JEAN LASCOUX

Avant-propos à Saito

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 193-194
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__193_0>

AVANT-PROPOS A SAITO

Jean LASCOUX

Comme Cargèse et son église grecque, la monodromie associée à certaines équations différentielles a une histoire ancienne et riche. Mais nous ne retiendrons de ce passé que la contribution de Gauss telle que l'a fixée la physique mathématique anglaise dans ce monument : Whittaker E.T. and Watson G.N. (1927), A course of Modern Analysis, Cambridge.

Gauss s'intéressait à la fonction hypergéométrique $F(a, b, c, z)$, définie par son développement en série $F(a,b,c,z) = 1 + \frac{a.b}{1.c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{1\,.\,2\; c(c+1)} z^2 + \dots$
Par prolongement analytique, on découvre que $F(a, b, c, z)$ est holomorphe, uniforme dans le plan complexe privé de la coupure $(1, \infty)$. Elle satisfait l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$z(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} F + \{a + b + 1) z\} \frac{dF}{dz} - ab F = 0$$

Les points singuliers de cette équation différentielle sont $(0, 1, \infty)$.
Ils sont du type régulier-singulier !
Je rappelle que pour une équation du type de Fuchs $\frac{d^2}{dz^2} u + p(z) \frac{d}{dz} u + q(z) = 0$
un point c est dit régulier-singulier si $p(z)(z - c)$ et $q(z)(z - c)^2$ sont holomorphes dans un voisinage de c .

La solution régulière à l'origine admet une représentation intégrale qui s'écrit

$$\int_1^{\infty} t^{a-c} (t - 1)^{c-b-1} (t - z)^{-a} dt$$

Nous allons nous restreindre à l'opérateur différentiel qui engendre la connexion de Gauss-Manin : en posant $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 1$ on obtient

$$L_z = z(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} + (1 - 2z) \frac{d}{dz} - \frac{1}{4} \quad ,$$

et la représentation intégrale se spécialise en

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-z)}}$$

On est donc conduit à étudier la famille de courbes elliptiques $y^2 = x(x-1)(x-z)$. Cette famille dégénère pour trois valeurs du paramètre z , à savoir $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$.

La courbe elliptique de la famille porte deux cycles de dimension un (notons-les e_1, e_2) , et, par "dualité" une forme différentielle algébrique de première espèce $\omega = \frac{dx}{y}$. Appliquons l'opérateur L_z à ω

$$L_z \, \omega = \{z(1 - z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - 2z) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4}\} \, \omega = d\left(\frac{y}{(x-z)^2}\right) \quad .$$

C'est le miracle cherché : l'opérateur différentiel par rapport au paramètre z , transforme la forme fermée ω en une forme exacte ! Ainsi, les deux périodes classiques $F_1(z) = \int_{e_1} \omega$ et $F_2(z) = \int_{e_2} \omega$ sont deux solutions de l'équation différentielle de Gauss

$$L_z F = 0 \quad .$$

Manin, qui s'intéresse aux diviseurs sur la courbe elliptique, considère aussi l'intégrale de ω le long d'un chemin joignant deux points de la courbe, mais il est temps que je laisse la parole à Saito, me taisant d'autant plus volontiers que le grand article de Katz a paru entre-temps aux Inventiones Mathematicae (Vol. 18, 1972, p. 1).