JU. V. EGOROV

Opérateurs subelliptiques

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 152-159
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__152_0>

OPERATEURS SUBELLIPTIQUES

Ju.V. EGOROV

Université de MOSCOU.

Je voudrais parler ici de quelques résultats obtenus au cours des deux années qui ont suivi le Congrès de NICE. Notons que dans mon exposé, il ne s'agit que des opérateurs pseudo-différentiels scalaires classiques, mais, de plus, nous allons examiner quelques questions concernant la théorie de résolubilité locale des équations pseudo-différentielles scalaires. Je suppose que l'historique des problèmes et les notions générales sont connues (voir par exemple [1] ou [6]).

1. OPERATEURS SUBELLIPTIQUES.

Rappelons que l'opérateur pseudo-différentiel $P(x,\partial)$ d'ordre m est nommé subelliptique sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ s'il existe un nombre δ, $0 \leqq \delta < 1$, tel que, pour tout réel s, pour tout compact $K \subset \Omega$, et pour toute fonction $u \in C_0^\infty(K)$, l'inégalité suivante :

$$(1) \qquad \| u \|_{s-\delta} \leqq C(s,K)(\| Pu\|_{s-m} + \| u\|_{s-1})$$

soit vraie. Ici $\| \cdot \|_s$ est la norme dans l'espace de SOBOLEV.

Si $\delta = 0$ alors la classe de tels opérateurs est la classe des opérateurs elliptiques. Les opérateurs hyperboliques ne peuvent pas pénétrer dans cette classe, parce que pour eux, $\delta \geqslant 1$. Les opérateurs subelliptiques ont beaucoup de qualités propres aux opérateurs elliptiques. En particulier, de tels opérateurs sont toujours hypoelliptiques. Pour $\delta = \frac{1}{2}$ ces opérateurs ont été étudiés

par L. HÖRMANDER, qui a prouvé également que si $\delta < \frac{1}{2}$ alors l'opérateur $\mathcal{P}$ est elliptique. Dans la série de mes articles, les classes différentes des opérateurs subelliptiques ont été décrites et enfin dans mon article [3], j'ai réussi à formuler les conditions algébriques qui sont nécessaires et suffisantes pour la subellipticité. Dans des cas particuliers, des démonstrations de ce théorème ont été publiées par SUZUKI, TREVES, ESKIN.

Malheureusement, il s'est trouvé que la démonstration initiale était inexacte et au Congrès j'ai dit que je n'avais pas pu prouver que les conditions algébriques de subellipticité, qui avaient été formulées dans mon article [3], étaient suffisantes dans le cas général. Ultérieurement au Congrès, ce théorème fut prouvé et maintenant je suis en train de terminer l'article contenant sa démonstration complète. Cet article sera bientôt publié dans notre revue "Uspeki Mat. Nauk.".

Ces conditions ont la forme suivante :

Supposons que $p^{o}(x,\xi)$ est le symbole principal de l'opérateur $P(x,\mathcal{D})$, $\operatorname{Re} p^{o}(x,\xi) = a_1(x,\xi)$, $\operatorname{Im} p^{o}(x,\xi) = a_2(x,\xi)$. Il n'est pas difficile d'obtenir de l'inégalité (1) que si $p^{o}(x^{o},\xi^{o}) = 0$, $(\xi^{o} \neq 0,\ x^{o} \in \Omega)$ alors $\operatorname{grad} p^{o}(x^{o},\xi^{o}) \neq 0$

C'est pourquoi un des opérateur H_1, H_2 où :

$$H_j = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi_\ell}\frac{\partial}{\partial x_\ell} - \frac{\partial a_j}{\partial x_\ell}\frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\right)$$

est non trivial et nous pouvons envisager en conséquence les nombres

$$a_{i_1 j_1}, \ldots, {}_{i_m j_m} = H_1^{i_1} H_2^{j_1}, \ldots, H_1^{i_m} H_2^{j_m} a_1(x^o, \xi^o).$$

La valeur minimale k de la somme $i_1+j_1+ \ldots +i_m+j_m$, pour laquelle un tel nombre n'est pas égal à zéro, est caractéristique de la subellipticité et la valeur minimale possible de δ dans (1) est telle que $\delta \geqq \frac{k}{k+1}$.

Cette dernière inégalité devient une égalité si, partout, k est pair. Si k est impair en (x_o, ξ_o), alors le nombre $a_{i_1 j_1}, \ldots, {}_{i_m j_m}$ (avec $i_1+j_1+ \ldots$ $\ldots + i_m+j_m = k$) a le signe définitif. Remarquons que cette dernière condition peut être mieux décrite en termes géométriques.

L'invariance de la dernière condition relativement à la multiplication de $P(x, \xi)$ par n'importe quelle fonction $f(x) \neq 0$ est prouvée dans l'ouvrage [4] de L. NIRENBERG et F. TREVES. Dans un cas particulier très important, les auteurs de cet ouvrage ont démontré que :

$$H_2'^{k} a_1' (x^o, \xi^o) \neq 0$$

où $a_1' = \mathrm{Re}\, e^{i\theta} p^o(x,\xi)$, H_2' est l'opérateur qui correspond à la fonction $a_2' = e^{i\theta} p^o(x,\xi)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Peu de temps après, nous avons prouvé ce théorème dans le cas général (voir mon article [5]) et nous avons démontré qu'il était encore juste pour $\theta \in [0,\pi]$, sauf peut-être, un nombre fini de valeurs. Ce fait permet de simplifier la démonstration du théorème général. Pour expliquer la situation, nous examinerons l'exemple suivant :

Supposons que

$$p^{o}(x,\xi) = i\xi_1 + x_1^2\xi_2 - x_1^3 x_2^2|\xi| \qquad (n \geq 3)$$

Ici $H_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et au point $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$ nous avons $H_1^j a_2(x^o,\xi^o) = 0$ pour tout nombre naturel j, bien que $k = 9$. Mais si $\theta \in (0,\pi)$ et $p^{o'}(x,\xi) = e^{i\theta}p^o(x,\xi)$, alors nous avons $H_1'^9 a_2'(x^o,\xi^o) \neq 0$.

2.- CONDITIONS SUFFISANTES DE RESOLUBILITE LOCALE.-

Dans cette direction nous avons réussi à obtenir des résultats assez complets pour les opérateurs pseudodifférentiels scalaires de type principal tels que $\mathrm{grad}_\xi p^o(x,\xi) \neq 0$ quand $\xi \neq 0$. Dans ce cas nous avons prouvé que la condition algébrique connue est suffisante pour la résolubilité locale.

Cette condition est la suivante : : la fonction $\mathrm{Re}\, p^o(x,\xi)$ ne peut pas changer de signe du plus au moins quand nous allons le long de la bicaractéristique nulle quelconque de la fonction $\mathrm{Im}\, p^o(x,\xi)$. (voir [4],[6],[7]). Il est nécessaire de remarquer que cette affirmation était formulée dans l'ouvrage [4] de L. NIRENBERG et F. TREVES. La démonstration complète sera bientôt publiée.

3.- CONDITIONS NECESSAIRES DE RESOLUBILITE LOCALE .-

Dans cette direction nous n'avons pas encore obtenu de résultats complets. Nous n'avons réussi à prouver que des théorèmes qui généralisent les résultats déjà connus. Ces théorèmes ont été obtenus par mon collègue bulgare P.R. POPIVANOV et moi-même.

Maintenant je voudrais vous proposer ce théorème :

Supposons que le symbole principal de l'opérateur $P(x,\mathcal{D})$ satisfait les conditions suivantes : soit, comme pour le cas précédent, $\mathrm{Re}\, p^{o}(x,\xi) = a_1(x,\xi)$, $\mathrm{Im}\, p^{o}(x,\xi) = a_2(x,\xi)$ et $p^{o}(x^{o},\xi^{o}) = 0$.

Notre première condition a la forme suivante :

(A) si $p^{o}(x^{o},\xi^{o}) = 0$, alors $\mathrm{grad}_{x,\xi}\, p^{o}(x^{o},\xi^{o}) \neq 0$.

Cette condition indique que l'opérateur $\mathcal{P}$ est de type principal dans le sens le plus large. Soit $\mathcal{L}$ la bicaractéristique de la fonction $a_1(x,\xi)$, qui passe par le point (x^{o},ξ^{o}) et $\mathcal{L}+, \mathcal{L}-$ ses parties positives et négatives.

Supposons que :

(B) $a_2(x,\xi) \leqslant 0$ sur un segment de la courbe $\mathcal{L}-$, contenant le point (x^{o},ξ^{o}) ; $a_2(x,\xi) \geqslant 0$ sur un segment de la courbe $\mathcal{L}+$, contenant le même point. Il existe des suites de points $(x^{n},\xi^{n}) \in \mathcal{L}-$, $(\tilde{x}^{n},\xi^{n}) \in \mathcal{L}+$ tendant vers le point (x^{o},ξ^{o}) telles que $a_2(x^{n},\xi^{n}) < 0$, $a_2(\tilde{x}^{n},\xi^{n}) > 0$.

De la sorte nous supposons que $a_2(x,\xi)$ n'est pas égale à zéro identiquement sur chaque segment de la courbe $\mathcal{L}$, contenant le point (x^{o},ξ^{o}). Cette condition est assez réelle et ne peut pas être rejetée comme on peut le voir d'après des exemples simples.

Enfin, la condition la plus essentielle que nous exigeons de $P(x,\mathcal{D})$ est la suivante :

ou bien $\partial_{\mathcal{L}}\, a_2(x^{o},\xi^{o}) \neq 0$, $\partial_{\mathcal{L}}$ étant la dérivée le long de $\mathcal{L}$

(C) ou bien $\displaystyle \varlimsup_{\substack{(x,\xi)\to(x^{o},\xi^{o}) \\ (x,\xi)\in\mathcal{L}}} \frac{|(\alpha(x,\xi)\ ,\ \mathrm{grad}\ a_2(x,\xi))|}{\sqrt{|a_2(x,\xi)|}} < \infty$

si $(\alpha(x,\xi),\ \mathrm{grad}\ a_1(x,\xi)) \equiv 0$.

THEOREME.

> Si les conditions (A), (B), (C) sont réalisées, l'opérateur $P(x,\mathcal{D})$ n'est pas localement résoluble au point x^0.

Si $\partial_{\mathcal{L}} a_2(x^0,\xi^0) \neq 0$ nous sommes alors en présence du célèbre théorème de L. HORMANDER.

Maintenant nous allons montrer quelques conditions plus simples qui sont suffisantes pour l'accomplissement de la condition (C). Nous supposerons toujours que $\partial_{\mathcal{L}} a_2(x^0,\xi^0) = 0$.

(C_1) La fonction $a_2(x,\xi)$ est monotone le long de la courbe $\mathcal{L}$ dans un voisinage du point (x^0,ξ^0).

(C_2) On a $a_2(x,\xi) \neq 0$ sur chaque segment des bicaractéristiques nulles de la fonction $a_1(x,\xi)$ dans quelque voisinage du point (x^0,ξ^0).

(C_3) La fonction $a_2(x,\xi)$ a un zéro d' ordre fini le long de la courbe $\mathcal{L}$ au point (x^0,ξ^0).

(C_4) Dans quelque voisinage du point (x^0,ξ^0) il existe une variété différentiable S telle que, en chaque point de $S \cap \{(x,\xi) : a_2(x,\xi) = 0\}$ S est transversale à la courbe $\mathcal{L}$ et la fonction $a_2(x,\xi)$ change son signe de $-$ à $+$ quand nous allons le long de la bicaractéristique nulle de la fonction $a_1(x,\xi)$.

Notons que l'implication $(C_1) \Rightarrow (C)$ est prouvée dans le travail [4] de L. NIRENBERG et F. TREVES. Ils ont également démontré que cette condition (C_1) peut être changée en une condition suivante moins restrictive :

(C_1') Il existe une telle constante $C>0$, telle que $|q(x,\xi)|< C|q(y,\eta)|$, si $(x,\xi),(y,\eta) \in \mathcal{L}$ et le point (x,ξ) est plus proche de (x^0,ξ^0), que le point (y,η)

L'implication $(C_2)\Rightarrow(C)$ est prouvée dans l'article [8] de F. TREVES. On peut montrer que la condition (C) n'est pas nécessaire pour que le théorème formulé soit juste. Il existe également de nombreux opérateurs $P(x,\mathcal{D})$ pour lesquels la condition (C) n'est pas réalisée dans le point (x^0,ξ^0), alors qu'elle l'est pour une suite de point (x^n,ξ^n) tendant vers (x^0,ξ^0). Donc l'opérateur ne sera pas localement résoluble au point x^0. Par exemple, une pareille situation est réalisée pour la classe suivante d'opérateurs :

Soit $x = x(t)$, $\xi = \xi(t)$ l'équation de la courbe $\mathcal{L}$.

L'opérateur $P(x,\mathcal{D})$ n'est pas localement résoluble, si la fonction $b_0(t) = a_2(x(t), \xi(t))$ change son signe au point $t = t_0$, si elle n'est pas égale à zéro identiquement dans chaque segment, et possède un nombre infini de zéros, tendant vers (x^0,ξ^0), qui sont aussi des zéros de la fonction $b_1(t) = (\alpha(t),\text{grad } a_2(x(t),\xi(t)))$ où $\alpha(t) \neq 0$ partout et $(\alpha(t),\text{grad } a_1(x(t),\xi(t))) = 0$.

Nous pouvons indiquer de nombreux exemples de ce type.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. HORMANDER.- On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, L'enseignement Math. T. XVII, n° 2 1971, p. 99-163

[2] Ju.V. EGOROV.- On the local solvability of pseudo-differential equations, Actes du Congrès International des Mathématiciens, T.2 p. 717-722, Paris 1971.

[3] Ju.V. EGOROV.- "Sur les opérateurs pseudo-différentiels sous-elliptiques" (en russe), Dokladi, 188, n° 1, 1969.

[4] L. NIRENBERG, F. TREVES.- On local solvability of linear partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 23, 1970, p. 1-38 et 459-510.

[5] Ju. V. EGOROV.- "La structure des opérateurs sous-elliptiques". Dokladi, 198, n° 6, 1971.

[6] Ju. V. EGOROV.- "Sur la solvabilité des équations différentielles à caractéristiques simples" Uspeki Math. Nauk, XXVI, 2, 1971, p. 183-198.

[7] Yu. V. EGOROV.- "Sur la résolubilité locale des équations de type principal", Uspeki Math. Nauk. XXVI, 3, 1971, p. 197-198.

[8] F. TREVES.- A new method of proof of the subelliptic estimates. Comm. Pure Apple Math. XXIV, 1971, 71-115.