Astérisque

LÊ DŨNG TRÁNG

Une application du calcul de R. Fox : le contre-exemple d'A'Campo

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 277-283

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__277_0>

UNE APPLICATION DU CALCUL DE R. FOX :

LE CONTRE-EXEMPLE D' A' CAMPO

LÊ DŨNG TRÁNG

E. Brieskorn avait conjecturé que la monodromie locale d'une hypersurface à singularité isolée était finie. Le théorème de monodromie montre que la monodromie locale est quasi-unipotente, i.e. les valeurs propres de la monodromie locale sont des racines de l'unité (cf. [8], [4], [2]). Pour démontrer la conjecture de E. Brieskorn il suffisait donc de montrer que la monodromie locale est semi-simple, i.e. son polynôme minimal n'a que des racines simples. Dans [9], Lê Dũng Tráng a montré que c'est bien le cas pour la monodromie locale d'une singularité d'une courbe plane analytiquement irréductible. Pour cela, on utilise la présentation du groupe fondamental local du complémentaire de la singularité calculé par O. Zariski en fonction des paires de Puiseux (cf. [14]). Depuis, N. A'Campo a donné de ce théorème une démonstration géométrique plus élégante (cf. [1]). Dans le cas des singularités isolées de polynômes quasi-homogènes (cf. [11]) la conjecture de Brieskorn est également vraie. En fait dans [1], N. A'Campo donne un contre-exemple à la conjecture de Brieskorn. En utilisant un résultat de M. Sébastiani et R. Thom [13] sur la monodromie, ce résultat donne qu'en toute dimension la conjecture de Brieskorn est fausse. Le problème reste à savoir dans quels cas la conjecture de Brieskorn est vraie.

1.- LE CONTRE EXEMPLE D' A'Campo

On considère la courbe complexe plane C d'équation $(Y^2 - X^3)(Y^3 - X^2) = 0$. On appelle C_1 la composante $Y^2 - X^3 = 0$ de C et C_2 l'autre composante. On sait que si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit, les sphères S_ε centrées en 0 de rayon ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, sont transverses à la partie lisse de C (cf. [10]). De plus J. Milnor a montré que $S_\varepsilon - C$ a le type d'homotopie de $B_\varepsilon - C$ (cf. [10]). Le groupe du complémentaire de l'entrelacement $S_\varepsilon \cap C$ dans S_ε est alors égal au groupe fondamental local du complémentaire de C en 0 (d'après [12]). Nous allons calculer ce groupe.

On peut trouver un polydisque $D_1 \times D_2$ dans $\mathbb{C}^2$ tel que :

1) $\partial(D_1 \times D_2) - C = ((\partial D_1 \times D_2) - C_1) \cup ((D_1 \times \partial D_2) - C_2)$;

2) $((\partial D_1 \times D_2) - C_1) \cap ((D_1 \times \partial D_2) - C_2) = \partial D_1 \times \partial D_2$;

3) $\partial (D_1 \times D_2) - C$ est homéomorphe à $S_\epsilon - C$ pour $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_o$.

Nous laissons au lecteur le soin de montrer l'existence de $D_1 \times D_2$.

On peut alors calculer le groupe fondamental de $\partial(D_1 \times D_2) - C$ en utilisant le théorème de Van Kampen.

Pour fixer les idées, soit ϵ_i le rayon de D_i $(i = 1,2)$. Choisissons comme point de base le point $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \partial D_1 \times \partial D_2$. On note P_i le lacet obtenu en paramétrant ∂D_i $(i = 1,2)$ en partant de (ϵ_1, ϵ_2) dans le sens positif déterminé par l'orientation naturelle des axes des abscisses et des ordonnées.

On calcule tout d'abord le groupe fondamental de $\partial D_1 \times D_2 - C_1$. Pour cela on remarque que la projection de $\partial D_1 \times D_2 - C_1$ sur ∂D_1 est une fibration localement triviale dont les fibres sont des disques moins 2 trous. Comme dans [3] (théor.(1.2)) choisissons g_1 et g_2 deux générateurs du groupe fondamental de $\{\epsilon_1\} \times D_2 - C$ tels que $g_2 g_1 = P_2'$ où P_2' est classe d'homotopie de P_2. Soit φ l'automorphisme du groupe fondamental de $\{\epsilon_1\} \times D_2 - C$, défini par un homéomorphisme caractéristique de la fibration de $(\partial D_1 \times D_2) - C_1$ sur ∂D_1, on a alors une présentation du groupe fondamental de $\partial D_1 \times D_2 - C$:

- on a les générateurs P_1', P_2', g_1, g_2, où P_1' est classe d'homotopie de P_1 dans $(\partial D_1 \times D_2) - C_1$.

- et les relations :
$$P_2' = g_2\, g_1$$
$$P_1'^{-1}\, g_1\, P_1' = P_2'\, g_2\, P_2'^{-1}$$
$$P_1'^{-1}\, g_2\, P_1' = P_2'^{2}\, g_1\, P_2'^{-2}$$

De même en appelant P_i'' la classe d'homotopie de P_i dans $D_1 \times \partial D_2 - C$ on obtient une présentation du groupe fondamental de $D_1 \times \partial D_2 - C$. Le théorème de Van Kampen nous donne alors le groupe fondamental de $\partial(D_1 \times D_2) - C$:

- on a les générateurs P_1', P_2', P_1'', P_2'', g_1, g_2, h_1, h_2,

- et les relations :

$$P'_1 = P''_1$$

$$P'_2 = P''_2$$

$$P'_2 = g_2 g_1$$

$$P''_1 = h_2 h_1$$

$$P'^{-1}_1 g_1 \; P'_1 = P'_2 \; g_2 \; P'^{-1}_2$$

$$P'^{-1}_1 g_2 \; P'_1 = P'^{2}_2 g_1 \; P'^{-2}_2$$

$$P''^{-1}_2 \; h_1 \; P''_2 = P''_1 \; h_2 \; P''^{-1}_1$$

$$P''^{-1}_2 \; h_2 \; P''_2 = P''^{2}_1 \; h_1 \; P''^{-2}_1$$

Choisissons des entiers x et y tels que $3x = 2y + 1$ (par exemple $x = y = 1$).

En écrivant $P'_i = P''_i = P_i$ $(i = 1,2)$ et

$$Q_1 = (P_1^x \, P_2^y \, g_1)^3 \; P_2^{-3y} \; P_1^{-2y}$$

$$Q_2 = (P_2^x \, P_1^y \, h_1)^3 \; P_1^{-3y} \; P_1^{-2y}$$

un calcul élémentaire donne que le groupe en question est engendré par P_1, P_2, Q_1, Q_2 avec les relations :

$$Q_1^2 = P_2^3 \; P_1^2$$

$$Q_2^2 = P_1^3 \; P_2^2$$

$$P_1 \; P_2 \; P_1^{-1} \; P_2^{-1} = 1$$

<u>Remarque</u> : Dans [7] on donne un calcul général dans le cas où la courbe a l'équation $(X^m - Y^n)(X^p - Y^q)$. Ce calcul explique les élucubrations calculatoires précédentes.

2.- LE CALCUL DE R. FOX

On fait comme dans [5] et dans [6].

D'une part, on sait que l'on a une fibration $\psi : S_\varepsilon - C \to S^1$, la fibration de Milnor (cf. [10]), quand $\varepsilon > 0$ est assez petit. On a donc une courte suite exacte d'homotopie :

$$1 \to \pi_1(F,x) \to \pi_1(S_\varepsilon - C, x) \to \pi_1(S^1, \psi(x)) \to 1$$

où $x \in S_\varepsilon - C$ et F est la fibre $\psi^{-1}(\psi(x))$. Notons $G = \pi_1(S_\varepsilon - C, x)$. On a donc un morphisme de G sur $\mathbb{Z}$.

Soit L un groupe libre de type fini dont G est le quotient et tel que le noyau de $L \to G$ soit engendré par $r_1, \dots, r_k$. On note $\mathbb{Q}[L]$ l'algèbre du groupe L à coefficient dans $\mathbb{Q}$.

On appelle dérivation de $\mathbb{Q}[L]$ un endomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire D de $\mathbb{Q}[L]$ tel que :

$$D(x\,y) = D(x)\,K(y) + x\,D(y)$$

où $K(\sum_{\sigma \in F} n_\sigma \sigma) = \sum n_\sigma$ pour tout $\sum_{\sigma \in F} n_\sigma \sigma \in \mathbb{Q}[L]$.

Si $x_1, \dots, x_r$ sont des générateurs de L, on trouve qu'il y a une dérivation de $\mathbb{Q}[L]$ et une seule notée $\frac{\partial}{\partial x_i}$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

Soit $\sigma : \mathbb{Q}[L] \to \mathbb{Q}[\mathbb{Z}] \simeq \mathbb{Q}[t,t^{-1}]$, le morphisme donné par $L \to G \to \mathbb{Z}$. On peut toujours supposer $k \geqslant r$. On a alors une matrice $(a_{ij}) = (\sigma(\frac{\partial}{\partial x_i} r_j))$ à coefficients dans $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ appelée matrice d'Alexander-Fox de $G \to \mathbb{Z}$ relativement à la présentation (x_i, r_j). On note $\mathcal{E}_i$ l'idéal engendré dans $\mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ par les mineurs $(k-i) \times (k-i)$ de cette matrice $(i = 0, \dots, k-1)$. On convient que $\mathcal{E}_i = \mathbb{Q}[t,t^{-1}]$ si $i \geqslant k$.

On note Δ_i le générateur de $\mathcal{E}_i$.

Le polynôme Δ_i est déterminé à une puissance entière de t près. Dans [6], R. Fox démontre que la suite des idéaux $\mathcal{E}_o \subset \dots \subset \mathcal{E}_{k-1} \subset \dots$ est indépendante de la présentation de G choisie.

En appliquant ce qui précède à la présentation de G donnée par la courte suite exacte d'homotopie ci-dessus, on trouve que les Δ_i (i=1, ..., k-1) sont, à une puissance de t près, les diviseurs élémentaires de la monodromie locale de C en O, (cf. [9]) et que $\Delta_o = 0$. Ainsi, à une puissance de t près, Δ_1 est le polynôme caractéristique de la monodromie locale et $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ est le polynôme minimal de la monodromie locale.

Calculons alors la matrice d'Alexander-Fox de $G \to \mathbb{Z}$ pour la présentation de G calculée dans le § 1.

On remarque que Q_1 et Q_2 s'envoient sur t^5, P_1 et P_2 s'envoient sur t^2, car g_1, g_2, h_1 et h_2 s'envoient sur t. On obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{10}-1}{t^5-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^{10}-1}{t^5-1} & 0 & 0 \\ -\frac{1-t^4}{1-t^2} & -\frac{t^4-t^{10}}{1-t^2} & 1-t^2 & 0 \\ -\frac{t^4-t^{10}}{1-t^2} & -\frac{1-t^4}{1-t^2} & t^2-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Additionnons la quatrième ligne à la troisième. Cette opération ne change pas le calcul des idéaux $\mathcal{E}_i$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{10}-1}{t^5-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^{10}-1}{t^5-1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{10}-1}{1-t^2} & \frac{t^{10}-1}{1-t^2} & 0 & 0 \\ -\frac{t^4-t^{10}}{1-t^2} & -\frac{1-t^4}{1-t^2} & t^2-1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve alors :

$$\Delta_o = 0$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{t^{10}-1}{t^5-1}\right)^2 (t-1) = (t^5+1)^2 (t-1)$$

$$\Delta_2 = \frac{t^5+1}{1+t}$$

et le polynôme minimal de la monodromie locale est $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{t^5+1}{t+1}(t+1)^2(t-1)$, et a une racine double. La monodromie n'est donc pas finie.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'Campo - Sur la monodromie des singularités isolées des hypersurfaces complexes, à paraître dans Inv. Mat.

[2] E. Brieskorn - Die monodromie der isolierten singularitäten von Hyperflächen , Manuscripta Mathematica , Vol. 2, (1970), 103-160.

[3] D. Chéniot - Lê Dũng Tráng, Remarques sur les deux exposés précédents de H. Popp et D. Chéniot, dans le présent volume "Singularités à Cargèse".

[4] C.H. Clemens - P. Griffiths - N. Katz et al Seminar on degeneration of algebraic varieties, IAS, Princeton 1969/1970.

[5] R. Crowell - R. Fox, Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[6] R. Fox, Free Differential Calculus, II : the isomorphism problem of groups, Ann. Math., 59 (1954), 196-210.

[7] M.C. Grima, Thèse de 3ème cycle, à paraître, Paris VII, 1973.

[8] A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie Algébrique N° VII, Bures-sur-Yvette, I.H.E.S., 1968.

[9] Lê Dũng Tráng, Sur les noeuds algébriques, Compositio Mathematica 1972.

[10] Lê Dũng Tráng, Topologie des hypersurfaces complexes, dans le présent volume "Singularités à Cargèse".

[11] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Stud. N° 61, Princeton.

[12] D. Prill, Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups.Duke Math.J.,34 (1967),375-386.

[13] M. Sébastiani - R. Thom, Sur la monodromie, Inv. Math., 13, 90-96.

[14] O. Zariski, Topology of Algebroid singularity, Amer. J. Maths.,54 (1932), 453-465.

***