EGBERT BRIESKORN

Vue d'ensemble sur les problèmes de monodromie

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 393-413
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__393_0>

VUE D'ENSEMBLE SUR LES PROBLEMES DE MONODROMIE

Egbert BRIESKORN

Frédéric PHAM a proposé que dans cette dernière conférence je donne une vue d'ensemble des problèmes dits " de monodromie " sur lesquels on a travaillé dans les conférences, les discussions et les sessions des groupes de travail pendant ces trois semaines. En essayant de faire cela, je ne vais sans doute que présenter un ensemble de vues assez personnelles. Je vais essayer de faire une liste de problèmes non résolus, dont certains seront peut être de bons exercices, et certains autres seront très difficiles. La plupart sont sans doute des problèmes que l'un ou l'autre de nous a déjà posés. Cette liste sera nécessairement incomplète, et je vous invite à y ajouter encore d'autres problèmes.

Je vous rappelle la situation qui a été étudiée par beaucoup d'entre nous :

Soit $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^k$ une application holomorphe, telle que la fibre $X_o = f^{-1}(0)$ soit une intersection complète de dimension $n = m - k$ avec une singularité isolée à l'origine. On veut étudier cette singularité d'un point de vue topologique. Ceci peut être précisé de plusieures manières, dont la plus simple est la suivante :

Soit $\Sigma \subset \mathbb{C}^m$ une petite sphère autour de l'origine, et K l'intersection $K = \Sigma \cap X_o$. Alors K est une variété différentiable de dimension réelle $2n - 1$. On s'intéresse à cette variété différentiable. On sait que K peut par exemple être une sphère exotique. C'est ce fait qui a amené J. MILNOR [22] à développer toute une technique topologique pour étudier K, dont je vais rappeler le point essentiel.

On restreint d'abord l'application f à des voisinages convenables de l'origine X et S :

$$X = \{ x \in \mathbb{C}^m \mid \|x\| < \varepsilon, \|f(x)\| < \delta \}$$
$$S = \{ s \in \mathbb{C}^k \mid \|s\| < \delta \}$$

où $\delta << \varepsilon << 1$ ont été choisis suffisamment petits. La restriction de f donne une application :

$$f \; : \; X \longrightarrow S.$$

Soient $C \subset X$ l'ensemble critique de f et $D \subset S$ l'ensemble des valeurs critiques, appelé le discriminant de f. Le discriminant D est une hypersurface dans S, et la restriction de f donne un morphisme fini $f : C \longrightarrow D$. Soient :

$$S' = S - D$$
$$X' = X - f^{-1}(D).$$

Alors $f : X' \longrightarrow S'$ est lisse, et du point de vue différentiable, c'est un fibré localement trivial, dont la fibre générale X_s $s \in S'$, a d'après MILNOR [22] et HAMM [11] le type d'homotopie d'un bouquet de sphères $S^n \vee \ldots \vee S^n$. Soit $\mu = \mu_o(X_o)$ le nombre de ces sphères, c'est à dire le n-ième nombre de BETTI ou encore le nombre de cycles évanouissants de X_o en $0 \in X_o$. L'étude de la fibration $f : X' \longrightarrow S'$ permet d'obtenir des informations sur la topologie de K. C'est là l'idée principale du livre de MILNOR, et c'est une idée qui est d'ailleurs déjà présente dans le livre classique de LEFSCHETZ " l'analysis situs et la géométrie algébrique " [20].

En particulier on va étudier l'action de $\pi_1(S')$ sur l'homologie ou la cohomologie de la fibre générale

$$\rho \; : \; \pi_1(S') \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_*(X_s)).$$

Si $k = 1$, donc dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, on sait que le nombre des cycles évanouissants est

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \; \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\} \; / \; (\partial f/\partial z_i).$$

Si l'on connait dans ce cas là la monodromie, c'est à dire l'action d'un générateur de $\pi_1(S')$, on connait l'homologie de la variété $(n-2)$ - connexe K, ce qui permet par exemple de savoir si K est une sphère topologique.

Si cela est le cas, la structure différentiable de K est déterminée par la monodromie, si n est impair, et par la forme d'intersection $<,>$ sur $H_n(X_s,\mathbb{Z})$, si n est pair. Ces invariants, la monodromie et la forme d'intersection sont donc les invariants topologiques les plus importants de la singularité de X_o, qui déterminent dans une large mesure la structure différentiable de K.

Si l'on adopte avec MILNOR le point de vue que l'intérêt de toute cette théorie est le fait qu'en associant à la singularité de X_o la variété différentiable K, on établit un lien entre la géométrie algébrique et la topologie différentielle, il est naturel de proposer le programme suivant :

Comprendre quelle partie de la structure algébrique de la singularité détermine la structure topologique. En particulier, calculer les invariants topologiques en partant de la structure algébrique.

Je tiens à préciser ce que je veux dire par là. On ne cherche pas à trouver n'importe quelle structure algébrique qui détermine la structure topologique. Par exemple l'anneau local $\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ détermine même la singularité analytique, donc à fortiori sa topologie. Mais en tant qu'invariant, il ne me paraît pas intéressant. Ce qu'on cherche, ce sont, dans le cas idéal, des invariants numériques qui sont construits à partir du morphisme $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^k$ d'une manière purement algébrique et qui donnent des informations sur les invariants topologiques.

<u>EXEMPLE</u> : La formule pour le nombre μ des cycles évanouissants ou la construction de la connexion de Gauß-Manin sur la cohomologie de DE RHAM relative. Il est possible qu'on ne puisse pas obtenir une telle solution idéale pour la détermination de certains invariants topologiques. Dans ce cas on sera aussi content, si on a des invariants algébriques comme par exemple : $\mathbb{C}\{z\} / (\partial f/\partial z_i)$ qui ont des modules, ou si à partir de la structure analytique complexe on sait construire par des méthodes "transcendantes " des invariants discrets d'une nature " assez algébrique ", comme par exemple $\pi_1(S')$.

Ce qui est algébrique dans cet exemple, c'est la complétion profinie $\widehat{\pi_1(S')}$, alors que $\pi_1(S')$ comme groupe avec une présentation en termes de générateurs et relations choisis d'une manière géométrique est "transcendant".

J'ai choisi ces exemples parce qu'il me parait que l'étude de ces objets est une réponse adéquate à notre programme, parce que beaucoup des résultats présentés au cours de cette rencontre tournent autour de ces objets, et parce qu'il y a de multiples relations de ces sujets avec d'autres développements récents.

Je vais donc parler des trois sujets suivants :

1) - La cohomologie de De RHAM relative $\mathcal{H}(X/S)$ et la connexion de Gauß-Manin.

2) - Les anneaux quotients des idéaux jacobiens $\mathbb{C}\{z\} / (\partial f/\partial z_i)$ et $\mathbb{C}\{z\} /(f, \partial f/\partial z_i)$.

3) - Le groupe fondamental $\pi_1(S')$ de la déformation semiuniverselle $f : X \longrightarrow S$ d'une hypersurface X_o.

1 - LA CONNEXION DE GAUß-MANIN.

Soit $\mathcal{H}^p(X/S)$ le p-ième module de cohomologie de De RHAM relative. K. SAITO [27] nous a raconté que $\mathcal{H}^p(X/S)$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent qui s'annule pour $0 < p < n$, qui est libre de rang μ pour $p = n$ et qui est un module de torsion concentré sur D pour $p > n$. De plus, il a construit d'une manière algébrique tout à fait explicite la connexion de Gauß-Manin ∇ sur $\mathcal{H}^n(X/S)$, "connexion" qui est singulière le long du discriminant D. La monodromie des solutions de l'opérateur différentiel ∇ s'identifie à l'action

$$\rho_{\mathbb{C}} \ : \ \pi_1(S') \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^n(X_s,\mathbb{C})).$$

∇ est donc un invariant purement algébrique associé à $f : X \longrightarrow S$. Mais d'une part ∇ contient trop d'informations, parce que dans cet ordre d'idées, on ne s'intéresse qu'à la monodromie des solutions de ∇ , quoique l'étude des solutions elles-mêmes soit un sujet classique depuis les travaux de PICARD et FUCHS (voir les exposés de LASCOUX et SAITO sur la " relation avec le cas classique " et l'article de UENO dans " Singularités à Cargèse ").

D'autre part ∇ ne contient pas assez d'informations, parce que ∇ ne donne que $\rho_{\mathbb{C}}$ et ne donne pas ρ, l'action sur la cohomologie entière.

Voici maintenant quelques problèmes sur la cohomologie de De RHAM.

Soit X_o l'ensemble des zéros des fonctions $f_1,\dots,f_k$, choisies de telle manière que

$$X^i = \{z \in \mathbb{C}^m \mid f_1(z) = \dots = f_i(z) = 0\}$$

ait encore une singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^m$.
Soit J^i l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ engendré par $f_1,\dots,f_{i-1}$ et les (ixi)-mineurs de la matrice jacobienne de $f_1,\dots,f_i$. Soit $m_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/J^i$.

Soit $m(D^i)$ la multiplicité du discriminant D^i de la déformation semiuniverselle de X^i. Alors SAITO a remarqué qu'il n'est pas difficile de montrer :

$$m(D^i) = m_i.$$

D'autre part, LÊ a montré par la technique usuelle de théorie de MORSE

$$\mu_o(X^i) + \mu_o(X^{i-1}) = m(D^i).$$

Donc on obtient

$$\mu_o(X^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i}\, m_i \, .$$

Cette formule avait été conjecturée par SAITO. Soit $f : X \longrightarrow S$ l'application définie par $(f_1,\dots,f_k)$ avec pour fibre X_o. Alors on a le problème suivant :

PROBLEME 1.

Peut on donner une démonstration algébrique de la formule :

$$\text{rang } \mathcal{H}^n(X/S) = \mu_o(X_o) \, ,$$

où $\mu_o(X_o)$ est la somme alternée des m_i définie en haut. Pour $k = 1$, SAITO a trouvé une démonstration.

REMARQUES :

Après la rédaction de l'exposé, j'ai appris que I.N. IOMDIN va publier un article sur ce sujet [13] . Mais IOMDIN n'arrive pas à une formule du type envisagé ci-dessus. Il est fort probable que le problème 1 va être résolu dans la thèse de GREUEL [10] . Dans cette thèse on va utiliser une généralisation du calcul de ∇ développé dans [3] et le théorème de l'indice analytique de MALGRANGE [21] , pour démontrer d'une manière algébrique la formule suivante pour le rang de la cohomologie de De RHAM relative.

Soit Ω_{X^i/S^i} le complexe de De RHAM relatif du morphisme f_{i+1} : X^i $\quad$ S^i, où S^i est lisse de dimension 1 et $i = 0,\dots,k-1$.

Alors on a la formule :

$$\text{rang} \; {}^n(X/S) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \dim_C \Omega^{m-i}_{X^i/S^i}.$$

PROBLEME 2 :

Est ce que ${}^p(X/S)$ s'annule pour $p > n$?

Si la réponse est non, quelle est la signification de ces modules de torion ?

Le problème suivant est lié au problème précédent.

PROBLEME 3 :

Soit $\Omega^o_{X_o}$ le complexe de De RHAM sur X_o. D'après SAITO et GREUEL on a :

$$H^p(\Omega_{X_o,o}) = 0 \quad \text{pour } p < n.$$

Pour $k = 1$, on a :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^n(\Omega_{X_o,o}) = \mu_o(X_o) - \tau_o(X_o),$$

où $\tau_o(X_o) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z\}/(f, \partial f/\partial z_1)$.

<u>QUESTION</u> :

Quelle est la dimension de $H^p(\Omega_{X_o,o})$ pour $p \geq n$ dans le cas général $k > 1$?

<u>PROBLEME 4.</u>

On connait en géométrie algébrique les théorèmes de CLEMENS, KATZ [14] et d'autres sur la régularité de la connexion de Gauß-Manin et sur la quasi-unipotence de la monodromie. On devrait démontrer des théorèmes analogues dans la situation locale étudié ici. C'est à dire : On devrait démontrer que la "connexion" Δ sur $\mathcal{H}^n(X/S)$ est un opérateur régulier singulier. Et on se demande pour quels $g \in \pi_1(S')$ la monodromie $\rho(g)$ est quasiunipotente.

<u>REMARQUE</u> :

Après la rédaction de cet exposé, SAITO a démontré que pour chaque déformation d'une singularité isolée d'une intersection complète, la connexion de Gauß-Manin est régulière.

- SAITO et HAMM [12] montrent le résultat suivant :

Si $\gamma : (\mathbb{C},o) \longrightarrow (S,s)$ est le germe d'une courbe complexe dans l'espace de base S d'une déformation semiuniverselle, où s est un point du discriminant D, et si g $\pi_1(S-D)$ est dans la classe de conjugaison définie par l'image d'une petit cercle sous γ, alors $\rho(g)$ est quasiunipotent.
Le cas $k = 1$ avait été traité dans [3].

<u>PROBLEME 5</u> :

Est ce qu'il y a une bonne généralisation de la théorie de la connexion de Gauß-Manin pour les singularités non-isolées ? Il est vrai qu'on peut évidemment toujours calculer la cohomologie de la fibre générale en utilisant la cohomologie de De RHAM. Mais le fait que le lieu critique de $X \longrightarrow S$ n'est pas fini sur S présente des difficultés.

REMARQUE :

Depuis la rédaction de cet exposé, ces problèmes ont été traité avec des résultats satisfaisants par HAMM [12] .

PROBLEME 6 :

Dans [3] on démontre comme application de la théorie de la connexion ∇ le résultat suivant :

Soit f quasihomogène à singularité isolée, donc :

$$f = \sum_{w_1 i_1 + \dots + w_m i_m = w_o} c_{i_1 \dots i_m} z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m}$$

avec des entiers positifs $w_\upsilon \in \mathbb{N}$.

Soit $z_1^{j_{\mu,1}} \dots z_m^{j_{\mu,m}}$, $\mu = 1, \dots, {}_o(X_o)$ une base monomiale de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\} / (\partial f / \partial z_i)$. Alors on a la formule suivante pour le polynôme caractéristique Δ de la monodromie de f :

$$\Delta(t) = \prod_{\mu=1}^{\mu_o(X_o)} (t - e^{2\pi i \sum_{\upsilon=1}^{m} (j_{\mu,\upsilon} + 1) w_\upsilon / w_o})$$

D'autre part, MILNOR et ORLIK [23] ont démontré par des méthodes transcendantes une formule pour Δ qui ne dépend que des poids w_υ.

Est-il possible de démontrer cette formule par des méthodes algébriques utilisant la formule ci-dessus ?

Le problème ici est de mieux comprendre la structure de l'anneau artinien $\mathbb{C}\{z\}/(\partial f/\partial z_i)$. Cela nous amène à notre deuxième sujet.

2. - L'IDEAL JACOBIEN.

Dans son exposé sur " μ constant " [18] LÊ nous a rappelé le théorème de LÊ et RAMANUYAM qui dit que pour une famille d'hypersurfaces X_t avec une singularité isolée à l'origine, la constance de $\mu_o(X_t)$ implique que le type topologique de X_t est aussi constant, au moins pour $n \neq 2$. Ici on entend par " type topologique " pas seulement le type de difféomorphisme de la variété différentiable K_t associée à X_t, mais le type de difféomorphisme de la paire (Σ , K_t) (où Σ est la sphère telle que $K_t = \Sigma \cap X_t$) y compris le type de difféomorphisme de la fibration de MILNOR $\Sigma - K_t \longrightarrow S^1$. Ceci implique en particulier que deux hypersurfaces X_o et X_1 de même dimension, données par les fonctions f_o et f_1 telles que $\mathbb{C}\{z\}/(\partial f_o/\partial z_i) \cong \mathbb{C}\{z\}/(\partial f_1/\partial z_i)$, ont même type topologique, parce qu'on peut les considérer comme membres d'une famille d'hypersurfaces X_t avec $\mu_o(X_t)$ constant. L'anneau artinien $\mathbb{C}\{z\}/(\partial f/\partial z_i)$ détermine donc le type topologique.

En particulier, il détermine les invariants topologiques, c'est à dire la classe de conjugaison de $GL(\mu,\mathbb{Z})$ définie par la monodromie et la classe de formes quadratiques définie par la forme d'intersection (pour n pair).

PROBLEME 7.

Comment peut on calculer les invariants topologiques à partir de $\mathbb{C}\{z\}/(\partial f/\partial z_i)$?

En particulier, comment peut on calculer pour une courbe irréductible les paires caractéristiques de PUISEUX à partir de :

$$\mathbb{C}\{x,y\}/(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y) \quad ?$$

Afin de trouver les paires de PUISEUX, on peut évidemment procéder de la manière suivante :

Si notre anneau artinien est donné comme quotient de $\mathbb{C}\{x,y\}$ par l'idéal I, on cherche un f tel que $I = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. Quand on a trouvé f, on connait les paires de PUISEUX. Mais c'est évidemment autre chose qu'on cherche ici ; on cherche des invariants associés directement à I. RISLER a demandé si peut-être la suite des multiplicités de I suffit pour déterminer les paires de PUISEUX [26] . Mais il n'est pas difficile de construire des contre-exemples.

A vrai dire, je ne suis pas sûr que les deux problèmes précédents soient bien posés.

3. - LA DEFORMATION SEMI-UNIVERSELLE.

Dans l'analyse topologique d'une hypersurface X_0 avec un point singulier isolé $x_0 \in X_0$ un objet d'importance primordiale est la déformation semi-universelle $X \longrightarrow S$ de (X_0,x_0). Il n'est pas nécéssaire de répéter ici la définition précise (voir [30]). Il suffira de dire que cette déformation semi-universelle est caractérisée par le fait que chaque autre déformation $Y \longrightarrow T$ de (X_0,x_0) est induite de $X \longrightarrow S$ par une application $T \longrightarrow S$ qui est unique au premier ordre.

L'existence de la déformation semi-universelle a été démontrée pour les intersections complètes par TJURINA et d'autres, et pour toutes les singularités isolées par GRAUERT [9] , puis par VERDIER [8] . Récemment, R. ELKIK a démontré que $X \longrightarrow S$ a un représentant algébrique et est semi-universelle dans le cadre henselien.

L'idée d'utiliser la déformation semi-universelle de X_0 pour l'étude de la topologie de X_0 est, à ma connaissance, due à PHAM et ARNOLD, et dès le séminaire de SHIH WEISHU [29] , s'est révélée comme une source de problèmes extrêmement intéressants.

Avant de rappeler quelques propriétés de la déformation semi-universelle et de discuter des problèmes, je vais rappeler très brièvement certains exemples, qui sont en fait les seuls exemples où la situation est tout à fait connue.

Considérons des germes d'applications $f : (\mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

On appelle f "simple", si dans la déformation semi-universelle du germe f il n'y a qu'un nombre fini de type de germes à isomorphisme près.

ARNOLD a démontré le théorème suivant [2] :

THEOREME :

A isomorphisme près, les seuls germes simples d'applications $f : (\mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée sont ceux donnés dans la liste suivante :

TYPE	FONCTION	
A_q	$x_1^{q+1} + x_2^2 + \dots + x_m^2 \qquad q \geq 1,$	$m \geq 1$
D_q	$x_1(x_1^{q-2} + x_2^2) + x_3^2 + \dots + x_m^2 \quad q \geq 4$	$m \geq 2$
E_6	$x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \dots + x_m^2$	$m \geq 2$
E_7	$x_1(x_1^2 + x_2^3) + x_3^2 + \dots + x_m^2$	$m \geq 2$
E_8	$x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 + \dots + x_m^2$	$m \geq 2$

Ce sont exactement les singularités dont la déformation semi-universelle a été complètement analysée dans [4] en utilisant l'analyse des éléments sous-réguliers des algèbres de Lie simples des types A_q, D_q, E_6, E_7, E_8.

La connaissance de la situation simple justifie peut-être quelques unes des conjectures ci-dessous. Mais il est bien possible que le cas général soit plus compliqué que le cas simple.

Je rappelle maintenant quelques faits sur les déformations semi-universelles d'hypersurfaces qui nous ont été exposés par B. TEISSIER [30] ou qui étaient développés dans le séminaire SHIH WEISHU [29] et dans un article de K. LAMOTKE.

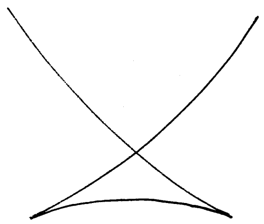
Pour une hypersurface X_o avec un point singulier isolé $x_o \in X_o$, on a une description assez explicite de la déformation semi-universelle $X \longrightarrow S$. En utilisant cette description, on obtient les résultats suivants :

X et S sont lisses. $X \longrightarrow S$ est stable et versel partout dans X. Le lieu critique C est lisse, et $C \longrightarrow D$ est la normalisation du discriminant D.

D est une hypersurface réduite de S de multiplicité égale à $\mu_{x_o}(X_o)$. Soit $s \in D$, et soient $x_i(s)$, $i = 1, \dots, x$ les points de C au dessus de s. TEISSIER a remarqué que la restriction de $X \longrightarrow S$ à un voisinage convenable de $\{x_1(s), \dots, x_x(s)\}$ est complètement déterminée par les singularités de la fibre X_s en $x_i(s)$. En particulier, si $X_i \longrightarrow S_i$ est la déformation semi-universelle de $(X_s, x_i(s))$ et $D_i \subset S_i$ son déterminant, alors dans un voisinage de $s \in S$, le discriminant D est isomorphe à :

$$\bigcup_{i=1}^{\kappa} S_1 \times \dots \times D_i \quad \times \dots \times \quad S_\kappa \times \mathbb{C}^\delta$$

avec $\delta = \dim S - \sum_{i=1}^{\kappa} \dim S_i$. Ceci implique par exemple qu'une section plane générique de D (ne passant pas par l'origine !) est une courbe qui n'a que des points doubles ordinaires ou des points de rebroussement. Par exemple, on obtient pour la singularité simple A_2 la courbe bien connue sous le nom "queue d'aronde" dessinée ci-dessous.



Donc on connait les singularités de D en codimension un. D'autre part, dans la théorie de l'équisingularité, on s'intéresse à l'ensemble Σ des points de D où D a la plus grande multiplicité, c'est à dire la multiplicité $\mu_o(X_o)$.

LAZZERI [15] a montré pendant cette rencontre qu'un point s est dans Σ si et seulement s'il n'y a qu'un seul point critique x_1 au dessus de s, et si $\mu_{x_1}(X_s) = \mu_{x_o}(X_o)$. L'ensemble analytique Σ s'identifie donc à la strate d'équisingularité Σ_E de TEISSIER.

Enfin je rappelle qu'on dispose d'une théorie assez satisfaisante de la représentation

$$\rho \ : \pi_1(S - D) \longrightarrow \text{Aut}\ (H_n(X_s, \mathbb{Z}))$$

dans le sens suivant : pour des choix convenables de générateurs g_i de $\pi_1(S - D)$ et d'éléments e_i d'une base pour $H_n(X_s, \mathbb{Z})$, l'action de g_i sur e_j est décrite par les formules de PICARD-LEFSCHETZ, qui font intervenir les nombres d'intersection $< e_i, e_j >$. Par conséquent, les relations entre les générateurs g_i impliquent des équations pour les coefficients $< e_i, e_j >$ de la forme quadratique qu'on cherche à déterminer.

CONJECTURE :

Les équations pour les nombres $<e_i, e_j>$ obtenus à partir des relations entre les générateurs g_i de $\pi_1(S - D)$ suffisent pour déterminer la forme d'intersection à isomorphisme près.

PROBLEME 8.

Est ce que la conjecture est vraie ?
Elle est vraie pour les singularités simples.

PROBLEME 9.

Peut-on prouver la conclusion de la conjecture pour au moins une singularité non simple ?

PROBLEME 10.

Supposons qu'on puisse prouver la conjecture pour deux fonctions $f(x)$ et $g(y)$. Est ce qu'on peut la prouver aussi pour $f(x) + g(y)$?

Ce problème est motivé par le résultat de THOM et SEBASTIANI concernant la monodromie de $f + g$ prouvé dans [31] .

PROBLEME 11.

Peut on résoudre le problème précédent pour la fonction $x^p + y^q$, ou au moins pour la fonction $x^3 + y^7$?

REMARQUE.

Depuis la rédaction de cet exposé, F. LAZZERI a obtenu une solution positive du problème 11 et donc du problème 9.

PROBLEME 12.

Est ce que $\pi_1^s(S - D)$, le groupe fondamental local en $s \in D$ du complément de D est constant pour $s \in \Sigma_E$?

REMARQUE. :

Des résultats récents de F. PHAM [25] font penser que la réponse est négative.

Les trois problèmes suivants posent des questions sur la structure algébrique de $\pi_1(S - D)$.

PROBLEME 13.

Est ce que $\pi_1(S')$ est résiduellement fini ?

C'est à dire : Est ce que l'homomorphisme canonique

$$\pi_1(S') \longrightarrow \widehat{\pi_1(S')}$$

dans la complétion profinie est injectif ?

Soit $c \in \pi_1(S')$ un élément central. De l'égalité $cg_i = g_ic$ et des formules de PICARD-LEFSCHETZ on déduit facilement $\rho(c)^2 = 1$. Donc pour chaque $g \in \pi_1(S')$ tel qu'une puissance est centrale, $\rho(g)$ est d'ordre fini. Ceci est intéressant au vu des résultats de LÊ [16], A'CAMPO [1] et B. MALGRANGE sur la finitude de la monodromie. (voir aussi [19], [24]). LÊ a montré que la monodromie d'une courbe plane irréductible est finie. A'CAMPO montre que cela ne se généralise pas aux courbes réductibres. MALGRANGE donne même pour chaque $n \geq 2$ des exemples d'hypersurfaces de dimension n, telles que $(h^q - 1)^n \neq 0$, où h est la monodromie, et où les valeurs propres de h sont des q-ièmes racines de l'unité. (On a toujours $(h^q - 1)^{n+1} = 0$). On est donc amené à considérer le problème suivant :

PROBLEME 14.

Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{} \mathbb{C}$ une déformation d'une hypersurface induite de la déformation semi-universelle $X \longrightarrow S$ par une application $\mathbb{C} \longrightarrow S$, et soit $g \in \pi_1(S - D)$ l'image d'un générateur de $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\})$.

Sous quelles conditions y-a-t-il une puissance de g contenue dans le centre de $\pi_1(S - D)$?

- SAITO a montré que c'est le cas si f est quasihomogène. Si f est simple, on sait même qu'une puissance de g engendre le centre [6] . Quel est le centre $\pi_1(S - D)$ dans le cas général ?

PROBLEME 15.

Est ce que S - D est un espace d'EILENBERG-MC LANE ?

P. DELIGNE [7] a récemment démontré que c'est vrai dans le cas simple (voir aussi [5]). Une réponse affirmative implique que $\pi_1(S - D)$ n'a pas d'éléments non triviaux d'ordre fini.

Les cinq derniers problèmes se réfèrent à l'étude des propriétés locales et globales du discriminant. Ils sont motivés notamment par les résultats de TEISSIER.

PROBLEME 16.

Est ce que la strate d'équisingularité Σ_E est lisse ?

PROBLEME 17.

Dans le cas d'une singularité simple, on a l'inégalité suivante pour le nombre κ des points critiques $x_i(s)$ au dessus d'un point $s \in D$

$$\kappa \leq \mu - \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_{x_i(s)}(X_s) + 2$$

Est ce qu'il y a une inégalité de ce type dans le cas général ?

PROBLEME 18.

On connait les singularités de D en codimension 1.

Est-ce-qu'il y a une bonne classification des singularités de D en petite codimension ?

PROBLEME 19.

Est-ce-qu'il y a des formules pour le nombre des points de rebroussement et le nombre des points doubles ordinaires d'une section plane générique du discriminant ? Au moins, on devrait calculer ces nombres pour les singularités simples en utilisant [4] .

REMARQUE. :

Les calculs de PHAM [25] montrent qu'il n'y a pas de formule pour le nombre de points de rebroussement qui ne fasse intervenir que le nombre des cycles évanouissants.

PROBLEME 20.

D'après le théorème de ZARISKI local démontré par LÊ [17] on a :

$$\pi_1(S - D) \cong \pi_1(H - H \cap D),$$

où H est un plan générique dans S ne passant pas par l'origine (pour les détails voir [17]). Soit $H \longrightarrow L$ une projection convenable du plan H sur une droite L, et $p_1, \dots, p_N \in L$ les images des points singuliers de la courbe $H \cap D$. Soit $B(\mu)$ le groupe des tresses à μ brins, $\mu = \mu_0(X_0)$. Alors à partir de la courbe $H \cap D$ on obtient une représentation

$$\beta : \pi_1(L - \{p_1,\ldots,p_N\}) \longrightarrow B(\mu)$$

Il résulte d'un théorème de VAN KAMPEN que $\pi_1(H - H \cap D)$ est déterminé par β. Donc $\pi_1(S - D)$ est aussi déterminé par β.

Je crois que l'étude de β est le problème le plus profond de toute la théorie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A'CAMPO, N. Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes. A paraître dans inventiones math.

[2] ARNOLD, V.I. Functional Anal. Appl. 6, N° 4 (1972)

[3] BRIESKORN, E. Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. manuscripta math. 2, 103-161 (1970).

[4] BRIESKORN, E. Singular elements of semi-simple algebraic groups. Actes, Congrès intern. Math. 1970. Tome 2, p. 279-284.

[5] BRIESKORN, E. Sur les groupes de tresses. Séminaire Bourbaki 1971/72, n° 401.

[6] BRIESKORN, E.- SAITO, K. Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. Invent. math. 17, 245-271 (1972).

[7] DELIGNE, P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés Invent. math. 17, 273-302 (1972).

[8] GALLIGO, A. - HOUZEL, C. Modules des singularités isolées (d'après Verdier et Grauert). Singularités à Cargèse (ce volume).

[9] GRAUERT, H. Uber die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen. Invent. math. 15, 171-198 (1972).

[10] GREUEL, G.M. Thèse, Göttingen 1973.

[11] HAMM, H. Lokale topologische Eingenschaften komplexer Raüme. Math. Ann. 191, 235-252 (1971).

[12] HAMM, H. Die analytische Berchnung der lokalen komplexen Picosd-Lefschetz-Monodromie. A paraître.

[13] IOMDIN, I.N. Eulercharacteristic of the intersection of a complex surface with a disc. A paraître.

[14] KATZ, N.M. The regularity theorem in algebraic geometry. Actes, Congrès intern. math. 1970, Tome 1, p. 437-443.

[15] LAZZERI, F. A theorem on the monodromy of isolated singularities. Singularités à Cargèse (ce volume).

[16] LÊ DŨNG TRÁNG Sur les noeuds algébriques, Centre de Math. Ecole Polytechnique, Paris 1971. A paraître au Comp. Math.

[17] LÊ DŨNG TRÁNG Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. Centre de Math. de l'Ecole Polytechn. Paris 1971.

[18] LÊ DŨNG TRÁNG Un critère d'équisingularité. Singularités à Cargèse (ce volume).

[19] LÊ DŨNG TRÁNG Une application du calcul de R. FOX : Le contre-exemple d'A'CAMPO. Singularités à Cargèse (ce volume).

[20] LEFSCHETZ, S. L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique. Paris, Gauthiers-Villars, 1924.

[21] MALGRANGE, B. Sur les points singuliers des équations différentielles. Sém. Goulaouic-Schwartz 1971-72, Exposé n° 20.

[22] MILNOR, J. Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies n° 61. Princeton University Press 1968.

[23] MILNOR, J.-ORLIK, P. Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. Topology 9 (1970), 385-393.

[24] MORIN, B. Description géométrique du contre-exemple d'A'CAMPO. (Exposé à Cargèse, non rédigé).

[25] PHAM, F. Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3. Singularités à Cargèse (ce volume).

[26] RISLER, J.J. Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, Bull. soc. Math. France 99, 305-311 (1971).

[27] SAITO, K. Calcul algébrique de la monodromie. Singularités à Cargèse (ce volume).

[28] SAITO, K. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Invent. math. 14, 123-142 (1971).

[29] SHIH WEISHU Séminaire sur les singularités des variétés algèbriques.

[30] TEISSIER B. in Singularités à Cargèse (ce volume).

[31] THOM, R. - SEBASTIANI, M. Un résultat sur la monodromie, Invent. math. 13, 90- 96 (1971)