

Astérisque

D. REVUZ

**Quasi - compacité de certains opérateurs liés
aux chaînes de Harris**

Astérisque, tome 4 (1973), p. 127-136

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__127_0>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUASI - COMPACITE DE CERTAINS OPERATEURS

LIES AUX CHAINES DE HARRIS

par D. REVUZ (★)

(Paris)

Equipe de Recherche n° 1 :
" Processus stochastique et applications "
associée à la Section n° 1 :
" Mathématiques - Informatique " du C.N.R.S.

Dans un article qui a circulé de façon privée, Horowitz a donné pour les probabilités de transition des chaînes de Harris une intéressante condition équivalente à la quasi - compacité. Ceci permet de regarder d'une nouvelle façon les ensembles " bornés " de ces chaînes ([1] , [5] , [9]),

Ce qui suit vise à donner les démonstrations d'Horowitz dans le cadre " concret " des probabilités de transition plutôt que - à la manière d'Horowitz - dans le cadre " abstrait " des contractions positives d'un espace L^1 .

Dans [7] , Neveu a introduit dans l'étude des chaînes de Harris une classe de fonctions dites " spéciales " qui semble bien constituer la bonne et ultime généralisation des " bornés " précédents. Nous allons utiliser la condition d'Horowitz pour montrer que le fait d'être spéciale est lié à une propriété de quasi - compacité. Ces résultats sont aussi obtenus par Brunel [2] dans le cadre " abstrait " et par des méthodes différentes.

I - LE THEOREME D'HOROWITZ. -

1. Dans tout ce qui suit, nous considérerons une chaîne récurrente au sens de Harris, de mesure invariante m et de probabilité de transition P , définie sur l'espace mesurable (E, \underline{E}) que l'on suppose de type dénombrable. On appelle $\mathfrak{B}_{\underline{E}}$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur E ; P définit une contraction positive de cet espace.

QUASI-COMPACTITE

Une forme linéaire et continue (pour la convergence uniforme) sur $\mathcal{B} \underline{E}$ sera appelée une moyenne. On appellera moyenne pure une moyenne étrangère à toutes les mesures bornées sur (E, \underline{E}) ; on rappelle que toute moyenne admet une décomposition minimale unique en une mesure bornée et une moyenne pure. Une moyenne φ est dite invariante si pour tout $f \in \mathcal{B} \underline{E}$ on a

$$\langle \varphi, f \rangle = \langle \varphi, Pf \rangle .$$

On notera φP la moyenne $f \longrightarrow \langle \varphi, Pf \rangle$.

Introduisons enfin la notation suivante : lorsque m est bornée, on note $\mathcal{C}^0 \underline{E}$ l'espace des fonctions bornées d'intégrale nulle pour m :

$$\mathcal{C}^0 \underline{E} = \{ f \in \mathcal{C} \underline{E} \ . \int f \, dm = 0 \} .$$

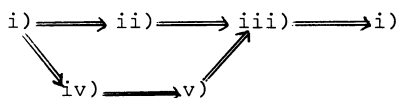
2. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème que nous avons en vue dont la plupart des idées sont dues à Horowitz.

Théorème : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) P est quasi - compacte ;
- ii) Les opérateurs $n^{-1} \sum_{k=1}^n P_k$ convergent en norme vers un opérateur de rang 1 ;
- iii) Il n'existe pas de moyenne pure positive invariante par P ;
- iv) La mesure m est bornée et $(I-P) \mathcal{C} \underline{E} = \overline{(I-P) \mathcal{C} \underline{E}} = \mathcal{C}^0 \underline{E}$;
- v) La mesure m est bornée et c'est la seule moyenne invariante par P .

Démonstration :

Elle va être faite suivant le schéma ci dessous :



i) \implies ii).

Cette implication est due à Yosida et Kakutani et est démontrée dans [8] .

ii) \implies iii).

Si $n^{-1} \sum_{k=1}^n P_k$ converge en norme vers un opérateur de rang 1 cet opérateur ne peut être que de la forme $f \longrightarrow \langle v, f \rangle$ où v est une mesure bornée positive.

Si φ est une moyenne pure positive, il existe un ensemble A tel que $\varphi(A) = 0$ et $m(A) > 0$. Si φ était invariante, on aurait pour tout n ,

$$\langle \varphi, n^{-1} \sum_{k=1}^n P_k(x, A) \rangle = 0,$$

ce qui est impossible puisque la fonction à droite est minorée par une constante positive à partir d'un certain rang.

iii) \implies i).

La démonstration de ce point est assez longue.

On commence par constater suivant Horowitz que si P n'admet pas de moyenne pure positive invariante, il en est de même de P_k . En effet, si φ est une telle moyenne et $\varphi = \varphi P_k$, la moyenne $\sum_{n=0}^{k-1} \varphi P_n$ est invariante par P et n'est donc pas une moyenne pure. Il existe donc un entier $0 < n < k$ tel que φP_n ne soit pas une moyenne pure. Alors $\varphi = \varphi P_k = \varphi P_n \cdot P_{k-n}$ ne serait pas une moyenne pure ce qui est contradictoire.

Maintenant, X étant de Harris, donc irréductible, on sait (cf. [4] ou [7] par exemple) qu'il existe un entier n tel que P_n soit la somme d'un noyau intégral et d'un autre noyau. D'après les résultats de Mokobodsky [6], il existe des ensembles $A_k \in \underline{E}$ de m -mesure arbitrairement grande et tels que le produit à gauche du noyau intégral par I_{A_k} (opérateur de multiplication par 1_{A_k}) soit compact de $\mathcal{C}\underline{E}$ dans lui-même. On peut donc écrire :

$$P_n = Q + R$$

où Q est un opérateur compact et $m(\{R \mid 1 < 1\}) > 0$.

D'après [8], nous aurons donc terminé notre démonstration si nous montrons qu'il existe un entier k tel que $\|R^k\| < 1$.

Soit alors ν une moyenne invariante par R ($\nu R = \nu$) et $\nu^+ - \nu^-$ sa décomposition minimale en parties positive et négative. Comme $\nu^+ - \nu^- = \nu^+ R - \nu^- R$ on a $\nu^+ R \geq \nu^+$ et donc

$$\nu^+ P \geq \nu^+ R \geq \nu^+ .$$

Pour $f \in \mathcal{C}\underline{E}_+$, la suite $\nu^+ P_n f$ est donc croissante et majorée par $\|\nu^+\| \|f\|$; sa limite que nous écrirons $\langle \nu', f \rangle$ définit une moyenne positive et P -invariante. Soit $\nu'_1 + \nu'_2$ la décomposition minimale de ν' en une mesure bornée ν'_1 et une moyenne pure ν'_2 . De l'égalité

$$\nu'_1 + \nu'_2 = \nu'_1 P + \nu'_2 P$$

on tire $\nu'_1 \geq \nu'_1 P$ et donc $\nu'_1 = \nu'_1 P$ puisque P est de Harris. Il en résulte que $\nu'_2 = \nu'_2 P$ et donc que $\nu'_2 = 0$

d'après l'hypothèse iii). La moyenne v' est donc une mesure proportionnelle à m et sa masse totale $\langle v', 1 \rangle$ est égale à $\langle v^+, 1 \rangle$. Comme $m \{R 1 < 1\} < 0$, on a donc

$$\langle v^+, 1 \rangle - \langle v'_1, R 1 \rangle \geq \langle v^+, R 1 \rangle$$

ce qui est contradictoire. On a donc $v^+ = 0$. On aurait de même $v^- = 0$ et donc $v = 0$. Le noyau R n'admet pas de moyenne invariante.

On déduit de ce qui précède que $\overline{(I-R) \mathcal{C} \underline{E}} = \mathcal{C} \underline{E}$; en effet, une forme linéaire qui s'annule sur ce sous-espace fermé est R -invariante. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $g \in \mathcal{C} \underline{E}$ et telle que $\|g - Rg - 1\| \leq \epsilon$. On a donc

$$\begin{aligned} \left\| n^{-1} \sum_{k=1}^n R^k 1 \right\| &\leq \left\| n^{-1} \sum_{k=1}^n R^k (1-g+Rg) \right\| + \left\| n^{-1} \sum_{k=1}^n R^k (g-Rg) \right\| \\ &\leq \epsilon + 2 \|g\| n^{-1}; \end{aligned}$$

il en résulte que $n^{-1} \sum_{k=1}^n R^k 1$ tend vers zéro uniformément et comme $R^k 1$ décroît avec k , ceci prouve bien que $\|R^k 1\| < 1$ à partir d'un certain rang.

i) \longrightarrow iv).

Si P est quasi-compacte, m est bornée (cf. [8]).

Il est alors clair que $(I-P) \mathcal{C}^0 \underline{E} \subset \mathcal{C}^0 \underline{E}$. Mais les seuls points du spectre de P situés sur le disque unité sont des valeurs propres comme cela est montré dans [10]; or P étant de Harris, 1 n'est pas valeur propre lorsque P opère sur $\mathcal{C}^0 \underline{E}$; l'opérateur $I - P$ admet donc un inverse borné sur $\mathcal{C}^0 \underline{E}$.

iv) \implies v).

Les moyennes invariantes s'annulent sur $\overline{(I-P)\mathcal{C}\underline{E}}$. Si cet espace est égal à $\mathcal{C}^0\underline{E}$, la mesure m est la seule moyenne invariante.

v) \implies iii).

C'est évident.

Remarque.

On a montré en passant que si $\overline{(I - P)\mathcal{C}\underline{E}} = \mathcal{C}^0\underline{E}$ on a déjà $(I - P)\mathcal{C}\underline{E} = \mathcal{C}^0\underline{E}$, car la première condition entraîne v) qui entraîne iii) qui entraîne la quasi - compacité qui entraîne $(I - P)\mathcal{C}\underline{E} = \mathcal{C}^0\underline{E}$.

II - APPLICATION AUX FONCTIONS SPECIALES. -

Les fonctions spéciales ont été définies par Neveu dans [7]. Nous supposons connus les résultats et les méthodes de cet article dont nous allons reprendre les notations.

1. Proposition.

Si X est de Harris les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- i) P est quasi - compact ;
- ii) Toutes les fonctions positives bornées sont spéciales.

Démonstration :

i) \implies ii)

Si f est spéciale, pour tout entier n , la fonction $f_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n P_k f$ est spéciale et la suite de ces fonctions converge uniformément vers $\langle m, f \rangle$. Si f n'est pas négligeable,

il existe donc un rang n tel que f_n soit minorée par une constante > 0 , et par suite comme le cône des fonctions spéciales est héréditaire à gauche, toutes les fonctions bornées sont spéciales.

ii) \longrightarrow i).

Si la fonction l est spéciale, il résulte de [7] (prop. IV.9) que la probabilité de transition $c U_c$ est quasi - compacte pour $c \in] 0,1 [$ et donc n'admet aucune moyenne pure positive invariante. Or, d'après l'équation résolvente,

$$U_c = P + P (1 - c) U_c$$

si φ était une moyenne pure positive invariante par P on aurait

$$\varphi U_c = \varphi + (1 - c) \varphi U_c$$

et φ serait $c U_c$ - invariante ce qui est impossible ; P est donc quasi - compacte.

Ceci permet de donner des fonctions spéciales la caractérisation suivante, due à Brunel ([1]) dans le cas des " bornés " :

2. Théorème :

Si $f \in \mathcal{C} E$ et $0 \leq f \leq 1$, f est spéciale si et seulement si $U_f I_f$ est quasi - compacte.

(I_f est l'opérateur de multiplication par f).

Démonstration :

On pose $Q = U_f I_f$; c'est la probabilité de transition de la chaîne obtenue à partir de X dans le " changement de temps " associé à f . La probabilité de transition Q est de Harris, la mesure invariante correspondante étant $f. m$.

QUASI-COMPACTITÉ

Si $0 \leq h \leq 1$, l'opérateur U_h calculé à partir de U_h^Q est égal à

$$U_h^Q = \sum_{n \geq 0} (U_f I_f I_{1-h})^n U_f I_f = U_{hf} I_f .$$

Si $g \in \underline{C}E$, $f g$ est P -spéciale et donc $U_{hf}(fg)$ est bornée sur E , donc $U_h^Q(g)$ est bornée. Les fonctions bornées sont donc Q -spéciales et Q est donc quasi-compacte.

Inversement, si Q est quasi-compacte et si $h_0 \in H$ et est telle que $U_{h_0} \geq 1 \otimes m_0$, on a

$$U_{h_0}(f) \leq U_{h_0 f}^Q(f) = U_{h_0}^Q(1),$$

et cette dernière fonction est bornée ce qui prouve que f est spéciale.

- [1] A. BRUNEL
 " Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey. Extension à ce cas d'un théorème ergodique de M. Métivier "
 Z. Wahrscheinlichkeitstheorie - 19 - 323-329 (1971)
- [2] A. BRUNEL
 A paraître
- [3] S. HOROWITZ
 " Transition probabilities and contractions of L_∞ "
 A paraître
- [4] N. JAIN et B. JAMISON
 " Contribution to Doeblin ' s theory of Markov processes "
 Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. 8 - 19-40 (1967)
- [5] M. METIVIER
 " Existence of an invariant measure and an Ornstein ' s ergodic theorem "
 Ann. Math. Stat. 40, 79-96 (1969)
- [6] G. MOKOBODSKY
 " Noyaux absolument mesurables ou basiques et opérateurs nucléaires "
 Séminaire Goulaouic - Schwartz - 1971 1972.
 Ecole Polytechnique. Paris.
- [7] J. NEVEU
 " Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris "
 A paraître. Ann. Inst. Fourier.
- [8] J. NEVEU
 " Bases mathématiques du calcul des Probabilités "
 Masson Edit.
- [9] S. OREY
 " Recurrent Markov chains "
 Pacific J. Of Math.
- [10] K. YOSIDA
 " Quasi - completely continuous linear functional operators "
 Jap. J. Math. 15 - 297-301 (1939)

D. REVUZ
 Laboratoire de Probabilités
 Université de PARIS VI
 9, quai St Bernard - Tour 56
 PARIS - 5ème -