Astérisque

HEISUKE HIRONAKA

Introduction aux ensembles sous-analytiques (rédigé par André Hirschowitz et Patrick Le Barz)

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 13-20
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__13_0>

INTRODUCTION AUX ENSEMBLES SOUS-ANALYTIQUES

Heisuke HIRONAKA

(rédigé par André HIRSCHOWITZ et Patrick LE BARZ)

La notion d'ensemble sous-analytique généralise celle d'ensemble semi-analytique. Cette notion est conçue de façon que l'image par un morphisme analytique propre d'un ensemble sous-analytique soit encore sous-analytique ; elle pourra, dans l'étude de certains problèmes, remplacer avantageusement celle d'ensemble semi-analytique dans la mesure où on peut aussi construire, pour les ensembles sous-analytiques, des stratifications " à la Whitney " .

Dans cet exposé introductif, on définit les ensembles sous-analytiques, et on énonce leurs propriétés fondamentales, en particulier le théorème de stratification. On énonce aussi les théorèmes de désingularisation des espaces analytiques réels qui sont d'un usage constant dans l'étude des ensembles sous-analytiques.

Les démonstrations seront publiées ailleurs. [1]

I . - ENSEMBLES SEMI-ALGEBRIQUES ET ENSEMBLES SEMI-ANALYTIQUES .

On connait la

DEFINITION (I,1) . - Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est dit semi-algébrique s'il existe $2pq$ polynômes sur $\mathbb{R}^n$, f_{ij} et g_{ij} , où $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, tels que $A = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in \mathbb{R}^n | \forall j = 1,\ldots,q \ , \ g_{ij}(x) = 0 \text{ et } f_{ij}(x) > 0\}$. Il est facile de vérifier que l'intersection, la réunion et la différence de deux ensembles semi-algébriques sont semi-algébriques. En outre, on a le

THEOREME (I,2) . - (Tarski-Seidenberg) : L'image par un morphisme algébrique d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique.

On connait aussi les

DEFINITION (I,3) . - Soient X une variété analytique réelle, A une partie de X et x un point de X . On dit que A est semi-**analytique** en x s'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et $2pq$ fonctions analytiques réelles dans U , f_{ij} et g_{ij} où $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, telles que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{p} \{y \in U | \forall j = 1,\dots,q \quad g_{ij}(y) = 0 \text{ et } f_{ij}(y) > 0\} \quad .$$

DEFINITION (I,4) . - Soient X une variété analytique réelle et A une partie de X . On dit que A est semi-analytique dans X si A est semi-analytique en tout point de X .

Remarque (I,5) . - Il faut bien préciser dans quelle variété un ensemble est semi-analytique. Il peut très bien se produire que A soit semi-analytique dans un ouvert U de X sans l'être dans X . C'est le cas par exemple pour $X = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ et $A = \{(x,y) \in U | y = \sin \frac{1}{x} \}$.

On peut montrer, comme dans le cas semi-algébrique, que l'intersection, la réunion et la différence de deux ensembles semi-analytiques dans X est semi-analytique dans X . En revanche, l'image par un morphisme analytique d'un ensemble semi-analytique n'est pas semi-analytique : par exemple, si on reprend les notations de la remarque précédente, l'image de A par l'injection canonique de U dans X n'est pas semi-analytique dans X . On peut se demander alors si l'image d'un ensemble semi-analytique par un morphisme analytique propre est semi-analytique. La réponse est négative comme en témoigne l'

Exemple (I,6) . - Choisissons trois séries algébriquement indépendantes h_1, h_2, h_3, dans l'idéal maximal de $\mathbb{R}\{x\}$ (par exemple $e^x - 1, e^{x\sqrt{2}} - 1, e^{x\sqrt{3}} - 1$) . On peut alors vérifier que les séries $f_1(x,y,z) = yh_1(x)$, $f_2(x,y,z) = yh_2(x)$ et $f_3(x,y,z) = yh_3(x)$ sont analytiquement indépendantes dans $\mathbb{R}\{x,y,z\}$ (cela signifie que l'unique morphisme Θ d'algèbres topologiques de $\mathbb{R}\{t_1,t_2,t_3\}$ dans $\mathbb{R}\{x,y,z\}$ vérifiant pour $i = 1,2,3$, $\Theta(t_i) = f_i$ est injectif).

Soit $\varepsilon > 0$ tel que f_1, f_2 et f_3 convergent dans la boule euclidienne de rayon 2ε de $\mathbb{R}^3$. La sphère S de rayon ε est une variété analytique compacte et (f_1,f_2,f_3) définit un morphisme analytique propre , π de S dans $\mathbb{R}^3$. On peut montrer que l'image de π n'est pas semi-analytique en zéro.

II . - ENSEMBLES SOUS-ANALYTIQUES .

DEFINITION (II,1) . - Soit X une variété analytique réelle, A une partie de X et x un point de X . On dit que A est sous-analytique en x s'il existe un voisinage U de x dans X , et $2p$ morphismes analytiques propres $\pi_i^1 : Y_i^1 \longrightarrow U$ et $\pi_i^2 : Y_i^2 \longrightarrow U$ $(i=1,\dots,p)$ où les Y_i^1 et les Y_i^2 désignent des variétés analytiques réelles, de façon que :

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{p} (\pi_i^1(Y_i^1) - \pi_i^2(Y_i^2))$$

DEFINITION (II,2) . - Soient X une variété analytique réelle et A une partie de X . On dit que A est sous-analytique dans X , si A est sous-analytique en tout point de X .

Ici, comme en (I,5) , on peut remarquer qu'un ensemble peut être sous-analytique dans un ouvert de X sans l'être dans X . On peut aussi insister sur le fait que dans la définition (II,1) , les ensembles $\pi_i^j(Y_i^j)$ ne sont pas analytiques en général, ni même semi-analytiques, comme en témoigne l'exemple (I,6) .

Voici maintenant les principaux résultats concernant les ensembles sous-analytiques. D'abord un théorème de stabilité :

THEOREME (II,3) . - i) Tout sous ensemble semi-analytique de X est sous-analytique dans X .

ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre de variétés analytiques réelles, et A une partie sous-analytique de X , alors $f(A)$ est sous-analytique dans Y .

iii) L'ensemble $\mathrm{Sous}(X)$ des parties sous-analytiques de X est stable par intersection finie, réunion finie et différence.

Et maintenant un théorème de stratification " à la Whitney " :

THEOREME (II,4) . - Soit X une variété analytique réelle dénombrable à l'infini. Soit A une partie sous-analytique de X . Alors, il existe une partition de A , soit $A = \coprod_{\alpha} A_{\alpha}$, vérifiant :

i) $\forall \alpha$, A_α est une sous-variété analytique réelle localement fermée de X , connexe et sous-analytique dans X .

ii) La famille des A_α est localement finie.

iii) Si $A_\alpha \cap \overline{A}_\beta$ est non vide, alors $\overline{A}_\beta$ contient A_α .

iv) Si α et β sont tels que $A_\alpha \subset \overline{A}_\beta - A_\beta$, alors le couple (A_α, A_β) vérifie les conditions de Whitney en tout point de A_α .

On peut aussi montrer la

PROPOSITION (II,5) . - Si A est sous-analytique dans X :

i) chaque composante connexe de A est sous-analytique dans X .

ii) L'adhérence et l'intérieur de A sont sous-analytiques dans X .

Enfin, à l'aide du théorème (II,4) , on doit pouvoir définir les composantes irréductibles d'une partie sous-analytique de X et montrer que la famille des composantes irréductibles d'une partie sous-analytique de X est localement finie ...

III . - ESPACES ANALYTIQUES REELS .

Comme nous l'avons déjà dit, la démonstration des résultats précédents exploite de façon systématique certains théorèmes de désingularisation des espaces analytiques réels. Dans ce paragraphe, nous définissons une notion d'espace analytique réel pour pouvoir , dans le paragraphe suivant, énoncer ces théorèmes de désingularisation.

DEFINITION (III,1) . - Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, f_2, \dots, f_m$ des fonctions analytiques dans U . On appelle modèle défini par $(U; f_1, \dots, f_m)$ l'espace annelé $Y = (|Y|, \mathcal{O}_Y)$ construit de la façon suivante :

$|Y| = \{y \in U | f_X(y) = \dots = f_1(y) = 0\}$ et si i désigne l'injection canonique de $|Y|$ dans U , alors $\mathcal{O}_Y = i^{-1}(\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_m)\mathcal{O}_U)$ où $\mathcal{O}_U$ désigne le faisceau des fonctions analytiques dans U . Le modèle est dit lisse si $m = 0$.

Remarque (III,2) . - En prenant pour modèles les sous-espaces définis par des idéaux quelconques de $\mathcal{A}(U)$, on obtiendrait des espaces annelés ayant de bien moins bonnes propriétés.

DEFINITION (III,3) . - On appellera espace analytique réel tout espace annelé localement isomorphe à un modèle au sens de la définition (III,1) .

La catégorie des espaces analytiques réels est une sous-catégorie pleine de celle des espaces localement annelés.

Un point d'un espace analytique est dit lisse s'il admet un voisinage isomorphe à un modèle lisse. Il est dit singulier dans le cas contraire. Un espace analytique est dit lisse s'il est lisse en chacun de ses points : c'est alors une variété analytique munie du faisceau des fonctions analytiques.

DEFINITION (III,4) . - Soit $X = (|X|, \mathcal{A}_X)$ un espace analytique réel. Soit J un sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{A}_X$. Soit Y le support de $\mathcal{A}_X/J$. Si $(Y, \mathcal{A}_X/J)$ est un espace analytique, on dit que c'est le sous-espace analytique de X associé à J .

Remarque (III,5) . - L'espace annelé réduit associé à un espace analytique réel n'est pas un espace anlytique réel. Pour cette raison et pour d'autres, on ne dispose pas d'une bonne notion de sous-ensemble analytique d'un espace analytique réel. Faute de cette notion, nous ferons délibérément dans ce qui suit l'abus de langage qui consiste à désigner par X tantôt un espace analytique et tantôt l'espace topologique sous-jacent. En particulier, si Y est un sous-espace de X , on désignera par $X-Y$ l'espace analytique auquel tout le monde pense.

DEFINITION (III,6) . - Soit X un espace analytique réel. On appelle filtration régulière de X toute suite localement finie $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces analytiques de X tels que

i) $|X_0| = |X|$

ii) $\forall i \quad X_i \supset X_{i+1}$

iii) $\forall i \, , \quad X_i - X_{i+1}$ est un espace analytique lisse.

Ainsi, si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une filtration régulière de X , $|X|$ est réunion localement finie disjointe de sous-espaces analytiques lisses. Cette notion de filtration régulière nous permettra de formuler les théorèmes de désingularisation. Bien sûr, on utilisera le

THEOREME (III,7) . - Si X est un espace analytique réel dénombrable à l'infini, il admet une filtration régulière.

Remarque (III,8) . - On ne peut pas exiger que X_{i+1} soit d'intérieur vide dans X_i (voir ci-dessous l'exemple (IV,2)). Ce qui remplace sans grand dommage cette condition, c'est que la famille des X_i est localement finie.

IV . - DESINGULARISATION

THEOREME (IV,1) . - (Desingularization I) Soit X un espace analytique réel dénombrable à l'infini et soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une filtration régulière de X . Alors il existe une suite X'_i d'espaces analytiques lisses et une suite Π_i de morphismes de X'_i dans X_i de façon que si Π désigne le morphisme correspondant de $X' = \coprod_i X'_i$ dans X , on ait :

i) Π est propre et surjectif .

ii) $\forall i$, $\Pi_i^{-1}(X_{i+1})$ est d'intérieur vide dans X'_i .

iii) $\forall i$, Π_i induit un isomorphisme de $X'_i - \Pi_i^{-1}(X_{i+1})$ sur $X_i - X_{i+1}$.

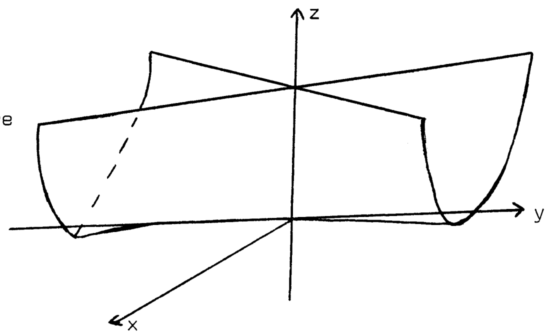
Un tel morphisme $\Pi : X' \to X$ s'appelle désingularisation de X .

Exemple (IV,2) . - Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la surface X d'équation $x^2 - y^2z = 0$, communément nommée " parapluie de Whitney ".

On pose $X_0 = X$ et

$X_1 = \{(x,y,z) \mid x=y=0\}$

(X_0, X_1) est une filtration régulière de X .



Notons $\Pi_0 : X'_0 \to X_0$ l'éclatement de X_0 le long de X_1 .

Posons $X'_1 = X_1$ et $\Pi_1 = id_{X_1}$.

Les conditions du théorème sont vérifiées par X'_0, X'_1, Π_0, Π_1 .

<u>Remarque (IV,3)</u> . - Dans l'exemple ci-dessus, on n'a pas envie de dire que : $\Pi_o : X'_o \to X$ est une désingularisation puisque ça n'est même pas surjectif.

Pour énoncer le théorème suivant, il nous faut encore deux définitions :

<u>DEFINITION (IV,4)</u> . - Soit $\Pi : X' \to X$ un morphisme de variétés analytiques réelles. On dit que Π est presque partout un isomorphisme s'il existe un sous espace analytique fermé S de X vérifiant :

i) S est d'intérieur vide dans X .
ii) $\Pi^{-1}(S)$ est d'intérieur vide dans X' .
iii) Π induit un isomorphisme de $X' - \Pi^{-1}(S)$ sur $X-S$.

<u>Remarque (IV,5)</u> . - Comme on le voit dans l'exemple (IV,2) , on ne peut pas en général trouver une désingularisation qui soit presque partout un isomorphisme.

<u>Remarque (IV,6)</u> . - Si un morphisme propre est presque partout un isomorphisme, il est surjectif.

<u>DEFINITION (IV,7)</u> . - Soit X' un espace analytique réel lisse de dimension n . Un idéal J' de $\mathcal{O}_{X'}$ est dit à croisements normaux si pour tout point x' de X' , il existe un système de coordonnées $(f_1,\dots,f_n)$ au voisinage de x' tel que $J'_{x'}$ soit engendré par un monôme en les f_i .

<u>Exemple (IV,8)</u> . - Dans $\mathbb{R}^2$, l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ engendré par $x_1^2 + x_1^2$ n'est pas à croisements normaux.

<u>THEOREME (IV,9)</u> . - (Desingularization II) : Soit X un espace analytique réel lisse (alors $\mathcal{O}_X$ est cohérent) et soit J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ Alors il existe un espace analytique lisse X' et un morphisme $\Pi : X' \to X$ vérifiant :

i) $(\Pi^{-1} J)\mathcal{O}_{X'}$ est à croisements normaux .
ii) Π est propre.
iii) Π est presque partout un isomorphisme.

Donnons pour finir deux corollaires de ces théorèmes :

COROLLAIRE (IV,10) . - Soit X lisse et $(J_i)_{i=1,\dots,s}$ une suite finie d'idéaux cohérents de $\mathcal{O}_X$. Alors il existe X' lisse et un morphisme propre $\Pi : X' \to X$ qui soit presque partout un isomorphisme et tel que les $(\Pi^{-1}J_i)\mathcal{O}_{X'}$ soient simultanément à croisements normaux (simultanément signifie qu'il existe au voisinage de tout point un système de coordonnées dans lequel chaque $(\Pi^{-1}J_i)\mathcal{O}_{X'}$ est engendré par un monôme) .

Pour énoncer le second corollaire, donnons la

DEFINITION (IV,11) . - Soient X' un espace analytique lisse de dimension n , x' un point de X' et $(x_1,\dots,x_n)$ un système de coordonnées défini sur un voisinage Ω de x' . Une partie Q de X' est un quadrant en x' par rapport à ce système de coordonnées s'il existe une partition de l'ensemble $J = \{1,\dots,n\}$, soit $J = \Delta \coprod \Delta' \coprod \Delta''$ telle que

$$Q \cap \Omega = \{y \in \Omega \,|\, \forall i \in \Delta , \ x_i(y) = 0 \ ; \ \forall i \in \Delta' , \ x_i(y) > 0 \ \text{ et } \ \forall i \in \Delta'' \ x_i(y) < 0 \ \}$$

COROLLAIRE (IV,12) . - Soit A un sous-ensemble semi-analytique de l'espace analytique X et soit x un point de X . Alors il existe un voisinage ouvert U de x , un espace lisse X' et un morphisme surjectif propre $\Pi : X' \to U$ tels que pour tout point x' de X' , il existe un système de coordonnées au voisinage de x' par rapport auquel $\Pi^{-1}(A \cap U)$ est une réunion finie de quadrants.

[1] H. HIRONAKA - " Subanalytic sets in Number Theory, algebraic geometry and commutative algebra " Volume in honor of Y. AKIZUKI, Kinokuniya (pub.) 1973