$, il existe une étoile et une seule $e \in \mathcal{E}_\pi$ tel que

(2.6.1) $\pi_1 \in e$ si et seulement s'il existe $\pi'_1 \in e'$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi\pi'_1,\pi_1) \neq \emptyset$.

Preuve . - Soit e_o la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y)$ dont les objets sont de la forme $\pi\pi'$ avec $\pi' \in e'$. Il est évident que e_o satisfait 1) - 3) de (2.1) . Donc, il existe une étoile $e \in \mathcal{E}_Y$ qui contient e_o . Grâce à (2.5), on a $e'' \in \mathcal{E}_{Y'}$ tel que $\pi'' \in e''$ si et seulement si $\pi\pi'' \in e$. Puisque

$e'' \supset e'$, $e'' = e'$. Si $\pi_1 \in e$, alors il existe $\pi_2 \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi_2,\pi_1) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Hom}(\pi_2,\pi) \neq \emptyset$ par 3) de (2.1) . Soit $\pi_1' \in \mathrm{Hom}(\pi_2,\pi)$. En vertu de (1.13) , $\pi_1' \in \mathcal{E}(Y')$, d'où $\pi_1' \in e'' = e'$. (2.6.1) en résulte immédiatement.

<u>PROPOSITION</u> (2.7) . - Pour $\pi : Y' \to Y \in \mathcal{E}(Y)$, il existe une application bijective $j_\pi : \mathcal{E}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{E}_\pi$ tel que les conditions (2.5.1) et (2.6.1) soient satisfaites pour tous $e' \in \mathcal{E}_{Y'}$ et $e = j_\pi(e')$.

<u>Preuve</u> . - Immédiate des (2.5) et (2.6) .

<u>Remarque</u> (2.8) . - Nous regardons j_π comme une injection $\mathcal{E}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{E}_Y$. On a $j_{\pi\pi'} = j_\pi j_{\pi'}$ pour $\pi' \in \mathcal{E}(Y')$.

<u>PROPOSITION</u> (2.9) . - Pour $\pi_i : Y_i \to Y \in \mathcal{E}(Y), i = 1, 2,$ il existe un $\pi_3 : Y_3 \longrightarrow Y \in \mathcal{E}(Y)$ ayant les propriétés suivantes :

(2.9.1) Etant donné un morphisme strict $f : Z \to Y_\bullet$, il existe un Y-morphisme $Z \to Y_3$ si et seulement s'il existe des Y-morphismes $Z \to Y_i$ pour $i = 1,2$.

(2.9.2) $$\mathcal{E}_{\pi_3} = \mathcal{E}_{\pi_1} \cap \mathcal{E}_{\pi_2}$$

<u>Preuve</u> . - Nous nous proposons de montrer d'abord l'existence de π_3 ayant (2.9.1) . Chaque π_i est obtenu par une suite finie d'éclatements locaux de Y . Choisissons une telle suite pour chaque π_i et soit m_i leur longueur. Par une récurrence facile sur $m_1 + m_2$, la démonstration se ramène au cas où chacun des π_i est obtenu par un seul éclatement local. Dans ce cas-là, l'existence de π_3 n'est autre que (1.12) . Soit $e \in \mathcal{E}_Y$. Alors $e \in \mathcal{E}_{\pi_1} \cap \mathcal{E}_{\pi_2}$ si et seulement si $\pi_i \in e$, $i = 1,2$. C'est équivalent à dire qu'il existe $\pi' \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi',\pi_i) \neq \emptyset$ pour $i = 1,2$. Grâce à (2.9.1) , la dernière condition équivaut à $\mathrm{Hom}(\pi',\pi_3) \neq \emptyset$. Ainsi $e \in \mathcal{E}_{\pi_1} \cap \mathcal{E}_{\pi_2}$ si et seulement si $\pi_3 \in e$, i.e., $e \in \mathcal{E}_3$

On appelle une <u>jonction</u> des π_i , $i = 1,2,$ le morphisme π_3 de (2.9) . Les π_i étant donnés, le morphisme π_3 de (2.9) est unique à Y-isomorphisme près.

<u>LEMME</u> (2.10) . - - Soient $\pi_i : Y_i \to Y \in \mathcal{E}(Y)$, $i = 1,2,3$, tels que π_3 soit la jonction des Y_j , $j = 1,2$. Soit $q_j \in \mathrm{Hom}(\pi_3,\pi_j)$. Alors

$q_1 \times q_2 \; : \; Y_3 \to Y_1 \times Y_2$ est un plongement fermé.

Preuve . - Soit $T = Y_1 \times_Y Y_2$, le produit fibré par rapport aux π_j , qui est un sous-espace analytique-complexe fermé de $Y_1 \times Y_2$. $q_1 \times q_2$ induit $Y_3 \to T$. Soit $\{(U_{jk}, E_{jk}, \pi_{jk})\}_{0 \leq k < m_j}$ une suite finie d'éclatements locaux, qui donne π_j . Soit E'_{jk} l'image réciproque canonique de E_{jk} dans Y_j , et soit $E'_j = \bigcup_k^j E'_{jk}$. Soit $F = E'_1 \times Y_2 \cup Y_1 \times E'_2$. Soit Z le plus petit sous-espace analytique-complexe fermé de T tel que $Z-F = T-F$. Puisque la projection $T \to Y$ est étale en dehors de F , elle induit un morphisme strict $z : Z \to Y$. On a $(q_1 \times q_2)^{-1}(F) = q_1^{-1}(E'_1) \cup q_2^{-1}(E'_2)$. Puisque chacun des $q_j^{-1}(E'_{jk})$ est défini par un idéal dans $\mathcal{O}_{Y_3}$, qui est inversible en tant que $\mathcal{O}_{Y_3}$-module grâce à (1.9) , $(Y_3, (q_1 \times q_2)^{-1}(F))$ a la propriété de minimalité par (1.3) . Donc, $q_1 \times q_2$ induit un morphisme $h : Y_3 \to Z$. D'autre part, z est strict et p_i induit un Y-morphisme $Z \to Y_j$, $j = 1,2$. Donc, il existe un Y-morphisme $g : Z \to Y_3$. Grâce à (1.11.1) , $gh = id_{Y_3}$. Ceci implique que h est un plongement fermé et donc $q_1 \times q_2$ aussi.

LEMME (2.10) . - Soit $\pi \in \mathcal{E}(Y)$ et $e \in \mathcal{E}_Y$. Alors $\pi \in e$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

(2.10.1) Pour tout $\pi_\alpha \in e$, il existe $\pi_\beta \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi_\beta, \pi_\alpha) \neq \emptyset$ et tel que si $\pi'_\beta \; : \; Y'_\beta \to Y$ désigne la jonction des π et π_β , l'image $q_\beta(Y')$ avec $q_\beta \in \mathrm{Hom}(\pi'_\beta, \pi)$ soit relativement compacte et non vide.

Preuve . - Etant donné un $\pi \in \mathcal{E}(Y)$ satisfaisant la condition (2.10.1) , soit e_o la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y)$ dont les objets sont ou bien ceux de e ou bien les jonctions de π avec $\pi_\beta \in e$. Alors e_o a les propriétés 1) - 3) de (2.1) . En effet, pour 3) par exemple, il suffit de remarquer que, si $\pi_{\beta_i} \in e$ pour $i = 1,2$ et π_{β_3} est la jonction des π_{β_i} , alors $\pi_{\beta_3} \in e$ et la jonction des π et π_{β_3} n'est autre que celle des deux jonctions de π avec les π_{β_i} , $i = 1,2$. La dernière assertion est immédiate de la propriété universelle (2.9.1) des jonctions. Grâce à 4) de (2.1) , $e_o = e$.

LEMME (2.11) . - Soit $\pi_o : Y_o \to Y \in e \in \mathcal{E}_Y$. Soient (U_i, E_i, h_i) deux éclatements locaux avec $h_i : Y_i \to Y_o$ pour $i = 1,2$. Supposons que :

(2.11.1) $y_o = p_{\pi_o}(e) \in U_1 \cap U_2$

(2.11.2) $E_2 - E_1$ soit rare dans un voisinage de y_o dans $U_1 \cap U_2$.

(2.11.3) $\pi_o h_1 \in e$.

Alors on a $\pi_o h_2 \in e$.

COROLLAIRE (2.11.4) . - Si (U,E,h) est un éclatement local de Y_o tel que $p_{\pi_o}(e) \in U$ et E soit rare dans U , alors $\pi_o h \in e$.

Preuve . - (2.11) se ramène à (2.11.4) comme suit. Soit $E_2' = h_1^{-1}(E_2)$, soit $U_2' = h_1^{-1}(U_2)$ et soit (U_2', E_2', g) un éclatement local avec $g : Y' \to Y_1$. Alors, grâce à (1.12) , $\mathrm{Hom}(\pi_o h_1 g, \pi_2 h_2) \neq \emptyset$. Donc, il suffit de vérifier que $\pi_o h_1 g \in e$. Puisque $h_1^{-1}(E_1)$ est rare dans Y_1 par la définition de l'éclatement, (2.11.2) implique que E_2' est aussi rare dans un voisinage de $p_{\pi_o h_1}(e)$. Ainsi, en remplaçant π_o par $\pi_o h_1$, on peut supposer que h_1 est l'identité de Y_o (i.e., $U_1 = |Y_o|$ et $E_1 = \emptyset$) . L'hypothèse (2.11.2) revient à dire que E_2 est rare dans un voisinage de y_o . En remplaçant U_2 par un voisinage ouvert assez petit de y_o dans Y_o , on trouve que le problème est réduit au cas de (2.11.4) . Maintenant, nous nous proposons de démontrer (2.11.4) . En remplaçant Y_o par $Y_o|U$, on peut supposer que $U = |Y_o|$ et E soit fermé et rare dans Y_o . Soit $\pi = \pi_o h$. Il suffit de vérifier que π satisfait la condition (2.10.1) . Puisque $\pi_o \in e$, on peut supposer que $\mathrm{Hom}(\pi_\alpha, \pi_o) \neq \emptyset$ pour π_α donné dans (2.10.1) . Il existe $\pi_\beta \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi_\beta, \pi_\alpha) \neq \emptyset$ et que $\pi_{\alpha\beta}(Y_\beta)$ pour $\pi_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(\pi_\beta, \pi_\alpha)$ soit relativement compact dans Y_α , où $\pi_\alpha : Y_\alpha \to Y$ et $\pi_\beta : Y_\beta \to Y$. La notation étant celle de (2.10.1) , $q_\beta(Y_\beta')$ est relativement compact dans Y' , où $\pi : Y' \to Y$. En fait, l'adhérence K de $\pi_{\alpha\beta}(Y_\beta)$ dans Y_α est compacte par hypothèse et donc $\pi_\alpha(K)$ l'est. Evidemment $q_\beta(Y_\beta') \subset \pi^{-1}(\pi_\alpha(K))$. Puisque π est un éclatement global et donc propre, il entraîne que $q_\beta(Y_\beta')$ est relativement compact. Il suffit, enfin, de montrer que Y' n'est pas vide. Puisque Y_β n'est pas vide, il existe un ouvert non vide W dans Y_β tel que π_β soit étale dans W . Alors l'image $V = \pi_\beta(W)$ est un ouvert non vide dans Y , et $E \cap V$ est rare dans V . π induit un isomorphisme au dessus de $V-E$. Donc, si $Z = Y_\beta|\pi_\beta^{-1}(V-E)$ et $\pi'' : Z \to Y$ est le morphisme induit par π_β , alors Z n'est pas vide et $\mathrm{Hom}(\pi'',\pi) \neq \emptyset$ ainsi que $\mathrm{Hom}(\pi'',\pi_\beta) \neq \emptyset$. La propriété universelle de la jonction π'_β implique $\mathrm{Hom}(\pi'',\pi'_\beta) \neq \emptyset$. Il en résulte que $Y'_\beta \neq \emptyset$.

<u>PROPOSITION</u> (2.12) . - Soit $\pi_i : Y_i \to Y \in \mathcal{E}(Y)$, $i = 1,2$. Supposons que $\pi_{12} \in \mathrm{Hom}(\pi_2,\pi_1) \neq \emptyset$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(2.12.1) π_{12} est propre et surjectif .

(2.12.2) π_{12} est obtenu par une suite finie d'éclatements globaux dont les centres sont tous rares.

(2.12.3) $$\mathcal{E}_{\pi_1} = \mathcal{E}_{\pi_2} .$$

<u>Preuve</u> . - Nous démontrons d'abord que (2.12.1) implique (2.12.2) . Si π_{12} est propre, alors il existe une suite finie d'éclatements globaux $\{(E_\alpha,p_\alpha)\}_{0 \leq \alpha < m}$ avec $p_\alpha : Z_{\alpha+1} \longrightarrow Z_\alpha$ telle que $Z_0 = Y_1$ et $\pi_{12} = p_0p_1 \cdots p_{m-1}$. C'est une conséquence de (1.13) et (1.16) . Nous nous proposons de démontrer que si un tel π_{12} est surjectif, alors E_α est rare dans Z_α pour tout α . Si π_{12} est surjectif, alors p_0 l'est . Si E_0 n'est pas rare dans Z_0 , alors il existe un ouvert non vide U de Z_0 tel que $U \cap \overline{Z_0 - E_0} = \emptyset$, si $p'_0 : Z_1|p_0^{-1}(U) \to Z_0|U$ est induit par p_0 , alors $(E_0|U,p'_0)$ est un éclatement de $Z_0|U$. Puisque $|E_0|U| = |Z_0|U|$, $Z_1|p_0^{-1}(U)$ est vide. C'est contraire à la surjectivité de p_0 . Donc E_0 est rare dans Z_0 . En plus, p_0 induit un isomorphisme $Z_1 - p_0^{-1}(E_0) \xrightarrow{\sim} Z_0 - E_0$ et $Z_1 - p_0^{-1}(E_0)$ est dense dans Z_1 . Puisque π_{12} est surjectif, l'image de $p_1 \cdots p_{m-1}$ contient $Z_1 - p_0^{-1}(E_0)$. Puisque $p_1 \cdots p_{m-1}$ est propre, il est donc surjectif. Il est facile de vérifier, par une récurrence sur m , que les E_α sont tous rares. On a démontré que (2.12.1) implique (2.12.2) . D'après (2.11.4) , si π_{12} est obtenu par un éclatement global dont le centre est rare, alors $\mathcal{E}_{\pi_1} = \mathcal{E}_{\pi_2}$. Il est facile d'en déduire par récurrence, que (2.12.2) implique (2.12.3) . Il reste à démontrer que (2.12.3) implique (2.12.1) . Grâce à (2.4) , (2.12.3) implique que π_{12} est surjectif. Soit $\{(U_\alpha,E_\alpha,p_\alpha)\}_{0 \leq \alpha < m}$ une suite finie d'éclatements locaux tel que $\pi_{12} = p_0p_1 \cdots p_{m-1}$. Son existence est dûe à (1.13) . Puisque π_{12} est surjec-

tif, p_o l'est et donc $U_o = |Y_1|$. En plus, $(U_o, E_o, p_o) = (E_o, p_o)$ est un éclatement global et donc p_o est propre. Ayant déjà démontré (2.12.1) $\Longrightarrow$ (2.12.3) , on en déduit que $\mathcal{E}_{\pi_2} = \mathcal{E}_{\pi_1} = \mathcal{E}_{\pi_1 p_o}$. Par une récurrence évidente sur m , on déduit (2.12.1) de (2.12.3) .

§ 3. - LA TOPOLOGIE DE $\mathcal{E}_Y$

Nous nous rappelons que $\mathcal{E}_Y$ est l'ensemble de toutes les étoiles au-dessus de Y et que $\mathcal{E}_\pi$ pour $\pi \in \mathcal{E}(Y)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{E}_Y$ tel que $e \in \mathcal{E}_\pi \Longleftrightarrow \pi \in e$. Grâce à (2.9) , pour tout couple $\pi_i \in \mathcal{E}(Y)$, $i = 1,2$, il existe $\pi_3 \in \mathcal{E}(Y)$ tel que $\mathcal{E}_{\pi_1} \cap \mathcal{E}_{\pi_2} = \mathcal{E}_{\pi_3}$. Il entraîne qu'il existe <u>une topologie dans</u> $\mathcal{E}_Y$ pour laquelle les sous ensembles $\mathcal{E}_\pi$ avec $\pi \in \mathcal{E}(Y)$ forment une base (des ouverts).

<u>DEFINITION</u> (3.1) . - Nous appelons <u>voûte étoilée</u> au-dessus de Y l'espace topologique $\mathcal{E}_Y$ défini ci-dessus.

<u>LEMME</u> (3.2) . - Soient $e_i \in \mathcal{E}_Y$, $i = 1,2$, et supposons que $e_1 \neq e_2$. Alors il existe $f : Z \to Y \in \mathcal{E}(Y)$ tel que $f \in e_i$ pour $i = 1,2$ et $p_f(e_1) \neq p_f(e_2)$.

<u>Preuve</u> . - Puisque $e_1 \neq e_2$, il existe $\pi_i : Y_i \to Y \in e_i$, $i = 1,2$, tels que $\pi_1 \notin e_2$ et $\pi_2 \notin e_1$. Soit $\{(U_{i\alpha}, E_{i\alpha}, \pi_{i\alpha})\}_{0 \leq \alpha < m}$ une suite finie d'éclatements locaux qui donne π_i . Soit $f_{\alpha\beta} : Z_{\alpha\beta} \to Y$ la jonction des $\pi_{10} \cdots \pi_{1\alpha-1}$ et $\pi_{20} \cdots \pi_{2\beta-1}$ pour chaque (α, β) , $0 \leq \alpha < m_1$ et $0 \leq \beta < m_2$. On a $f_{oo} = id_Y \in e_i$, $i = 1,2$, $f_{m_1\beta} \notin e_2$ et $f_{\alpha m_2} \notin e_1$. Il existe donc un couple (α, β) tel que $f_{\alpha\beta} \in e_i$, $i = 1,2$, $f_{\alpha+1\beta} \notin e_2$ et $f_{\alpha\beta+1} \notin e_1$. En vertu de (1.12) , $q_1 \in Hom(f_{\alpha+1\beta}, f_{\alpha\beta})$ et $q_2 \in Hom(f_{\alpha\beta+1}, f_{\alpha\beta})$ sont obtenus par un seul éclatement local (V_i, F_i, q_i) respectivement pour $i = 1,2$ (En fait, F_1 est l'image réciproque de $E_{1\alpha}$ et F_2 est celle de $E_{2\beta}$) si $p_{f\alpha\beta}(e_1) \neq p_{f\alpha\beta}(e_2)$, alors $f = f_{\alpha\beta}$ est ce qu'on cherche. Supposons que $p_{f\alpha\beta}(e_i) = z$, $i = 1,2$. On a $f_{\alpha+1\beta} \in e_1$ et

$f_{\alpha\beta+1} \in e_2$. ($f_{\alpha+1\beta}$ est une jonction des $f_{\alpha\beta}$ et $\pi_{10} \dots \pi_{1\alpha+1}$ qui sont dans e_1 . De même pour $f_{\alpha\beta+1}$) . Donc $z \in V_1 \cap V_2$. Soit $V = V_1 \cap V_2$, soit $D = F_1 \cap F_2|V$ et soit (V,D,h_o) un éclatement local avec $h_o : T \to Z_{\alpha\beta}$. Grâce à (2.11), $f_{\alpha\beta}h_o \in e_i$, $i = 1,2$. Soit $(h_o^{-1}(F_i),q_i')$ un éclatement global avec $q_i' : T_i \to T$, $i = 1,2$. Grâce à (1.12) , h_oq_i' est la jonction de h_o et q_i . (Comparez (1.12.2) avec (2.9.1)) . En vertu de la propriété universelle (2.9.1) d'une jonction, on vérifie facilement qu'alors $f_{\alpha\beta}h_oq_i'$ est la jonction de $f_{\alpha\beta}h_o$ et $f_{\alpha\beta}q_i$ (Utilisez l'unicité de (1.11.1)). Puisque $f_{\alpha\beta}h_o \in e_i$ et $f_{\alpha\beta}q_i \in e_i$, on a $f_{\alpha\beta}h_oq_i' \in e_i$. Soit G_i le plus petit sous espace analytique-complexe fermé de T tel que $G_i - h_o^{-1}(D) = h_o^{-1}(F_i) - h_o^{-1}(D)$. Soit $t_i = p_{t_{\alpha\beta}h_o}(e_i)$, $i = 1,2$. Nous nous proposons de démontrer que $t_i \in G_j$ pour $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq 2$, et $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, d'où évidemment résulte (3.2) avec $f = f_{\alpha\beta}h_o$. Si $t_2 \notin G_1$, alors $|h_o^{-1}(F_1)|$ coïncide avec $|h_o^{-1}(D)|$ dans un voisinage assez petit de t_2 dans T . Puisque $(T,h_o^{-1}(D))$ a la propriété de minimalité de (1.3) , $h_o^{-1}(F_1)$ sera alors rare dans un voisinage assez petit de t_2 dans T . Mais, c'est impossible parce qu'alors (2.11.4) implique $f_{\alpha\beta}h_oq_1' \in e_2$ et donc $f_{\alpha\beta}q_1 \in e_2$ car $\mathrm{Hom}(f_{\alpha\beta}h_oq_1', f_{\alpha\beta}q_1) \neq \emptyset$. Ainsi $t_2 \in G_1$. Par symétrie, $t_1 \in G_2$. Ensuite, grâce à (1.14) , si $g_i : G_i \to F_i$ est le morphisme induit par h_o alors $(F_i \cap V,D,g_i)$ est un éclatement, $i = 1,2$, et de même si $G = G_1 \cup G_2$ et $g : G \to F = F_1 \cup F_2$ est induit par h_o , alors $(F \cap V,D,g)$ est un éclatement. Grâce à (1.15) , $G_1 \cup G_2$ est une réunion disjointe, i.e., $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

<u>THEOREME</u> (3.3) . - Si Y est un espace analytique-complexe Hausdorff, alors $\mathcal{E}_Y$ est Hausdorff.

<u>Preuve</u> . - Soient e_i , $i = 1,2$, deux étoiles différentes au-dessus de Y . Alors, grâce à (3.2) , il existe $f : Z \to Y \in \mathcal{E}(Y)$ tel que $f \in e_i$ pour tout $i = 1,2$, et $p_f(e_1) \neq p_f(e_2)$. Puisque Y est Hausdorff, Z l'est. Donc, il existe deux ouverts V_i dans Z tels que $p_f(e_i) \in V_i$, $i = 1,2$, et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Soit $\pi_i : Z|V_i \to Y$. Alors on a $\mathcal{E}_{\pi_1} \cap \mathcal{E}_{\pi_2} \neq \emptyset$ et $e_i \in \mathcal{E}_{\pi_i}$, $i = 1,2$.

THEOREME (3.4) . - Y étant un espace analytique-complexe quelconque, l'application canonique $p_Y : \mathcal{E}_Y \to Y$ est continue, surjective et propre.

Preuve . - Si U est un ouvert de Y et $\pi : Y|U \to Y$ est l'inclusion, alors $\mathcal{E}_\pi = p_Y^{-1}(U)$. Ceci montre que p_Y est continue. La surjectivité de p_Y est un cas spécial de (2.4) . Nous nous proposons de démontrer que p_Y est propre. Puisque chaque sous-ensemble compact de Y est contenu dans une union finie des compacts chacun desquels est contenu dans un ouvert de coordonnées de Y , on peut supposer que Y est Hausdorff. Soit K un sous-ensemble compact quelconque de Y . Soit $\tilde{K} = p_Y^{-1}(K)$. Pour démontrer que $\tilde{K}$ est compact, considérons une famille quelconque $C = \{C_k\}_{k \in \Lambda}$ de sous-ensembles C_k de $\tilde{K}$, telle que :

a) C_k est fermé dans $\tilde{K}$ pour tout $k \in \Lambda$

b) $\bigcap_{k \in \Gamma} C_k \neq \emptyset$ pour tout sous-ensemble fini Γ de Λ ,

c) (maximalité) si $C \bigcup \{F\}$ avec un fermé F de $\tilde{K}$ a les les propriétés a) et b) , alors il existe $k \in \Lambda$ tel que $F = C_k$.

Nous allons démontrer qu'alors $\bigcap_{k \in \Lambda} C_k \neq \emptyset$.

Soit e_o la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(Y)$ telle que $\pi_\alpha : Y_\alpha \to Y$ appartient à e_o si et seulement s'il existe un ouvert relativement compact V de Y_α pour lequel $p_{\pi_\alpha}^{-1}(V) \cap C_k \neq \emptyset$ pour tout $k \in \Lambda$. Soit $\pi_\alpha : Y_\alpha \to Y \in e_o$. Alors la famille des fermés $\{\overline{V} \cap F_k\}$ où F_k est l'adhérence de $p_{\pi_\alpha}(\mathcal{E}_{\pi_\alpha} \cap C_k)$ dans Y_α pour tout $k \in \Lambda$, a la propriété d'intersection finie non vide comme b) de C . (Ici, utilisez l'hypothèse que C est maximale et donc fermée pour l'opération d'intersection finie). Puisque $\overline{V}$ est compact, on a $\bigcap_{k \in \Lambda} F_k \neq \emptyset$. Soit y_α un point quelconque de cette intersection des F_k . Nous allons démontrer que $\bigcap_{k \in \Lambda} F_k = \{y_\alpha\}$. En fait, soit W un voisinage compact quelconque de y_α dans Y_α et soit $\tilde{W} = p_{\pi_\alpha}^{-1}(W)$. Alors il est évident que la famille $C \bigcup \{C_k \cap \tilde{W}\}_{k \in \Lambda}$ satisfait les conditions a) et b) ci-dessus. Par c) , $C_k \cap \tilde{W} \in C$ pour tout $k \in \Lambda$ et donc $\bigcap_{k \in \Lambda} F_k \subset W$. Ainsi, $\bigcap_{k \in \Lambda} F_k = \{y_\alpha\}$. (Remarquons que Y étant Hausdorff par hypothèse, tout compact W est fermé dans Y_α). Soit $\pi_\alpha \in e_o$, $\alpha = 1,2$, et soit π_3 la jonction des π_α . Soit $q_\alpha : Y_3 \to Y_\alpha \in \mathrm{Hom}(\pi_3, \pi_\alpha)$. Soit V_α un voisinage ouvert relativement compact de y_α dans Y_α , $\alpha = 1,2$. Alors $V_3 = q_1^{-1}(V_1) \cup q_2^{-1}(V_2)$ est un ouvert relativement compact de Y_3 . Soit W_α un voisinage compact de y_α dans V_α . On a vérifié, plus haut, que $p_{\pi_\alpha}^{-1}(W_\alpha) \cap C_k \in C$ pour tout $k \in \Lambda$. Grâce à b) de C , $\bigcap_{\alpha=1,2} p_{\pi_\alpha}^{-1}(W_\alpha) \cap C_k \neq \emptyset$ pour tout $k \in \Lambda$, d'où $p_{\pi_3}^{-1}(V) \cap C_k \neq \emptyset$ pour tout $k \in \Lambda$. Ceci montre que $\pi_3 \in e_o$. A partir de celà, il est facile de démontrer que e_o satisfait les conditions 1) - 3) de (2.1) . Par conséquent, il existe une étoile $e \in \mathcal{E}_Y$ tel que $e_o \subset e$. Nous allons démontrer que $e = e_o$ et $e \in C_k$ pour tout $k \in \Lambda$, d'où immédiatement résulte (3.4). Soit $z_\alpha = p_{\pi_\alpha}(e)$ pour tout $\pi_\alpha : Y_\alpha \to Y \in e$. Si $\pi_\alpha \in e_o$, alors on a $z_\alpha = y_\alpha$ parce que pour un voisinage ouvert quelconque V de y_α dans Y_α on a $(Y_\alpha|V \hookrightarrow Y_\alpha \xrightarrow[\pi_\alpha]{} Y) \in e_o$. Si $e \neq e_o$, il existe $\pi_\beta \in e$ tel que $\pi_\beta \notin e_o$. Puisque π_β est obtenu par une suite finie d'éclatements locaux, on peut supposer qu'il existe $\pi_\beta : Y_\alpha \to Y \in e_o$ tel que $\pi_\beta = \pi_\alpha q$ pour un éclatement local (U,E,q) de Y_α . Puisque $y_\alpha = z_\alpha = q(z_\beta)$, on a $y_\alpha \in U$. Soit G le plus petit sous-espace analytique complexe fermé de $Y_\alpha|U$ tel que $(Y_\alpha - E)|U = G - E$. Soit $D = G \cap E$ qui est un sous-espace analytique complexe fermé et rare dans $Y_\alpha|U$. Soit (U,D,h) un éclatement avec $h : Y_\gamma \to Y_\alpha$. Grâce à (2.12) , il est facile de vérifier que $\pi_\alpha h \in e_o$. Soit G^* (resp. E^*) le plus petit sous-espace complexe fermé de Y_γ tel que $G^* - h^{-1}(D) = h^{-1}(G) - h^{-1}(D)$ (resp. $E^* - h^{-1}(D) = h^{-1}(E) - h^{-1}(D)$). Alors Y_γ est l'union disjointe de G^* et E^* (cf. (1.14) et (1.15)) . Soit $(h^{-1}(E),q')$ un éclatement avec $q' : Y'_\beta \to Y_\gamma$. Puisque $h^{-1}(E) \cap G^* = h^{-1}(D) \cap G^*$ et $h^{-1}(E) \supset E^*$, q' induit un isomorphisme $Y'_\beta \xrightarrow{\sim} G^*$. D'autre part, on a $h' : Y'_\beta \to Y_\beta$ tel que $(q^{-1}(D),h')$ soit un éclatement. Puisque D est rare dans $Y_\alpha|U$, $q^{-1}(D)$ est rare dans Y_β . Pour cela, on peut utiliser (1.9) et (1.3)). Par conséquent, $\pi_\alpha h q' = \pi_\beta h' \in e$. Donc, si l'on pose $z'_\beta = p_{\pi_\beta h'}(e)$, on obtient $y_\gamma = z_\gamma = q'(z'_\beta) \in G^*$. Puisque $\pi_\alpha h|G^*$ est isomorphe à $\pi_\alpha h q'$, on en déduit que $\pi_\alpha h \in e_o$ implique $\pi_\alpha h q' \in e_o$, d'où $\pi_\beta \in e_o$. C'est contradictoire. Ainsi, on a démontré que $e_o = e$. Maintenant, il reste à démontrer que $e \in C_k$ pour tout $k \in \Lambda$. Puisque C_k est fermé dans $\mathcal{E}_Y$, il suffit que pour tout $\pi_\alpha \in e = e_o$ et tout $k \in \Lambda$, on montre que $C_k \cap \mathcal{E}_{\pi_\alpha} \neq \emptyset$. C'est évident par définition de e_o .

<u>THEOREME</u> (3.5) . - Etant donné un nombre fini de $\pi_i : Y_i \to Y \in \mathcal{E}(Y)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(3.5.1) $\mathcal{E}_Y = \bigcup_i \mathcal{E}_{\pi_i}$

(3.5.2) Pour tout sous-ensemble compact K de Y, il existe un système de sous-ensembles compacts $K_i \subset Y_i$, tels que $K \subset \bigcup_i \pi_i(K_i)$.

(3.5.3) Pour toute suite convergente de points $\{y_\alpha\}$ dans Y, il existe un indice i et une suite convergente de points $\{x_p\}$ dans Y_i telle que $\{\pi_i(x_p)\}$ soit une sous-suite de $\{y_\alpha\}$.

Preuve. - Montrons (3.5.1) $\Longrightarrow$ (3.5.2). Grâce à (3.4), $\tilde{K} = p_Y^{-1}(K)$ est compact. Pour tout $e \in \tilde{K}$, il existe un indice $i(e)$ tel que $e \in \mathcal{E}_{\pi_{i(e)}}$. Soit V_e un voisinage ouvert relativement compact de $p_{\pi_{i(e)}}(e)$ dans Y_i. Alors $\tilde{K} \subset \bigcup_{e \in \tilde{K}} p_{\pi_{i(e)}}^{-1}(V_e)$ implique qu'il existe un sous-ensemble fini Δ de $\tilde{K}$ tel que

$$\tilde{K} \subset \bigcup_{e \in \Delta} p_{\pi_{i(e)}}^{-1}(V_e) .$$

Soit $K_i = \bigcup_{i=i(i(e)), e \in \Delta} \overline{V}_e$ qui est un compact de Y_i. Grâce à (2.4), on a $K \subset \bigcup_i \pi_i(K_i)$. Ensuite, démontrons (3.5.2) $\Longrightarrow$ (3.5.3). Il existe un compact K de Y tel que $y_\alpha \in K$ pour tout α. Choisissons les K_i de (3.5.2) pour ce compact K. Alors il existe un indice i tel que $\pi_i(K_i)$ contienne une sous-suite de $\{y_\alpha\}$. Evidemment, on peut supposer que $y_\alpha \in \pi_i(K_i)$ pour tout α. Pour chaque α, prenons un point $z_\alpha \in K_i$ tel que $\pi_i(z_\alpha) = y_\alpha$. Puisque K_i compact, il existe une sous-suite $\{x_p\}$ de $\{z_\alpha\}$ qui est convergente dans K_i et donc dans Y_i. Enfin, il reste à démontrer (3.5.3) $\Longrightarrow$ (3.5.1). En vertu de (2.7), il suffit de vérifier que pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $\mathcal{E}_{Y|U} = \cup_i \mathcal{E}_{\pi_i}|_U$. Par conséquent, on peut supposer que Y est Hausdorff et dénombrable à l'infini. Donc Y_i l'est pour tout i. Soit $\{K_{i\alpha}\}$, $\alpha = 1,2,\dots$, une suite de sous-ensembles compacts de Y_i tels que $K_{i\alpha}$ soit contenu dans l'intérieur de $K_{i\alpha+1}$ pour tout α et $|Y_i| = \bigcup_\alpha K_{i\alpha}$. Supposons que (3.5.1) n'est pas vraie. Alors prenons $e \in \mathcal{E}_Y - \bigcup_i \mathcal{E}_{\pi_i}$. Soit $y = p_Y(e)$. Prenons un système dénombrable fondamental de voisinages ouverts de y dans Y ; disons $\{V_j\}$, $j = 1,2,\dots$. Par (3.3) $\mathcal{E}_Y$ est Hausdorff et par (3.4) $p_{\pi_i}^{-1}(K_{i\alpha})$ est compact pour chaque (i,α). Donc il existe $f_{i\alpha} \in e$

tel que $p_{\pi_i}^{-1}(K_{i\alpha}) \cap \mathcal{E}_{f_{i\alpha}} = \emptyset$. Pour chaque α soit $f_\alpha : Z_\alpha \to Y$ la jonction de toutes les $f_{i\alpha}$ et de l'inclusion $Y|V_\alpha \to Y$. Alors $f_\alpha \in e$ et $\mathrm{Im}(f_\alpha) \subset V_\alpha$. Puisque $f_\alpha \in \mathcal{E}(Y)$, il existe un ouvert dense W_α de Z_α tel que f_α induise un morphisme étale $Z_\alpha|W_\alpha \to Y$. Prenons un point $y_\alpha \in f_\alpha(W_\alpha)$ pour chaque α . On a $y = \lim_{\alpha \to \infty} y_\alpha$ dans Y parce que $y_\alpha \in V_\alpha$ pour tout α . En plus, pour tout i , on a $K_{i\alpha} \cap \pi_i^{-1}(y_\alpha) = \emptyset$, car $f_\alpha^{-1}(y_\alpha) \subset W_\alpha$ et $\mathcal{E}_{f_\alpha} \cap p_{\pi_i}^{-1}(K_{i\alpha}) = \emptyset$. Il en résulte facilement qu'il n'existe aucun $\{x_p\}$ de (3.5.3) pour la suite $\{y_\alpha\}$ choisie ci-dessus.

B I B L I O G R A P H I E

[1] HIRONAKA, H. " Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero "
Ann. Math. 79 (1964) pp. 109-326

[2] HIRONAKA, H. " Subanalytic sets "
Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebras, in honour of Y. Akizuki, Kinokuniya Pub., 1973

[3] HIRONAKA, H. " Flattening of complex-analytic maps "
Harvard (1973), à paraître

[4] ZARISKI, O. " Local uniformization on algebraic varieties "
Ann. of Math., 41 (1940), pp. 852-896

[5] ZARISKI, O. " The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions "
Bull. Amer. Math. Soc., 45 (1944), pp 683-691.