Astérisque

LÊ DŨNG TRÁNG

# Un critère d'équisingularité

*Astérisque*, tome 7-8 (1973), p. 183-192

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__183_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

# UN CRITERE D'EQUISINGULARITE

LÊ DŨNG TRÁNG

0.- Dans l'exposé précédent [7], nous avons défini le nombre de Milnor d'une singularité isolée d'hypersurface complexe. Ce nombre ne détermine pas nécessairement la topologie de la singularité : par exemple les courbes planes C et C' définies par $X^2 + Y^{11} = 0$ et $X^5 + Y^6$ ont le même nombre de Milnor à l'origine, mais on peut montrer qu'elles n'ont pas le même type topologique à l'origine, car elles n'ont pas les mêmes paires caractéristiques de Puiseux. Cependant, H. Hironaka a conjecturé que si, dans une famille analytique de courbes planes ayant une singularité en 0, le nombre de Milnor de ces courbes à l'origine ne change pas, alors le type topologique de ces courbes ne change pas. Cette conjecture a été démontrée, pour les hypersurfaces de dimension différente de 2, indépendamment par Lê Dũng Tráng et C.P. Ramanujam (cf. [5], [11] et [9]). Le résultat n'a été obtenu qu'en dimension différente de 2 parce qu'il est fait usage du théorème du h-cobordisme. Nous conclurons en indiquant quelles sont les conjectures que l'on peut espérer pouvoir démontrer.

## 1.- ENONCE DU THEOREME

Soit $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe de n+1 variables. On suppose :

a) pour tout $t \in \mathbb{C}$ , $F(t,0) = 0$ ;

b) le polynôme $F_t$ de n variables défini par :

$$F_t(z) = F(t,z) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^n$$

a un point critique isolé en $(t,0)$ pour tout $t \in \mathbb{C}$, dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ ;

c) le nombre de Milnor de $F_t$ en 0 :

$$\mu_t = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}/(\partial F_t/\partial z_1,\dots,\partial F_t/\partial z_n)$$

est indépendant de $t \in \mathbb{C}$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$.

Sous ces hypothèses, on a :

THEOREME (1.1)

Les fibrations de Milnor de $F_t$ en $0 \in \mathbb{C}^n$, pour tout $t \in \mathbb{C}$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, sont homotopes par une homotopie fibrée et si, de plus, $n \neq 3$, ces fibrations sont différentiablement isomorphes et le type topologique des singularités est le même.

REMARQUES (1.2)

1.- On aurait pu considérer une fonction analytique $F : U \to \mathbb{C}$ définie sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et obtenir un théorème analogue au théorème (1.1).

2.- En fait, on sait démontrer un théorème analogue au théorème (1.1) dans le cas où $F : I \times U \to \mathbb{C}$ définit une famille de fonctions analytiques sur $U$, voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^n$, dont les coefficients dépendent différentiablement de $t \in I$, avec $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ (cf. [9]).

Pour démontrer le théorème (1.1) on a besoin d'un lemme important. Avant de l'énoncer, nous donnons quelques notations. Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme tel que $f(0) = 0$ et ayant un point critique isolé à l'origine.

On note $B_\epsilon$ la sphère réelle $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < \epsilon\}$. On note $T_\eta(f)$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |f(z)| \leq \eta\}$ et $\partial T_\eta(f)$ son bord. On pose :

$$X_{\epsilon,\eta}(f) = B_\epsilon \cap T_\eta(f)$$

et :
$$D_\eta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq \eta\},\ \partial D_\eta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = \eta\},\ D_\eta^* = D_\eta - \{0\}.$$

Posons $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}/(\partial f/\partial z_1,\dots,\partial f/\partial z_n)$.

On a alors :

LEMME (1.3)

Supposons que $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ soient de telle sorte que :

(i) $\forall\, z \in X_{\epsilon,\eta}(f) - \{0\}$ on a $df_z \neq 0$ ;

(ii) $\forall\ z \in S_\varepsilon \cap T_\eta$ l'application tangente $d(f_{|S_\varepsilon})_z$ est de rang réel 2 ;

(iii) pour tout $w_o$, $0 < |w_o| \leqslant \eta$, $Y_{\varepsilon,w_o}(f) = B_\varepsilon \cap H_{w_o}$, où $H_{w_o} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) = w_o\}$, a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu$ sphères de dimension n-1 ;

alors $\varphi : B_\varepsilon \cap \partial T_\eta(f) \to S^1$ défini par $\varphi(z) = f(z)/_{|f(z)|}$ est une fibration homotope par une homotopie fibrée à la fibration de Milnor. Si, de plus, $n \neq 3$ alors elle est même difféomorphe à la fibration de Milnor et on a un homéomorphisme :

$$\psi : (B_\varepsilon \cap \partial T_\eta(f)) \cup (S_\varepsilon \cap T_\eta(f)) \xrightarrow{\sim} S_\delta$$

où $\delta$ est petit, avec $\psi(S_\varepsilon \cap H_o) = S_\delta \cap H_o$.

2.- ESQUISSE DES DEMONSTRATIONS

On reprend les notations utilisées pour énoncer le théorème (1.1).

On considère l'application $\Phi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^2$ définie par $\Phi\ (t,z_i) = (t,F(t,z_i))$. On ne s'intéresse qu'au germe $\Phi : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C}^2,0)$. Le lieu critique de $\Phi$ est l'ensemble $C(\Phi)$ des points où on a :

$$\partial F/\partial z_1 = \dots = \partial F/\partial z_n = 0.$$

La projection de $C(\Phi)$ sur l'axe des t donne un germe de morphisme fini $(C(\Phi),0) \to (\mathbb{C},0)$. Il en résulte que $C(\Phi)$ est une courbe en 0. De même, on montre que $\Phi$ définit un germe de morphisme fini $(C(\Phi),0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ donc pour un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ suffisamment petit $\Phi(C(\Phi) \cap U)$ définit un germe de courbe de $\mathbb{C}^2$.

LEMME (2.2)

Sous les hypothèses du théorème (1.1), le germe $(\Phi(C(\Phi) \cap U),0)$ coïncide avec le germe défini par l'axe des t dans $\mathbb{C}^2$.

PREUVE

Il est facile de voir que l'anneau local :

$$A = \mathbb{C}\{t, z_1, \ldots, z_n\}/(\partial F/\partial z_1, \ldots, \partial F/\partial z_n)$$

est un anneau de Cohen-Macaulay : en fait, c'est un anneau d'intersection complète.

L'inclusion de $\mathbb{C}\{t\}$ dans A fait de A un $\mathbb{C}\{t\}$-module de type fini. Un théorème bien connu ([3] $0_{IV}$(16.5.6)) donne que A est en fait un $\mathbb{C}\{t\}$-module libre. Sa longueur est égale à la dimension complexe de l'espace vectoriel $A \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}$ qui est égale à $\mu_o$. L'hypothèse c) du § 1 permet de montrer que le support du germe d'espace analytique défini par l'idéal $(\partial F/\partial z_1, \ldots, \partial F/\partial z_n)$ de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots z_n\}$ coïncide nécessairement avec l'axe des t dans $\mathbb{C}^{n+1}$. L'image de cet axe par $\Phi$ est l'axe des t dans $\mathbb{C}^2$.

Le lemme précédent permet de comparer la fibration de Milnor définie par $F_o : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ au voisinage de l'origine à celle définie par $F_t : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ au voisinage de l'origine pour t non nul assez voisin de 0.

En effet, soient U et V des voisinages ouverts de l'origine respectivement dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}$ pour que la projection sur l'axe des t induise un isomorphisme de $U \cap C(\Phi)$ sur V. Supposons aussi que $\Phi(U)$ contienne un voisinage ouvert $V \times W$ de 0 dans $\mathbb{C}^2$. Choisissons alors $\eta_1$ et $\eta_2$ pour que $D_{\eta_1} \times D_{\eta_2} \subset V \times W$.

Fixons alors $\epsilon_o > 0$ assez petit et $\eta_o > 0$ assez petit pour que $\eta_1 > \eta_o$, que les sphères $S_\epsilon$ de rayon $\epsilon > 0$ centrées en 0 dans $\mathbb{C}^n$, avec $0 < \epsilon < \epsilon_o$, soient transverses à l'hypersurface définie par $F_o = 0$ et que, pour $\eta$, $0 < \eta < \eta_o$, l'application $\partial T_\eta(F_o) \cap B_{\epsilon_o} \to \partial D_\eta$ induite par $F_o$, définisse la fibration de Milnor de $F_o$ à l'origine.

On peut alors choisir $\theta > 0$ tel que, pour tout $\eta$, $0 \leqslant |\eta| \leqslant \eta_o$ et tout t, $0 \leqslant |t| \leqslant \theta$, la sphère $S_{\epsilon_o}$ soit transverse aux hypersurfaces définies par $F_t = \eta$ et que $\theta < \eta_2$.

On trouve alors que $\Phi$ induit un morphisme $\tilde{\Phi} : (D_\theta \times B_{\epsilon_o}) \cap \Phi^{-1}(D_\theta \times \partial D_{\eta_o}) \to D_o \times \partial D_{\eta_o}$ qui est une fibration differentiable localement triviale. En fait, on peut montrer en intégrant des champs de vecteurs convenables (cf. [6]) que les fibrations $\varphi_t : \{t\} \times B_{\varepsilon_o} \cap \Phi^{-1}(\{t\} \times \partial D_{\eta_o}) \to \{t\} \times \partial D_\eta$ pour tout t, $0 \leqslant |t| \leqslant \theta$, induites par $\widetilde{\Phi}$ sont isomorphes entre elles, l'isomorphisme des bases conservant les arguments.

On obtient ainsi un homéomorphisme de $(B_{\varepsilon_o} \cap \partial T_{\eta_o}(F_o)) \cup (S_{\varepsilon_o} \cap T_{\eta_o}(F_o))$ sur $(B_{\varepsilon_o} \cap \partial T_{\eta_o}(F_t)) \cup (S_{\varepsilon_o} \cap T_{\eta_o}(F_t))$ pour tout t, $0 < |t| \leqslant \theta$ qui envoie $S_{\varepsilon_o} \cap H_o(0)$ sur $S_{\varepsilon_o} \cap H_o(t)$ où $H_o(t)$ est l'hypersurface définie par $F_t = 0$

Il nous reste à comparer la fibration $B_{\varepsilon_o} \cap \partial T_{\eta_o}(F_t) \xrightarrow{\psi_o} \partial D_{\eta_o}$ avec la fibration de Milnor de $F_t$ à l'origine.

Choisissons $\varepsilon_t > 0$ et $\eta_t > 0$ pour que :

i) $\varepsilon_o \geqslant \varepsilon_t$ et $\eta_o \geqslant \eta_t$ ;

ii) $B_{\varepsilon_t} \cap \partial T_{\eta_t}(F_t) \xrightarrow{\psi_t} \partial D_{\eta_t}$ définisse la fibration de Milnor de $F_t$ à l'origine.

Quitte à avoir choisi $\eta_o$ assez petit, on peut supposer $\eta_o = \eta_t$. Dans ce cas, on utilise le lemme (1.2) pour comparer $\psi_o$ et $\psi_t$ et ceci démontre le théorème (1.1).

Il nous reste à indiquer comment on démontre le lemme (1.2).

On reprend les notations du lemme (1.2).

Comme :

$$X_{\varepsilon,\eta}(f) - H_o \to D^*_\eta$$

est une fibration localement triviale d'après les hypothèses (i) et (ii) du lemme (1.2), la fibration $\xi_1 : B_\varepsilon \cap \partial T_\eta(f) \to S^1$ définie par $f/|f|$ est isomorphe à $\xi_2 : B_\varepsilon \cap \partial T_{\tilde\eta}(f) \to S^1$ définie par $f/|f|$ pour tout $\eta$, $0 < \tilde\eta \leqslant \eta$.

Soient $\delta$ et $\tilde\eta$ tels que $\xi_3 : B_\delta \cap \partial T_{\tilde\eta}(f) \to S^1$ défini par $f/|f|$, donne la fibration de Milnor de f en O.

On va montrer que $\xi_3$ et $\xi_2$ sont homotopes. Pour cela on va démontrer que l'inclusion $\xi_3^{-1}(e^{i\theta}) \subset \xi_2^{-1}(e^{i\theta})$ est une équivalence d'homotopie. On sait que $\xi_2^{-1}(e^{i\theta})$, isomorphe à $\xi_1^{-1}(e^{i\theta})$, a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu$ sphères de dimension réelle n-1 d'après l'hypothèse (iii) du lemme (1.2).

Il en est de même de $\xi_3^{-1}(e^{i\theta})$ d'après le résultat de Milnor (cf. [10] et [7], théorème 3.1).

Si n = 2, on démontre directement l'équivalence d'homotopie en utilisant la classification topologique des surfaces réelles.

Si $n > 2$, les fibres sont simplement connexes. Il suffit donc de montrer que l'inclusion $F_3 = \xi_3^{-1}(e^{i\theta})$ dans $F_2 = \xi_2^{-1}(e^{i\theta})$ donne une équivalence d'homologie. En écrivant la suite exacte d'homologie on constate qu'il suffit de démontrer que :

$$H_n(F_2, F_3) = 0$$

et $$H_{n-1}(F_2, F_3) = 0.$$

On peut supposer que la distance à O ne donne pas de points critiques dégénérés sur $\xi_2^{-1}(e^{i\theta})$ quand $\delta \leq \|z\| \leq \varepsilon$. Un résultat de A. Andréotti et T. Frankel (cf. [2]) montre que, dans ce cas, les indices des points critiques de la restriction de cette fonction distance à $\xi_2^{-1}(e^{i\theta})$ quand $\delta \leq |z| \leq \varepsilon$ sont majorés par n-1. Par conséquent, $H_n(F_2, F_3) = 0$ et $H_{n-1}(F_2, F_3)$ est libre. Comme $H_{n-1}(F_2)$ et $H_{n-1}(F_3)$ ont le même rang, $H_{n-1}(F_2, F_3)$ est également de torsion, ce qui implique $H_{n-1}(F_2, F_3) = 0$.

En utilisant la suite exacte d'homotopie d'une fibration et le théorème de Whitehead, on en déduit que l'inclusion de l'espace total de $\xi_3$ dans celui de $\xi_2$ est une équivalence d'homotopie.

Un lemme élémentaire (cf. [9]) permet de conclure que les fibrations sont homotopes par une homotopie fibrée :

LEMME (2.3)

Soit $f : E \to B$ une fibration de CW-complexes. Soit $E_1 \subset E$ un sous-complexe tel que l'inclusion soit une équivalence d'homotopie et que $f_1 = f|_{E_1}$ soit une fibration de $E_1$ sur B alors f et $f_1$ sont homotopes par une homotopie fibrée.

En utilisant le théorème de h-cobordisme, on trouve que pour $n \neq 3$ on a que $F_2 - \overset{\circ}{F}_3$ est difféomorphe à $\partial F_2 \times [0,1]$ et ceci permet d'obtenir la deuxième assertion du lemme (1.2) (pour plus de détails cf.[9]).

3.- QUELQUES CONJECTURES

On remarque que la solution du problème posé, esquissée ci-dessus élude une difficulté essentielle. En effet, on a pu montrer que les hypersurfaces de la famille considérée avaient le même type topologique, mais on n'a pas indiqué si la famille est topologiquement triviale. Ceci serait vrai si $\epsilon_o = \epsilon_t$ dans la démonstration du théorème (1.1). En fait, il se pourrait que $\epsilon_o > \epsilon_t$ et que pour un $\epsilon$, $\epsilon_o > \epsilon > \epsilon_t$, $S_\epsilon$ ne coupe pas transversalement l'hypersurface $F_t = 0$. Nous sommes alors amenés à faire les remarques suivantes :

En utilisant des résultats de O. Zariski dans [13], le théorème (1.1) montre que, dans le cas d'une famille de courbes planes vérifiant les hypothèses (1.1), la surface de déformation définie par cette famille est équisingulière le long du lieu singulier. En particulier, la partie lisse de cette surface vérifie les conditions A et B de Whitney le long du lieu singulier au voisinage de l'origine. En fait, ces dernières assertions sont obtenues en remarquant que l'invariance du type topologique implique l'invariance de la multiplicité dans le cas des courbes planes.

B. Teissier a conjecturé que l'invariance du nombre de Milnor des singularités isolées à l'origine dans une famille analytique d'hypersurfaces implique l'invariance des nombres de Milnor des singularités isolées à l'origine des sections hyperplanes génériques successives des hypersurfaces de cette famille. En particulier, on obtiendrait l'invariance de la multiplicité. En fait, B. Teissier a démontré (cf.[12]) que l'invariance des nombres de Milnor des singularités à l'origine des hypersurfaces d'une famille analytique complexe et de leurs sections hyperplanes génériques successives entraîne que la partie lisse de l'hypersurface de déformation définie par cette famille vérifie les conditions A et B de Whitney le long du lieu singulier au voisinage de l'origine.

L'invariance de la multiplicité dans une famille analytique complexe d'hypersurfaces à singularité isolée de nombre de Milnor constant serait aussi conséquence d'une conjecture de O. Zariski (cf.[14]).

"Est-ce que deux hypersurfaces analytiques complexes ayant même type topologique à l'origine ont la même multiplicité ?"

Dans le précédent exposé (cf.[7]), on a vu que si deux hypersurfaces à singularité isolée à l'origine y ont le même type topologique, alors elles ont des monodromies locales conjuguées, donc leur nombre de Milnor est le même, mais, sauf dans le cas des courbes planes analytiquement irréductibles, on ne sait pas montrer si cela implique l'égalité des multiplicités.

On peut alors conjecturer : est-ce que la monodromie locale d'une singularité isolée d'hypersurface complexe détermine la multiplicité de l'hypersurface en son point singulier ?

Est-ce que la monodromie locale d'une singularité isolée d'hypersurface complexe détermine les nombres de Milnor des sections hyperplanes génériques successives de la singularité ?

Enfin, B. Teissier avait conjecturé que si, dans une famille de germes d'hypersurfaces ayant pour tout $t = 0$ une singularité isolée à l'origine de nombre de Milnor $\mu$ donnant pour $t \neq 0$ voisin de zéro plusieurs singularités voisines de l'origine avec les nombres de Milnor $\mu_1, \ldots, \mu_k$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \mu$$

alors $k = 1$.

Cette conjecture* a été démontrée par Cevdet Haş Bey pour le cas des courbes planes [4] et, en utilisant un résultat récent de N. A'Campo ([1]), par Lê Dũng Tráng dans [8]. Ceci permet de formuler le théorème suivant :

* démontrée aussi par Lazzeri dans le présent volume ("A theorem on the monodromy...")

THEOREME (3.1)

Soit $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique. On note encore F un représentant de ce germe. On appelle $T : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la projection sur le premier facteur. On suppose que le germe obtenu $T \times F = \Phi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$ a un point critique isolé en 0 dans la fibre au dessus de 0. On suppose que l'image du lieu des points critiques de $\Phi$ est contenue dans $\mathbb{C} \times \{0\}$. Alors le lieu singulier du germe d'hypersurface défini par $F = 0$ est non singulier et la projection sur le premier facteur induit un isomorphisme du germe de ce lieu singulier en 0 avec le germe $(\mathbb{C}, 0)$.

***

BIBLIOGRAPHIE


[1] N. A'Campo, Le nombre de Lefschetz de la monodromie, à paraître.

[2] A. Andréotti - T. Frankel, The Lefschetz theorem on hyperplane sections Annals of Math., 69 (1959), p. 713-717.

[3] A. Grothendieck, Eléments de Géométrie algébrique (en plusieurs volumes), IHES, Bures s/Yvette.

[4] C. Haş Bey, Sur l'irréductibilité de la monodromie locale : application à l'équisingularité, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 275, p. 105-107.

[5] Lê Dũng Tráng, Sur un critère d'équisingularité, C.R. Acad. Sc. Paris, t.272, p. 138-140.

[6] Lê Dũng Tráng, Thèse de Doctorat, 3ème partie, Paris VII, Déc. 71.

[7] Lê Dũng Tráng, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, dans "Singularités à Cargèse", à paraître dans Astérisque.

[8] Lê Dũng Tráng, Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité, à paraître.

[9] Lê Dũng Tráng, C.P. Ramanujam - B. Teissier, Sur $\mu$ constant, à paraître.

[10] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Stud. 61, Princeton.

[11] C.P. Ramanujam, Local monodromy, manuscrit non publié.

[12] B. Teissier, Thèse de Doctorat, Paris VII, Janv. 73

[13] O. Zariski, Studies in equisingularity III, Saturation of local rings and equisingularity, Ann. J. of Math., vol 90 (1968), p. 961-1023.

[14] O. Zariski, Some open questions in the theory of singularities, Bull. Ann. M. Soc., Vol. 77, pp. 481-191.

***