LÊ DŨNG TRÁNG

# Topologie des singularités des hypersurfaces complexes

*Astérisque*, tome 7-8 (1973), p. 171-182

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__171_0>

# TOPOLOGIE DES SINGULARITES DES HYPERSURFACES COMPLEXES

LÊ DŨNG TRÁNG

Dans cet exposé, nous allons rappeler les résultats de J. Milnor [20] sur la topologie des hypersurfaces complexes et considérer en particulier le cas des courbes planes.

1.- Dans [20], nous avons le théorème suivant :

<u>Théorème (1.1)</u> : Soit V un ensemble algébrique sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ (resp. le corps des réels $\mathbb{R}$). Notons $\Sigma(V)$ le lieu singulier de V. Soit $f : V \to \mathbb{C}$ (resp. $f : V \to \mathbb{R}$) une fonction algébrique sur V. Alors la restriction de f à $V - \Sigma(V)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques.

Ce théorème est essentiellement une conséquence du théorème de finitude de Hilbert, car on utilise le corollaire suivant : si V et W sont des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$), l'espace topologique $V - W$ est l'union disjointe d'un nombre fini de variétés différentiables qui n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes.

Le théorème (1.1) a les conséquences suivantes qui nous intéressent pour la suite :

<u>Corollaire (1.2)</u> : Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ (resp. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) une fonction polynomiale, alors il existe $t_1, \dots t_r \in \mathbb{C}$ (resp. $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$) tels que pour tout $t \in \mathbb{C} - \{t_1, \dots, t_r\}$ (resp. $t \in \mathbb{R} - \{t_1, \dots, t_r\}$) l'hypersurface définie par $f = t$ est non singulière.

<u>Corollaire (1.3)</u> : Soit V un ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) alors si $x \in \Sigma(V)$ est un point singulier isolé, les sphères réelles $S_\epsilon$ de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) centrées en x de rayon $\epsilon > 0$ assez petit coupent transversalement la partie lisse de V.

En particulier, le corollaire (1.3) donne sous les mêmes hypothèses :

Proposition (1.4) : Pour tout couple $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ de nombres réels strictement positifs assez petits les paires $(S_{\epsilon_1}, S_{\epsilon_1} \cap V)$ et $(S_{\epsilon_2}, S_{\epsilon_2} \cap V)$ sont difféomorphes. De plus, la paire $(B_{\epsilon_1}, B_{\epsilon_1} \cap V)$ est homéomorphe à la paire $(B_{\epsilon_1}, C(S_{\epsilon_1} \cap V))$ où $C(S_{\epsilon_1} \cap V)$ est le cône réel union des segments d'extrémités x et un point de $S_{\epsilon_1} \cap V$.

2.- Nous pouvons alors énoncer le théorème de fibration de J. Milnor (Théorème 4.8 de [20]) :

Théorème (2.1) : Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe qui s'annule à l'origine $0 \in \mathbb{C}^n$. Soit $H_o$ l'hypersurface définie par $f = 0$. Alors il existe $\epsilon_o > 0$ tel que, pour tout $\epsilon$, $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_o$, l'application différentiable $\varphi_\epsilon : S_\epsilon - H_o \to \mathbb{S}^1$ définie par $\varphi_\epsilon(z) = f(z)/\ |f(z)|$ pour tout $z \in S_\epsilon - H_o$, est une fibration différentiable localement triviale.

Remarque (2.2) : On a un théorème analogue au théorème (2.1) quand $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique définie sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^n$, telle que $f(0) = 0$.

Dans [20] on trouve également une autre présentation de cette fibration. Plus précisément, fixons un $\epsilon > 0$ avec $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_o$, comme dans le théorème (2.1), notons $\mathring{B}_\epsilon$ la boule ouverte bordée par $S_\epsilon$, alors on a le :

Théorème (2.3) : Il existe $c_\epsilon > 0$ tel que, pour tout cercle $\partial D_c$, de rayon $c > 0$ centré en $0 \in \mathbb{C}$, $0 < c < c_\epsilon$, l'application différentiable $\psi_{\epsilon,c} : \mathring{B}_\epsilon \cap f^{-1}(\partial D_c) \to \partial D_c$, induite par f, soit une fibration localement triviale. De plus, les deux fibrations $\varphi_\epsilon$ et $\psi_{\epsilon,c}$ sont isomorphes de telle sorte que l'isomorphisme de $\mathbb{S}^1$ sur $\partial D_c$ est celui qui conserve les arguments.

Le théorème (2.3) permet de préciser la topologie des fibres de la fibration de Milnor. On obtient ainsi :

Théorème (2.4) : Soit $\epsilon_o > 0$, comme dans le théorème (2.1). Fixons $\epsilon$, $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_o$. Alors $F_\theta = \varphi_\epsilon^{-1}(e^{i\theta})$ est parallèlisable et a le type d'homotopie d'un CW- complexe fini de dimension n-1.

Ce théorème se démontre à l'aide d'un théorème d'A. Andreotti et

T. Frankel ([2] et [19] qui établit que, pour presque tout point x de $\mathbb{C}^n$, la fonction distance à ce point induit sur une sous-variété complexe fermée de dimension d de $\mathbb{C}^n$ une fonction de Morse, i.e. une fonction dont tous les points critiques sont non-dégénérés, dont les indices sont majorés par d. Le fait que $F_\theta$ soit parallèlisable résulte de § 3.4 de [14].

Dans le cas présent, on applique le théorème d'A. Andréotti et T. Frankel en considérant éventuellement la restriction $\sigma$ à $f^{-1}(c\, e^{i\theta})$ de la fonction distance à un point voisin de O. Si le point en question est suffisamment voisin de O, $\sigma^{-1}(\epsilon)$ est difféomorphe à $\psi_{\epsilon,c}^{-1}(c\, e^{i\theta}) = f^{-1}(ce^{i\theta}) \cap \mathring{B}_\epsilon$. Le point étant convenablement choisi, la fonction $\sigma$ est bien une fonction de Morse.

Dans [20] on obtient aussi :

<u>Théorème (2.5)</u> : L'espace topologique $K_\epsilon = S_\epsilon \cap H_o$ est (n-3)-connexe.

On obtient ce dernier théorème en considérant la restriction de la fonction $|f|$ à $S_\epsilon - K_\epsilon$ et en la modifiant un peu pour en faire une fonction de Morse d'indices au moins égaux à n-1. On obtient alors que $S_\epsilon$ est obtenu à partir du voisinage $N_\eta(K_\epsilon) = \{x \in S_\epsilon \mid |f(x)| < \eta\}$ de $K_\epsilon$, avec $\eta > 0$ petit, en adjoignant des cellules de dimensions au moins égales à n-1. On obtient alors facilement le théorème (2.5).

On peut montrer que si f est un polynôme réduit, i.e. sans facteur carré, les fibres $F_\theta$ sont connexes. La suite exacte de la fibration de Milnor donne alors la courte suite exacte :

(2.6) $$1 \to \pi_1(F_\theta, x) \to \pi_1(S_\epsilon - K_\epsilon,\ x) \to \pi_1(\mathbb{S}^1,\ e^{i\theta}) \to 1$$

avec $x \in F_\theta$, et les isomorphismes :

(2.7) $$\pi_i(F_\theta, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(S_\epsilon - K_\epsilon,\ x)$$

pour $i \geqslant 2$.

D'autre part, on remarque que toute fibration sur $\mathbb{S}^1$ est définie par un difféomorphisme de $F_\theta$ sur lui-même. Ce difféomorphisme n'est pas unique, mais tout autre difféomorphisme qui définit la même fibration lui est homotope. Un tel difféomorphisme est appelé <u>difféomorphisme caractéristique de la fi-</u>

bration. Celui-ci induit sur les groupes d'homologie de $F_\theta$ des isomorphismes qui définissent la monodromie locale de $H_o$ en O.

Remarque (2.8) : Dans tout ce qui précède, on ne fait aucune hypothèse particulière sur le polynôme f si ce n'est que $f(0) = 0$. D'autre part, si f n'est pas réduit, le polynôme $f_1$ réduit associé à f a le même ensemble de zéros $H_o$, par conséquent les espaces totaux des fibrations de Milnor de f et $f_1$ en O sont les mêmes, mais les fibrations sont différentes. En particulier, dans un cas les fibres peuvent ne pas être connexes alors qu'elles le sont toujours dans l'autre.

Comme dans la remarque (2.2) on a des résultats analogues à ce qui précède quand $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique sur un voisinage ouvert de O dans $\mathbb{C}^n$ qui s'annule en O.

Enfin, un certain nombre de résultats comme le théorème de fibration de Milnor ont été étendus à des cas plus généraux par H. Hamm ([12] et [13]) et Lê Dũng Tráng ([15]).

3.- Nous allons maintenant nous intéresser aux hypersurfaces ayant une singularité isolée en $O \in \mathbb{C}^n$.

Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. On note $H_o$ l'hypersurface définie par $f = 0$. On suppose que $0 \in H_o$ est un point singulier isolé de $H_o$, i.e. $df(0) = 0$ et que pour tout point $x \in H_o$ voisin de O, on ait $df(x) \neq 0$. Soit $\tilde{J}$ la variété définie par $f = 0$ et $df = 0$. L'hypothèse faite signifie que O est un point isolé dans $\tilde{J}$. Ceci implique pour $n \geqslant 2$ que f est réduite et que pour $n \geqslant 3$ f est irréductible dans l'anneau $\mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}$ des séries à n variables convergentes en $O \in \mathbb{C}^n$, i.e. f est analytiquement irréductible en O. De plus, le théorème des zéros de Hilbert-Rückert montre que l'algèbre analytique locale $\mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}/(f,\partial f/\partial X_1, \ldots, \partial f/\partial X_n)$ est alors artinienne, i.e. de dimension finie sur C.

On appellera :

$$\nu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}/(f,\partial f/\partial X_1,\ldots,\partial f/\partial X_n)$$

En fait, le corollaire (1.2) implique que O est isolé dans l'ensemble J où $df = 0$, i.e. O est un point critique isolé de f. Le théorème de

Hilbert-Rückert donne alors que l'algèbre analytique locale $\mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n\}/\partial f/\partial X_1,\dots,\partial f/\partial X_n)$ est artinienne. On appelle :

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_n\}/(\partial f/\partial X_1,\dots,\partial f/\partial X_n)$$

le nombre de Milnor de la singularité isolée 0 de l'hypersurface complexe $H_o$.

Remarquons que, dans ce cas d'une singularité isolée, pour l'étude de la topologie de $f = 0$ au voisinage de 0, un théorème de P. Samuel [24] nous permet de nous restreindre au cas où f est un polynôme.

On a alors, avec les notations du théorème (2.4) :

Théorème (3.1) : ([20]) La fibre $F_\theta$ de la fibration de Milnor a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu$ sphères réelles $\mathbb{S}^{n-1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n-1}$ de dimension réelle n-1.

(Rappelons qu'un bouquet de $\mu$ sphères réelles $S^{n-1}$ est l'espace topologique formé de $\mu$ sphères $\mathbb{S}^{n-1}$ n'ayant qu'un seul point commun).

Dans [20] on trouve que $F_\theta$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères réelles de dimension n-1, grâce à un résultat de V.I. Palamodov [21] on trouve que leur nombre égale $\mu$ .

On propose l'esquisse de démonstration suivante dont l'idée est de F. Pham (cf [16]) :

On considère une sphère $S_\varepsilon$ de rayon $\varepsilon$ assez petit pour que $\varphi_\varepsilon$ définisse la fibration de Milnor. Dans ce cas 0 est le seul point critique de f dans $S_\varepsilon$. Choisissons alors c comme dans le théorème (2.3). Pour $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ assez général et voisin de 0, la fonction $f + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ a exactement $\mu$ points critiques non dégénérés de valeurs critiques contenues dans l'intérieur du disque $D_c$ de bord $\partial D_c$ et si $\tilde{H}_o$ est l'hypersurface définie par $f + \Sigma a_i X_i = 0$, $\tilde{H}_o$ est non singulière. On considère la fonction $\sigma = |f + \Sigma a_i X_i|$. Alors pour $\eta > 0$ assez petit $N_\eta(\tilde{H}_o \cap B_\varepsilon) = \{x \in B_\varepsilon \,|\, \sigma(x) \leqslant \eta\}$ a le type d'homotopie de $\tilde{H}_o \cap B_\varepsilon$. D'autre part, $\sigma^{-1}(D_c) \cap B_\varepsilon$ a le type d'homotopie de $B_\varepsilon$. De plus, si $(a_1,\dots,a_n)$ est assez voisin de 0, $\tilde{H}_o \cap B_\varepsilon$ est difféomorphe à $H_o \cap B_\varepsilon$.

On remarque alors que $\sigma^{-1}(D_c) \cap B_\varepsilon$ est obtenu en adjoignant $\mu$ cellules de dimension n à $N_\eta(\tilde{H}_o \cap B_\varepsilon)$. Comme $\sigma^{-1}(D_c) \cap B_\varepsilon$ est homotopiquement trivial, il est facile de constater que $\tilde{H}_o \cap B_\varepsilon$ , donc $H_o \cap B_\varepsilon$, a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu$ sphères de dimension n-1.

Cette démonstration se généralise au cas des intersections complètes ayant une singularité isolée en 0, en utilisant la déformation universelle de la singularité (cf [17]). Dans [12], H. Hamm a donné une démonstration analogue à celle de J. Milnor pour les hypersurfaces.

Remarque (3.2) : Dans le cas où $0 \in H_o$ est une singularité isolée, $K_\varepsilon = H_o \cap S_\varepsilon$ est une variété différentiable de dimension réelle 2n-3, qui est (n-3)-connexe d'après le théorème (2.5). De plus, $\overline{F}_\theta$, fermeture de $F_\theta$ dans $S_\varepsilon$, est une variété à bord, de bord $\partial F_\theta = \overline{F}_\theta - F_\theta = K_\varepsilon$ (cf [20]). Les structures différentiables sur $K_\varepsilon$ que l'on peut rencontrer ont été étudiées par E. Brieskorn ([4] et [5]) et A. Durfee ([9]).

Enfin, on a :

Théorème (3.3) : Deux hypersurfaces à singularité isolée en 0 ayant le même type topologique en 0 ont le même nombre de Milnor $\mu$ et leurs monodromies locales sont conjuguées.

La première assertion de ce théorème est une remarque de B. Teissier [26].

Soient $H_o$ et $\tilde{H}_o$ les hypersurfaces définies par f = 0 et g = 0. On suppose que f(0) = 0 et g(0) = 0 et que $0 \in H_o$ et $0 \in \tilde{H}_o$ sont des points singuliers isolés. On dit alors que $H_o$ et $\tilde{H}_o$ ont le même type topologique en 0 s'il existe un homéomorphisme $\psi$ d'un voisinage ouvert U de 0 sur un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de 0, tel que :

$$\psi(U \cap H_o) = \psi(\tilde{U} \cap \tilde{H}_o) \quad \text{et} \quad \psi(0) = 0.$$

Si $(U_i)_{i \in I}$ est un système fondamental de voisinages de 0 contenus dans U, alors $(\psi(U_i))_{i \in I}$ forme un système fondamental de voisinages de 0 contenus dans $\tilde{U}$. Or, quand les $\varepsilon > 0$ sont assez petits, disons $\varepsilon_o > \varepsilon > 0$, les $(B_\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de 0. La proposition (1.4) dit que $\epsilon_o$ étant bien choisi, si $\epsilon_o > \epsilon > 0$, $B_\epsilon - H_o$ a le type d'homotopie de $S_\epsilon - H_o$ et $B_\epsilon - \widetilde{H}_o$ a le type d'homotopie de $S_\epsilon - \widetilde{H}_o$, d'autre part, pour toute paire $(\epsilon_1, \epsilon_2)$, $\epsilon_o > \epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$, $S_{\epsilon_1} - H_o$ et $S_{\epsilon_2} - H_o$ sont difféomorphes ainsi que $S_{\epsilon_1} - \widetilde{H}_o$ et $S_{\epsilon_2} - \widetilde{H}_o$.

Soient $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\epsilon_o > \epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$, et $\epsilon_3$, $\epsilon_4$, $\epsilon_o > \epsilon_3 > \epsilon_4 > 0$, tels que :

$$\psi(B_{\epsilon_4}) \subset B_{\epsilon_2} \subset \psi(B_{\epsilon_3}) \subset B_{\epsilon_1}$$

On obtient :

$$\pi_i(\psi(B_{\epsilon_4}) - \widetilde{H}_o, x) \to \pi_i(B_{\epsilon_2} - \widetilde{H}_o, x) \to \pi_i(\varphi(B_{\epsilon_3}) - \widetilde{H}_o, x) \to \pi_i(B_{\epsilon_1} - \widetilde{H}_o, x)$$

avec : $\quad x \in \psi(B_{\epsilon_4}) - \widetilde{H}_o$

En utilisant les isomorphismes :

$$\pi_i(B_\epsilon - H_o, y) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\psi(B_\epsilon) - \widetilde{H}_o, \varphi(y))$$

$$\text{avec} \quad \epsilon_o > \epsilon > 0 \quad \text{et} \quad y \in B_\epsilon - H_o$$

$$\pi_i(B_{\epsilon_4} - H_o, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(B_{\epsilon_3} - H_o, x)$$

$$\pi_i(B_{\epsilon_2} - \widetilde{H}_o, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(B_{\epsilon_1} - \widetilde{H}_o, x)$$

induit respectivement par $\psi$ et les inclusions, on en déduit que :

$$\pi_i(B_\epsilon - H_o, y) \quad \text{et} \quad \pi_i(B_{\epsilon'} - \widetilde{H}_o, x)$$

$$\text{avec } y \in B_\epsilon - H_o \quad \text{et} \quad x \in B_\epsilon - \widetilde{H}_o$$

sont des groupes isomorphes pour tout $\epsilon$, $\epsilon'$, $\epsilon_o > \epsilon > 0$ et $\epsilon_o > \epsilon' > 0$.

Supposons $\epsilon_o > \epsilon > 0$.

Considérons le revêtement cyclique infini $p_\epsilon : X \to B_\epsilon - H_o$ de $B_\epsilon - H_o$ défini par $\pi_1(B_\epsilon - H_o, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S_\epsilon - H_o, x) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(S_1, \varphi_\epsilon(x))$ où $x \in S_\epsilon - H_o$, l'isomorphisme est défini par l'équivalence d'homotopie $S_\epsilon - H_o \hookrightarrow B_\epsilon - H_o$ et le deuxième morphisme $\varphi_*$ est défini par la fibration de Milnor $\varphi_\epsilon$.

Remarquons que $p_\varepsilon$ induit un revêtement cyclique infini $q_\varepsilon : X_1 \to S_\varepsilon - H_o$ de $S_\varepsilon - H_o$ avec $X_1 = p^{-1}(S_\varepsilon - H_o)$. Ce revêtement est également défini par $\varphi_*$ et l'inclusion $X_1 \subset X$ est évidemment une équivalence d'homotopie. Or, $X_1$ est isomorphe à $F_\theta \times \mathbb{R}$ car $p_1$ est isomorphe au pull-back de $\varphi_\varepsilon$ par le revêtement universel $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ :

$$\begin{tikzcd}
F_\theta \times \mathbb{R} \approx X_1 \arrow[r, "q_\varepsilon"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, ""] & S_\varepsilon - H_o \arrow[d, "\varphi_\varepsilon"] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

et $\mathbb{R}$ est contractile. Soit $h_\varepsilon$ le générateur du groupe du revêtement $p_\varepsilon : X \to B_\varepsilon - H_o$. La restriction de $h_\varepsilon$ à $X_1$ donne le générateur du groupe du revêtement $q_\varepsilon$ et induit sur l'homologie de $X_1$ égale à celle de $F_\theta$ la monodromie locale de $\varphi_\varepsilon$.

Soit $\tilde{p}_\varepsilon : \tilde{X} \to B_\varepsilon - \tilde{H}_o$ le revêtement cyclique infini de $B_\varepsilon - \tilde{H}_o$ défini comme pour $B_\varepsilon - H_o$. Considérons $\varepsilon' > 0$ tel que $\psi(B_{\varepsilon'}) \subset B_\varepsilon$. On obtient que $\tilde{p}_\varepsilon$ induit un revêtement cyclique infini

$$\tilde{r}_{\varepsilon'} : \tilde{p}_\varepsilon^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'}) - \tilde{H}_o) \to \psi(B_{\varepsilon'}) - \tilde{H}_o$$

Or, $\tilde{r}_{\varepsilon'}$ est isomorphe à $p_{\varepsilon'}$. Comme $\psi(B_{\varepsilon'}) - \tilde{H}_o \subset B_\varepsilon - \tilde{H}_o$ est une équivalence d'homotopie, $\tilde{p}_\varepsilon^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'}) - \tilde{H}_o) \subset \tilde{X}$ est une équivalence d'homotopie. De plus, $\tilde{h}_\varepsilon : \tilde{X} \to \tilde{X}$, qui engendre le groupe du revêtement $\tilde{p}_\varepsilon$, induit $(\tilde{h}_\varepsilon)_*$ sur l'homologie de $\tilde{X}$ égale à celle de $\tilde{F}_\theta$, la monodromie locale de la fibration de Milnor $\tilde{\varphi}_\varepsilon : S_\varepsilon - \tilde{H}_o \to \mathbb{S}^1$. On obtient le même isomorphisme $(\tilde{h}_\varepsilon)_*$ sur l'homologie de $\tilde{p}^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'}) - \tilde{H}_o)$ et comme $\tilde{r}_{\varepsilon'}$ et $p_{\varepsilon'}$ sont isomorphes, $(\tilde{h}_\varepsilon)_*$ est bien conjugué à $(h_{\varepsilon'})_*$ qui donne la monodromie locale de la fibration de Milnor $\varphi_\varepsilon$. Evidemment, ceci démontre également que les nombres de Milnor de $0 \in H_o$ et $0 \in \tilde{H}_o$ sont égaux.

Remarques et conjectures (3.4) : Si f et g sont des fonctions analytiques réduites en 0 qui s'annulent en 0 et définissent des hypersurfaces $H_o$ et $\tilde{H}_o$ qui ont le même type topologique en 0, les monodromies locales de f et g en 0 sont encore conjuguées. La démonstration est la même que pour le théorème (3.3). Ceci entraîne l'isomorphisme entre les homologies des fibres des fibrations de Milnor associées.

Une conjecture de O. Zariski [27] est : si f et g réduites en 0 définissent des hypersurfaces qui ont le même type topologique en 0, ont-elles la même multiplicité en 0 ?. Pour le cas des courbes planes on peut le démontrer en utilisant le théorème (3.3) comme nous le verrons plus loin.

D'autre part, la question se pose de savoir si deux singularités d'hypersurfaces, qui ont leurs monodromies locales conjuguées, ont le même type topologique. Ceci est vrai pour les courbes planes analytiquement irréductibles comme nous le verrons plus loin. Si la monodromie locale n'est pas suffisante, que faut-il rajouter pour connaître le type topologique ?

De toute façon, des résultats sur la monodromie locale permettraient d'approcher "algébriquement" l'étude de la topologie des hypersurfaces complexes.

Le cas des polynômes de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} X_i^{a_i}$ avec $a_i \geqslant 2$ a été étudié par F. Pham dans [21] et E. Brieskorn dans [5].

Le théorème de la monodromie (cf [11], [8], [6], [10] etc...) nous donne que les valeurs propres de la monodromie locale sont des racines de l'unité.

Quand f et g sont des polynômes à "variables séparées" ayant une singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ respectivement, M. Sebastiani et R. Thom [24] ont calculé la monodromie de f + g en 0 en fonction de celle de f en 0 et celle de g en 0.

Un théorème récent d'A' Campo ([1]) montre que si f(0) = 0 et df(0) = 0, la monodromie locale de f en 0 a un nombre de Lefschetz nul.

Ce dernier résultat est d'ailleurs très important car il a pour corollaire :

<u>Théorème (3.5)</u> : Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction polynomiale réduite telle que f(0) = 0. Supposons que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, pour tout b assez petit non nul, $H_b \cap B_\varepsilon$, où $H_b$ est l'hypersurface non singulière f = b, a son homologie nulle en toute dimension k, $k \geqslant 1$, alors $df(0) \neq 0$, i.e. $H_o$ est non singulière en 0.

Nous allons maintenant rapidement considérer le cas des courbes planes.

4.- Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ un polynôme réduit. Supposons que $f(0) = 0$. Soit $S_\varepsilon$ une sphère réelle de $\mathbb{C}^2$, de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit, centrée en 0. Comme les singularités d'une courbe sont isolées, on obtient que $S_\varepsilon$ est transverse à $C_o$, définie par $f = 0$. Ainsi $C_o \cap S_\varepsilon$ est une variété compacte de dimension 1 donc une union disjointe de cercles qui forme dans $S_\varepsilon$ un entrelacement. Le nombre de composantes de cet entrelacement égale le nombre de composantes analytiquement irréductibles de f en 0.

La fibre de la fibration de Milnor de f en 0 est connexe et sa fermeture a pour bord l'entrelacement précédent. C'est une surface réelle connexe à bord non vide et a donc le type d'homotopie d'un graphe, donc d'un bouquet de cercles.

La proposition (1.4) nous dit que le type topologique de $C_o$ en 0 est déterminé par le type de l'entrelacement $C_o \cap S_\varepsilon$ dans $S_\varepsilon$.

On peut montrer que le nombre d'enlacements de deux composantes de l'entrelacement égale la multiplicité d'intersection des branches irréductibles qui leur correspondent (cf [23]). On peut alors montrer que l'on connaît le type topologique de $C_o$ en 0, quand on connaît le type de chacune des composantes de l'entrelacement et les nombres d'enlacements de ces composantes entre elles deux à deux (cf [18] et [28]).

Comme il est coutume de le faire, on appelle <u>noeud</u>, un entrelacement n'ayant qu'une seule composante. Nous rappelons brièvement les résultats dans ce cas (cf [3], [26], [7], [19]) :

<u>Théorème (4.1)</u> : Le premier polynôme d'Alexander du noeud $C_o \cap S_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ égale le polynôme caractéristique de la monodromie locale en 0, [20].

Les paires de Puiseux de f en 0 déterminent uniquement le type du noeud $C_o \cap S_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, [3].

Le polynôme d'Alexander de $C_o \cap S_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ détermine les paires de Puiseux de f en 0 et, par conséquent, la multiplicité de f en 0, [26] et [7].

Les racines du polynôme d'Alexander sont des racines de l'unité et leur somme égale 1, [26] et [7].

On retrouve bien tous les résultats généraux dont on a parlé précédemment.

---

## BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'Campo. Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, à paraître dans Indag. Mat. 1973 .

[2] A. Andreotti - T. Frankel. The Lefschetz theorem on hyperplane sections, Ann. of Maths, 69 (1959), p. 713-717.

[3] K. Brauner, Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen III, IV, Abh. Math. Sem. Hamburg, 6 (1928), p. 8-54.

[4] E. Brieskorn. Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 55 (1966) p. 1395-1397.

[5] E. Brieskorn. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Inventiones Math., 2 (1966), p. 1-14.

[6] E. Brieskorn. Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Mathematicae, Vol 2 (1970), p. 103-160.

[7] W. Burau. Kennzeichnung der Schlauchknoten, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932), p. 125-133.

[8] P. Deligne. Equations différentielles à points singuliers, réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag.

[9] A. Durfee. Diffeomorphism classification of isolated hypersurface singularities, Phd Thesis, Cornell University, U.S.A.

[10] P. Griffiths and al. Seminar on degeneration of algebraic varieties Princeton, I.A.S. 1970.

[11] A. Grothendieck. SGA VII, tome 1, Lecture Notes in Math. 288, Springer-Verlag.

[12] H. Hamm. Die Topologie isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten komplexer Hyperflächen, Thèse, Bonn, 1969.

[13] H. Hamm. Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, Math. Ann. 191, (1971), p. 235-252.

[14] M. Kervaire - J. Milnor. Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math., 77 (1963) p. 504-537.

[15] Lê Dũng Tráng. Singularités isolées des intersections complètes, Exposés au séminaire Shih Weishu, 1969/1970, IHES, Bures-sur-Yvette.

[16] Lê Dũng Tráng. Singularités isolées des hypersurfaces complexes, Acta Scientiarum Vietnamicarum (1972), Hanoi, R.D. Viêt Nam.

[17] Lê Dũng Tráng. Calcul du nombre de cycles évanouissants pour une singularité isolée d'une intersection complète, à paraître.

[18] M. Lejeune. Sur l'équivalence des singularités des courbes algébroïdes planes et coefficients de Newton, Thèse, 1972, à paraître.

[19] J. Milnor. Morse Theory, Ann. Math. Stud., 51, Princeton.

[20] J. Milnor. Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. 61, Princeton.

[21] V.I. Palamodov. O kratnosti golomorfnovo otobrajiénia, J. Anal. et ses Appl. (en Russe), (1967) p. 54-65.

[22] F. Pham. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales, Bull Soc. Math. Fr., 93 (1965), p. 333-367.

[23] J. E. Reeve. A Summary of results in the topological classification of plane algebroïd singularities, Rendiconti Sem. Mat. Torino, 14 (1954-1955), p. 159-187.

[24] P. Samuel. Algébricité de certains points singuliers algebroïdes, J. Math. pures et Appl. 35 (1956), p. 1-6.

[25] M. Sébastiani, R. Thom. Un résultat sur la monodromie, Inv. Math., 13 (1971), p. 90-96.

[26] B. Teissier. Déformations à type topologique constant II in "Séminaire Douady-Verdier 1972" Secrétariat E.N.S. Paris, 45 rue d'Ulm.

[27] O. Zariski . On the topology of algebroïd singularities, Amer. J. Math., 54 (1932), p. 453-465.

[28] O. Zariski. Some open questions in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), p. 481-491.

[29] O. Zariski. General theory of Saturation and of saturated local ring II, Amer. J. Math., 93 (1971), p. 872-964.