ANDRÉ GALLIGO
CHRISTIAN HOUZEL

Module des singularités isolées d'après Verdier et Grauert

Astérisque, tome 7-8 (1973), p. 139-163
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__139_0>

MODULE DES SINGULARITES ISOLEES
D'APRES VERDIER ET GRAUERT

André GALLIGO - Christian HOUZEL

PLAN

- Introduction
- § 1 Passage du formel à l'analytique
- § 2 Déformations formelles
- § 3 Mise en équations et existence d'une déformation semi-universelle
- Appendice : Weierstrass préparé à la Grauert

INTRODUCTION . - Ce texte expose les principaux points de la démonstration du résultat de Grauert dans [1] , dans la version repensée par Verdier [2] .

§ 1 . - PASSAGE DU FORMEL A L'ANALYTIQUE

DEFINITION 1 . - Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_q)$, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$, $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_m)$, I un idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ et $R \in \mathbb{C}\{x,u,\Phi,\Psi\}^{\ell}$, on note m l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$.

On appelle solution analytique du système d'équation $R \equiv 0$ (modulo I) la donnée d'un couple (φ,ψ) , $\varphi \in \mathbb{C}\{x\}$, $\psi \in \mathbb{C}\{x,u\}$ tel que $R(x,u,\varphi(x),\psi(x,u)) \equiv 0$ (modulo I) .

On appelle solution à l'ordre i du système d'équation $R \equiv 0$ (modulo I) la donnée d'un couple (φ,ψ) , $\varphi \in \mathbb{C}[x]$, $\psi \in \mathbb{C}\{u\}[x]$ tel que les degrés totaux de φ et de ψ en x soient inférieurs ou égaux à i et que

$$R(x,u,\varphi(x),\psi(x,u)) \equiv 0 \quad \text{modulo}(I + m^{i+1}) \quad .$$

PROPOSITION 1 (H. GRAUERT - J.L. VERDIER) . - Soit $i_0 \in \mathbb{N}$; avec les notations précédentes, si le système d'équation $R \equiv 0$ (modulo I) admet une solution à l'ordre i_0 et si toute solution (φ_i,ψ_i) à l'ordre i , $i \geq i_0$, se prolonge en une solution $(\varphi_i + \delta_i, \psi_i + \gamma_i)$ à l'ordre $i+1$ avec $\delta_i \in \mathbb{C}[x]$ et γ_i $\mathbb{C}\{u\}[x]$ deux polynômes homogènes de degré $i+1$ en x , alors le système admet une solution analytique

Remarques préliminaires à la démonstration

1. (Théorème de préparation de Weierstrass cf [1] , [3] ou l'appendice).

Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ il existe un domaine $E(I)$ de $\mathbb{N}^n$ tel que toute série g de $\mathbb{C}\{x,u\}$ soit congrue modulo I à une unique série $\operatorname{red}(g)$ de $\mathbb{C}\{x,u\}$ telle que tous les exposants des monômes en x de $\operatorname{red}(g)$ soient à l'extérieur de $E(I)$.

De plus, si $j^q(g)$ désigne la série g tronquée à l'ordre $q+1$ en x , on a $\operatorname{red}(j^q(g)) = j^q(\operatorname{red}(g))$.

2. Si (φ,ψ) est une solution du système $R \equiv 0$ (modulo I) , alors $(\operatorname{red}(\varphi), \operatorname{red}(\psi))$ est aussi une solution. Ceci nous permet de ne considérer que les solutions (φ,ψ) avec φ et ψ réduites relativement à I , donc qui ont les exposants de leurs monômes en x à l'extérieur de $E(I)$.

Démonstration . - Soit (φ_i,ψ_i) une solution à l'ordre i avec φ_i et ψ_i réduites relativement à I ; deux polynômes $\delta_i \in \mathbb{C}[x]$ et $\gamma_i \in \mathbb{C}\{u\}[x]$ homogènes de degré total $i+1$ en x , réduits relativement à I , sont tels que $(\varphi_i+\delta_i,\psi_i+\gamma_i)$ soit une solution à l'ordre $i+1$ qui prolonge donc (φ_i,ψ_i) si et seulement si :

$$\operatorname{red}\left[R(x,u,\varphi_i(x)+\delta_i(x),\psi_i(x,u)+\gamma_i(x,u))\right] \equiv 0 \text{ modulo } \mathfrak{m}^{i+2}$$

soit, en écrivant le développement de Taylor de R et en notant R_i la partie homogène en x de degré $i+1$ de $\operatorname{red}\left[R(x,u,\varphi_i(x),\psi_i(x,u))\right]$.

$$R_i + \left.\frac{\partial R}{\partial \Phi}\right|_{x=o} \cdot \delta_i(x) + \left.\frac{\partial R}{\partial \Psi}\right|_{x=o} \cdot \gamma_i(x,u) = 0 \quad .$$

En écrivant l'égalité des coefficients des polynômes réduits (on note avec la même lettre un polynôme et l'ensemble de ses coefficients), on obtient l'équation $-R_i = \beta(\delta_i,\gamma_i)$ où β est le morphisme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}\{u\}^s & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & \mathbb{C}\{u\}^s \\ (\delta_i,\gamma_i) & \longrightarrow & \left.\frac{\partial R}{\partial \Phi}\right|_{x=o} \cdot \delta_i + \left.\frac{\partial R}{\partial \Psi}\right|_{x=o} \cdot \gamma_i \end{array}$$

car les coefficients de δ_i varient dans un espace vectoriel $\mathbb{C}^s$ et ceux de γ_i et de R_i dans des modules libres $\mathbb{C}\{u\}^s$ (précisément $s = H_A^1(i+2) - H_A^1(i+1)$ où H_A^1 désigne la fonction d'Hilbert Samuel de $A = k\{x\}_{/I}$) .

Pour construire une solution convergente du système, on aimerait pouvoir choisir à chaque étape des (δ_i, γ_i) vérifiant l'équation et dont on majorerait la norme judicieusement, pour cela, on utilise le :

LEMME 1 (Cartan, cf [9]). - Soit $\mathcal{O}^j_{\mathbb{C}^q} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^k_{\mathbb{C}^q} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$ une présentation finie au-dessus d'un ouvert U, contenant 0, de $\mathbb{C}^q$ d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$. Il existe un système fondamental de polycylindres compacts tels que pour chacun d'eux K, $0 \in \mathring{K} \subset U$, le morphisme induit par α

$$B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^j \xrightarrow{\hat{\alpha}} B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^k$$

soit d'image fermée et le morphisme $\operatorname{Coker} \hat{\alpha} \longrightarrow \mathcal{F}_0$ soit injectif ; $B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})$ désigne l'espace des fonctions continues sur K et holomorphes sur $\mathring{K}$ qui, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

Appliquons ce lemme à notre situation ; soit U un ouvert de $\mathbb{C}^q$ sur lequel convergent les séries $\frac{\partial R}{\partial \Phi}(0,u, \varphi_i(0),\psi_i(0,u))$ et $\frac{\partial R}{\partial \Psi}(0,u, \varphi_i(0),\psi_i(0,u))$ qui ne dépendent pas de i puisque $\varphi_i(0) = \varphi_0$ et $\psi_i(0,u) = \psi_0$, on a les morphismes de faisceaux au-dessus de U :

$$\mathcal{O}^s_{\mathbb{C}^q} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^s_{\mathbb{C}^q} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{C}^s \times \mathcal{O}^s_{\mathbb{C}^q} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^s_{\mathbb{C}^q}.$$

$$\gamma_i \longmapsto \left.\frac{\partial R}{\partial \psi}\right|_{x=0} \cdot \gamma_i \qquad (\delta_i, \gamma_i) \longmapsto \left.\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right|_{x=0} \cdot {}_i + \left.\frac{\partial R}{\partial \psi}\right|_{x=0} \cdot \gamma_i$$

soit K un polycylindre privilégié (du lemme), on a :

$$B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^s \xrightarrow{\hat{\alpha}} B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^s \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^s \times B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^s \xrightarrow{\hat{\beta}} B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^s .$$

L'image de $\hat{\beta}$ est la somme de l'image de $\mathbb{C}^s \times \{0\}$, qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie, et de l'image de $\hat{\alpha}$, qui est fermée ; elle est donc un sous-espace vectoriel fermé de $B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^s$.

De plus, on a les suites exactes de faisceaux

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{C}^s \arrow[d, no head] \arrow[ddlll, rounded corners, to path={-- ([xshift=4em]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1em]\tikztostart.south) -| ([xshift=-4em]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
0 \arrow[r] & B(K)^s \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & \mathbb{C}^s\ B(K)^s \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\beta}"'] & \mathbb{C}^s \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B(K)^s \arrow[r] \arrow[d] & B(K)^s \arrow[r] & 0 & \\
 & \operatorname{Coker} \hat{\alpha} \arrow[r] & \operatorname{Coker} \hat{\beta} \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

en considérant aussi les fibres en 0 du diagramme correspondant avec α et β :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^t \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} \hat{\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} \hat{\beta} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^t \arrow[r] & \operatorname{Coker} \alpha_o \arrow[r] & \operatorname{Coker} \beta_o \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on obtient donc que $\operatorname{Coker} \hat{\beta} \longrightarrow \operatorname{Coker} \beta_o$ est injective.

Comme la solution (φ_i, δ_i) se prolonge (par hypothèse) en une solution à l'ordre $i+1$, $R_i \in \operatorname{Im} \beta_o$ et il provient donc d'un élément $\hat{R}_i$ de $\operatorname{Im} \hat{\beta}$.

D'autre part $\hat{\beta}$ induit l'isomorphisme d'espaces de Banach :

$$\tilde{\beta} \ : \ \mathbb{C}^s \times B(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^q})^s \big/ \ker \hat{\beta} \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Im} \hat{\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad ||\tilde{\beta}^{-1}(\hat{R}_i)|| &= \inf \{||(\delta_i, \gamma_i)|| \ / \ (\delta_i, \gamma_i) \in \tilde{\beta}^{-1}(\hat{R}_i)\} \\ &\leq ||\tilde{\beta}^{-1}|| \cdot ||\hat{R}_i|| \end{aligned}$$

donc il existe un couple (δ_i, γ_i) tel que

$$\beta(\delta_i, \gamma_i) = R_i \ , \quad ||\delta_i|| \leq L\, ||R_i|| \quad \text{et} \quad ||\gamma_i|| \leq L\, ||R_i||$$

où L est une constante indépendante de i .

On termine la démonstration en remarquant que

$||R_i|| \leq ||R(x,u,\varphi_i,\psi_i))||$, que

$||R(x,u,\varphi_i + \delta_i,\psi_i + \gamma_i) - R(x,u,\varphi_i,\gamma_i)|| \leq M . ||(\delta_i,\gamma_i)||$

donc que $||R_i|| \leq ||R(x,u,\varphi_i,\psi_i)|| \leq N . r^i$

où L, M, N et r sont des constantes indépendantes de i . On en déduit que $||\delta_i|| \leq (L.N)\ r^i$ et $||\gamma_i|| \leq (L.N)\ r^i$ ce qui entraîne que les séries

$$\varphi = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \delta_I\, x^I \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \gamma_I\, x^I \quad \text{convergent.} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

§ 2 . - DEFORMATIONS FORMELLES D'UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE

Soit X_o un germe d'espace analytique plongé dans $\mathbb{C}^n$.

Pour définir les déformations formelles de X_o , introduisons :

La catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ des $\mathbb{C}$-algèbres quotients d'algèbres de la forme $\mathbb{C}[[T_1,\dots, T_2]]$.

La catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathbb{C}$-algèbres artiniennes (i.e. de dimension finie en tant que C-espace vectoriel) ; c'est une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}$.

La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ des $\mathbb{C}$-algèbres quotients d'algèbres de la forme $\mathbb{C}\{x_1,\dots, x_n\}[[T_1,\dots, T_2]]$.

Soient $\hat{\mathcal{C}}^\circ$, $\mathcal{C}^\circ$, $\tilde{\mathcal{C}}^\circ$ les catégories opposées de ces catégories. Elles sont munies de produits fibrés et leurs objets seront notés Spec A avec $A \in \hat{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}$ ou $\tilde{\mathcal{C}}$. On notera $\mathfrak{m}_A$ l'idéal maximal de A .

<u>DEFINITION 1</u> . - On appelle déformation formelle de base $\hat{S}$ la donnée d'un diagramme cartésien du type

$$\begin{array}{ccc} X_o & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \text{ plat} \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} & \hookrightarrow & \hat{S} \end{array}$$

où $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{C}}^\circ$ et $\hat{S} \in \hat{\mathcal{C}}^\circ$

(cartésien signifie que $X_o = \tilde{X} \times_S \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$) .

Pour abréger, on désignera la déformation par $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ ou même par $\tilde{X}$.

Deux déformations $\tilde{X}$ et $\tilde{X}'$ de X_o de base $\hat{S}$ sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\tilde{X}$ sur $\tilde{X}'$ au-dessus de $\hat{S}$ qui induise l'identité sur X_o .

Soit $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ une déformation de X_o et $h : \hat{S}' \longrightarrow \hat{S}$ un morphisme de $\hat{\mathcal{C}}$ on dit que la déformation $\tilde{X}' = \tilde{X} \times_{\hat{S}} \hat{S}'$ de X_o de base $\hat{S}'$ est obtenue par changement de base.

<u>DEFINITION 2</u> . - On dit que la déformation $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ de X_o est formellement semi-universelle si toute déformation $\tilde{X}' \longrightarrow \hat{S}'$ de X_o s'en déduit par un changement de base $h : \hat{S}' \longrightarrow \hat{S}$ unique au premier ordre (c.a.d. que si $\hat{S}$ = Spec A et $\hat{S}'$ = Spec A' , $h^* : A/\mathfrak{m}_A^2 \longrightarrow A'/\mathfrak{m}_{A'}^2$ est unique) .

<u>DEFINITION 3</u> . - On dit que la déformation $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ de X_o est formellement quasi-universelle si elle est formellement semi-universelle et si de plus tout diagramme cartésien du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}' \arrow[rr, dashed] \arrow[dd, no head] & & \tilde{X}' \arrow[dd, no head] \\
& \tilde{Y} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd, no head] & \\
\hat{S}' \arrow[rr, dashed] & & \hat{S} \\
& \hat{R} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{X}' \longrightarrow \hat{S}'$ et $\tilde{Y} \longrightarrow \hat{R}$ sont des déformations de X_o , se complète suivant les flèches en pointillé en un diagramme cartésien.

<u>THEOREME 1</u> . - (M. Schlessinger) . Si X_o est un germe d'espace analytique et à singularité isolée (plus généralement si $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_o}}(L_{X_o}, \mathcal{O}_{X_o}) < \infty$) où L_{X_o} est le complexe cotangent à X_o) , il existe une déformation formelle de X_o , $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ qui est formellement quasi-universelle.

§ 3 . - MISE EN EQUATION

<u>Remarque 1</u> . - Toute algèbre A de $\hat{\mathcal{C}}$ et tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\hat{\mathcal{C}}$ peuvent être considérés comme limites inductives d'algèbres et de morphismes de $\mathcal{C}$ en posant : $A = \varprojlim_q A/\mathfrak{m}_A^q$ $f = \varprojlim_q f_q$ avec

$f_q : A/\mathfrak{m}_A^q \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B^q$

<u>Remarque 2</u> . - Toute déformation formelle de X_o peut donc être considérée comme la limite projective de déformations de X_o :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
X_o & \hookrightarrow & X_1 & \hookrightarrow & X_2 & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & X_i & \hookrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

avec si $\hat{S} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]]/_J$, $T = (T_1, \ldots, T_2)$, $\mathfrak{m} = (T)$,

$S_q = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]]/_{J+\mathfrak{m}^{q+1}}$ et $X_q = \tilde{X} \times_{\hat{S}} S_q$

Les idéaux $J_q = J + \mathfrak{m}^{q+1}/\mathfrak{m}^{q+1}$ de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}^{q+1}$ sont tels que pour tout $q \in \mathbb{N}$, J_{q+1} est un relèvement de J_q .

<u>DEFINITION 1</u> . - Soit K un idéal de $\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{m}^q}$ (avec les notations précédentes), on dit qu'un système de générateurs $(g_1, \ldots, g_k)$ de K est minimal si K n'admet pas de système de générateurs à $k-1$ éléments. On dit qu'un idéal L de $\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{m}^{q+1}}$ est un relèvement minimal de K si $\chi(L) = K$ et si tout idéal H contenu dans L tel que $\chi(H) = K$ est égal à L ; χ désigne ici la surjection canonique $\chi : \mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{m}^{q+1}} \longrightarrow \mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{m}^q}$.

<u>Propriété</u> . - Soit K un idéal de $\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{m}^q}$ et soit $(g_1, \ldots, g_k)$ un système minimal de générateurs de K . Un idéal L de $\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{m}^{q+1}}$ est un

relèvement minimal de K si et seulement si il admet un système de générateurs $(G_1,\dots,G_k)$ formé par des relèvements G_i des g_i. Si L et L' sont deux relèvements minimaux de K, alors

$$L \cap (\mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^{q+1}) = L' \cap (\mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^{q+1})$$

Démonstration. - Si L est un relèvement minimal de K, toute famille d'éléments $G_1,\dots,G_k$ avec $G_i \in \chi^{-1}(g_i) \cap L$ engendre L. Réciproquement, soit L un idéal de $\mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}^{q+1}$ engendré par des éléments $G_1,\dots,G_k$ tels que $\chi(G_i) = g_i$ et soit L' un relèvement minimal de K contenu dans L, L' est engendré par des éléments $G'_1,\dots,G'_k$ tels que $\chi(G'_i) = g_i$. Comme $L' \subset L$, on peut écrire, pour $i = 1,\dots,k$, $G'_i = \sum_{\ell=1}^{k} A_i^\ell G_\ell$ avec $A_i^\ell \in \mathbb{C}[[T]]/\mathfrak{m}^{q+1}$ d'où $\sum_{\ell=1}^{k} (\chi(A_i^\ell) - \delta_i^\ell)g_\ell = 0$, comme le système de générateurs (g_i) est minimal, pour tout $\ell = 1,\dots,k$, $\chi(A_i^\ell) - \delta_i^\ell$ n'est pas inversible donc $\chi(A_i^\ell)(0) - \delta_i^\ell = 0$ et $\chi(A_i^\ell)(0) = A_i^\ell(0) = \delta_i^\ell$, donc la matrice des A_i^ℓ est inversible et $L = L'$.

Soient $L = (G_1,\dots,G_k)$ et $L' = (G'_1,\dots,G'_k)$ deux relèvements minimaux de K, si $g \in L \cap (\mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^{q+1})$ et $g = \sum_{i=1}^{k} A_i G_i$ alors $\chi(g) = \sum_{i=1}^{k} \chi(A_i)g_i = 0$

donc $\chi(A_i)(0) = A_i(0) = 0$ et

$$\sum_{i=1}^{k} A_i G'_i - \sum_{i=1}^{k} A_i G_i = \sum_{i=1}^{k} A_i(G'_i - G_i) \in \mathfrak{m}.(\mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^{q+1}) = \{0\}$$

donc $g \in L'$.

Remarque 3. - Soit J un idéal de $\mathbb{C}[[T]]$, la suite des $J_q = J + \mathfrak{m}^q/\mathfrak{m}^{q+1}$ est formée à partir d'un certain rang par des relèvements minimaux.

En effet, tout système de générateurs de J_{q+1} induit canoniquement un système de générateurs de J_q , donc la suite des nombres minimums de générateurs des J_q est croissante et bornée par le nombre minimum de générateurs de J , elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang.

<u>LEMME 1</u> . - (Stabilité structurelle formelle) - Soit $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ une déformation de X_o qui est formellement quasi-universelle (voir § 1) , il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq s$:

Si une déformation $\tilde{X}' \longrightarrow \hat{S}' = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]]_{/J'}$ coïncide à l'ordre s avec $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ et est telle que les $J'_\ell = J' + \mathfrak{m}^{\ell+1}/_{\mathfrak{m}^{\ell+1}}$ sont des relèvements minimaux les uns des autres pour $s \leq \ell \leq q$ alors $X'_q \longrightarrow S'_q$ est isomorphe à $X_q \longrightarrow S_q$. De plus, il existe un relèvement minimal J'_{q+1} de J'_q et une déformation $X'_{q+1} \longrightarrow S'_{q+1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]]_{/\mathfrak{m}^{q+2}/J'_{q+1}}$ qui prolonge $X'_q \longrightarrow S'_q$ (i.e. $X'_q = X'_{q+1} \times_{S'_{q+1}} S'_q$) .

<u>Démonstration</u> . - La remarque 3 fournit le rang s à partir duquel la suite des idéaux J_q est formée par des relèvements minimaux. La quasi-universalité de $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$, compte tenu que $X_s \longrightarrow S_s$ coïncide avec $X'_s \longrightarrow S'_s$, s'exprime par le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
X'_q \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_q \arrow[dd] \\
& X_s \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\
\operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[[T]]_{/\mathfrak{m}^{q+1}/J'_q}\right) \arrow[rr] & & \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[[T]]_{/\mathfrak{m}^{q+1}/J_q}\right) \\
& \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[[T]]_{/\mathfrak{m}^{s+1}/J_s}\right) \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Notre but est de montrer que la flèche horizontale du bas est un isomorphisme. Or, $\mathbb{C}[[T]]_{/\mathfrak{m}^{q+1}/J'_q} \simeq \mathbb{C}[[T]]_{/\mathfrak{m}^{q+1}/J_q}$ puisque J'_q et J_q sont obtenus par une suite de relèvements miniamux ; d'autre part,

$\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}}/J_q \longrightarrow \mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}}/J'_q$ est surjective, puisqu'elle induit l'identité à l'ordre $s \geq 1$, donc c'est un isomorphisme (ce sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de même dimension finie).

Cet isomoprhisme provient d'un automorphisme de $\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}}$ que l'on prolonge arbitrairement en un automorphisme γ de $\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+2}}$, on pose alors $J'_{q+1} = \gamma(J_{q+1})$, $S'_{q+1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+2}}/J'_{q+1}$ et $X'_{q+1} = X_{q+1} \times_{S_{q+1}} S'_{q+1}$ est une déformation de X_o qui prolonge $X_q \longrightarrow S_q$.

$1^{\text{ère}}$ Mise en équations

Le § 2 affirme l'existence d'une déformation formelle $\check{X} \longrightarrow \hat{S}$ de X_o qui est formellement quasi-universelle ; explicitons cette donnée :

$X_o = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\{x\}/I_o$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $\hat{S} = \varinjlim S_q$, $\tilde{X} = \varinjlim X_q$ avec

$S_q = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}}/S_q$ et $X_q = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\{x\}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}}/I_{q+1}$,

$\mathfrak{M} = (T) = (T_1,\dots,T_2)$,

$J_q = (g_q^1,\dots,g_q^k)$ et $I_q = (f_q^1,\dots,f_q^\ell)$

(on peut prendre les mêmes ℓ et k pour tous les q car le nombre minimum de générateurs des idéaux J_q et I_q croît avec q, donc est stationnaire).

Comme les déformations $X_q \longrightarrow S_q$ de X_o sont plates, tout système de générateurs des relations entre les générateurs $f_o = (f_o^1,\dots,f_o)$ qui s'écrit comme une matrice $L_o \in \mathbb{C}\{x\}^{\ell m}$ se relève en un système de relations $L_q \in (\mathbb{C}\{x\}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}})^{\ell m}$ entre les générateurs $f_q = (f_q^1,\dots,f_q)$ soit $L_q . f_q \equiv 0 \bmod (J_q)$ i.e. il existe $M_q \in (\mathbb{C}[[T]]/_{\mathfrak{M}^{q+1}})^{km}$ tel que $L_q . f_q = M_q . g_q$.

PROPOSITION 2 . - Soit s l'entier défini par le lemme et soit $\mathcal{S}$ le système d'équations

$$\mathcal{S} : \begin{cases} g = g_s \mod \mathfrak{M}^{s+1} \\ f = f_s \mod \mathfrak{M}^{s+1} \\ L.f = M.g \\ L = L_s \mod \mathfrak{M}^{s+1} \end{cases}$$

Pour tout $q \geq s$, (g_q, f_q, L_q, M_q) est une solution du système $\mathcal{S}$ modulo $\mathfrak{M}^{q+1}$. Toute solution (g'_q, f'_q, L'_q, M'_q) du système $\mathcal{S}$ modulo $\mathfrak{M}^{q+1}$ définit une déformation $X'_q \longrightarrow S'_q$ isomorphe à $X_q \longrightarrow S_q$ et se prolonge en une solution $(g'_{q+1}, f'_{q+1}, L'_{q+1}, M'_{q+1})$ du système $\mathcal{S}$ modulo $\mathfrak{M}^{q+2}$.

Démonstration . - Immédiate à partir du Lemme

COROLLAIRE . - Il existe un germe de déformation analytique $X \longrightarrow S$ du germe d'espace analytique X_0 , telle que la déformation formelle correspondante $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ soit formellement quasi-universelle.

Démonstration . - Il suffit d'appliquer la proposition 1 du § 1 .

Nous allons montrer que $X \longrightarrow S$ est aussi analytiquement semi-universelle, grâce à une :

2ème Mise en équations

Soit $X' \longrightarrow S'$ un germe de déformation de X_0 , puisque $\tilde{X} \longrightarrow \hat{S}$ est quasi-universelle, pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $h_q : S'_q \longrightarrow S_q$ avec $\gamma_q : X'_q \xrightarrow{\sim} X_q \times_{S_q} S'_q$ il existe $h_{q+1} : S'_{q+1} \longrightarrow S_{q+1}$ avec $\gamma_{q+1} : X'_{q+1} \xrightarrow{\sim} X_{q+1} \times_{S_{q+1}} S'_{q+1}$ qui prolongent h_q et γ_q .

Soit en notant $S' = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}\{u\}_{/J'}$, $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_p)$ et $X' = \mathbb{C}\{x,u\}_{/I'}$, $I' = (f'_1,\dots,f'_{k'}) = (f')$ il existe

- un r-uple de séries $h = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} h_\mu u^\mu \in \mathbb{C}[[u]]^r$ qui induit

$h^* : \mathbb{C}[[T]] \longrightarrow \mathbb{C}[[u]]$ avec $h^*(J) \subset J'$,

- un n-uple de séries $x - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} C_\mu(x)\, u^\mu \quad \mathbb{C}\{x\}[[u]]$ qui définit un automorphisme de $\mathbb{C}\{x\}[[u]]$,

- une matrice $\ell \times \ell$ de séries $\mathbb{1} - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A_\mu(x)\, u^\mu \in \mathbb{C}\{x\}[[u]]^{k^2}$

qui définit un changement de générateurs de l'idéal I' qui vérifient le système d'équations :

$$\mathcal{C} \begin{cases} (\mathbb{1} - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A_\mu\, u^\mu) \circ f'(x - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} c_\mu(x)\, u^\mu, u) \quad f(x, \sum_{|\mu|=1}^{\infty} h_\mu\, u^\mu) \mod J' \\ \text{et} \qquad g(\sum_{|\mu|=1}^{\infty} h_\mu\, u^\mu) \in J' \end{cases}$$

De plus, toute solution à l'ordre q de ce système $\mathcal{C}$ se relève en une solution à l'ordre q+1 de ce système $\mathcal{C}$.

La proposition 1 du § 1 montra alors qu'il existe une solution convergente du système $\mathcal{C}$ ce qui démontre le :

<u>THEOREME 2</u> . - Si X_0 est un germe d'espace analytique réduit et à singularité isolée (plus généralement si $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_0}}(L_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) < \infty$) il existe un germe de déformation analytique de X_0 qui est semi-universelle.

APPENDICE : WEIERSTRASS PREPARE A LA GRAUERT

THEOREME de préparation . -

Il s'agit d'une formule de division du type $f = \sum q_\nu g_\nu + r$ par rapport à plusieurs fonctions $(g_\nu)_\nu$, avec un reste r dont les monômes sont assujettis à des majorations de degrés par rapport à plusieurs variables $(t_1,\dots,t_m)$. (Il peut y avoir en plus d'autres variables, par exemple $(y_1,\dots,y_q)$) .

On ordonne les exposants $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_m)$ par le bon ordre suivant sur $\mathbb{N}^n$:

$$\mu < \nu \Longleftrightarrow |\mu| < |\nu| \quad \text{ou}$$
$$|\mu| = |\nu| \text{ et } \exists\, i \in [1,m] \text{ tq } \mu_i < \nu_i \text{ et}$$
$$\mu_j = \nu_j \text{ pour } j > i \; .$$

Si K est un anneau, on définit l'ordre de la série $f = \sum a_\nu t^\nu \in K[[\,t\,]]$ par $\mathrm{ord}(f) = \inf \{\nu / a_\nu \neq 0\} \in \mathbb{N}^n \cup \{\infty\}$, on a immédiatement :

$$\mathrm{ord}(f + g) \geq \inf (\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g)) \quad \text{et} \quad \mathrm{ord}(f.g) = \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g) \; .$$

Décrivons maintenant les restrictions sur les restes :

DEFINITION 1 . -

a) On appelle système de réduction de dimension m , la donnée d'une suite d'applications $S = (s_1,\dots,s_m)$; $s_1 \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{N}}^*$,

$s_2 : [0, s_1[\longrightarrow \overline{\mathbb{N}}^*$, ..., $s_{i+1} : \{\nu \in \mathbb{N}^i$ / pour $j = 1,\dots,i$; $0 \leq \nu_j < s_j(\nu_1,\dots,\nu_{j-1})\} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}^*$ ... , telles que :

$$s_i(\nu) = \infty \Longrightarrow s_{i+1}(\nu,n) = \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \; .$$

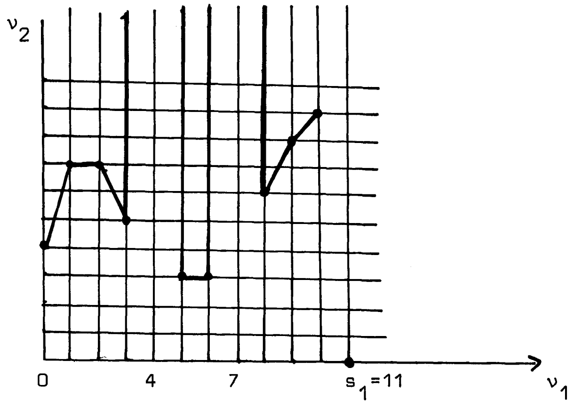
b) $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_i) < S \Longleftrightarrow 0 \leq \nu_j < s_j(\nu_1,\dots,\nu_{j-1})$ pour $j = 1,\dots,i$.

On note $R_i(S) = \{\nu \in \mathbb{N}^i \,/\, \nu < S\}$, c'est un " hypographe " de $\mathbb{N}^i$.

c) On dit que $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_i)$ est fini pour S si $i < m$, $\nu < S$ et $s_{i+1}(\nu) < \infty$. On pose alors $\bar{\nu} = (\nu, s_{i+1}(\nu)) \in \mathbb{N}^{i+1}$ et on note $F(S)$ l'ensemble des multiindices finis pour S .

d) On dit que $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_i)$ est maximal pour S si $\nu < S$, $s_i(\nu_1,\dots,\nu_{i-1}) < \infty$ et $(s_{i+1}(\nu) = \infty$ ou $i = m)$. On note $M(S)$ l'ensemble des multiindices maximaux pour S .

Exemple . -



$S = (s_1,s_2)$ $s_1 = 11$, s_2 donné par son graphe

$F(S) = \{\emptyset\} \cup ([0,11[- \{4,7\})$

(l'axe exclu)

$M(S) = \{4,7\} \cup$ hypographe de $s_2|[0,11[- \{4,7\}$

<u>DEFINITION 2</u> . - On dit que $f = \sum a_\nu t^\nu \in K[[t]]$ est réduite relativement à S si $(a \neq 0 \iff \nu < S)$. On note $K[[t]]_S$ le sous module des séries réduites relativement à S .

Remarque . - On peut aussi considérer des **séries** tronquées en degrés plus grand que k , on impose alors à S la condition supplémentaire : ν fini $\Longrightarrow$ $|\nu| < k$.

Notation . - Pour tout multiindice ν de dimension i , on pose $t_\nu = (t_{i+1},\ldots, t_m)$.

LEMME 1 . - L'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\nu \in M(S)} K[[t_\nu]] & \longrightarrow & K[[t]]_S \\ (f_\nu) & \longmapsto & \sum f_\nu t^\nu \end{array} .$$

Preuve . - Il suffit de relire la définition d'un multiindice maximal.

LEMME 2 . - L'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} K[[t]]_S \oplus \bigoplus_{\nu \in F(S)} K[[t_\nu]] & \longrightarrow & K[[t]] \\ (r, q) & \longrightarrow & f = \sum q_\nu t^{\bar{\nu}} + r \end{array}$$

de plus, $\operatorname{ord}(f) = \inf(\operatorname{ord}(r); \operatorname{ord}(q_\nu) + \bar{\nu})$.

Démonstration . - Par récurrence sur $d_S = \sup\{\dim \nu/\nu \in F(S)\}$.

. $d_S = 0$ alors $F(S) = \{\emptyset\}$ et $s_1 < \infty$ mais $s_2 = \infty$; il suffit d'écrire la formule de division par $t_1^{s_1}$:

$$\begin{array}{ccc} K[[t]]_S \oplus K[[t_\emptyset]] & \longrightarrow & K[[t]] \\ (r, q) & \longrightarrow & f = q\, t_1^{s_1} + r \end{array}$$

. $d = d_S \geq 1$. On suppose la proposition vraie pour $d-1$ et on définit $S' = (s'_1,\ldots, s'_m)$ par $s'_i = s_i$ si $i \leq d$ et $s'_i = \infty$ si $i > d$, de sorte que $d_{S'} = d-1$, $F(S') = F(S) \cap \{\nu / \dim \nu < d\}$ et $M(S')$

$M(S') = M(S) \cap \{\nu / \dim \nu \leq d\} \cup F(S) - F(S')$. On remarque que

$F(S) - F(S') = M(S') \cap \{\nu / \dim \nu = d\} - M(S) \cap \{\nu / \dim \nu = d\}$ que si

$\nu \in F(S) - F(S')$ $K[[t_\nu]] = K[[t_{d+2},\dots,t_m]][[t_{d+1}]] = K'[[t_{d+1}]]$ et

que la division par $t_{d+1}^{s_{d+1}(\nu)}$ donne une bijection :

$$\begin{array}{ccc} K'[[t_{d+1}]]_{s_{d+1}(\nu)} \oplus K'[[t_{d+1}]] & \longrightarrow & K'[[t_{d+1}]] \\ (r,q) & \longmapsto & f = q\, t_{d+1}^{s_{d+1}(\nu)} + r \,. \end{array}$$

Ceci dit, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire toute $f \in K[[t]]$ de façon unique :

$$f = \sum_{\nu \in F(S')} q_\nu t^{\bar{\nu}} + r \quad \text{avec} \quad \operatorname{ord}(f) = \inf(\operatorname{ord}(r), \operatorname{ord}(q_\nu) + \bar{\nu})$$

$$\text{or } r = \sum_{\nu \in M(S')} r_\nu t^\nu = \sum_{\nu \in M(S)} r_\nu t^\nu + \sum_{\nu \in F(S)-F(S')} (r'_\nu + q_\nu t_{d+1}^{s_{d+1}(\nu)})\, t^\nu$$

avec $\operatorname{ord}(r_\nu t^\nu) = \inf(\operatorname{ord}(r'_\nu t^\nu), \operatorname{ord}(q_\nu) + \bar{\nu})$ et

$$f = \sum_{F(S)} q_\nu t^{\bar{\nu}} + \sum_{\substack{\nu \in M(S) \\ \dim \nu \leq d}} r_\nu t^\nu + \sum_{\nu\ F(S)-F(S')} r'_\nu t^\nu \,.$$

Le reste est bien dans $K[[t]]_S$ grâce à la définition des r'_ν .

<u>Remarque</u> . - Pour les séries tronquées, on tronque les q_ν à un ordre un peu plus grand pour garder l'unicité.

On suppose maintenant que K est une algèbre de Banach et on définit sur $K[[t]]$ les semi-normes usuelles $||\sum a_\nu t^\nu||_\rho = \sum ||a_\nu||\, \rho^\nu$ où $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$. On pose $K(\rho) = \{f \in K[[t]] \,/\, ||f||_\rho < \infty\}$, c'est une algèbre de Banach. Notons que $K(\rho,\rho') = K(\rho)(\rho')$. On pose $K(\rho)_S = K[[t]]_S \cap K(\rho)$. Les lemmes 1 et 2 admettent alors les corollaires suivants :

<u>LEMME 1'</u> . - $\bigoplus_{\nu \in M(S)} K(\rho_\nu) \xrightarrow{\sim} K(\rho)_S$ (isométrie)

$$f_\nu \longmapsto \sum f_\nu t^\nu$$

(on pose par définition $||(f_\nu)|| = \sum ||f_\nu|| \rho^\nu$) .

<u>LEMME 2'</u> . - $K(\rho)_S \oplus \bigoplus_{\nu \in F(S)} K(\rho_\nu) \xrightarrow{\tilde{\tau}} K(\rho)$ (isométrie)

$$(r, q_\nu) \longmapsto f = \sum q_\nu t^{\bar{\nu}} + r$$

(on pose par définition $||(r, q_\nu)|| = ||r|| + \sum ||q_\nu|| \rho^{\bar{\nu}}$)

est un isomorphisme métrique.

<u>THEOREME 1</u> . - Soit S un système de réduction et soit $g = (g_\nu) \in K(\rho)^{F(S)}$ et soit $t^* = (t^{\bar{\nu}})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible $A = (\alpha_{\nu\nu'})_{\nu,\nu' \in F(S)}$ à coefficients dans $K(\rho)$ telle que $h = A^{-1}g - t^*$ vérifie les inégalités $||(h_\nu)||_\rho < \rho^{\bar{\nu}}$, alors l'application suivante est un isomorphisme (non isométrique) d'espaces de Banach :

$$K(\rho)_S \oplus \bigoplus_{\nu \in F(S)} F(\rho_\nu) \xrightarrow{\gamma} K(\rho)$$

$$(r, q\ ) \longmapsto f = \sum q_\nu g_\nu + r \ .$$

De plus $\mathrm{ord}(f) = \inf(\mathrm{ord}(r), \mathrm{ord}(q\ ) + \bar{\nu})$. On appelle r la réduction de f relativement à S .

<u>Démonstration</u> . - On élimine A grâce à l'automorphisme

$$\bigoplus_{\nu \in F(S)} K(\rho_\nu) \longrightarrow \bigoplus_{\nu \in F(S)} K(\rho_\nu)$$

$$(q_\nu) \longmapsto \sum_{\nu'} q_{\nu'} \alpha_{\nu\nu'} \qquad .$$

Alors $g_\nu = t^{\bar{\nu}} + h_\nu$, $\gamma = \tau + \eta$ où $\eta : (r, q_\nu) \longmapsto \sum q_\nu h_\nu$

$\gamma = \tau(1 + \tau^{-1} \eta)$, il suffit de voir que $||\tau^{-1} \eta|| < 1$. Or

$||(h_\nu)||_\rho \leq \lambda \rho^{\bar{\nu}}$ avec $\lambda < 1$ et

$\tau^{-1}\eta\ :\ (r, q_\nu) \longmapsto \sum q_\nu h_\nu = \sum q'_\nu t^{\bar\nu} + r' \longrightarrow (r', q'_\nu)$

$$||\tau^{-1}\eta(r, q_\nu)|| = \sum ||q_\nu h_\nu|| \leq \sum ||q_\nu||.||h_\nu|| \leq \lambda \sum ||q_\nu||\rho^{\bar\nu} \leq \lambda\, ||(r, q_\nu)||$$

donc $||\tau^{-1}\eta|| \leq \lambda < 1$.

COROLLAIRE 1 . - Soit $g = (g_\nu)_{\nu \in F(S)} \in \mathbb{C}\{y,t\}^{F(S)}$. On suppose que $g_\nu(0,t)$ est d'ordre $\bar\nu$ pour tout $\nu \in F(S)$. Alors pour tout $f \in \mathbb{C}\{y,t\}$, il existe $(q_\nu), r \in \mathbb{C}\{y,t\}$ uniques telles que r soit S-réduite par rapport aux variables t , que q_ν ne dépend que des variables y et t_ν et que $f = \sum_\nu q_\nu g_\nu + r$. De plus, $\mathrm{ord}(f) = \inf(\mathrm{ord}(r), \mathrm{ord}(q_\nu) + \bar\nu)$.

Démonstration . - On a $g_\nu(y,t) = \sum_\mu a_{\nu,\mu}(y)\, t^\mu$ avec $a_{\nu,\mu}(0) = 0$ si $\mu < \bar\nu$ et $a_{\nu,\mu}(0) \neq 0$ si $\mu = \bar\nu$. Il existe $\rho' = (\rho'_1, \dots, \rho'_q)$ tel que tous les $a_{\nu\bar\nu}(y)$ soient inversibles dans $\mathbb{C}(\rho')$. Soient A la matrice diagonale $(a_{\nu,\bar\nu}(y))$ et $h_\nu = \sum_{\mu\neq\nu} a_{\nu,\bar\nu}(y)^{-1}\, a_{\nu,\mu}(y)\, t^\mu$ on a $g = A.(t^{\bar\nu} + h_\nu)_\nu$ et $||h_\nu||_{\rho,\rho'} = \sum_{\mu\neq\nu} ||a^{-1}_{\nu,\bar\nu}\, a_{\nu,\mu}||_{\rho'}\, \rho^\mu = \sum_{\mu\neq\nu} b_\mu(\rho')\, \rho^\mu = \varphi(\rho,\rho')$ et on termine grâce au lemme facile :

LEMME . - Si $\varphi(\rho,\rho')$ est une fonction continue par rapport à (ρ,ρ') et telle que $\varphi(\rho,\rho) << \rho^{\bar\nu}$ alors il existe $\delta_o > 0$ et pour tout $\delta \in\ ]0,\delta_o]$ un $\delta' > 0$ tels que $\varphi(\rho,\rho') < \rho^{\bar\nu}$ pour $\rho \leq \delta$ et $\rho' \leq \delta'$.

COROLLAIRE 2 . - Soit $g = (g_\nu)$ comme dans le corollaire 1 . Alors il existe $p = (p_\nu)$ et $A = (\alpha_{\nu,\nu'})$ une matrice inversible tels que $g = Ap$ et que pour tout $\nu \in F(S)$, $p_\nu = t^{\bar\nu} + r_\nu$ où r_ν est réduite et d'ordre strictement supérieur à ν . On dit que p_ν est un polynôme de Weierstrass.

On écrit $t^{\bar\nu} = \sum q_{\nu\mu}\, g_\mu - r_\nu$ avec r_ν réduite et $\bar\nu = \mathrm{ord}(t^{\bar\nu}) = \inf(\mathrm{ord}\, q_{\nu\mu} + \bar\mu, \mathrm{ord}\, r_\nu)$, d'où $\mathrm{ord}\, r_\nu > \bar\nu$ (puisque $\bar\nu \notin \delta$) ; soit $p = t^{\bar\nu} + r_\nu = \sum_\mu q_{\nu\mu}\, g_\mu$ " polynôme de Weierstrass ") . Comme $\mathrm{ord}\, p_\nu = \bar\nu$, on peut aussi diviser par les p_ν , et écrire :

$$g_\nu = \sum_\mu q'_{\nu\mu}\, p_\mu + r'_\nu \qquad \text{avec } r'_\nu \text{ réduite}$$
$$= \sum_{\mu,\rho} q'_{\nu\mu}\, q_{\mu\rho}\, g_\rho + r'_\nu$$

l'unicité de la division de g_ν par les (g_ρ) permet d'écrire :

$\sum_\mu q'_{\nu\mu}\, q_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho}$ et $r'_\nu = 0$. Ainsi la matrice $A = (q'_{\nu\mu})$ inverse de $(q_{\mu\rho})$ et les polynômes de Weierstrass $p_\nu = t^{\overline{\nu}} + r_\nu$ conviennent

Remarques 1 . - Soit $k \subset K$ un sous anneau tel que $G_m(k) = k \cap G_m(K)$, où $G_m(k)$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de k ; si les g_ν et f appartiennent à $k[[\,t\,]]$, alors il en est de même de r et des q_ν .

En effet, les coefficients de ces séries se calculent par des déterminants à coefficients dans k (systèmes d'équations linéaires de Cramer).

On applique cette remarque à $K = \mathbb{C}(\rho')$ et $k \subset \mathbb{C}(\rho')$ l'anneau des fractions rationnelles en les (y_i) régulières dans le polydisque de polyrayon ρ' .

2 . - On a les mêmes résultats avec des séries tronquées.

Notation . Pour toute $M \in G\ell(m,\mathbb{C})$ et toute $f \in \mathbb{C}\{t_1,\dots,t_m\}$ on note f^M l'élément de $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_m\}$ tel que, pour tout t, $f^M(t) = f(Mt)$.

THEOREME 2 . - Soit I un idéal propre de $\mathbb{C}\{t\}$, $t = (t_1,\dots,t_m)$, on lui associe de manière canonique

- Un système de réduction S
- Un ouvert de Zariski non vide U de $G\ell(m, \mathbb{C})$
- Après avoir effectué un changement linéaire de coordonnées de manière que $\mathbb{1} \in U$, une suite de polynômes de Weierstrass $(p_\nu)_{\nu \in F(S)}$ (c.a.d. $p_\nu = t^{\overline{\nu}} + r_\nu$, r_ν réduite relativement à S et $\mathrm{ord}(r_\nu) > \overline{\nu}$) tels que :

1) $\forall \nu \in F(S) \quad p_\nu \in I$
2) $\forall f \in I$, $\forall M \in U$ on a (f^M réduite relativement à S) $\Longleftrightarrow$ ($f = 0$) .

Démonstration . - Par récurrence, on construit : un système de réduction S_r , un ouvert de Zariski non vide $U_r \subset G\ell(m, \mathbb{C})$ et une suite $p_\nu^r \in \mathbb{C}\{t$, $\nu \in F(S_r)$ tels que :

0) $\text{card } F(S_r) = r$

1) $\forall \nu \in F(S_r)$, $p_\nu^r \in I$ et p_ν^r est un polynôme de Weierstrass relativement à S_r .

2) $\forall f \in I$, $\forall M \in U_r$ on a (f^M réduite relativement à S_r) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ ($f = 0$ ou $\text{ord}\,(f^M) > \sup\{\overline{\nu} \;/\; \nu \in F(S_r)\}$) .

Pour $r = 0$, $S_o = \{\infty\}$ et $U_o = G\ell(m, \mathbb{C})$.

On va faire la construction de manière que $U_r \supset U_{r+1}$ et $S_r \leq S_{r+1}$ c.a.d. $\forall \nu \in F(S_r)$, $s_i^{r+1}(\nu) = s_i^r(\nu)$ pour tout i . (Ce qui implique $F(S_r) \subset F(S_{r+1})$) De plus, on aura $S_r < S_{r+1}$ sauf dans le cas où $f \in I$ et f^M réduite relativement à S_r implique $f = 0$. Enfin, nous noterons $\text{red}_r^M\,(f^M)$ le reste de la division de f^M par les p^{rM} (ce reste est réduit relativement à S_r) . Nous aurons alors terminé grâce au lemme trivial :

LEMME . - Toute suite croissante de systèmes de réduction est stationnaire.

Supposons donc S_r ; U_r ; (p^r) , $\nu \in F(S_r)$ construits. Si pour $f \in I$ et $M \in U_r$, f^M réduite relativement à S_r implique $f = 0$, on s'arrête. Sinon, soit μ le minimum des ordres des f^M pour $f \in I$ et $M \in U_r$ qui sont réduites relativement à S_r . Il existe donc une $f \in I$ et une $M_o \in U_r$ telles que $f^{M_o} = g = \text{red}_r^{M_o}(f^{M_o}) = at^\mu + h$ avec $\text{ord}\,(h) > \mu > \sup\{\overline{\nu} \;/\; \nu \in F(S_r)\}$ (d'après 2_r) . On peut supposer $a = 1$, quitte à diviser f par a qui est non nul. De même, pour toute $M \in U_r$, on a $g(M) = \text{red}_r^M\,(f^M) = a(M)t^\mu + h(M)$; d'après la remarque 1 , comme f^M et les p_ν^{rM} sont des fonctions rationnelles des coefficients de M , il en est de même de $h(M)$. On définit alors U_{r+1} et S_{r+1} par :

$U_{r+1} = \{M \in U_r \;/\; \dfrac{h(M)}{a(M)}$ est régulière $\}$, c'est un ouvert de Zariski non vide.

a) $s_j^{r+1}(\nu) = s_j^r(\nu)$ pour $\nu \in F(S_r)$

b) $s_i^{r+1}(\mu') = \mu_i$ où $(\mu',\mu_i) = \mu$ défini plus haut.

c) $s_j^{r+1}(\nu) = \infty$ si $\nu \notin F(S_r)$ et $\nu \neq \mu'$.

Il faut voir que S_{r+1} est bien défini et que c'est un système de réduction : soit que $\mu' \notin F(S_r)$ (car on a $\mu_i < s_i^r(\mu')$ puisque g est réduite relativement à S_r) et que $\mu'' = (\mu_1,\dots,\mu_{i-2}) \in F(S_r)$ autrement dit il faut voir que μ est maximal pour S_r .

En effet, si $s_i^r(\mu') < \infty$ on aurait $|\mu| < |\bar{\mu}'|$ et $\mu' \in F(S_r)$ ce qui serait absurde d'après (2_r) . Si $s_{i-1}^r(\mu'') = \infty$ on peut considérer la matrice

$$N = \mathbf{1} + b \; E_{i-1,i} \in G\ell(n,\mathbb{C})$$

$$g = t^{\mu} + \sum_{\lambda > \mu} \alpha_\lambda \; t^\lambda \quad \text{et} \quad g^N = t^{\mu''} \, t_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i} (b^{\mu_{i-1}} + \sum_{\lambda_{i-1} > \mu_{i-1}}{}' \alpha_\lambda \quad b^{\lambda_{i-1}}) + \dots$$

$$(\lambda'',\lambda_{i-1} + \lambda_i) = (\mu'',\mu_{i-1} + \mu_i)$$

donc si b n'est pas racine du polynôme d'ordre μ_{i-1} ci-dessus et si $NM_o \in U_{r+1}$, ord $(g^N) = (\mu'',\mu_{i-1} + \mu_i) < S$ ce qui serait absurde puisqu'alors ord $(\mathrm{red}_r^{NM_o}(g^N)) = (\mu'',\mu_{i-1} + \mu_i,0) < \mu$.

Enfin, il est clair que $S_{r-1} < S_r$. On peut supposer que l'identité $\mathrm{Id} \in U_{r+1}$ (ce qui revient à changer les coordonnées) et on pose

$$p_\nu^{r+1} = \mathrm{red}_{r+1}^{\mathrm{Id}} \; (p_\nu^r) + t^{\bar{\nu}} \quad \text{pour } \nu \in F(S_r)$$

et

$$p_\mu^{r+1} = \mathrm{red}_{r+1}^{\mathrm{Id}}(g) + t^\mu \quad .$$

<u>Remarques</u> . - 1) Dans le cas $I = (f)$, on obtient le théorème de préparation de Weierstrass classique ; S est alors la donnée de $s_1 = |\mathrm{ord}\,(f)|$, $s_2 = \dots = s_m = \infty$.

2) On a le même théorème pour un idéal de séries tronquées $\bar{I} \subset \mathbb{C}\{t\}/\mathfrak{m}^{k+1}$. $\bar{I}$ se relève en un idéal I de $\mathbb{C}\{t\}$ pour lequel on effectue la construction précédente et on s'arrête lorsque : $f \in I$ et $M \in U_r$, f^M réduite relativement à S_r implique $|\mathrm{ord}(f)| > k$.

3) Si $\bar{g} \in \mathbb{C}\{t\}_{/I}$ le théorème permet de dire qu'après changement linéaire générique des coordonnées il existe un représentant plus beau que les autres unique $g \in \mathbb{C}\{t\}$ de $\bar{g}$, c'est celui qui est réduit relativement à S c.a.d. celui dont tous les exposants de ses monômes sont dans l'hypographe de $\mathbb{N}^m$ $\mathcal{H}(I) = \{\nu \in \mathbb{N}^m / \nu < S\}$.

4) D'après la construction précédente, on a $\mathcal{H}(I + \mathfrak{M}^{k+1}) = \mathcal{H}(I) \cap \mathcal{H}(\mathfrak{M}^{k+1})$. On en déduit que la connaissance de la " Multiplicité " S de l'idéal I , donc celle de $\mathcal{H}(I)$ détermine la connaissance de la fonction de Samuel de I :

$$H(k) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\}_{/I + \mathfrak{M}^{k+1}} = \operatorname{card}(\mathcal{H}(I + \mathfrak{M}^{k+1})) \quad .$$

5) D'après le lemme 1 , $\mathcal{H}(I) = \coprod_{\nu \in M(S)} (\nu,0) + 0 \times \mathbb{N}^{m-\dim \nu}$,

donc si on décompose $M(S) = \coprod_i M_i(S)$ avec $M_i(S) = \{\nu \in M(S) / m - \dim \nu = i\}$ on voit que pour k assez grand ($k > \max \bar{\nu} / \nu \in F(S)$) on obtient

$$H(k+1) - H(k) = \sum_i \operatorname{card}(M_i(S)) \cdot \frac{k(k+1) \ldots (k+i-2)}{(i-1)!}$$. On retrouve

ainsi que pour k assez grand $H(k)$ est un polynôme en k de degré $i_0 = \max \{i = m - \dim \nu / \nu \in M(S)\}$ et dont le coefficient du terme de plus haut degré est $\frac{1}{i_0!} \operatorname{card}(M_{i_0}(S))$.

<u>COROLLAIRE</u> . - Soient I un idéal de $\mathbb{C}\{t\}_{/\mathfrak{M}^{k+1}}$ et I_0 son image dans $\mathbb{C}\{t\}_{/\mathfrak{M}^k}$, on leur associe (S, p_ν) et $(S°, p°_\nu)$. Alors $S_0 \leq S$ et

$$p_\nu \equiv p° \mod \mathfrak{M}^k \quad \text{pour } \nu \in F(S_0)$$
$$p_\nu \equiv 0 \mod \mathfrak{M}^k \quad \text{pour } \nu \in F(S) - F(S_0) \quad .$$

Donc S et (p_ν) se stabilisent dans un système projectif.

<u>COROLLAIRE</u> . - Supposons qu'avec les notations précédentes $S = S_0$ et soit $\tilde{I}$ un idéal de $\mathbb{C}\{t\}_{/\mathfrak{M}^{k+1}}$ engendré par des polynômes de Weierstrass $\tilde{p}_\nu$ qui

relèvent les p_ν° . Si $\tilde{I}$ est un relèvement minimal de I_o , alors $\tilde{I}$ admet S_o comme système de réduction et donc $\tilde{P}_\nu$ comme système de polynômes de Weierstrass.

Démonstration . - Soit I' un relèvement minimal de I_o contenu dans I . On a vu, au début, que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\}/_{(\mathfrak{M}^{k+1}, I')} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\}/_{(\mathfrak{M}^{k+1}, I_o)} \leq$

$\leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\}/_{(\mathfrak{M}^{k+1}, I)}$. D'après le corollaire $S_o \leq \tilde{S}$, donc $S_o = \tilde{S}$.

COROLLAIRE . - Soient I un idéal de $\mathbb{C}\{t\}/_{\mathfrak{M}^k}$, $p_\nu = t^{\bar{\nu}} + \sum a_{\nu\mu} t^\mu$, $\nu \in F(S)$ un système de polynômes de Weierstrass et $\Phi \subset F(S)$ tel que $(p_\nu)_{\nu \in \Phi}$ est un système minimal de générateurs de I . Pour tout $\ell > k$, les relèvements minimaux $J \subset \mathbb{C}\{t\}/_{\mathfrak{M}^\ell}$ de I sont paramétrés par $(A_{\nu\mu})_{\substack{\nu \in \Phi \\ o < \mu < \nu}}$ où $P_\nu = t^{\bar{\nu}} + \sum A_{\nu\mu} t^\mu$, $\nu \in F(S)$ est le système de polynômes qui relève (p_ν) .

Démonstration . - On a pour tout $\nu' \in F(S)$, $p_{\nu'} = \sum_{\nu \in \Phi} c_{\nu'\nu}\, p_\nu$, $c_{\nu'\nu} \in \mathbb{C}\{t\}/_{\mathfrak{M}^{k+1-|\nu|}}$. Si J et J' sont deux relèvements miniamaux de I dans $\mathbb{C}\{t\}/_{\mathfrak{M}^\ell}$ qui coïncident modulo $\mathfrak{M}^{\ell-1}$, soient

$$P_\nu = t^{\bar{\nu}} + A_\nu \quad \text{et} \quad P'_\nu = t^{\bar{\nu}} + A'_\nu \quad , \quad \text{avec}$$
$$A_\nu = \sum A_{\nu\mu} t^\mu \quad \text{et} \quad A'_\nu = \sum A'_{\nu\mu} t^\mu \quad ,$$

les polynômes de Weierstrass correspondants.

On considère $\tilde{\tilde{P}}_\nu = \sum c_{\nu'\nu}\, P_\nu = t^{\bar{\nu}} + b_\nu$ et $\tilde{P}'_\nu = \sum c_{\nu'\nu}\, P'_\nu = t^{\bar{\nu}} + b'_\nu$

on a $b_\nu - A_\nu = \sum c_{\nu'\nu}\, P_{\nu'} - P_\nu \in J$ donc red $b_\nu = A_\nu$ de même red $b'_\nu = A'_\nu$ d'où

$$\tilde{P}'_\nu - \tilde{P}_\nu = \sum c_{\nu'\nu} (P'_\nu - P_\nu) = b_\nu - b'_\nu$$

$$= \sum_{\substack{\nu' \\ |\mu|=\ell-1}} c_{\nu'\nu}(0)\, (A'_{\nu\mu} - A_{\nu\mu}) \qquad (\text{car } J \equiv J' \bmod \mathfrak{m}^{\ell-1})$$

Ce deuxième membre est réduit (puisque $A'_{\nu\mu}$ et $A_{\nu\mu}$ le sont) donc il est égal à $\text{red}\, b'_\nu - \text{red}\, b_\nu = A'_\nu - A_\nu$.

Alors pour tout μ tel que $|\mu| = \ell-1$

$$A_{\nu'\mu} - \sum c_{\nu'\nu}(0)\, A_{\nu\mu} = A'_{\nu'\mu} - \sum c_{\nu'\nu}(0)\, A'_{\nu\mu} = C^{te} .$$

Par récurrence sur ℓ on voit donc que les $A_{\nu\mu}$ $\nu \in \Phi$ et $0 < \mu < \nu$ paramétrisent les relèvements minimaux de I .

REFERENCES

[1] H. GRAUERT, Über die Deformation isolierter singularitäten analytischer Mengen, Inventiones Math. 15 (1972), pp. 171-198.

[2] J.L. VERDIER, Déformations de singularités isolées en Géométrie analytique Séminaire Douady-Verdier, E.N.S. 1971-72.

[3] A. GALLIGO, Sur le théorème de préparation de Weierstrass pour un idéal de $k\{x_1,\dots, x_n\}$.