Astérisque

ALAIN ESCASSUT

Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques

Astérisque, tome 10 (1973), p. 1-107
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__10__1_0>

astérisque
10

1973

Prolongement analytique
et
algèbres de banach ultramétriques

Alain ESCASSUT et Philippe ROBBA

société mathématique de france

ALGEBRES DE BANACH ULTRAMETRIQUES
ET
ALGEBRES DE KRASNER-TATE

par

Alain ESCASSUT

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'un des buts de cette étude est de préciser le rapport existant entre la théorie des algèbres de Tate [13] et [22] et la théorie des algèbres de Krasner [5], [7], [11] et [14]. La théorie de Tate utilise un corps valué non archimédien complet. D'autre part, la théorie de Krasner utilise un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos. En considérant donc un tel corps K, valué non archimédien, à la fois complet et algébriquement clos, nous verrons que tout isomorphisme algébrique entre une algèbre de Krasner et une algèbre de Tate est aussi un isomorphisme topologique ; alors nous nommerons algèbre de Krasner-Tate toute algèbre isomorphe à la fois à une algèbre de Krasner et à une algèbre de Tate et nous caractériserons ses propriétés en tant qu'algèbre de Krasner d'une part, et en tant qu'algèbre de Tate d'autre part. Nous verrons, entre autre, que les algèbres de Krasner-Tate intègres sont des algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner sur un fermé borné D de K dont les trous sont en nombre fini. Ce sont aussi les algèbres de Tate de la forme :

$$\frac{K\{T,X\}}{(P(X)-TQ(X))K\{T,X\}}$$

où P et Q sont deux polynômes en X possédant certaines propriétés. Nous caractériserons enfin les algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Banach à l'aide de leurs propriétés algébriques et topologiques.

A cette occasion nous étudierons certaines propriétés spectrales des algèbres de Banach ultramétriques et nous construirons différents exemples permettant de comparer ces propriétés avec celles des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach et de voir quelles relations existent entre la norme d'une K-algèbre de Banach ultramétrique et sa semi-norme spectrale.

Nous achèverons cette étude en caractérisant les algèbres de Tate de degré 1 parmi les algèbres de Banach.

J'aimerais, pour conclure, remercier Jean FRESNEL pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés.

I

PREAMBULE SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN CORPS ALGEBRIQUEMENT CLOS VALUE ULTRAMETRIQUE COMPLET

§. 1. - THEORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES COMPLEXES

Rappelons brièvement le point de départ de la théorie des fonctions analytiques complexes. On considère une fonction définie et dérivable sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ et l'on constate, grâce à la formule de Cauchy, qu'elle est indéfiniment dérivable et, en tout point de D , localement développable en série de Taylor. Alors on peut construire une théorie des fonctions analytiques de la façon suivante : on appelle <u>élément analytique</u> un couple (Δ, f) où Δ est un disque ouvert de $\mathbb{C}$ et où f est une série de Taylor convergente sur Δ et on dit qu'un élément (Δ_2, f_2) prolonge analytiquement un élément (Δ_1, f_1) si $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$ et si $f_1(z) = f_2(z)$ pour tout $z \in \Delta_1 \cap \Delta_2$. Comme le nombre des zéros d'une fonction holomorphe dans un disque fermé est fini, on voit que si (Δ_2, f_2) et (Δ_2, g_2) prolongent analytiquement (Δ_1, f_1) , alors $f_2 = g_2$; cette propriété est appelée l'unicité du prolongement analytique. Alors pour toute fonction analytique f sur un ouvert connexe D il existe un recouvrement de D par une famille de disques $(\Delta_i)_{i \in I}$ dénombrable et enchaînée (c'est-à-dire telle que pour tous i et $j \in I$, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que $i = i_1$, $j = i_n$, $\Delta_{i_q} \cap \Delta_{i_{q+1}} \neq \emptyset$, $1 \leq q \leq n-1$) et il existe une famille d'éléments analytiques (Δ_i, f_i) $(i \in I)$ telle que $f_i(z) = f_j(z)$ pour tout $z \in \Delta_i \cap \Delta_j$.

Considérons maintenant un corps K valué non archimédien, complet, algébriquement clos. On sait qu'il n'existe pas de connexe contenant plus d'un point. Il en résulte que la famille des fonctions dérivables sur une partie D de K ne satisfait aucune propriété d'unicité du prolongement. Par exemple la fonction f définie sur l'ensemble U des $x \in K$ tels que $|x| \leq 1$, telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in U$ tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$, et telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in U$ tel que $\frac{1}{2} < |x| \leq 1$ est trivialement dérivable. A fortiori, une fonction dérivable dans un disque n'est pas, en général, développable en série de Taylor dans ce disque. On voit donc que l'on ne peut pas adopter dans le cas ultramétrique une voie parallèle à celle du cas complexe pour construire une théorie des fonctions analytiques.

Rappelons cependant l'énoncé du théorème de Runge :

Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert connexe borné D. Alors f est holomorphe sur D si et seulement si elle est égale à la limite uniforme d'une suite de fractions rationnelles sans pôle dans D, dans tout compact inclus dans D.

On peut donc chercher à définir dans le cas ultramétrique une notion de fonction analytique définie non plus par son holomorphie, mais comme limite d'une suite de fractions rationnelles et cette notion permet effectivement de construire une théorie des fonctions analytiques. Il faut d'abord définir les éléments analytiques, qui serviront à construire cette théorie.

§. 2. - ELEMENTS ANALYTIQUES AU SENS DE KRASNER

M. Krasner a défini de la façon suivante les éléments analytiques dans un corps K valué non archimédien complet algébriquement clos. Soit D une partie infinie de K, soit K(D) le groupe topologique des fractions rationnelles sans pôles dans D muni de la topologie séparée de la convergence uniforme sur D et soit H(D) le groupe topologique complété de K(D) pour cette topologie. Les éléments de H(D), que l'on nomme éléments analytiques sur D, au sens de Krasner sont des fonctions développables en séries de Taylor dans tout disque inclus dans D. Signalons pour la suite que si D est fini (d'ordre n) on note H(D) l'algèbre des fonctions définis sur D et l'on a $H(D) \simeq K^n$.

Notons déjà quelques propriétés élémentaires des éléments analytiques sur les disques. Rappelons que l'on nomme disque circonférencié de centre a, de diamètre r, l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x-a| \leq r$. De même, on appelle disque non circonférencié de centre a, de diamètre r, l'ensemble des $x \in K$

tels que $|x-a| < r$. On appelle cercle de centre a , de rayon r , l'ensemble que l'on note $C(a, r)$ des $x \in K$ tels que $|x-a| = r$ et on appelle classe de $C(a, r)$ tout disque non circonférencié, de diamètre r , inclus dans $C(a, r)$. D'autre part on notera U l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leq 1$ et $\mathfrak{M}$ l'ensemble des $x \in U$ tels que $|x| < 1$. Soit D un disque (circonférencié ou non) de centre a , de diamètre r , et soit $f \in H(D)$; alors le nombre des zéros de f dans D est fini et l'on a :

$$\lim_{\substack{|x| \to r \\ |x| \neq r,\ x \in D}} |f(x)| = \sup_{x \in D} |f(x)| .$$

De plus, si D est circonférencié, alors l'inéquation $|f(x)| < \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$ n'a de solutions que dans un nombre fini de classes du cercle de centre a , de rayon r On voit donc qu'un élément analytique sur un disque satisfait un principe du module maximum.

§. 3. - ENSEMBLES ANALYTIQUES ET QUASI-CONNEXES

Pour construire une théorie des fonctions analytiques, le problème qui se pose est maintenant le choix d'une famille de parties de K satisfaisant le principe du prolongement analytique. On dit qu'une partie D de K est analytique si pour tout $f \in H(D)$, pour tout $a \in D$ et pour tout $r > 0$, la relation $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < r$ implique $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$. Par exemple, dans $\mathbb{C}$, tout ouvert connexe est analytique et comme tout ouvert connexe admet un recouvrement par une famille enchaînée de disques, il suffit de considérer des éléments analytiques sur des disques ouverts de $\mathbb{C}$. Cette technique n'est pas applicable dans K . Les disques de K sont en effet des ensembles analytiques car les zéros d'un élément analytique sur un disque sont en nombre fini mais une réunion enchaînée de disques est un disque de sorte que la famille des disques ne permettrait de construire que des fonctions analytiques sur des disques. Or, en analyse ultramétrique tout comme en analyse complexes il est évident que l'on a des fonctions intéressantes à étudier sur des ensembles qui ne sont pas des disques.

Prenons un exemple. Soient a et $b \in K$ tels que $0 < |a| < |b| < 1$. Soient $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{a^n} = 0$, soit $(\beta_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\beta_n}{b^n} = 0$ et soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Alors le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(X-a)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{(X-b)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n X^n$$ contient

l'ensemble D des $x \in K$ tels que $|x| \leq 1$, $|x-a| \geq |a|$, $|x-b| \geq |b|$.

Pour obtenir une famille d'ensembles qui comprenne les domaines de convergence d'éléments analytiques du même genre que cet exemple, M. Krasner a défini les quasi-connexes de la façon suivante. Une partie D de K est dite quasi-connexe si elle contient au moins deux points et si pour tout a et $b \in D$, l'ensemble des cercles C de centre a , de rayon $r \in [0 , |a,b|]$ tels que $C \cap \complement D \neq \emptyset$ est fini. Alors la famille des quasi-connexes est stable par enchaînement et par intersection non vide ; de plus, tout quasi-connexe est un ensemble analytique.

Exemple : Soit D un disque (circonférencié ou non) de diamètre R ; soient $d_1, \ldots, d_m$ des disques circonférenciés de diamètre $< R$; soient $d'_1, \ldots, d'_n$ des disques non circonférenciés de diamètre $\leq R$. Alors :

$$\Delta = D - ([(\bigcup_{i=1}^{m} d_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} (d'_j))] \cap D)$$

est quasi-connexe.

Voyons maintenant un exemple d'ensemble qui n'est pas quasi-connexe. Soit a_n une suite de K telle que $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 1$ et soit D l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leq 1$ et $|x-a_n| \geq |a_n|$ pour tout n . Alors D n'est pas quasi-connexe (il suffit de considérer les points 0 et $1 \in D$).

Remarque. En fait, la famille des quasi-connexes n'est pas la famille la plus vaste que l'on puisse imaginer pour construire une théorie des fonctions analytiques. Les ensembles analytiques ont été caractérisés, parmi les parties de K , dans [5], [6] et [20] et Ph. Robba a défini dans [20] une famille $\mathcal{B}$ d'ensembles analytiques stables par intersection et par réunion enchaînée qui lui a permis de construire une théorie des fonctions $\mathcal{B}$ - analytiques qui généralise la théorie de Krasner.

§. 4. - FONCTIONS ANALYTIQUES SUR LES QUASI-CONNEXES

Les éléments analytiques possèdent des propriétés très fortes mais ils forment une famille trop restreinte de fonctions. Par exemple, on voit qu'une série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ telle que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ n'est pas un élément de $H(U)$ ni de $H(\mathfrak{M})$. On va donc définir les fonctions analytiques au sens de Krasner de la façon suivante.

Soit D un quasi-connexe et soit f une fonction définie sur D, à valeur dans K. On dit que f est une <u>fonction analytique</u> sur D s'il existe un recouvrement de D par une famille enchaînée de quasi-connexes $(D_i)_{i\in I}$ et une famille d'éléments analytiques $f_i \in H(D_i)$ $(i \in I)$ tels que $f(x) = f_i(x)$ pour tout $x \in D_i$, pour tout $i \in I$. Par exemple, la série de Taylor considérée ci-dessus est une fonction analytique sur $\mathfrak{M}$ car c'est un élément analytique sur tout disque de diamètre < 1. Alors grâce au fait que les quasi-connexes sont analytiques et que le recouvrement est enchaîné, il est immédiat de voir que les fonctions analytiques satisfont le principe du prolongement analytique, c'est-à dire que s'il existe $a \in D$ et $r > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < r$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$. D'autre part, grâce au théorème de Robba (th. 8. 3. de [20]), on sait que si D_1 et D_2 sont deux quasi-connexes tels que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ et si $f_1 \in H(D_1)$ et $f_2 \in H(D_2)$ sont tels que $f_1|_{D_1 \cap D_2} = f_2|_{D_1 \cap D_2}$, alors il existe $f \in H(D_1 \cup D_2)$ tel que $f|_{D_1} = f_1$ et $f|_{D_2} = f_2$ (on note $f|_{D_i}$ la restriction de f à D_i, $i = 1, 2$). Il en résulte que cette propriété d'enchaînement est vraie également pour les fonctions analytiques : si f_1 (resp. f_2) est une fonction analytique sur D_1 (resp. D_2) et telle que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in D_1 \cap D_2$, alors il existe une fonction analytique f sur $D_1 \cup D_2$ telle que $f(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in D_1$ et $f(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in D_2$.

On peut donc construire une théorie des fonctions analytiques sur les quasi-connexes analogue à la théorie des fonctions holomorphes sur les ouverts connexes de $\mathbb{C}$. De plus, les fonctions analytiques au sens de Krasner possèdent en outre une propriété que les fonctions complexes holomorphes ne possèdent pas : le prolongement analytique y est uniforme. En effet, grâce au théorème de Robba, si $D_1, \dots, D_n$ sont des quasi-connexes tels que $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n-1)$ et $D_n \cap D_1 \neq \emptyset$ et si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions analytiques sur $D_1, \dots, D_n$ telles que $f_i(x) = f_{i+1}(x)$ pour tout $x \in D_i \cap D_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ alors on a $f_n(x) = f_1(x)$

pour tout $x \in D_1 \cap D_n$, ce qui permet de définir une fonction analytique uniforme sur $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

§. 5. - FONCTION $v(f, \mu)$

Les propriétés des fonctions holomorphes complexes se démontrent grâce à la formule de Cauchy, qui permet notamment d'effectuer certaines majorations de la valeur absolue d'une fonction holomorphe. On ne dispose pas de cet instrument dans le domaine ultramétrique, mais on a pu en construire un autre, également assez efficace, que nous allons redéfinir.

Rappelons que l'on appelle valuation de K l'application $v : x \to v(x) = -\mathrm{Log}\,|x|$. Soit un polynôme $P(X) = \sum_{i=0} a_i X^i$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\mu \to v(P, \mu) = \inf\limits_{0 \le j \le n} (v(a_j)+j\mu)$. Alors cette fonction $v(P, .)$ est continue, affine par morceau et concave. De plus, on a la relation :

$$v(P,\mu) = \inf_{v(x)=\mu} v(P(x)) = \lim_{\substack{v(x)\to\mu \\ v(x)\neq\mu}} v(P(x)) .$$

Enfin l'inéquation $v(P(x)) \neq v(P, v(x))$ n'a de solutions que dans les classes de cercles qui contiennent au moins un zéro de P . D'autre part, pour tous P_1 et $P_2 \in K[X]$, on a les relations :

$$v(P_1 + P_2 , \mu) \geq \inf [v(P_1 , \mu) , v(P_2 , \mu)] \tag{1}$$

$$v(P_1 P_2 , \mu) = v(P_1 , \mu) + v(P_2 , \mu) . \tag{2}$$

On généralise la définition de la fonction $v(P, \mu)$ aux fractions rationnelles de façon naturelle par $v(\frac{P}{Q} , \mu) = v(P , \mu) - v(Q , \mu)$ et l'on a encore les relations (1) et (2) pour tous h_1 et $h_2 \in K(X)$. De plus la fonction $\mu \to v(h, \mu)$ est continue et affine par morceau.

Exemple. Soit $h(x) = \dfrac{x(x-b)^2 (x-d)}{(x-a)(x-c)^3}$ où $|a| < |b| < |c| < |d|$. Alors on a $v(h,\mu) = 2\mu + v(d) - 3v(c)$ pour $v(b) \le \mu \le v(c)$, $v(h,\mu) = -\mu + v(d)$ pour $v(c) \le \mu \le v(d)$, etc. . .

Considérons maintenant un élément analytique f sur un quasi-connexe

D et soit h_n une suite de $K(D)$ convergeant vers f dans $H(D)$. Soit $O \in D$ un point pris pour origine ; on constate que la suite des fonctions définies sur $]-\log R\ , +\infty[$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, par $\mu \to v(h_n, \mu)$, converge simplement vers une fonction $v(f, .)$ définie sur $]-\log R\ , +\infty[$ et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$. Naturellement, la fonction $v(f, \mu)$ ainsi définie pour les éléments de $H(D)$ satisfait encore

$$v(f_1 + f_2\ , \mu) \geq \inf [v(f_1, \mu)\ , \ v(f_2\ , \mu)]$$

et
$$v(f_1\ f_2\ , \mu) = v(f_1, \mu) + v(f_2\ , \mu)\ ,$$

à condition de prolonger sur $]-\infty\ , +\infty]$ l'addition de $\mathbb{R}$ de la façon naturelle : $a + \infty = +\infty$ quel que soit $a \in]-\infty\ , +\infty]$. De plus, la fonction $\mu \to v(f, \mu)$ définie sur $]-\log R\ , +\infty]$ est continue et affine par morceaux et l'on a $\lim\limits_{\substack{v(x) \to \mu \\ v(x) \neq \mu}} v(f(x)) = v(f, \mu)$ pour tout $\mu \in]-\log R\ , +\infty]$; enfin pour tout $R' < R$, l'inéquation $v(f(x)) \neq v(f, v(x))$ ne peut avoir de solutions que dans un nombre fini de classes d'un nombre fini de cercles de rayon $< R'$ et de centre 0.

Précisons encore que la fonction $v(f, \mu)$ peut être définie de façon plus générale, pour un élément analytique sur un infraconnexe [5] où elle garde ses principales propriétés et dont nous allons rappeler brièvement la définition. Une partie D de diamètre R de K est dite <u>infraconnexe</u> si pour tout $a \in D$ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'image de D par l'application $x \to |x-a|$ est un intervalle (c'est-à-dire que toute couronne centrée dans D et incluse dans $\complement D$ a un rayon inférieur $\geq R$). Trivialement, tout quasi-connexe est infraconnexe.

§. 6. - <u>DECOMPOSITION MITTAG-LÖFFLERIENNE</u>

On sait que les fonctions complexes méromorphes dans $\mathbb{C}$ admettent une décomposition sous la forme d'une somme d'une série entière et d'une série convergente de parties principales relatives à chaque pôle. Toutefois cette décomposition n'est pas unique.

Nous allons rappeler la décomposition Mittag-Löfflerienne énoncée par M. Krasner dans [14] pour un élément analytique sur un quasi-connexe et démontrée plus généralement par Robba pour un élément analytique sur un infraconnexe [20] (th. 4. 7.). Mais on doit d'abord rappeler quelques définitions. Soit D une partie bornée de K de diamètre R ; alors il existe un plus petit disque circonférencié contenant D que l'on appelle enveloppe de D et que l'on note $\underline{\underline{D}}$ (si $a \in D$ et si R est le diamètre de D, alors $\underline{\underline{D}}$ est le disque circonférencié de centre a, de diamètre R). Si D est une partie non bornée de K, on appellera enveloppe $\underline{\underline{D}}$ de D l'ensemble K. D'autre part, on notera $\overline{D}$ l'adhérence de D dans K. Pour toute partie D de K, $\underline{\underline{D}} - \overline{D}$ admet une partition dont les éléments sont des disques non circonférenciés disjoints et maximaux pour l'inclusion appelés trous de D. (On trouve la même définition dans [12] ; Ph. Robba a donné dans [20] une définition du mot "trou" qui est légèrement différente et qui peut comprendre des disques circonférenciés et des points isolés).

THEOREME I. 1. - Soit D un infraconnexe et soit $f \in H(D)$. Soit $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$ la famille des trous de D et soit $(a_j)_{j \in \mathcal{J}}$ la famille des points de $\overline{D}-D$.

Alors il existe $f \in H(D)$;

il existe une partie dénombrable I de $\mathcal{I}$ et quel que soit $i \in I$, il existe $f_i \in H(\complement T_i)$ tel que $\lim_{|x| \to \infty} f_i(x) = 0$ et tel que la série de terme général f_i converge dans $H(D)$;

il existe une partie finie J de $\mathcal{J}$ et quel que soit $j \in J$, il existe $h_i \in K(\complement \{a_i\})$ tel que $\lim_{|x| \to \infty} h_i(x) = 0$;

tels que l'on ait $f = f_o + \sum_{i \in I} f_i + \sum_{j \in J} h_j$ et tels que :

$$\sup_{x \in D} |f(x)| = \max_{\substack{i = o \\ i \in I \\ j \in J}} [\sup_{x \in D} |f_i(x)|, \sup_{x \in D} |h_j(x)|] .$$

Le théorème Mittag-Löfflerien pour les éléments analytiques ultramétriques présente donc une conclusion beaucoup plus forte que le théorème complexe de Mittag-Löffler pour les fonctions méromorphes puisqu'il offre notamment un renseignement précieux concernant les normes des termes de la somme, tandis que la décomposition obtenue est unique. Il est plus difficile de comparer les hypothèses puisque la définition des fonctions complexes holomorphes et celle des éléments analytiques ultramétriques ne sont pas semblables. Remarquons cependant que dans le cas complexe l'hypothèse nécessite une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, tandis que dans le cas ultramétrique, on considère seulement un élément analytique f sur un infraconnexe D quelconque et en particulier f peut

admettre des singularités essentielles dans certains trous de D . Il faut préciser à ce sujet que la distinction entre singularités polaires et essentielles est moins importante dans le domaine ultramétrique que dans le domaine complexe car les singularités polaires ou essentielles relatives à des trous de D ont un comportement identique sur D ; quand aux singularités relatives aux points de $\bar{D}-D$, elles sont nécessairement polaires d'après l'avant-dernière assertion du théorème.
En fait cette différence entre les singularités des fonctions holomorphes complexes et celles des éléments analytiques ultramétriques provient de ce que les fonctions holomorphes sont des limites de fractions rationnelles pour la convergence uniforme dans tout compact, tandis que les éléments analytiques ultramétriques sont des limites de fractions rationnelles pour la convergence uniforme sur le domaine D considéré. Si on compare les fonctions continues sur un compact de $\mathbb{C}$ et holomorphes à l'intérieur, et les éléments analytiques sur un fermé borné de K , l'analogie est très grande. Par contre si l'on prend un ouvert de $\mathbb{C}$ et un ouvert de K , on trouve les différences de singularités relatives à $\bar{D}-D$. Pour comparer des fonctions dont les définitions seraient plus voisines, on pourrait prendre les fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et <u>les limites de fractions rationnelles pour la convergence uniforme sur tout fermé borné inclus dans</u> D . Toutefois cette famille de fonctions analytiques offre peu d'intérêt car elle n'est guère plus grande que l'ensemble des éléments analytiques sur D .

§. 7. - <u>SERIES DE TAYLOR ET FONCTIONS ANALYTIQUES</u>

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de Taylor et soit r son rayon de convergence. Contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, l'ensemble des $x \in K$ tels que la série de terme général $a_n x^n$ soit convergente est un disque (circonférencié ou non) de rayon r et ce disque est circonférencié si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0$. Si le disque de convergence D de f est circonférencié, alors $f \in H(D)$ car c'est la limite uniforme sur D de la suite de polynômes $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Par contre, si D est non circonférencié, alors on a vu que f n'est pas nécessairement un élément analytique sur D . Rappelons à ce sujet le théorème 15.10 de [20].

THEOREME I. 2. - Soit $\sum_{n=0} a_n x^n$ une série de Taylor telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lambda \neq 0$. Soit J (resp. I) l'ensemble des n tels que $|a_n| = \lambda$ (resp. $|a_n| > \lambda$). Si J est lacunaire ou si I n'est pas borné, alors f n'appartient pas à $H(\mathfrak{M})$.

(On dit que J est lacunaire si pour tout $\tau \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \cap [N, \tau + N] = \emptyset$).

D'autre part, la proposition 10. 2 de [20] établit une relation entre le prolongement analytique et le fait que $f \in H(D)$.

PROPOSITION I. 3. - Si une série de Taylor f se prolonge en dehors de son disque de convergence D, alors f est un élément analytique sur D.

Rappelons d'autre part qu'une fonction analytique (par exemple) sur un disque (circonférencié ou non) n'est pas nécessairement développable en série de Taylor comme le montre la proposition 10. 2. de [20]. Pour énoncer cette proposition, rappelons encore qu'un espace métrique est dit maximalement complet si toute suite décroissante de disques circonférenciés a une intersection non vide. Par exemple, tout espace métrique localement compact est maximalement complet et en particulier $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}$. Par contre le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ n'est pas maximalement complet. Mais il peut être plongé dans une extension algébriquement close et maximalement complète.

PROPOSITION I. 4. - Si K n'est pas maximalement complet, il existe une fonction analytique dans K telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, non identiquement nulle et bornée.

(En effet, comme $H(K) = K[x]$, et que $f \notin K[x]$, on voit que $f \notin H(K)$).

Par contre, si K est maximalement complet, alors toute fonction analytique sur un disque circonférencié D est un élément de $H(D)$ car elle ne peut avoir de singularité cachée. On en déduit que, dans cette hypothèse, toute fonction analytique sur un disque circonférencié ou non y est développable en série de Taylor et que si une série de Taylor a un disque de convergence D circonférencié, alors elle n'est pas prolongeable en une fonction analytique sur un quasi-connexe qui contient strictement D.

II

RAPPELS SUR LES ALGEBRES DE BANACH ULTRAMETRIQUES

§. 1. - LES ALGEBRES DE KRASNER

Dans toute cette étude on désignera par K un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos. On notera U son anneau de valuation c'est-à-dire l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leq 1$ et $\mathfrak{M}$ l'idéal de valuation, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| < 1$; on notera $|K|$ l'ensemble des $|x|$, $x \in K$. On notera k le corps résiduel de K, c'est-à-dire le corps quotient $\frac{U}{\mathfrak{M}}$. Soit D une partie de K ; alors le groupe topologique $H(D)$ est une sous-K-algèbre de Banach de K^D si et seulement si D est fermée bornée. Les homomorphismes de K-algèbre entre deux algèbres $H(D)$ et $H(D')$ sont définis de la façon suivante :

PROPOSITION II. 1. - Soient D et D' deux fermés bornés de K ; soit $\mathcal{H}(D, D')$ l'ensemble des homomorphismes de K-algèbre de $H(D)$ dans $H(D')$ et soit $\mathcal{J}(D, D')$ l'ensemble des isomorphismes de $H(D)$ sur $H(D')$. Soit $\mathfrak{F}(D, D')$ l'ensemble des $\gamma \in H(D')$ tels que $\gamma(D') \subset D$ et soit $\mathcal{G}(D, D')$ l'ensemble des bijections δ de D' sur D telles que $\delta \in H(D')$, $\delta^{-1} \in H(D)$. Alors il existe une bijection ψ de $\mathcal{H}(D, D')$ sur $\mathfrak{F}(D, D')$ satisfaisant, quel que soit $\varphi \in \mathcal{H}(D, D')$, $\varphi(f) = f \circ \psi(\varphi)$, quel que soit $f \in H(D)$. Tout élément φ de $\mathcal{H}(D, D')$ est continu et satisfait $\|\varphi(f)\|_{D'} \leq \|f\|_D$. De plus l'application ψ induit une bijection de $\mathcal{J}(D, D')$ sur $\mathcal{G}(D, D')$.

Cette proposition suggère la définition suivante : nous dirons que deux fermés bornés D et D' sont isomorphes si $H(D)$ et $H(D')$ sont isomorphes. Par ailleurs, la notion d'ensembles analytiques au sens de E. Motzkin [18] permet de définir une famille $\mathcal{C}$ de parties de K telles que si D_1, $D_2 \in \mathcal{C}$ et si

$D_1 \subset D_2$, alors l'application Φ_{D_1, D_2} de $H(D_2)$ dans $H(D_1)$ qui à tout élément de $H(D_2)$ associe sa restriction à D_1, soit une injection. Rappelons que par définition les éléments de $\mathcal{C}$ sont les parties de K telles que, quel que soit $a \in D$, si la restriction d'un élément $f \in H(D)$ à un disque de centre a est nulle, alors $f = 0$. L'étude des ensembles analytiques de K ainsi que l'étude des algèbres de Krasner $H(D)$ fait apparaître l'importance des ensembles infraconnexes de K, ainsi que des filtres sur un infraconnexe qui possèdent certaines propriétés concernant la répartition des trous de leurs éléments et que l'on appelle T-filtre. Ces deux notions sont définies dans [4], [5], [7] et comme les parties de K que nous aurons à considérer ici seront relativement simples, nous n'auront pas à utiliser explicitement la définition d'un T-filtre. Rappelons cependant grâce au théorème V.8. de [5] que les éléments de $\mathcal{C}$ sont les infraconnexes sans T-filtre à plage non vide. (Ce résultat est exprimé de façon équivalente par le théorème 1 de [6]).

Comme les algèbres de Krasner qui nous intéressent ici sont des algèbres de Banach, nous considérerons la sous-famille $\mathcal{C}_o$ de $\mathcal{C}$ des fermés bornés analytiques de K. On a donc un foncteur contravariant H de la catégorie $\mathcal{C}_o$ dont les flèches sont des éléments analytiques sur les éléments de $\mathcal{C}_o$, dans la catégorie $\mathcal{K}$ des algèbres $H(D)$, $D \in \mathcal{C}_o$, dont les flèches sont les homomorphismes de K-algèbres associés suivant le schéma ci-après, comme il résulte de la proposition II. 1.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "H"'] & D' \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[d, "H"] \\ H(D) \arrow[r, "\varphi"] & H(D') \end{tikzcd}$$

où $\gamma \in H(D')$ et $\gamma(D') \subset D$ et où φ est l'application $f \to f \circ \varphi$ quel que soit $f \in H(D)$. Comme $D \in \mathcal{C}_o$, φ est injectif si et seulement si γ n'est pas une constante de $H(D')$. Les morphismes d'algèbres de Krasner ainsi définis généralisent les applications de restrictions associés aux inclusions lorsque $D' \subset D$. Les autres résultats qui nous seront utiles, concernant les algèbres de Krasner, sont extraits de [4], [5], [7] et peuvent être résumés de la façon suivante.

Le théorème V.3. de [5] nous donne :

PROPOSITION II. 2. - Soit D un fermé borné de K . Alors l'algèbre de Banach $H(D)$ est intègre si et seulement si D est infraconnexe sans couple de T -filtres complémentaires.

Les théorèmes VII. 3., VII. 8 et VII. 9 de [5] (généraliés par le théorème 4 de [7]) nous donnent :

PROPOSITION II. 3. - Soit D un fermé borné de K . Alors l'algèbre de Banach $H(D)$ est noethérienne si et seulement si les parties infraconnexes maximales de D , appelées composantes infraconnexes de D , sont en nombre fini et telles que celles qui ne sont pas réduites à un point soient ouvertes et sans T - filtre.

Tout idempotent de $H(D)$ est une fonction caractéristique d'une réunion de composantes infraconnexes de D . Les idempotents de $H(D)$ sont en nombre fini si et seulement si les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini.

De plus, si $H(D)$ est nœthérienne et si $D_1, \ldots, D_n$ sont les composantes infraconnexes de D , $H(D)$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre de Banach produit $H(D_1) \times \ldots \times H(D_n)$; les fonctions caractéristiques de chaque composante infraconnexe appartiennent à $H(D)$; tout idéal de $H(D)$ est principal et engendré par un élément de la forme χP où χ est un idempotent et P un polynôme dont les zéros appartiennent au support de χ . Une algèbre nœthérienne $H(D)$ est intègre si et seulement si D est infraconnexe.

Par ailleurs on sait, grâce au théorème 5 de [7], que dans toute algèbre $H(D)$, les idéaux maximaux de codimension 1 sont de la forme $I(a)$ où $I(a)$ est l'ensemble des éléments $f \in H(D)$ tels que $f(a) = 0$ tandis que les idéaux maximaux de codimension infinie sont de la forme $I(\tau)$ où τ est une T - famille de D . ($I(\tau)$ est dans ce cas l'ensemble des éléments $f \in H(D)$ qui tendent vers zéro suivant l'un quelconque des T - filtres de la T - famille τ). Pour ce qui nous intéresse, on en déduit la proposition :

PROPOSITION II. 4. - Soit D un fermé borné tel que $H(D)$ soit nœthérienne. Alors tout idéal maximal de $H(D)$ est de codimension 1 et le spectre maximal de $H(D)$ s'identifie à D par l'application $a \to I(a)$ ($a \in D$).

Remarque. Dans ce cas, le spectre maximal de $H(D)$ coïncide avec le spectre maximal de $K(D)$.

Rappelons que si E est un corps muni d'une valeur absolue non archimédienne, un E-espace vectoriel normé F est dit ultramétrique si sa norme $\|\cdot\|$ satisfait $\|x+y\| \leq \sup(\|x\|, \|y\|)$ pour tous $x, y \in F$. De plus si S est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel F ultramétrique, alors $\frac{F}{S}$, muni de la norme quotient, est encore ultramétrique.

Remarques

1) Il est clair qu'un espace vectoriel normé sur un corps valué non archimédien E n'est pas forcément ultramétrique. Il suffit de considérer $E \times E$ muni de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.

2) Une algèbre de Banach $H(D)$ est ultramétrique.

§. 2. - LES ALGEBRES DE TATE

Soit Γ un corps valué non archimédien complet dont l'anneau de valuation est noté V et le corps résiduel γ. Soit A une Γ-algèbre commutative normée ultramétrique dont la norme est notée $\|.\|$. Soit $A[X_1, \dots, X_n]$ l'algèbre des polynômes à n indéterminées, à coefficients dans A, et soit $A\{X_1, \dots, X_n\}$ l'algèbre des séries formelles restreintes à n indéterminées, à coefficients dans A (c'est-à-dire les séries dont les coefficients tendent vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}^n$). L'algèbre $A\{X_1, \dots, X_n\}$ peut être munie d'une norme ultramétrique qui prolonge celle de A et que l'on appellera norme canonique, définie de la façon suivante :

pour tout $f = \Sigma\, a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in A\{X_1, \dots, X_n\}$;

soit $$\|f\| = \sup_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} \|a_{i_1, \dots, i_n}\|$$

La norme canonique de $A\{X_1, \dots, X_n\}$ induit sur la sous-algèbre $A[X_1, \dots, X_n]$ une norme que l'on nommera encore norme canonique de $A[X_1, \dots, X_n]$. Si A est une Γ-algèbre de Banach ultramétrique, $A\{X_1, \dots, X_n\}$

est aussi une Γ - algèbre de Banach ultramétrique pour sa norme canonique. Alors l'algèbre de Banach $A\{X_1,\dots,X_n\}$ est appelée extension topologiquement pure de A de degré n, d'indéterminées $X_1,\dots,X_n$ ([22]).

Enfin, si A est une Γ-algèbre de Banach ultramétrique, on appelle algèbre topologiquement de type fini sur A ou A - algèbre topologiquement de type fini, tout quotient par un de ses idéaux fermés d'une extension topologiquement pure E de A, muni de la structure d'algèbre de Banach quotient de celle de E. Il est clair que si A, B, C sont des algèbres de Banach telles que B soit une A - algèbre topologiquement de type fini sur A et que C soit une B - algèbre topologiquement de type fini sur B, alors C est une A - algèbre topologiquement de type fini sur A. L'étude de Tate concerne la famille $\mathfrak{A}$ des algèbres topologiquement de type fini sur le corps Γ considéré, encore appelées algèbres de Tate, et nous allons d'abord résumer les propriétés essentielles de ces algèbres ainsi que certains résultats préliminaires d'usage courant.

PROPOSITION II. 5. - Soit A une Γ-algèbre de Banach ultramétrique et soit E un A - module de Banach. Soit F un sous - A - module de E dont l'adhérence $\overline{F}$ dans E est de type fini. Alors $F = \overline{F}$. (donc F est de type fini et fermé) (théorème (3. 2.) de [22]).

Une conséquence de la proposition II. 5. est que tout idéal d'une algèbre de Banach ultramétrique nœthérienne est fermé. D'autre part, la proposition II. 5. a pour conséquence la proposition II. 6. suivante qui est extraite du théorème (3. 3) de [22].

PROPOSITION II. 6. - Soit A une Γ- algèbre de Banach ultramétrique et soit E un A - module de type fini. Alors il existe sur E une norme ultramétrique pour laquelle E est un A - module de Banach et cette norme est unique à une équivalence près.

Par ailleurs, on déduit des théorèmes 2 et 3 de [21] et des théorèmes (4. 5) et (4. 6) de [22] la proposition II. 7.

PROPOSITION II. 7. - Toute algèbre topologiquement de type fini sur Γ est nœthérienne. Toute extension topologiquement pure de Γ est factorielle. Tout idéal maximal d'une algèbre topologiquement de type fini est de codimension finie. Tout homomorphisme de Γ-algèbre d'une algèbre topologiquement de type fini A dans une algèbre topologiquement de type fini B est continu.

Il en résulte que tout idéal d'une extension topologiquement pure de Γ est fermé et qu'une Γ-algèbre est topologiquement de type fini si et seulement si c'est un quotient d'une extension topologiquement pure par un de ses idéaux.

D'autre part, le théorème (4. 3) de [22] que nous allons écrire est un théorème de normalisation analogue au théorème de Nœther pour les algèbres de type fini et montre que les algèbres topologiquement de type fini jouent le même rôle par rapport aux extensions topologiquement pures que les algèbres de type fini par rapport aux anneaux de polynômes.

PROPOSITION II. 8. - Une Γ-algèbre de Banach ultramétrique A est une Γ-algèbre topologiquement de type fini si et seulement si c'est une extension entière finie d'une extension topologiquement pure E de Γ.

On appelle degré de A sur Γ le degré de E.

Signalons encore le lemme II. 9. qui sera utile au chapitre VII.

LEMME II. 9. - Soit A une Γ-algèbre topologiquement de type fini quotient d'une extension topologiquement pure $E = \Gamma\{X_1, \dots, X_n\}$ dont la norme quotient est notée $\|\,.\,\|_q$, et soit φ la surjection canonique de E sur A. Soit $\|\,.\,\|$ une norme d'algèbre ultramétrique définie sur A telle que les suites $m \to \|\varphi(X_i^m)\|$ soient bornées quel que soit i $(i \leq i \leq n)$. Alors il existe une constante M telle que $\|y\| \leq M\|y\|_q$ pour tout $y \in A$.

Preuve. Soit $x_i = \varphi(X_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors par hypothèse, il existe $N > 0$ tel que $\|x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}\| \leq N$ quels que soient $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Soit $L > 1$ et soit $\|\,.\,\|_c$ la norme canonique de E. Soit $y \in A$ et soit $f(X_1, \dots, X_n) \in E$ tel que $\varphi(f) = y$ et $\|f\|_c \leq L\|y\|_q$. Alors il est clair que $\|y\| = \|f(X_1, \dots, X_n)\| \leq N\|f\|_c \leq NL\|y\|_q$ et le lemme est établi.

§. 3. - SPECTRE ET SEMI-NORME SPECTRALE

Nous allons rappeler les propriétés générales du spectre et de la semi-norme spectrale d'une algèbre de Banach sur un corps E muni d'une valeur absolue. Rappelons que le spectre d'un élément f d'une algèbre A sur un corps F est l'ensemble des $\lambda \in F$ tels que $f-\lambda$ ne soit pas inversible dans A ([3]). Dans toute la suite, on notera $sp_A(f)$ ce spectre.

LEMME II. 10. - Soit F un corps et A une F-algèbre. Soit I l'intersection des idéaux maximaux de codimension 1 et soit $A' = \frac{A}{I}$. Soit φ la surjection canonique de A sur A' et soit $x \in A$. Alors le spectre de x dans A est égal au spectre de $\varphi(x)$ dans A'.

LEMME II. 11. - Soit E un corps muni d'une valeur absolue (archimédienne ou non), pour laquelle il est complet et soit A une E-algèbre de Banach, dont la norme est notée $\|.\|$. Soit $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$. Alors $1-a$ est inversible dans A.

DEFINITION. - Nous dirons qu'un élément f d'une E-algèbre A sur un corps algébriquement clos E est de classe algébrique si pour tout $\lambda \in E$, ou bien $f-\lambda$ est inversible, ou bien $f-\lambda$ appartient à un idéal maximal de codimension 1 de A.

Remarque. On voit que f est de classe algébrique si et seulement si le spectre de f est égal à l'ensemble des images de f par les homomorphismes de A sur K.

PROPOSITION II. 12. - Soit E un corps muni d'une valeur absolue (archimédienne ou non) pour laquelle il est complet et soit Ω une clôture algébrique de E munie de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de E. Soit A une E-algèbre commutative unitaire. On suppose non vide l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de E-algèbre de A dans Ω ; soit J l'intersection des noyaux des éléments de $\mathfrak{X}$. Nous appellerons pseudo-norme spectrale de A l'application définie sur A, à valeur dans $[0, +\infty]$ par $\|f\|_{sp} = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} |\chi(f)| \in [0, +\infty]$.

a) J <u>est égal à l'ensemble des éléments</u> $f \in A$ <u>tels que</u> $\|f\|_{sp} = 0$. <u>Si</u> $\|f\|_{sp} < +\infty$ <u>quel que soit</u> $f \in A$, <u>alors l'application</u> $\|.\|_{sp}$ <u>est une semi-norme de</u> A ; <u>cette semi-norme est une norme si et seulement si</u> $J = \{0\}$.

b) <u>Soit</u> B <u>une</u> E-<u>algèbre telle qu'il existe un homomorphisme</u> φ <u>de</u> B <u>dans</u> A. <u>Alors</u> B <u>admet une pseudo-norme spectrale</u> $\|.\|'_{sp}$ <u>qui satisfait, quel que soit</u> $f \in B$, $\|\varphi(f)\|_{sp} \leq \|f\|'_{sp}$. <u>En particulier si</u> φ <u>est un isomorphisme, on a</u> $\|\varphi(f)\|_{sp} = \|f\|'_{sp}$. <u>De même, si</u> $A' = \frac{A}{J}$, <u>et si</u> Φ <u>est la surjection canonique de</u> A <u>sur</u> A', <u>alors</u> A' <u>possède une pseudo-norme spectrale</u> $\|.\|'_{sp}$ <u>et</u> $\|\Phi(f)\|'_{sp} = \|f\|_{sp}$ <u>quel que soit</u> $f \in A$.

c) <u>Si</u> E <u>est algébriquement clos et si</u> h <u>est une fraction sans pôle dans le spectre</u> Λ <u>de</u> $f \in A$, <u>alors il existe</u> $y \in A$ <u>tel que</u> $y = h(f)$ <u>et l'on a</u> $sp_A(y) = h(\Lambda)$.

d) <u>Si</u> E <u>est algébriquement clos et si</u> A <u>est complète pour une norme</u> $\|.\|$ <u>de</u> E-<u>algèbre, alors on a</u> $\|f\|_{sp} \leq \sup(|\lambda|, \lambda \in sp_A(f)) \leq \overline{\lim}\ \sqrt[n]{\|f^n\|} \leq \|f\|$ <u>et</u> $sp_A(f)$ <u>est fermé borné pour tout</u> $f \in A$. <u>De plus si</u> $\|.\|_{sp}$ <u>est une norme pour laquelle</u> A <u>est complète, alors les normes</u> $\|.\|_{sp}$ <u>et</u> $\|.\|$ <u>sont équivalentes.</u>

<u>Remarque.</u> Si E est un corps algébriquement clos, muni d'une valeur absolue pour laquelle il est complet, alors par construction une E-algèbre A possède une pseudo-norme spectrale si et seulement si l'un au moins de ses idéaux maximaux est de codimension 1.

Si E est le corps $\mathbb{C}$, on sait que tout idéal maximal d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach est de codimension 1. Par contre, si la valeur absolue de E est non archimédienne, il existe des E-algèbres de Banach ne possédant aucun idéal maximal de codimension 1. Trivialement, il suffit de considérer, une extension transcendante F de E complète pour une valeur absolue non archimédienne qui prolonge celle de E, ou plus généralement une F-algèbre de Banach. (Par exemple on peut prendre $E = \hat{\Omega}_p$ et choisir pour F son complété maximal).

Pour ce qui concerne les algèbres topologiquement de type fini, on sait, grâce à la propositon (4. 5) de [22], que tout idéal maximal d'une algèbre topologiquement de type fini est de codimension finie et on déduit, grâce au corollaire du théorème (5. 3) de [22] que tout idéal premier est une intersection d'idéaux maximaux (toute algèbre topologiquement de type fini est un anneau de Jacobson).

Les propriétés élémentaires de la semi-norme spectrale d'une K-algèbre topologiquement de type fini sont extraites des théorèmes (5.2) et (5.3.) de [22].

DEFINITION. - On dit qu'un anneau A est réduit s'il n'admet pas d'élément nilpotent non nul.

PROPOSITION II. 13. - Soit A une algèbre topologiquement de type fini sur K. Tout idéal maximal de A est de codimension 1. L'intersection des idéaux maximaux est égale à l'idéal des éléments nilpotents de A. L'algèbre A est munie d'une semi-norme spectrale qui est une norme si et seulement si A est réduite. D'autre part, si $\|\,.\,\|_{sp}$ désigne cette semi-norme spectrale de A et si $\|\,.\,\|$ est sa norme d'algèbre topologiquement de type fini, la relation $\|f\|_{sp} \leq 1$ implique que la suite $\|f^n\|$ soit bornée.

Il faut rappeler maintenant les principales propriétés de la semi-norme spectrale d'une algèbre de Tate qui sont extraites de [8] et [10]. On retient des corollaires 1 et 2 du théorème 2 du chapitre III de [10] que si Γ est un corps valué non archimédien complet et A une algèbre topologiquement de type fini sur Γ et réduite, alors la topologie définie sur A par sa norme spectrale $\|\,.\,\|_{sp}$ est équivalente à sa norme d'algèbre topologiquement de type fini. De plus, si $f \in A$, il existe un homomorphisme de K-algèbre χ de A sur une extension finie Θ de Γ munie de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de Γ, telle que $\|f\|_{sp} = |\chi(f)|$ (principe du maximum de Gerritzen ([8], §.2., th. 4 et [10], ch. III, cor. 2 du th. 2). Plus généralement, il est évident grâce à la proposition II. 12., b) que si A est une algèbre topologiquement de type fini sur Γ, sa semi-norme spectrale vérifie également ce principe du maximum. Alors si $\Gamma = K$, on a la proposition II. 14.

PROPOSITION II. 14. - Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini dont la norme est notée $\|\,.\,\|$ et dont la semi-norme spectrale est notée $\|\,.\,\|_{sp}$. Alors pour tout $f \in A$, il existe un homomorphisme d'algèbre χ de A sur K tel que $|\chi(f)| = \|f\|_{sp}$. De plus, si A est réduite, les normes $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|_{sp}$ sont équivalentes.

Remarque 1. On a donc $\|f\|_{sp} \in |K|$ quel que soit $f \in A$.

Remarque 2. L'équivalence des normes $\|.\|$ et $\|.\|_{sp}$ dans le cas où A est réduite avait déjà été établie dans [22] lorsque la caractéristique du corps considéré est nulle.

Nous allons généraliser maintenant la notion de frontière analytique définie dans [1] pour un quasi-connexe.

DEFINITION. - Soit D un infraconnexe et soit $\Delta \subset D$. Nous dirons que Δ est une frontière analytique de D si l'adhérence de $K[x]$ dans $H(\Delta)$ est égale à l'adhérence de $K[x]$ dans $H(D)$.

Il résulte de la proposition 1 de [1] la proposition suivante :

PROPOSITION II. 15. - Soit Δ une partie d'un infraconnexe D non réduit à un point. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Δ est une frontière analytique de D,

ii) Δ est une frontière analytique de $\underline{\underline{D}}$,

iii) il existe une suite u_n de Δ telle que $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty\\ p\neq q}} |u_p - u_q| = \operatorname{diam}(D)$,

iv) $\|P\|_\Delta = \|P\|_D$ quel que soit $P(X) \in K[X]$.

PROPOSITION II. 16. - Soit une K-algèbre de Banach ultramétrique A admettant une semi-norme spectrale $\|.\|_{sp}$ et dont la norme est notée $\|.\|$. Soit f un élément de classe algébrique de A et soit Λ_f le spectre de f dans A. Alors l'adhérence E de $K[t]$ dans A pour la topologie définie par la semi-norme spectrale est une extension topologiquement pure de K, de degré 1, d'indéterminée f, dont la norme canonique est induite par $\|.\|_{sp}$, si et seulement si Λ_f est une frontière analytique de U. De plus, si la suite $\|f^n\|$ est bornée et si Λ_f est une frontière analytique de U, alors les normes induites sur E par $\|.\|_{sp}$ et $\|.\|$ sont équivalentes et E est fermé dans A pour la norme $\|.\|$.

Preuve. Montrons la première assertion grâce à la proposition II. 14. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de K-algèbre de A sur K. Comme K est algébriquement clos et que f est de classe algébrique, il est clair que tout polynôme $P(X) \in K[X]$ satisfait :

$$\|P(f)\|_{sp} = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} |\chi(P(f))| = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} |P(\chi(f))| = \sup_{\xi \in \Lambda_f} |P(\xi)| ,$$

d'où la relation :

$$(1) \qquad \|P(f)\|_{sp} = \|P(x)\|_{\Lambda_f}$$

obtenue en considérant l'application identique x de Λ_f et $P(x) \in H(\Lambda_f)$. Or il est clair que l'adhérence de $K[f]$ dans A pour la topologie définie par $\|.\|_{sp}$ est une extension topologiquement pure d'indéterminée f dont la norme canonique est induite par $\|.\|_{sp}$ si et seulement si l'on a $\|P(f)\|_{sp} = \|P(x)\|_U$ quel que soit $P \in K[X]$. Mais d'après (1) et la proposition II. 14, cette condition est remplie si et seulement si Λ_f est une frontière analytique de U puisque f est de classe algébrique.

Montrons maintenant la seconde assertion. Puisque $\|f\|_{sp} = 1$, il existe grâce à la proposition II. 13. un nombre $M \geq 1$ tel que $\|f^n\| \leq M$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Comme E est une extension topologiquement pure dont la norme est induite par $\|.\|_{sp}$ tout élément de E est une série formelle restreinte en f, $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i f^i$, et satisfait $\|F\|_{sp} = \sup_{i \in I} |a_i|$, donc $\|F\| \leq M (\sup_{i \in I} |a_i|) = M \|F\|_{sp}$. Comme on a $\|F\|_{sp} \leq \|F\|$ d'après la proposition II. 12., d) du fait que A est une algèbre de Banach pour la norme $\|.\|$, les deux normes induites sur E par $\|.\|_{sp}$ et $\|.\|$ sont donc équivalentes.

III

AUTRES PROPRIETES DES ALGEBRES DE TATE

§. 1. - THEOREME DES ZEROS ET SPECTRE MAXIMAL

Avant de pouvoir établir un théorème des zéros de Hilbert pour une extension topologiquement pure de K, il faut d'abord rappeler un lemme classique sur les parties multiplicatives d'un anneau.

LEMME III. 1. - Soit A un anneau et soit S un ensemble multiplicatif de A qui ne contient pas zéro. Soit F la famille des idéaux I de A tels que $I \cap S = \emptyset$. Alors il existe au moins un élément maximal de F et tout élément maximal de F est un idéal premier ([6], proposition 6 du chap. VI).

DEFINITIONS. - On appellera domaine d'annulation d'un idéal I d'une extension topologiquement pure $K\{X_1, \dots, X_n\}$ l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ tels que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ quel que soit $f \in I$. De même, on appellera domaine d'annulation d'un élément $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in U^n$ tels que $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$.

PROPOSITION III. 2. - Soit $A = K\{X_1, \dots, X_n\}$ une extension topologiquement pure de degré n de K et soit $\mathfrak{A}$ un idéal de A. Soit Δ le domaine d'annulation de $\mathfrak{A}$. Alors l'idéal $\mathcal{J}$ des éléments g tels que $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ quel que soit $(a_1, \dots, a_n) \in \Delta$ est le radical de $\mathfrak{A}$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{J}$ et montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n \in \mathfrak{A}$. Soit S l'ensemble des puissances de f et soit F la famille des idéaux I de A tels que $I \cap S = \emptyset$. Nous savons, d'après le lemme III. 1., que F admet au moins un élément maximal $\mathfrak{P}$ qui est un idéal premier. Soit B l'algèbre topologiquement de tye fini $\frac{A}{\mathfrak{P}}$ et soit θ la surjection canonique de A sur B. Soit

$x_i = \theta(X_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Puisque B est intègre, son nil-radical est nul et d'après le théorème II. 13. l'intersection de ses idéaux maximaux est nulle. Puisque $f \notin \mathfrak{P}$, on a $\theta(f) \neq 0$ et il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{M}_f$ de B tel que $\theta(f) \notin \mathfrak{M}_f$. Soit φ la surjection canonique de B sur $\frac{B}{\mathfrak{M}_f} = K$; alors $\varphi \circ \theta(f) \neq 0$. Mais θ et φ sont des homomorphismes d'algèbre topologiquement de type fini sur K et sont donc continus d'après la proposition II. 7. Soit :

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdot \dots \cdot X_n^{i_n} \in K\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Alors on a :

$$\varphi \circ \theta(f) = \varphi \circ \theta\Big(\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdot \dots \cdot X_n^{i_n}\Big) =$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} (\varphi \circ \theta(X_1))^{i_1} \cdot \dots \cdot (\varphi \circ \theta(X_n))^{i_n} =$$

$$= f(\varphi \circ \theta(X_1), \dots, \varphi \circ \theta(X_n)) .$$

Or il est clair que le n-uplet $(\varphi \circ \theta(X_1), \dots, \varphi \circ \theta(X_n))$ de U^n appartient à Λ car si $g \in \mathfrak{A}$, alors $g \in \mathfrak{P}$ donc $\theta(g) = 0$ et

$$g(\varphi \circ \theta(X_1), \dots, \varphi \circ \theta(X_n)) = \varphi \circ \theta(g(X_1, \dots, X_n)) = 0 .$$

Donc $\varphi \circ \theta(f) = f(\varphi \circ \theta(X_1), \dots, \varphi \circ \theta(X_n)) = 0$ et l'hypothèse $f \notin \mathfrak{J}$ est contredite ; le théorème est donc établi. Nous en déduisons deux conséquences immédiates :

COROLLAIRE III. 3. - Tout idéal I d'une extension topologiquement pure A, dont le domaine d'annulation est vide, est égal à A.

Preuve. En effet, si $I \neq A$, I est inclus dans un idéal maximal $\mathfrak{M}$ dont le domaine d'annulation est vide. Donc A est le radical de $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal.

Ce corollaire admet pour conséquence la proposition suivante immédiate.

PROPOSITION III. 4. - Soit $A = K\{X_1, \dots, X_n\}$ une extension topologiquement pure de K. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ tel que $\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a_i)A$ et l'homomorphisme de K-algèbre de A sur K dont $\mathfrak{M}$ est le noyau, est l'application $f \to f(a_1, \dots, a_n)$. Le spectre maximal Max(A) est ainsi mis en bijection avec U^n.

Plus généralement, soit $B = \dfrac{K\{X_1, \dots, X_n\}}{I}$ une algèbre topologiquement de type fini sur K et soit θ la surjection canonique de A sur B. Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de B il existe $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ tel que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ quel que soit $f \in I$ et tel que $\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{n} (\theta(X_i) - a_i) B$ et $\mathrm{Max}(B)$ est ainsi mis en bijection de façon naturelle avec l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ tels que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ quel que soit $f \in I$. De plus, si $g \in B$, si $\theta(f) = g$ et si φ est l'homomorphisme de K-algèbre de B sur K dont $\mathfrak{M}$ est le noyau, alors $\varphi(g) = f(a_1, \dots, a_n)$.

Remarque. - Il résulte de la proposition III. 4. que la norme d'une extension topologiquement pure est égale à sa norme spectrale.

On introduit la théorie de Tate en définissant de la façon suivante la catégorie des espaces analytiques au sens de Tate. On prend pour objet les couples (X, A) où $A \in \mathfrak{A}$ et où $X = \mathrm{Max}(A)$ est identifié à une partie de U^n comme on vient de voir, et dont les morphismes sont définis de la façon suivante : à chaque homomorphisme φ de A dans B $(A, B \in \mathfrak{A})$ on considère l'application u de $\mathrm{Max}(B)$ dans $\mathrm{Max}(A)$ définie par $u(\mathfrak{M}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$, quel que soit $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(B)$.

Pour pouvoir comparer la théorie de Krasner avec celle de Tate, nous devrons évidemment nous restreindre à la sous-catégorie $\mathfrak{A}'$ des algèbres topologiquement de type fini dont le spectre maximal s'identifie avec une partie de K donc de U.

§. 2. - PROJECTEURS RESTRICTIFS D'UNE EXTENSION TOPOLOGIQUEMENT PURE

Nous devons préciser certaines notions et certaines propriétés concernant les projecteurs d'une algèbre commutative pour pouvoir ensuite appliquer à l'étude des extensions topologiquement pures. Rappelons que l'on appelle projecteur d'un espace vectoriel E tout opérateur linéaire de E idempotent. Les projecteurs d'un espace vectoriel possèdent la propriété immédiate suivante :

LEMME III. 5. - *Soient* E *un espace vectoriel et* P_1, P_2 *deux projecteurs de* E *tels que* $P_1 P_2 = P_2 P_1$. *Alors* $P_1 P_2$ *est un projecteur de* E *et*

$\mathrm{Ker}(P_1 P_2) = \mathrm{Ker}(P_1) + \mathrm{Ker}(P_2)$.

DEFINITION. - Soit A une algèbre commutative sur un corps F et soit P un projecteur de A considéré comme espace vectoriel sur F . On dira que P est un projecteur <u>restrictif</u> si $\mathrm{Ker}(P)$ est un idéal de A .

On a le lemme III. 6. immédiat grâce au lemme III. 5.

LEMME III. 6. - <u>Soit</u> A <u>une algèbre commutative sur un corps</u> F <u>et soit</u> P <u>un projecteur restrictif de</u> A . <u>On a</u> $P(xy) = P(P(x)\,P(y))$ <u>quels que soient</u> x <u>et</u> $y \in A$. <u>D'autre part, si</u> P_1 <u>et</u> P_2 <u>sont deux projecteurs restrictifs de</u> A <u>tels que</u> $P_1 P_2$ <u>soit un projecteur, alors</u> $P_1 P_2$ <u>est un projecteur restrictif.</u>

Le théorème III. 8. ci-dessous a déjà été signalé par Grauert et Remmert (théorème 1 du §. 2 de [9]). On commence pour cela par étudier les anneaux de polynômes sur une algèbre normée.

<u>Notation.</u> - Soit f un polynôme de n variables $X_1, \dots, X_m$ à coefficients dans un anneau commutatif unitaire. On notera $\deg_j(f)$ le degré de f comme polynôme en X_j .

THEOREME III. 7. - <u>Soit</u> Γ <u>un corps valué non archimédien et soit</u> A <u>une</u> Γ<u>-algèbre commutative unitaire normée.</u> <u>Soit</u> m <u>un entier positif</u> ; <u>considérons l'algèbre</u> $A[X_1, \dots, X_m]$ <u>munie de sa norme canonique notée</u> $\|\cdot\|$. <u>Soient</u> $F_1, \dots, F_m$ <u>des polynômes satisfaisant les relations suivantes quel que soit</u> i $(1 \le i \le m)$:

a) $F_i \in A[X_i]$;

b) F_i <u>est unitaire</u> ;

c) $\|F_i\| = 1$.

<u>Soit</u> $n_j = \deg(F_j)$ $(1 \le j \le m)$. <u>Alors il existe un projecteur restrictif</u> $\mathcal{R}$ <u>de</u> $A[X_1, \dots, X_m]$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

i) $\deg_j \mathcal{R}(f) < n_j$ <u>quel que soit</u> j $(1 \le j \le m)$, <u>quel que soit</u> $f \in A[X_1, \dots, X_m]$;

ii) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{m} F_i A[X_1, \dots, X_m]$;

iii) $\mathcal{R}(\theta f) = \theta \mathcal{R}(f)$ <u>quel que soit</u> $\theta \in A$ <u>et quel que soit</u> $f \in A[X_1, \dots, X_m]$;

iv) $\|\mathcal{R}(f)\| \le \|f\|$ <u>quel que soit</u> $f \in A[X_1, \dots, X_m]$.

<u>Preuve.</u> Procédons par récurrence en supposant la proposition vraie pour $m = q \geq 0$ et montrons qu'elle est vraie pour $m = q+1$. Considérons le polynôme F_{q+1} défini ci-dessus et soit r l'application qui à tout élément $f \in A[X_1, \dots, X_{q+1}]$ associe le reste de la division euclidienne de f par le polynôme unitaire F_{q+1} dans l'ordre des puissances décroissantes de X_{q+1}. Il est clair que r est un projecteur restrictif de l'algèbre $A[X_1, \dots, X_{q+1}]$ et que $\mathrm{Ker}(r) = F_{q+1} A[X_1, \dots, X_{q+1}]$. Plus précisément, on voit que, comme $F_{q+1} \in A[X_{q+1}]$, on a $r(\psi(f)) = \psi(r(f))$ quel que soit $\psi \in A[X_1, \dots, X_q]$ et quel que soit $f \in A[X_1, \dots, X_{q+1}]$. D'autre part, on vérifie que $\| r(f) \| \leq \| f \|$ quel que soit $f \in A[X_1, \dots, X_{q+1}]$. Nous procédons par récurrence sur le degré p_{q+1} de f comme polynôme en X_{q+1}. Si $p_{q+1} < n_{q+1}$, la relation est triviale puisque $r(f) = f$. Supposons la donc établie si $p_{q+1} \leq u$ et montrons la pour $p_{q+1} = u+1$. Soit :

$$f = \sum_{i=0}^{u+1} a_i X_{q+1}^i \quad (a_i \in A[X_1, \dots, X_q],\ 1 \leq i \leq u+1).$$

Soit

$$g = f - a_{u+1} X^{u+1-n_{q+1}} F_{q+1},$$

il est clair que $\deg_{q+1}(g) \leq u$ puisque F_{q+1} est unitaire On a donc $\| r(g) \| \leq \| g \|$. D'autre part, comme $\| F_{q+1} \| = 1$, $\| g \| \leq \| f \|$, d'où $\| r(g) \| \leq \| f \|$. Enfin, comme $f - g \in \mathrm{Ker}(r)$, $r(f) = r(g)$, donc $\| r(f) \| \leq \| f \|$.

D'autre part, si l'on suppose la proposition V. 2. vraie au rang q, il existe un projecteur restrictif $\mathcal{R}_q$ de l'algèbre $A[X_1, \dots, X_q]$ satisfaisant les relations i) et ii). Ce projecteur $\mathcal{R}_q$ se prolonge en un projecteur restrictif $\overline{\mathcal{R}}_q$ de l'algèbre $A[X_1, \dots, X_{q+1}]$ de la façon suivante : pour tout $f = \sum_{i=0}^{\ell} a_i X_{q+1}^i \in A[X_1, \dots, X_{q+1}]$ ($a_i \in A[X_1, \dots, X_q]$), soit :

$$\overline{\mathcal{R}}_q(f) = \sum_{i=0}^{\ell} \mathcal{R}_q(a_i) X_{q+1}^i .$$

Il est évident que $\overline{\mathcal{R}}_q$ est un projecteur restrictif dont le noyau est $\sum_{i=0}^{q} F_i A[X_1, \dots, X_{q+1}]$ et que l'on a encore $\| \overline{\mathcal{R}}_q(f) \| \leq \| f \|$. Par définition, il est clair que $\overline{\mathcal{R}}_q(\varphi . f) = \varphi . \mathcal{R}_q(f)$ quel que soit $\varphi \in A[X_{q+1}]$, quel que soit $f \in A[X_1, \dots, X_{q+1}]$. Il en résulte que les projecteurs restrictifs $\overline{\mathcal{R}}_q$ et r commutent. En effet, soit :

$$f = \sum_{i=0}^{\ell} a_i X_{q+1}^i \quad (a_i \in A[X_1, \dots, X_q]);$$

on a :

$$r \circ \mathcal{R}_q(f) = \sum_{i=0}^{\ell} r \circ \mathcal{R}_q(a_i X_{q+1}^i)$$

(car $r \circ \bar{\mathcal{R}}_q$ est un endomorphisme linéaire de $A[X_1, \dots, X_{q+1}]$). Mais d'après ce qui a été vu, on a $r \circ \bar{\mathcal{R}}_q(a_i X^i_{q+1}) = r(\bar{\mathcal{R}}_q(a_i) X^i_{q+1})$ et comme $\bar{\mathcal{R}}_q(a_i) = \mathcal{R}_q(a_i) \in A[X_1, \dots, X_q]$, on a finalement :

$$r(\bar{\mathcal{R}}_q(a_i)X^i_{q+1}) = \bar{\mathcal{R}}_q(a_i)\, r(X^i_{q+1}) = \bar{\mathcal{R}}_q(a_i\, r(X^i_{q+1})) = \bar{\mathcal{R}}_q \circ r(a_i X^i_{q+1}) ,$$

d'où :

$$r \circ \bar{\mathcal{R}}_q(f) = \bar{\mathcal{R}}_q \circ r(f) .$$

Alors $\mathcal{R}_q \circ r$ est un projecteur restrictif d'après le lemme III. 6. Soit $\mathcal{R}_{q+1} = \bar{\mathcal{R}}_q \circ r$. On sait, grâce au lemme III. 5., que

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{R}_{q+1}) = \operatorname{Ker}(\bar{\mathcal{R}}_q) + \operatorname{Ker}(r) = \sum_{i=1}^{q+1} F_i A[X_1, \dots, X_{q+1}] .$$

D'autre part, il est évident que l'on a, par construction, $\deg_{q+1}(r(f)) < n_{q+1}$, donc $\deg_{q+1} \bar{\mathcal{R}}_q(r(f)) < n_{q+1}$ et $\deg_j \bar{\mathcal{R}}_q(r(f)) < n_j$ quel que soit $j \leq q$. Les relations i) et ii) sont donc satisfaites. D'autre part, la relation iii) est satisfaite car on a $r(\theta f) = \theta\, r(f)$ et $\bar{\mathcal{R}}_q(\theta f) = \theta \bar{\mathcal{R}}_q(f)$ quel que soit $\theta \in A$, quel que soit $f \in A[X_1, \dots, X_m]$. Enfin, $\| \bar{\mathcal{R}}_q(r(f)) \| \leq \| r(f) \| \leq \| f \|$, donc la relation iv) est satisfaite et le théorème est démontré.

THEOREME III. 8. - Soit Γ un corps valué non archimédien complet. Soit A une extension topologiquement pure de Γ et soit $A\{X_1, \dots, X_m\}$ une extension topologiquement pure de A dont la norme canonique est notée $\| . \|$. Soient $F_1, \dots, F_m$ des polynômes satisfaisant quel que soit i $(1 \leq i \leq m)$

a) $F_i \in A[X_i]$;

b) F_i est unitaire ;

c) $\| F_i \| = 1$.

Soit $n_i = \deg_i(F_i)$ $(1 \leq i \leq m)$; alors il existe un projecteur restrictif $\mathcal{R}$ de A satisfaisant quel que soit $\theta \in A$, quel que soit $h \in A[X_1, \dots, X_m]$, quel que soit $f \in A\{X_1, \dots, X_m\}$; les relations :

(1) $\mathcal{R}(f) \in A[X_1, \dots, X_m]$ et $\deg_j \mathcal{R}(f) < n_j$ $(1 \leq j \leq m)$,

(2) $h - \mathcal{R}(h) \in \sum_{i=1}^{m} F_i A[X_1, \dots, X_m]$,

(3) $\operatorname{Ker}(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{m} F_i A\{X_1, \dots, X_m\}$,

(4) $\mathcal{R}(\theta f) = \theta \mathcal{R}(f)$,

(5) $\| \mathcal{R}(f) \| \leq \| f \|$.

<u>Preuve.</u> C'est une conséquence immédiate du théorème III. 7. En effet, nous savons, grâce au théorème III. 7. , qu'il existe un projecteur restrictif $\mathcal{R}_o$ de $A[X_1, \ldots, X_m]$ satisfaisant les relations i), ii), iii), iv) du théorème III. 7. Il est clair que $\mathcal{R}_o$ se prolonge en un projecteur restrictif $\mathcal{R}$ de l'algèbre $A\{X_1, \ldots, X_m\}$ satisfaisant (1), (4), (5), grâce aux relations i), iii), iv). On en déduit, grâce aux relations i) et ii) que $\mathcal{R}$ satisfait (2) puisque c'est une propriété qui ne concerne que sa restriction $\mathcal{R}_o$ à $A[X_1, \ldots, X_m]$. Par ailleurs, puisque A est une extension topologiquement pure de K, $A\{X_1, \ldots, X_m\}$ est encore une extension topologiquement pure de K. Donc c'est une algèbre nœthérienne et l'idéal $\sum_{i=1}^{m} F_i A\{X_1, \ldots, X_m\}$ est fermé dans $A\{X_1, \ldots X_m\}$. On en déduit que $f - \mathcal{R}(f) \in \sum_{i=1}^{m} F_i A\{X_1, \ldots, X_m\}$ grâce à ii) et (5) et par conséquent $\mathrm{Ker}(\mathcal{R}) \subset \sum_{i=1}^{m} F_i A\{X_1, \ldots, X_m\}$. Réciproquement, par continuité il est évident, grâce à (2), que $\sum_{i=1}^{m} F_i A\{X_1, \ldots X_m\} \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{R})$ et la relation (3) est donc vérifiée.

§. 3. - <u>EXTENSION ENTIERE FINIE D'UNE EXTENSION TOPOLOGIQUEMENT PURE</u>

Le théorème III. 8. permet tout d'abord d'améliorer la proposition II. 8 de la façon suivante :

THEOREME III. 9. - <u>Toute extension entière finie</u> B <u>d'une algèbre</u> A <u>topologiquement de type fini sur un corps</u> Γ <u>valué non archimédien complet peut être munie d'une norme de</u> Γ<u>-algèbre de Banach qui en fait une</u> Γ<u>-algèbre topologiquement de type fini.</u>

<u>Preuve.</u> Remarquons d'abord qu'il suffit de faire la démonstration si A est une extension topologiquement pure de Γ car on sait, grâce à la proposition II. 8 , que A est elle-même une extension entière finie d'une extension topologiquement pure de Γ. Par hypothèse, B est donc de la forme $E[x_1, \ldots, x_m]$ où E est une extension topologiquement pure de Γ et où $x_1, \ldots, x_m$ sont entiers sur E. Soit $E\{X_1, \ldots, X_m\}$ une extension topologiquement pure de E ; il est clair qu'il existe, quel que soit i $(1 \leq i \leq m)$, un élément $\lambda_i \in K$ tel que $y_i = \lambda_i x_i$ satisfasse $\|y_i\| \leq 1$ et soit racine d'un polynôme unitaire $F_i(X_i) \in E[X_i]$ tel que $\|F_i\| = 1$ pour la norme canonique de $E\{X_1, \ldots, X_m\}$. Considérons le projecteur restrictif

$\mathfrak{R}$ associé aux polynômes $F_1, \ldots, F_m$ d'après le théorème III. 8. et soit Φ l'application de $E\{X_1, \ldots, X_m\}$ dans B définie par $\Phi(f) = \mathfrak{R}(f)(x_1, \ldots, x_m)$ quel que soit $f \in E\{X_1, \ldots, X_m\}$. Il est clair que Φ est surjectif car pour tout $y \in B$, il existe $f \in A[X_1, \ldots, X_m]$ tel que $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ et comme $f - \mathfrak{R}(f) \in \sum_{i=1}^{m} F_i A[X_1, \ldots, X_m]$ d'après le théorème III. 8., on a la relation

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{R}(f)(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m),$$

donc $\qquad \Phi(f) = y$.

Par ailleurs, grâce à la relation (4) du théorème III. 8., Φ est un homomorphisme de A-module. Montrons enfin que Φ est un homomorphisme de A-algèbre, donc de Γ-algèbre. Grâce à la proposition III. 6., on a :

$$\mathfrak{R}(fg)(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(f)\mathfrak{R}(g))(x_1, \ldots, x_n) \ ;$$

mais grâce à la relation (α), on a :

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(f)\mathfrak{R}(g))(x_1, \ldots, x_m) = \mathfrak{R}(f)\mathfrak{R}(g)(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= [\mathfrak{R}(f)(x_1, \ldots, x_m)][\mathfrak{R}(g)(x_1, \ldots, x_m)] \ ;$$

donc $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ et le théorème III. 9. est établi.

Nous allons maintenant appliquer le théorème III. 8. à l'étude des algèbres topologiquement de type fini intègres. Rappelons d'abord un résultat classique concernant les éléments entiers sur un anneau intègre.

LEMME III. 10. - Soit B un anneau intègre contenant un sous-anneau A intégralement clos dans son corps de fractions E et soit x un élément entier sur A. Alors le polynôme minimal F de x sur E appartient à $A[X]$. (On appellera F le polynôme minimal de x sur A).

PROPOSITION III. 11. - Soit Γ un corps valué non archimédien complet et soit A une extension topologiquement pure de Γ. Soit $B = A[X]$ une extension entière finie et intègre de A. Soit $\| \cdot \|$ la norme de B et supposons que le polynôme minimal F de x sur A satisfasse $\|F\|_c = 1$ pour la norme canonique $\| \cdot \|_c$ de $A[X]$ et que $\|x\| \leq 1$. Alors l'algèbre topologiquement de type fini B est isomorphe à $\dfrac{A\{X\}}{F(X)A\{X\}}$ ([12], §. 3, 3, lemma).

<u>Preuve.</u> Considérons le projecteur restrictif $\mathfrak{R}$ associé au polynôme unitaire $F \in A[X]$ et soit Φ l'application de $A\{X\}$ dans B définie par $\Phi(f) = \mathfrak{R}(f)(x)$ quel que soit $f \in A\{X\}$. Il est évident que Φ est surjectif, car si $f(X) \in A[X]$, on a $f(x) = \mathfrak{R}(f)(x)$. Or, il résulte du théorème III. 8. (propriété (3)) que $\operatorname{Ker} \mathfrak{R} \cap A[X] = F(X)\, A[X]$ ce qui prouve que si I désigne l'injection canonique de $A[X]$ dans $A\{X\}$, alors $\Phi \circ I$ admet le même noyau que la surjection canonique φ de $A[X]$ sur $\dfrac{F[X]}{F(X)A[X]}$, donc $\Phi \circ I$ se factorise sous la forme $\psi \circ \varphi$ où ψ est un isomorphisme de $\dfrac{A[X]}{F(X)\, A[X]}$ sur $\dfrac{A\{X\}}{F(X)A\{X\}}$.

IV

ENSEMBLES CALIBRES ET ULTRACIRCONFERENCIES

§. 1. - DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

Nous verrons plus loin que les spectres des algèbres auxquelles nous nous intéressons possèdent certaines propriétés que nous allons maintenant étudier de façon intrinsèque.

DEFINITIONS. 1. - Nous dirons qu'un infraconnexe fermé borné est calibré si son diamètre appartient à $|K|$ et si le diamètre de chacun de ses trous appartient à $|K|$.

2. - Nous dirons qu'un fermé borné est calibré si c'est une réunion finie d'infraconnexes calibrés.

Remarque. - Il est évident que les composantes infraconnexes d'un fermé borné calibré sont calibrées.

PROPOSITION IV. 1. - Si D est calibré et si $f \in H(D)$ alors $f(D)$ est calibré.

Preuve. On se ramène immédiatement au cas où D est infraconnexe car une réunion finie d'infraconnexes calibrés est calibrée et l'image d'un infraconnexe par un élément analytique est infraconnexe. Il est immédiat de voir que si D est infraconnexe calibré, le diamètre de $f(D)$ appartient à $|K|$, en considérant par exemple une fonction $v(f_a, \mu)$ où $a \in D$ et $f_a(x) = f(x-a)$. De même on montre que si T est un trou de $f(D)$, alors le diamètre de T appartient à $|K|$ en considérant $b \in T$ et $\frac{1}{f-b}$.

DEFINITION. - Nous dirons qu'un fermé borné infini et calibré de K est ultra-circonférencié si chacune de ses composantes infraconnexes n'a qu'un nombre fini de trous.

Remarques. - Une partie ultracirconférenciée de K est infraconnexe si et seulement si elle est quasiconnexe [14]. Tout infraconnexe ultracirconférencié est ouvert.

D'autre part, il est clair, que toute réunion finie d'ultracirconférenciés est ultracirconférenciée.

THEOREME IV. 2. - Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini et soit $x \in A$ tel que $D = sp_A(x)$ soit infini. Alors D est ultracirconférencié.

Preuve. Le théorème est établi par le corollaire 1 de la proposition 4 de [11] dans le cas où A est réduite sans idempotent différent de 0 et 1.

La généralisation est immédiate dans le cas où A est seulement réduite. En effet ses idempotents sont en nombre fini du fait que A est nœthérienne ; en considérant la relation d'ordre habituelle $\leq$ définie sur les idempotents par $u \leq v$ si $uv = u$, soient $u_1, \dots, u_n$ les idempotents minimaux de A pour cette relation et soit $A_i = u_i A$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors on a $u_i u_j = 0$, $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $x = \sum u_i x$. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur K et $\mathfrak{X}_i$ l'ensemble des $\chi \in \mathfrak{X}$ tels que $\chi(u_i) = 1$. Alors $(\mathfrak{X}_i)_{i \leq n}$ est une partition de $\mathfrak{X}$ et l'on a $sp_{A_i}(u_i x) = \{\chi(x) \mid \chi \in \mathfrak{X}_i\}$, d'où $sp_A(x) = \bigcup_{i=1}^{n} sp_{A_i}(u_i x)$. Or, A_i est topologiquement de type fini sur K et n'admet pas d'idempotent différent de 0 et 1 puisque u_i est minimal, donc $sp_{A_i}(u_i x)$ est ultracirconférencié et $sp_A(x)$ est ultracirconférencié.

Enfin si A n'est pas réduite, soit I son radical, $A' = \frac{A}{I}$ et φ la surjection canonique de A sur A'. Alors $sp_A(x) = sp_{A'}(\varphi(x))$ et comme A' est réduite, $sp_A(x)$ est ultracirconférencié.

Nous devons rappeler d'autre part la notion de couronne vide pour un fermé borné D définie dans [5]. Soit $a \in D$; supposons qu'il existe r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que l'ensemble Γ des $\xi \in K$ satisfaisant $r_1 \leq |\xi - a| \leq r_2$ soit inclus dans le complémentaire de D et tels que

$$\sup_{\substack{\xi \in D \\ |\xi - a| \leq r_1}} |\xi - a| = r_1 \quad , \quad \inf_{\substack{\xi \in D \\ |\xi - a| \geq r_2}} |\xi - a| = r_2 \ .$$

Alors Γ est appelé couronne vide de D de centre a, de rayon inférieur r_1, de rayon supérieur r_2 . On note $\mathcal{J}(\Gamma)$ l'ensemble des $\xi \in D$ tels que $|\xi - a| \leq r_1$ et $\mathcal{E}(\Gamma)$ l'ensemble des $\xi \in D$ tels que $|\xi - a| \geq r_2$.

On retient de la proposition VII. 3. de [5] que l'ensemble des composantes infraconnexes de D est fini si et seulement si l'ensemble des couronnes vides de D est fini.

PROPOSITION IV. 3. - Les ouverts ultracirconférenciés possèdent les propriétés suivantes :

a) Toute réunion finie et toute intersection finie d'ouverts ultracirconférenciés est un ouvert ultracirconférencié.

b) Tout infraconnexe ultracirconférencié est égal à une réunion finie enchaînée d'ensembles de type D_{ab} ultracirfoncérenciés. (La définition des ensembles D_{ab} est donnée dans [14]).

c) L'image d'un ouvert ultracirconférencié D par un élément non constant de $H(D)$ est un ouvert ultracirconférencié.

d) L'image réciproque d'un disque circonférencié par une fraction rationnelle de $K(X)$ de degré ≥ 1 est un ouvert ultracirconférencié. (On appelle degré d'une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X)$ l'entier rationnel $\deg P - \deg Q$).

e) Soient $D_1, \ldots, D_n$ les composantes infraconnexes d'un ouvert ultracirconférencié D ; alors il existe $T \in K(D)$ tel que $\deg(T) \geq 1$, $T(D) = U$, $T(D_i) = U$ $(1 \leq i \leq n)$, $D = T^{-1}(U)$ (où $\dot{T}^{-1}(U)$ désigne l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|T(\xi)| \leq 1$) . De plus si $D \subset U$ et si $\|.\|_U$ désigne la norme de $H(U)$, alors t admet une forme irréductible $\frac{P}{Q}$ où P est unitaire, et satisfait $\deg(P) > \deg(Q)$ et $\|Q\|_U \leq \|P\|_U = 1$.

Preuve. Les assertions a) et b) sont immédiates. Alors pour établir c) on est ramené, grâce à a) , à montrer que l'image d'un D_{ab} ultracirconférencié par un élément $f \in H(D_{ab})$ est un D_{ab} ultracirconférencié. Notons d'abord quelques définitions.

On appelle famille de disques non circonférenciés contigus une famille de disques non circonférenciés ayant tous même enveloppe. Nous dirons qu'une telle famille de disques non circonférenciés contigus $(D_i)_{i \in I}$ dont les éléments ont pour enveloppe commune Δ , est presque complète si $\Delta - \bigcup_{i \in I} D_i$ est égal à une réunion finie de disques non circonférenciés contigus d'enveloppe Δ. Alors on a les propriétés classiques suivantes :

i) L'image d'une famille de disques non circonférenciés contigus $(D_i)_{i \in I}$, presque complète, par un élément analytique $f \in H(\bigcup_{i \in I} D_i)$ est une famille de disques non circonférenciés contigus presque complète.

ii) L'image d'un D_{ab} par un élément analytique non constant $f \in H(D_{ab})$ est un D_{ab}.

Il en résulte immédiatement que l'image d'un D_{ab} ultracirconférencié par un élément analytique $f \in H(D_{ab})$ est un D_{ab} ultracirconférencié et l'assertion c) est établie.

La démonstration de l'assertion d) utilise quelques propriétés classiques des fractions rationnelles. Rappelons que l'on a défini dans [5] une fonction $v(h,.) : \mu \to v(h, \mu)$ pour une fraction rationnelle h qui généralise la fonction $v(f,.)$ définie dans [17] pour un polynôme. En utilisant cette fonction $v(h, \mu)$ on voit par exemple que toute couronne vide de D admet pour centre un zéro de h et que tout trou de D non inclus dans une couronne vide de D admet pour centre un pôle de h, ce qui prouve que les composantes infraconnexes sont en nombre fini d'après le lemme VII. 3 de [5] et que les trous de chacunes d'elles sont en nombre fini. Il reste donc à montrer que le diamètre de chaque composante infraconnexe de D appartient à $|K|$ ainsi que les diamètres de ses trous. C'est une conséquence du fait que la fonction $v(h,.)$ possède la propriété suivante : $v(h,\mu) \in v(K)$ si et seulement si $\mu \in v(K)$. On en déduit en effet que si T est un trou de diamètre ρ d'une composante infraconnexe D_1 de D qui n'est pas inclus dans une couronne vide de D, alors on a $v(h, -\log \rho) = 0$ d'où $\rho \in |K|$. On voit de la même façon que les rayons inférieurs et supérieurs des couronnes vides de D appartiennent à $|K|$ et l'assertion d) est établie.

Pour montrer l'assertion e) nous allons construire une fraction $t \in K(D)$ de degré ≥ 1 telle que $|t(\xi)| \leq 1$ si et seulement si $\xi \in D$. Alors il est clair $t^{-1}(U) = D$ et $t(D) = U$ car l'équation $t(x) = \alpha$ admet au moins une solution dans K quel que soit $\alpha \in K$, puisque $\deg(t) \geq 1$ et en particulier ceci est vrai pour $\alpha \in U$.

D'autre part, il est évident que si $D \subset U$ et si $\frac{P}{Q}$ est une forme irréductible de t telle que P soit unitaire, on a $\|Q\| \leq \|P\| = 1$ pour la norme canonique de $K[X]$. En effet, puisque $D \subset U$, le polynôme P ne doit pas s'annuler pour $|\xi| \geq 1$ et pour cela il faut que $\|P\|$ soit égal à la valeur absolue du coefficient de plus grand indice de P c'est-à-dire 1, puisque P est unitaire ; donc $\|P\| = 1$. Enfin, on voit que $\|Q\| \leq 1$ car sinon on aurait d'après les résultats classiques ([5], [14], [17]), $v(P,0) - v(Q,0) > 0$, donc il existerait $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left(\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}\right) = v(P, v(\xi)) - v(Q, v(\xi)) > 0 \qquad \text{pour tout } \xi \in K$$

tel que

$$-\varepsilon < v(\xi) < 0 ,$$

ce qui contredirait le fait que $\xi \notin D$.

Par ailleurs, la fraction t satisfait nécessairement les relations $\underline{\underline{t(D_i)}} = U$ quel que soit i $(1 \leq i \leq n)$, c'est-à-dire que le diamètre de $\underline{\underline{t(D_i)}}$ est égal à 1. Soit $0 \in D_1$ un point pris pour origine et soit r le diamètre de D_1. Soit $g = t - t(0)$; on a donc $|g(\xi)| \leq 1$ quel que soit $\xi \in D_1$. Alors il existe $r' > r$ tel que l'ensemble Γ' des $\xi \in K$ satisfaisant $r < |\xi| < r'$ vérifie $\Gamma \cap D = \emptyset$; donc $v(g, \mu) < 0$ quel que soit $\mu \in]-\log r', -\log r[$. Comme D_1 est infraconnexe et comme $|g(\xi)| \leq 1$ pour $\xi \in D_1$, on a donc $v(g, -\log r) = 0$ et comme D_1 est infraconnexe, on a $\lim\limits_{\substack{|\xi| \to r \\ |\xi| < 1,\, \xi \in D_1}} |g(\xi)| = 1$, ce qui montre que le diamètre de D_1 est égal à 1.

Il reste donc seulement, pour établir l'assertion e), à montrer que pour tout fermé borné ultracirconférencié D, il existe une fraction $t \in K(D)$, de degré ≥ 1 telle que $|t(\xi)| \leq 1$ si et seulement si $\xi \in D$. En fait il revient au même de montrer l'existence d'une fraction h telle que $\deg(h) \leq -1$ et $|h(\xi)| < 1$ si et seulement si $\xi \notin D$ et de considérer ensuite $t = \frac{1}{h}$. Considérons d'abord le cas où D est infraconnexe. Alors il existe un disque circonférencié $\Delta_o = \underline{\underline{D}}$ et un nombre fini de disques non circonférenciés $T_1, \dots, T_q$ dont les diamètres r_i appartiennent à $|K|$ tels que si $\Delta_i = \complement T_i$ $(1 \leq i \leq q)$ on ait $D = \bigcap\limits_{i=0} \Delta_i$. Puisque D est ultracirconférencié, il existe un disque δ non circonférencié inclus dans D, dont le diamètre r_o est égal à celui de D. Soit $b_o \in \delta$; soit $a_i \in T_i$ $(1 \leq i \leq q)$ et soit $b_i \in D$ tel que $|a_i - b_i| = r_i$ et tel que le disque non circonférencié de centre b_i, de diamètre r_i soit inclus dans D $(1 \leq i \leq q)$. (Par définition des ensembles ultracirconférenciés, l'existence des points b_i est évidente). Alors soit

$$h = \frac{b_o}{x - b_o} \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) ;$$

il est clair que h possède les propriétés cherchées.

Considérons maintenant le cas général. Soient $D_1, \ldots, D_n$ les composantes infraconnexes de D et soient $h_1, \ldots, h_n$ des fractions rationnelles satisfaisant, quel que soit i $(1 \le i \le n)$, $h_i \in K(\complement D_i)$, $\deg(h_i) \le -1$, $|h_i(\xi)| < 1$ si et seulement si $\xi \notin D_i$. Enfin, soit $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$. Alors il est évident que $h \in K(\complement D)$ et que $|h(\xi)| < 1$ si et seulement si $\xi \notin D$. De plus $\deg(h) \le \sup_{1 \le i \le n}(\deg(h_i)) \le -1$. La proposition IV. 3. est ainsi établie.

§. 2. - PROPRIETES ANALYTIQUES DES ENSEMBLES ULTRACIRCONFERENCIES

Dans le cas où D est fermé borné, le théorème de la décomposition Mittag-Löfflerienne I. 1. peut s'exprimer en utilisant la norme $\|\cdot\|_D$.

LEMME IV. 4. - Soit D un infraconnexe fermé borné et soient $(T_i)_{i \in I}$ les trous de D. Pour chaque trou T_i, soit H_i l'espace vectoriel des éléments $f \in H(\complement T_i)$ tels que $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$ et soit $H_0 = H(\underline{\underline{D}})$. Alors, pour tout élément $f \in H(D)$, il existe une partie dénombrable J de $I \cup \{0\}$ unique telle que $f_i \in H_i$, $f = \sum_{i \in J} f_i$, $\|f\|_D = \sup_{i \in J} \|f_i\|_D$.

PROPOSITION IV. 5. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique qui admet une semi-norme spectrale notée $\|\cdot\|_{sp}$, dont la norme est notée $\|\cdot\|$, qui contient une sous-K-algèbre intègre de la forme $K[t, x]$ où x est de classe algébrique et où $t \in K(x)$, dense dans A. Soit D le spectre de x ; alors si D est infini et calibré, D est ultracirconférencié.

Preuve. Puisque D est infini et calibré, il suffit de montrer que chaque composante infraconnexe de D a seulement un nombre fini de trous. Pour cela nous allons montrer que chaque trou T_1 d'une composante infraconnexe D_1 de D contient au moins un pôle de t. Soit $a \in T_1$; par hypothèse il existe une suite $F_n(X, Y) \in K[X, Y]$ telle que $F_n(t, x)$ converge vers $\frac{1}{x-a}$ dans A pour la norme $\|\cdot\|$, donc a fortiori pour la semi-norme spectrale $\|\cdot\|_{sp}$ de A. Mais il est clair que $K(D)$ est isomorphe à une sous-algèbre A' de A qui contient $K[t, x]$ et que si l'on identifie A et A' on a $\|h\|_{sp} = \|h\|_D$ quel que soit $h \in K(D)$, ce qui prouve que la suite $F_n(t, x)$ converge pour la norme $\|\cdot\|_D$, donc a fortiori pour la norme $\|\cdot\|_{D_1}$. Si t n'admet aucun pôle dans T_1, alors $F_n(t, x)$ est une fraction de x sans pôle dans T_1. Considérons la décomposition

Mittag-Löfflerienne de $F_n(t,x)$ relativement à l'infraconnexe D_1. Soit H_1 l'espace vectoriel des éléments $f \in H(\complement T_1)$ tels que $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$. Comme la projection sur H_1 de $F_n(t,x)$ est nulle quel que soit n, il est clair, grâce à la proposition IV. 4., que $F_n(t,x)$ ne converge pas vers $\frac{1}{x-a}$ pour la norme $\| \cdot \|_{D_1}$ ce qui prouve donc que chaque trou de D_1 contient au moins un pôle de t et la proposition IV. 5. est établie.

Nous allons voir, grâce à un contre-exemple, qu'une algèbre de Banach $H(D)$ peut contenir une sous-algèbre $K[t,x]$ dense dans $H(D)$ $(t \in K(D))$ sans être nœthérienne. Pour construire ce contre-exemple, il faut d'abord établir deux lemmes qui seront fréquemment cités.

LEMME IV. 6. - Soit E un corps algébriquement clos et soit B une sous-E-algèbre du corps $E(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans E, telle que $E[X] \subset B$. Alors il existe une partie $\mathcal{P}$ de E telle que la partie multiplicative S engendrée par la famille des binômes $(X-\alpha)_{\alpha \in \mathcal{P}}$ satisfasse $B = S^{-1}E[X]$ et B est principale.

Remarque.- On voit en particulier que si $t \in B$ et si a est un pôle de t alors $X-a$ est inversible dans B.

LEMME IV. 7. - Soit D un fermé borné de K. Soit x l'application identique sur D et soit A une sous-algèbre fermée de $H(D)$. Soit $t \in A \cap K(D)$ et soit $a \in D$. Si a est un pôle de t ou si $|t(a)| > \|t\|_D$ alors $x-a$ est inversible dans $A[x]$.

Preuve. Si a est un pôle de t, $x-a$ est inversible dans $K[t,x]$ d'après le lemme IV. 6. donc a fortiori dans $A[x]$. Considérons donc un point $a \in D$ tel que $|t(a)| > \|t\|_D$. Alors on sait, grâce au lemme II. 11., que $t(a)-t$ est inversible dans A puisque A est une sous-algèbre de Banach de $H(D)$. D'autre part, on sait que si une fraction $h \in K(D)$ est inversible dans $H(D)$ alors $h^{-1} \in K(D)$, donc l'inverse ψ de $t(a)-t$ dans A appartient à $K(D)$ et comme a est un zéro de la fraction $t(a)-t(x)$, a est un pôle de $\psi(x)$. Donc $x-a$ est inversible dans A car $x-a$ est inversible dans $K[\psi(x), x]$ d'après le lemme IV. 6.

PROPOSITION IV. 8. - Soit a une suite de K telle que $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ quel que soit n et $\lim_{n \to \infty} |a_n| = R \in |K|$. Soit $d_n = |a_n|$ et soit ρ_n une suite de $|K|$

telle que $0 < \rho_n < d_n$ quel que soit n. Soit D_n l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a_n| \leq \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit D_∞ l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a_n| \leq \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit D_o l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| = R$. Soit $D = \bigcup_{n=o} D_n$. Soit x l'application identique sur D et soit $B = K[\frac{1}{x}, x]$. Alors $H(D)$ est une algèbre de Banach non nœthérienne telle que $\|f\|_D \in |K|$ quel que soit $f \in H(D)$ et B est une sous-algèbre dense de $H(D)$.

Preuve. Il est clair que $H(D)$ n'est pas nœthérienne puisque l'ensemble des composantes infraconnexes de D est infini. D'autre part, il est facile de voir que $\|f\|_D \in |K|$ quel que soit $f \in H(D)$. En fait il suffit de montrer cette propriété pour tout $h \in K(D)$ car si $f \in H(D)$ et $f \neq 0$, il existe $h \in K(D)$ tel que $\|f-h\|_D < \|f\|_D$ d'où $\|f\|_D = \|h\|_D$. En fait si $h \in K(D)$ la propriété est immédiate. Nous savons d'après les résultats classiques concernant la fonction $v(h, \mu)$ d'une fraction rationnelle qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $v(h, .) : \mu \to v(h, \mu)$ induise sur l'intervalle $[-\log R, -\log d_q]$ une fonction affine. Alors on a $v(h(x)) = v(h, v(x))$ quel que soit $x \in D_o \cup (\bigcup_{n \geq q} D_n)$. Soit $\Delta_q = D_o \cup (\bigcup_{n \geq q} D_n)$; on voit que

$$-\log \|h\|_{\Delta_q} = \inf[v(h, -\log R), v(h, -\log d_q)]$$

d'où $\|h\|_{\Delta_q} \in |K|$ car R et $d_q \in |K|$. D'autre part, comme $\rho_n \in |K|$ quel que soit n, il est clair que $\|h\|_{D} \in |K|$ quel que soit n, d'où en désignant $\bigcup_{n=1}^{q-1} D_n$ par Δ'_q, $\|h\|_{\Delta'_q} \in |K|$ et $\|h\|_D \in |K|$.

Nous allons montrer maintenant que B est dense dans $H(D)$. Pour cela, il suffit, comme on sait, de montrer que l'adhérence A de B dans $H(D)$ contient les fractions $\frac{1}{x-a}$ quel que soit $a \in D$. Il résulte du lemme IV. 7. que s'il existe une fraction $t \in K(D) \cap A$ telle que $|t_a(a)| > \|t_a\|_D$, alors $x-a$ est inversible dans A. Le cas où $|a| > R$ est trivial car il suffit de considérer $t_a = x$. Comme $D_o \subset D$, il reste donc à considérer le cas où $|a| < R$. Soit q le plus grand des entiers n tels que $|a| \geq d_n$. Deux cas se présentent : ou bien $|a_n - a| \geq d_n$ quel que soit n, ou bien $|a_q - a| < d_q$.

Supposons d'abord que $|a_n - a| \geq d_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| = d_{q+1}$ et soit $u = \frac{\lambda}{x}$. Pour construire la fraction t_a cherchée, nous commencerons par définir un nombre fini de fractions h_n $(1 \leq n \leq q)$ satisfaisant les relations :

(1) $\quad |h_n(\xi)| = 1$ quel que soit $\xi \in K$ tel que $|\xi - a_n| > d_n$

et

(2) $\quad |u(\xi) \prod_{i=n}^{q} h_i(\xi)| \leq 1$ quel que soit $\xi \in D_n$.

Alors il est clair que la fraction $t_a = u \prod_{n=1}^{q} h_n$ satisfait $\|t_a\|_D \leq 1 < |t_a(a)|$. En effet, si $\xi \in D_o$, on a évidemment :

$$|u(\xi)| = \frac{|\lambda|}{R} < \frac{|\lambda|}{d_{q+1}} = 1 \quad \text{et} \quad |h_n(\xi)| = 1$$

quel que soit $n = 1, \dots, q$ grâce à (1) , donc :

$$|(t_a(\xi))| < 1 \quad ;$$

de même si $\xi \in D_m$, $m > q$, on a :

$$|u(\xi)| = \frac{|\lambda|}{d_m} < 1 \quad \text{et} \quad |h_n(\xi)| = 1 \quad ;$$

si $\xi \in D_m$, $m \leq q$, alors on a grâce à (1) :

$$|h_n(\xi)| = 1 \quad \text{quel que soit } n < q ,$$

donc :

$$|t_a(\xi)| = |u(\xi) \prod_{i=n}^{q} h_i(\xi)| \leq 1$$

ce qui montre que $\| t_a \|_D \leq 1$.

D'autre part, puisque $d_q \leq |a| < d_{q+1}$, on a : $|u(\xi)| = |\frac{\lambda}{a}| > 1$ et grâce à (1) , $|h_n(\xi)| = 1$ quel que soit $n = 1, \dots, q$ ce qui montre que $|t_a(a)| > 1$.

Pour construire les fractions $h_1, \dots, h_q$ nous allons choisir des entiers $t_1, \dots, t_q$ satisfaisant les relations :

(3) $\quad \frac{|\lambda|}{d_n} \prod_{i=n+1}^{q} \left(\frac{d_i}{d_n}\right)^{t_i} \left(\frac{\rho_n}{d_n}\right)^{t_n} \leq 1$ quel que soit $n = 1, \dots, q-1$

et

(3') $\quad \frac{|\lambda|}{d_q} \left(\frac{\rho_q}{d_q}\right)^{t_q} \leq 1$.

Comme on a $\rho_n < d_n$ quel que soit n , il est clair que le choix des entiers t_n ne pose aucun problème grâce à une récurrence triviale permettant de définir t_n lorsque t_q , t_{q-1} , ... , t_{n+1} sont connus. Soit :

$$h_n = \left(\frac{x - a_n}{x}\right)^{t_n} \quad ;$$

il est évident que les fractions $h_1, \dots, h_q$ satisfont la relation (1) ; vérifions qu'elles satisfont la relation (2).

En effet, si $\xi \in D_n$, on a bien $|h_i(\xi)| = \left(\frac{d_i}{d_n}\right)^{t_i}$ quel que soit i tel que $n < i \leq q$, $|h_n(\xi)| \leq \left(\frac{\rho_n}{d_n}\right)^{t_n}$ et $|u(\xi)| = \frac{|\lambda|}{d_n}$, d'où :

$$|u(\xi) \prod_{i=n}^{q} h_i(\xi)| \leq \frac{|\lambda|}{d_n} \prod_{i=n+1}^{q} \frac{d_i}{d_n} \left(\frac{\rho_n}{d_n}\right)^{t_n} \leq 1 \quad ,$$

et on voit donc que le problème est résolu dans le cas où $|a_n - a| \geq d_n$ quel que soit n.

Considérons maintenant le cas où $|a_q - a| < d_q$. Choisissons d'abord un entier ℓ satisfaisant la relation

$$(4) \qquad \left(\frac{d_q}{d_{q+1}}\right)^{\ell} < \frac{\rho_q}{d_q} \quad .$$

Soit $\theta \in K$ tel que

(5) $\quad |\theta| = (d_{q+1})^{\ell}$, et soit $y = \frac{\theta}{x^{\ell}}$. Nous allons définir une fraction g_q satisfaisant la relation (1) et la relation

$$(2'') \qquad \sup(\|y\, g_q\|_{D_q}, 1) < |y(a)\, g_q(a)|$$

ainsi que des fractions $g_1, \dots, g_{q-1}$ satisfaisant quel que soit $n = 1, \dots, q-1$ la relation (1) ainsi que la relation

$$(2') \qquad |y(\xi) \prod_{i=n}^{q} g_i(\xi)| \leq 1 \qquad \text{quel que soit } \xi \in D_n \, .$$

Alors il est clair que la fraction $t_a = y \prod_{n=1}^{q} g_n$ satisfait :

$$|t(a)| = |y(a)\, g_q(a)| \quad \text{et} \quad |t_a(\xi)| = |y(\xi)\, g_q(\xi)|$$

quel que soit $\xi \in D_q$ grâce à (1), donc

$$|t(a)| > \sup(\|t_a\|_{D_q}, 1) \qquad \text{grâce à (2'')}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$|t_a(\xi)| = |y(\xi) \prod_{i=1}^{q} g_i(\xi)| \leq 1 \qquad \text{quel que soit } \xi \in D_n \, ,$$

quel que soit $n \neq q$, grâce à (1), (2') et (5) et on a donc bien

$$|t_a(a)| > \|t_a\|_D .$$

Pour construire les fractions $g_1, \ldots, g_q$ nous allons choisir des entiers $s_1, \ldots, s_q$ satisfaisant les relations suivantes :

(3''') $\quad s_q = 1$;

(3'') $\quad \dfrac{|\theta|}{d_n^{\ell}} \left(\prod_{i=n+1}^{q} \left(\dfrac{d_i}{d_n}\right)^{s_i} \left(\dfrac{\rho_n}{d_n}\right)^{s_n} \right) \leq 1$

quel que soit n tel que $1 \leq n \leq q-1$.

Alors, quel que soit $n \leq q$, soit $g_n = \left(\dfrac{x - a_n}{x}\right)^{s_n}$. Il est évident que $g_1, \ldots, g_q$ satisfont la relation (1). Montrons donc que $g_1, \ldots, g_q$ satisfont la relation (2') et que g_q satisfait la relation (2''). Soit $n \leq q-1$. Alors quel que soit $\xi \in D$, on a :

$$|y(\xi)| = \frac{|\theta|}{(d_n)^{\ell}} \; ; \quad |g_i(\xi)| = \left(\frac{d_i}{d_n}\right)^{s_i} \quad \text{quel que soit } i \text{ tel que } n < i \leq q \; ;$$

$$|g_n(\xi)| = \left(\frac{\rho_n}{d_n}\right)^{s_n}$$

On voit donc que la relation (2') est satisfaite grâce à (3''). Enfin on a :

$$|y(a)\, g_q(a)| = \frac{|\theta|}{(d_q)^{\ell}} \cdot \frac{|a - a_q|}{d_q} > \frac{|\theta|}{(d_q)^{\ell}} \cdot \frac{\rho_q}{d_q} > 1 \quad \text{d'après (4)} .$$

D'autre part, $\quad \dfrac{|\theta|}{(d_q)^{\ell}} \cdot \dfrac{\rho_q}{d_q} \geq |y(\xi)\, g_q(\xi)| \qquad$ quel que soit $\xi \in D_q$,

ce qui montre que g_q satisfait (2'') ; le résultat est donc établi lorsque $|a_q - a| < d_q$ et la démonstration est achevée.

§. 3. - QUOTIENTS D'UNE ALGEBRE DE BANACH NOETHERIENNE H(D)

Rappelons que l'on sait, grâce à la proposition II. 3. que tout idéal d'une algèbre noethérienne H(D) est principal et admet un générateur de la forme χP

précisée à la proposition II. 3. Ceci permet d'étudier maintenant les quotients d'algèbres de Banach nœthériennes $H(D)$. Remarquons d'abord une propriété qui découle de la proposition II. 12. d).

PROPOSITION IV. 9. - Soit D un fermé borné de K et soit A une K-algèbre de Banach algèbriquement isomorphe à $H(D)$. Alors l'isomorphisme de A sur $H(D)$ est bicontinu.

Preuve. On sait que la norme $\| \ \|_D$ de $H(D)$ est sa norme spectrale ce qui prouve que A est complète pour sa norme spectrale et que la norme d'algèbre de Banach donnée sur A est équivalente à sa norme spectrale, d'après la proposition II. 12. d.

PROPOSITION IV. 10. - Soit une algèbre de Banach nœthérienne $H(D)$ et soit I un idéal de $H(D)$. Soit un générateur de I de la forme χP où χ est la fonction caractéristique d'une réunion Δ de composantes infraconnexes de D et où P est un polynôme dont tous les zéros $a_1, \dots, a_m$ appartiennent à Δ. Soit $D' = (D-\Delta) \cup \{a_1, \dots, a_m\}$ et soit $A = \frac{H(D)}{I}$. Alors A est isomorphe à une algèbre de Krasner si et seulement si tous les zéros de P sont simples. Si cette condition est remplie, alors A, munie de la structure d'algèbre de Banach quotient, est isomorphe algébriquement et topologiquement à $H(D')$ et la surjection canonique de $H(D)$ sur $H(D')$ est l'application ψ qui associe à tout élément $f \in H(D)$ sa restriction à D'

Remarque. Les zéros de P sont simples si et seulement si A n'admet pas d'élément nilpotent non nul.

Preuve. Il est évident que si P admet un zéro multiple, alors A possède des éléments nilpotents non nuls et n'est pas isomorphe à une algèbre de Krasner. Supposons maintenant que tous les zéros de P soient simples et montrons que A est isomorphe algébriquement et topologiquement à $H(D')$. Puisque les zéros de P sont tous simples, il résulte de la proposition II. 3. que I est l'idéal des éléments nuls sur D'. Donc I est le noyau de l'application ψ qui à tout élément $f \in H(D)$ associe sa restriction à D', $\psi(f) \in H(D')$. Vérifions que ψ est surjective. Soit $\Delta_1 = D - \Delta$ et soit χ_1 sa fonction caractéristique dans $H(D)$. Soit $h \in H(D')$

et soit $\lambda_i = h(a_i)$ $(1 \leq i \leq m)$. Grâce aux formules d'interpolation il est clair qu'il existe $Q \in K[X]$ tel que $Q(a_i) = \lambda_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Or Δ est une réunion finie d'infraconnexes ouverts ou réduits à un point et il résulte du lemme VII. 7. de [5] qu'il existe $g \in H(D)$ tel que $g(\xi) = h(\xi)$ quel que soit $\xi \in \Delta_1$. Soit $f = \chi_1 g + \chi Q \in H(D)$. Il est clair que $\psi(f) = h$. Soit φ la surjection canonique de $H(D)$ sur A ; comme $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) = I$, il existe un isomorphisme Φ de A sur $H(D)$ tel que $\psi = \Phi \circ \varphi$ et Φ est bicontinu d'après la proposition IV. 9.

DEFINITION. - Nous dirons qu'une algèbre de Banach nœthérienne $H(D)$ est *dégradée* si D possède des points isolés.

On a maintenant la proposition IV. 11.

PROPOSITION IV. 11. - *Soit* D *un fermé borné tel que* $H(D)$ *soit une algèbre de Banach nœthérienne dégradée. Alors il existe un ouvert fermé borné* D' *tel que* $D' \supset D$, *tel que toute composante infraconnexe ouverte de* D *soit une composante infraconnexe de* D' , *tel que* $H(D)$ *soit nœthérienne et que* $H(D)$ *soit isomorphe à un quotient de* $H(D')$. *De plus si* D *est ultracirconférencié, on peut choisir* D' *ultracirconférencié.*

Preuve. Soient $a_1, \dots, a_m$ les points isolés de D ; soit $r > 0$ tel que l'ensemble Δ des $\xi \in K$ satisfaisant $\inf_{1 \leq i \leq n} |\xi - a_i| \leq r$, vérifie $\Delta \cap D = \{a_1, \dots, a_m\}$. Soit $D' = \Delta \cup D$; soit χ la fonction caractéristique de Δ dans $H(D')$ et soit $P = \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)$. Alors il est clair que $\dfrac{H(D')}{\chi P\, H(D')}$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $H(D)$ d'après la proposition IV. 9. Il est évident que chaque composante infraconnexe de D' est ou bien une composante infraconnexe de D , ou bien un disque circonférencié de centre a_i , de diamètre $r_i \in |K|$ $(1 \leq i \leq m)$. Comme $H(D)$ est nœthérienne, les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini et chacune est ouverte et sans T - filtre ou réduite à un point. Donc celles de D' sont en nombre fini et chacune est ouverte et sans T - filtre ; alors $H(D')$ est aussi nœthérienne. De plus il est évident que si D est ultracirconférencié, D' l'est également.

Remarque : Si une algèbre de Banach nœthérienne $H(D)$ est intègre, D est infraconnexe et $H(D)$ est non dégradée.

V

CARACTERISATION DES ALGEBRES DE KRASNER-TATE

§. 1. - CARACTERISATION PARMI LES ALGEBRES DE KRASNER

Nous allons étudier maintenant à quelle condition une algèbre topologiquement de type fini est isomorphe à une algèbre de Krasner $H(D)$ et ce paragraphe permet d'obtenir quelques résultats concernant notamment la forme de D.

DEFINITION. - Nous dirons qu'une K-algèbre de Banach est une algèbre de Krasner-Tate si elle est isomorphe à la fois à une algèbre de Krasner $H(D)$ où D est un fermé borné infini et à une K-algèbre topologiquement de type fini. Grâce à la proposition IV. 9. ces isomorphismes sont bicontinus.

Remarque. - Si $D = U$ on sait que $H(U)$ est isomorphe à $K\{X\}$. Si $D = \{a_1, \dots, a_n\}$ est un ensemble fini d'ordre n inclus dans U, il est clair que $H(D)$ est isomorphe à $\dfrac{K\{X\}}{\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)\, K\{X\}}$ c'est-à-dire à K^n ; l'algèbre $H(D)$ est donc isomorphe à une algèbre topologiquement de type fini mais ce cas est trivial.

PROPOSITION V. 1. - Soit une algèbre de Krasner-Tate $H(D)$. Alors D est ultracirconférencié. L'algèbre $H(D)$ est non dégradée si et seulement si D est ouvert.

Preuve. La première assertion est une conséquence évidente de la proposition IV. 2 D'autre part, il est évident qu'un ultracirconférencié est ouvert si et seulement s'il n'admet aucun point isolé.

PROPOSITION V. 2. - Soit D un ouvert ultracirconférencié de K et soit $t \in K(D)$ telle que $t(D) = U$, $D = t^{-1}(U)$, $\deg(t) \geq 1$. Alors l'adhérence de $K[t]$ dans

$H(D)$ est une extension topologiquement pure $K\{t\}$ dont la norme est induite par celle de $H(D)$. Soit x l'application identique sur D ; alors x est entier sur $K[t]$ et l'on a $H(D) = K\{t\}[x]$.

Preuve. La première assertion découle simplement de la proposition II. 16. Soit B l'algèbre $K\{t\}[x]$. Comme B est une extension entière finie de l'extension topologiquement pure $K\{t\}$, B admet une norme $\| \cdot \|$ qui en fait une algèbre topologiquement de type fini d'après la proposition III. 9. et B est muni d'une semi-norme spectrale notée $\| \cdot \|_{sp}$. Il suffit d'établir que $K(D) \subset B$ car la norme spectrale de $K(D)$ est induite par celle de $H(D)$ et l'on a $\|f\|_{sp} = \|f\|_D$ pour tout $f \in K(D)$ grâce à la proposition II. 12. c). La semi-norme spectrale de B est donc une norme équivalente à la norme $\| \cdot \|$ d'après la proposition II. 14. Or si $B \supset K(D)$, B est dense dans $H(D)$ pour $\| \cdot \|_D$ donc $H(D)$ est le complété de B pour $\| \cdot \|_{sp}$ ce qui prouve que $H(D) = B$.

Pour montrer que $\frac{1}{x-a} \in B$ quel que soit $a \notin D$, on peut utiliser le lemme IV.7. : puisque $D = t^{-1}(U)$, on a $|t(a)| > \|t\|_D$, donc $\frac{1}{x-a} \in K\{t\}[x]$, d'où $K(D) \subset B$ et la proposition V. 2. est établie.

THEOREME V. 3. - Soit une algèbre de Banach $H(D)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate non dégradée.

ii) $H(D)$ contient une fraction $t \in H(D)$ telle que $\deg(t) \geq 1$, $t(D) = U$, $D = t^{-1}(U)$, $H(D) = K\{t\}[x]$.

iii) D est ouvert ultracirconférencié.

Preuve. Il est clair que i) entraîne ii) d'après la proposition V. 1. et que iii) entraîne ii) d'après la proposition V. 2. Enfin ii) entraîne i) d'après le théorème III. 9. et la proposition IV. 3. c et d.

Nous allons maintenant établir un théorème analogue au théorème V. 4. qui concerne toutes les algèbres de Krasner-Tate.

THEOREME V. 4. - Soit une algèbre de Banach $H(D)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $H(D)$ *est une algèbre de Krasner-Tate* ;

ii) $H(D)$ *contient une fraction* $t \in K(D)$ *telle que* $\deg(t) \geq 1$, $t(D) = U$, $H(D) = K\{t\}[x]$;

iii) D *est ultracirconférencié.*

Preuve. On sait, grâce aux propositions III. 9. et V. 1. que ii) entraîne i) et que i) entraîne iii). Montrons que iii) entraîne ii).

Nous savons, grâce à la proposition IV. 10 qu'il existe un ouvert ultracirconférencié $D' \supset D$ tel que les composantes infraconnexes non réduites à un point de D soient des composantes infraconnexes de D' et tel que $H(D)$ soit un quotient de $H(D')$. Soient $D'_1, \ldots, D'_n$ les composantes infraconnexes de D' . Puisque D' est ultracirconférencié ouvert, il existe d'après la proposition IV. 3. e, une fraction $T \in K(D')$ telle que $D' = T^{-1}(U)$, $T(D') = U$, $\overline{\overline{T(D'_i)}} = U$ quel que soit i $(1 \leq i \leq n)$ et telle que si X est l'application identique sur D' , on ait $H(D) = K\{T\}[X]$. Comme $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate, D est infini et l'ensemble des composantes infraconnexes est fini. Donc l'une au moins des composantes infraconnexes D_q de D n'est pas réduite à un point, donc D_q est aussi une composante infraconnexe de D' et $\overline{\overline{T(D_q)}} = U$. Comme $T(D_q)$ est infraconnexe, il est clair que $T(D_q)$ est une frontière analytique de U . Soit φ la surjection canonique de $H(D')$ sur $H(D)$ et soit $t = \varphi(T)$. Alors $\varphi(K\{T\})$ est une extension topologiquement pure engendrée par t dans $H(D)$, car on a $t(D_q) = T(D_q) \subset \overline{\overline{T(D_q)}} = U$ et $t(D) \subset T(D) = U$, d'où $\overline{\overline{t(D_q)}} \subset \overline{t(D)} = U$ et comme $t(D_q)$ est infraconnexe, $t(D_q)$ est une frontière analytique de U . Soit $x = \varphi(X)$; alors on a :

$$H(D) = \varphi(H(D')) = \varphi(K\{T\})[\varphi(X)] = K\{t\}[x]$$

et le théorème V. 4. est établi.

Nous pouvons également déduire de la proposition IV. 5. une forme de caractérisation intéressante pour les algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Krasner.

THEOREME V. 5. - *Une algèbre de Banach* $H(D)$ *dont l'application identique sur* D *est notée* x , *est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle possède les deux propriétés suivantes* :

i) D est calibré ;

ii) il existe une fraction $t \in K(D)$ telle que $K[t,x]$ soit dense dans $H(D)$.

Preuve. Si $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate, il existe d'après le théorème V.4. une fraction $t \in K(D)$ telle que $t(D) = U$, $H(D) = K\{t\}[x]$ où la norme canonique de $K\{t\}$ est induite par $\| \cdot \|_D$. Donc $K[t,x]$ est dense dans $H(D)$. Réciproquement, on sait, grâce à la proposition IV.5., que si D est calibré et si $K[t,x]$ est dense dans $H(D)$, alors D est ultracirconférencié, donc $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate.

Remarque 1. - L'hypothèse i) n'est pas superflue. En effet, il existe des algèbres de Banach $H(D)$ satisfaisant ii) et non i). On peut tout d'abord considérer un disque D de diamètre $\rho \notin |K|$ (si $|K| \neq \mathbb{R}$). Alors il est clair que $K[x]$ est dense dans $H(D)$ mais $H(D)$ n'est évidemment pas une algèbre de Krasner-Tate. D'autre part, le théorème IV.8. montre que même si l'algèbre $H(D)$ satisfait l'hypothèse ii) du théorème V.5., elle n'est pas forcément nœthérienne. C'est un exemple de complété d'une algèbre de type fini sur K qui n'est pas topologiquement de type fini sur K.

Remarque 2. - Le théorème V.4. montre que la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - tQ(x) = 0$, P et Q étant deux polynômes premiers entre eux dans $K[X]$ tels que $\deg(P) > \deg(Q)$, caractérise les algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Krasner. De façon évidente, il n'en est pas de même parmi les algèbres de Tate. En effet, considérons par exemple deux disques circonférenciés D_1 et D_2 de centres respectifs 0 et 1, de rayon $r < 1$. Soit χ la fonction caractéristique de D_1 dans $H(D_1 \cup D_2)$ et soit :

$$A = \frac{H(D_1 \cup D_2)}{(\chi x^2)\, H(D_1 \cup D_2)}$$

Il est clair que $H(D_1 \cup D_2)$ est une algèbre de Krasner-Tate, donc A est topologiquement de type fini sur K. Cependant on voit que A admet pour nilpotent l'élément $\varphi(\chi x)$ (où φ désigne la surjection canonique de $H(D_1 \cup D_2)$ sur A) et A n'est donc pas une algèbre de Krasner. Comme $H(D_1 \cup D_2)$ est une algèbre de Krasner-Tate, elle est de la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - tQ(x) = 0$ avec $\deg(P) > \deg(Q)$. Posons $\tau = \varphi(t)$ et $\mathfrak{x} = \varphi(x)$; comme $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap K\{t\} = \{0\}$, on a $A = K\{\tau\}[\mathfrak{x}]$ où $\mathfrak{x}$ satisfait $P(\mathfrak{x}) - \tau Q(\mathfrak{x}) = 0$, bien que A ne soit pas une algèbre de Krasner.

§. 2. - SPECTRE D'UNE ALGEBRE DE KRASNER-TATE

On sait, grâce à un théorème de Grauert ([9], §. 2, satz 2) que toute partie affine ouverte de U est un polyèdre analytique (définitions de [13]). D'autre part, il est clair, d'après la proposition IV. 3., que les ultracirconférenciés ouverts inclus dans U sont les polyèdres analytiques de U. Comme les algèbres de Tate sont nœthériennes, on en déduit que les parties affines du disque unité sont les ensembles ultracirconférenciés inclus dans U.

Par ailleurs, on peut montrer que si $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate telle que $D \subset U$ alors D est une partie affine de U. En effet, $K\{X\}$ étant identifié à l'algèbre $H(U)$, considérons l'homomorphisme θ qui à tout élément $f(X) \in H(U)$ associe sa restriction $f(x)$ à D. On définit l'application ${}^a\theta$ de l'ensemble $\mathrm{Max}(H(D))$ des idéaux maximaux de $H(D)$, dans l'ensemble $\mathrm{Max}(K\{X\})$ des idéaux maximaux de $K\{X\}$ par ${}^a\theta(\mathfrak{M}) = \theta^{-1}(\mathfrak{M})$ quel que soit $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(H(D))$. Alors si $\mathrm{Max}(K\{X\})$ est identifié à U de façon canonique (chaque idéal $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(K\{X\})$ étant associé au point α de U tel que $f(\alpha) = 0$ quel que soit $f \in \mathfrak{M}$), on voit que ${}^a\theta(\mathrm{Max}(H(D)) = D$. En effet, tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $H(D)$ est caractérisé par un point α de D tel que $g(\alpha) = 0$ quel que soit $g \in \mathfrak{M}$. Comme x est la restriction de l'application identique X sur U, $(X \in H(U) = K\{X\})$, on voit que $\theta^{-1}(\mathfrak{M})$ est l'idéal des éléments $f \in H(U)$ tels que $f(\alpha) = 0$. Pour établir que D est une partie affine de U nous devons, par définition, montrer que pour toute algèbre topologiquement de type fini A sur K et pour tout homomorphisme φ de $K\{X\}$ dans A tel que ${}^a\varphi(\mathrm{Max}(A)) \subset D$, φ se factorise de façon unique sous la forme $\varphi = \psi \circ \theta$ où ψ est un homomorphisme d'algèbre de $H(D)$ dans A.

Pour cela remarquons que θ est injectif de façon évidente car l'intérieur de D est non vide. Il existe un homomorphisme de K-algèbre ψ_o défini sur $\theta(K\{X\})$, à valeur dans A, tel que $\varphi = \psi_o \circ \theta$. Montrons que ψ_o se prolonge de façon unique en un homomorphisme ψ de $H(D)$ dans A. Pour cela, prolongeons d'abord ψ_o en un homomorphisme ψ_1 défini sur l'algèbre engendrée par $\theta(K\{X\})$ et $K(D)$, de la façon suivante : si $(x-\alpha)$ est inversible dans $K(D)$, alors $\alpha \notin {}^a\theta(\mathrm{Max}\, H(D))$, donc $\alpha \notin {}^a\varphi(\mathrm{Max}(A))$ et $\varphi(X)-\alpha$ est inversible dans A, ce qui prouve $\psi_o(x-\alpha)$ est inversible dans A, d'où le prolongement de ψ_o en ψ_1.

Pour prolonger ψ_1 en un homomorphisme ψ de $H(D)$ dans A, rappelons d'abord qu'il existe $t \in K(D)$ telle que $t(D) = U$ et $H(D) = K\{t\}[x]$; notons $\| \ \|$ la norme d'algèbre topologiquement du type fini de A et $\|.\|_{sp}$ sa semi-norme spectrale. Il suffit donc de montrer que la restriction de ψ_1 à $K[t]$ est continue pour les normes $\|.\|_D$ de $H(D)$ et $\|.\|$ de A pour pouvoir ensuite prolonger la définition de ψ_1 à $K\{t\}$, donc à $K\{t\}[x]$. Or on a $\|\psi_1(t)\|_{sp} \leq \|t\|_D = 1$ ce qui prouve que la suite $\|\psi_1(t)^n\|$ est bornée, donc la restriction de ψ_1 à $K[t]$ est continue. Alors, ψ_1 est la restriction d'un homomorphisme ψ de $H(D)$ dans A tel que $\varphi = \psi \circ \theta$.

Il est immédiat de voir que ψ est unique car $\theta(X) = x$ et si ψ' était un homomorphisme de $H(D)$ dans A tel que $\psi' \circ \theta = \psi \circ \theta$, on aurait en particulier $\psi'(x) = \psi(x)$, d'où $\psi'(f(x)) = \psi(f(x))$ pour tout $f \in H(D)$ du fait que ψ et ψ' coïncident sur $K(D)$ et sont continus sur $K[t]$ donc sur $H(D)$. On voit ainsi que pour toute partie affine D de U, l'algèbre de Krasner-Tate $H(D)$ et l'homomorphisme $\theta : X \to x$ définissent un foncteur F_D représentable (définition de [13]).

THEOREME V. 6. - Soit une algèbre de Krasner-Tate $H(D)$ telle que $D \subset U$ et soit $t \in K(D)$ telle que $t(D) = U$, $H(D) = K\{t\}[x]$. Soit $K\{T,X\}$ une extension topologiquement pure de K de degré 2 et soit Φ la surjection canonique de $K\{T,X\}$ sur $H(D)$ définie par $\Phi(T) = t$, $\Phi(X) = x$ (l'existence de Φ est évidente puisque $\|x\|_D \leq \|t\|_D = 1$). Soit $\Delta \subset U \times U$ le domaine d'annulation de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ en bijection avec le spectre maximal de $H(D)$ d'après la proposition III. 4. Alors l'application $\pi : (\lambda, \mu) \to \mu$ est une bijection de Δ sur D et on a $\lambda = t(\mu)$ quel que soit $\mu \in D$.

Preuve. Notons A l'algèbre considérée comme algèbre topologiquement de type fini $\frac{K\{T,X\}}{\operatorname{Ker}\varphi}$; soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A et soit (λ, μ) le point de Δ qui lui correspond d'après la proposition III. 4. Alors on sait que l'homomorphisme de K-algèbre χ de A sur K dont $\mathfrak{M}$ est le noyau satisfait, pour tout élément $F(T,X) \in \{T,X\}$, $\chi(F(t,x)) = F(\lambda,\mu)$ et en particulier $\chi(t) = \lambda$, $\chi(x) = \mu$. Or t est par définition une fraction de x, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont premiers entre eux, et l'on a donc $\lambda = t(\mu)$ (car $P(\mu) - \lambda\, Q(\mu) = 0$). La projection π de Δ dans K est donc injective puisque λ est une fonction de μ. Elle est surjective car si $\alpha \in D$, α définit dans H(D) l'idéal maximal des éléments nuls en α et cet idéal est le noyau de la surjection χ_α de H(D) sur K telle que $\chi_\alpha(x) = \alpha$ et $\chi_\alpha(t) = t(\alpha)$. Alors le point $(t(\alpha), \alpha)$ de $U \times U$ appartient à Δ et admet α pour image par π, donc $\pi(\Delta) = D$.

Remarque. - On pourrait dire que π projette le "spectre au sens de Tate" sur le "spectre au sens de Krasner".

§. 3. - CARACTERISATION PARMI LES ALGEBRES DE TATE

Nous allons chercher maintenant à quelle condition une algèbre topologiquement de type fini est une algèbre de Krasner-Tate.

DEFINITION. - Nous dirons que deux éléments a et b d'un anneau commutatif A sont fortement étrangers dans A si $aA + bA = A$.

Remarque. - Deux éléments F et G d'une extension topologiquement pure $K\{T,X\}$ sont fortement étrangers dans $K\{T,X\}$ si et seulement si leurs domaines d'annulation sont disjoints d'après la proposition III. 3.

LEMME V. 7. - Soient P et Q deux polynômes fortement étrangers dans K[X]. Alors l'idéal engendré dans l'extension topologiquement pure $K\{T,X\}$ par $P(X) - T\,Q(X)$ est égal à son radical.

Preuve. Il est clair que dans tout anneau factoriel, un idéal principal engendré par g est égal à son radical si et seulement si g n'admet pas de facteurs multiples dans sa décomposition en facteurs premiers. Montrons que $P(X) - TQ(X)$ n'admet pas de facteur premier multiple dans $K\{T,X\}$. Remarquons pour cela que dans toute extension topologiquement pure $K\{Y_1,\dots,Y_n\}$ l'application D_i qui à tout élément $f(Y_1,\dots,Y_n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j Y_i^j$ (où $a_j \in K\{Y_1,\dots,Y_{i-1}, Y_{i+1},\dots,Y_n\}$) associe l'élément $\frac{\partial f}{\partial Y_i} = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j Y_i^j \in K\{Y_1,\dots,Y_n\}$, est une dérivation de la K-algèbre $K\{Y_1,\dots,Y_n\}$. Il en résulte que si f est un facteur multiple de $P - TQ$ dans $K\{T,X\}$, alors f est encore un facteur de $\frac{\partial}{\partial T}(P - TQ) = -Q$. Donc f divise Q et comme f divise $P - TQ$, f divise P et Q donc f est inversible dans $K\{T,X\}$ et le lemme est établi.

THEOREME V. 8. - Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate non dégradée et soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$. Soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant :

(1) la fraction $t = \frac{P}{Q} \in K(D')$ et satisfait $t(D') = U$, $D' = t^{-1}(U)$;

(2) P est unitaire ;

(3) $\deg(P) > \deg(Q)$;

(4) $1 = \|P\| \geq \|Q\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$.

Alors $H(D)$ est isomorphe à l'algèbre topologiquement de type fini $\frac{K\{T,X\}}{(P(X) - TQ(X))K\{T,X\}}$ où $K\{T,X\}$ est une extension topologiquement pure de degré 2.

Réciproquement, soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant (2), (3), (4). Soit $t = \frac{P}{Q} \in K(X)$ et soit $D = t^{-1}(U)$. Alors l'algèbre topologiquement de type fini $\frac{K\{T,X\}}{(P(X) - TQ(X))K\{T,X\}}$ est isomorphe à $H(D)$.

Remarque 1. - On peut encore résumer le théorème V. 8. en disant qu'une algèbre de Tate est une algèbre de Krasner non dégradée si et seulement si elle est de la forme $\frac{K\{T,X\}}{(P-TQ)K\{T,X\}}$ où P et Q satisfont (2), (3), (4).

Remarque 2. - Le fait qu'une algèbre de Krasner-Tate non dégradée A puisse se mettre sous la forme $\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X) - T\,Q(X))\,K\{T,X\}}$ n'implique pas que cette forme soit la seule possible pour faire apparaître A comme quotient d'une extension topologiquement pure de degré 2 . Considérons notamment l'exemple suivant. Soit $A = \dfrac{K\{T,Y\}}{Y^3 + 4Y^2T + 5\,Y\,T^2 + 2T^3 + Y + 1}$. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate ; en effet, il suffit de faire la changement de variable $X = Y + T$ pour constater que $A = \dfrac{K\{T,X\}}{[X^3 + X + 1 - T(-X^2 + 1)]\,K\{T,X\}}$. Sous cette dernière forme, il est clair que A est une algèbre de Krasner-Tate d'après le théorème V. 8.

Considérons par contre l'algèbre $B = \dfrac{K\{T,Y\}}{(Y^2 - T\,Y)\,K\{T,Y\}}$. Si on pose $X = T - Y$, on voit que $X\,Y = 0$; alors B est un anneau non intègre qui ne contient pas d'idempotent autre que 0 et 1 . Ce n'est donc pas une algèbre de Krasner puisque toute algèbre de Krasner nœthérienne non intègre H(D) a un spectre D non infraconnexe et admet donc pour idempotents non triviaux les fonctions caractéristiques des composantes infraconnexes de D (proposition II. 3.).

Preuve. Montrons d'abord la proposition directe. Nous savons, grâce à la proposition V. 3. , que H(D') est une algèbre de la forme $K\{t\}[x]$ où $K\{t\}$ est l'adhérence de $K[t]$ dans H(D') , isomorphe à une extension topologiquement pure de degré 1 . Il en résulte que H(D') est isomorphe à un quotient de $K\{T,X\}$ tel que si φ désigne la surjection canonique de $K\{T,X\}$ sur H(D') , on ait $\varphi(T) = t$, $\varphi(X) = x$. On a donc $H(D') \simeq \dfrac{K\{T,X\}}{\operatorname{Ker}\varphi}$ et $P(X) - T\,Q(X) \in \operatorname{Ker}\varphi$. De plus, on sait, grâce à la proposition V. 6. , que le domaine d'annulation de $\operatorname{Ker}\varphi$ est égal au domaine d'annulation de l'idéal $\mathfrak{A}$ engendré par $P(X) - T\,Q(X)$ dans $K\{T,X\}$. Par conséquent, le radical R de $\operatorname{Ker}\varphi$ est égal au radical de $\mathfrak{A}$ d'après la proposition III. 2. Comme $\mathfrak{A} \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et $R = \mathfrak{A}$ d'après le lemme V. 6. , on a donc $\mathfrak{A} = \operatorname{Ker}\varphi$ et la proposition directe est établie.

La proposition réciproque est immédiate. Puisque $\deg(t) \geq 1$, il est clair que l'on a $t(D) = U$ et $D = t^{-1}(U)$, d'où $H(D) = K\{t\}[x]$ d'après le théorème V. 2. et la proposition directe montre que H(D) est isomorphe à $\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X) - T\,Q(X))\,K\{T,X\}}$.

Nous avons vu au paragraphe précédent que la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - tQ(x) = 0$, avec P et Q fortement étrangers dans $K[X]$ et $\deg(P) > \deg(Q)$, n'est pas caractéristique des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Tate. On peut maintenant apporter une précision sur ce point.

THEOREME V. 9. - Soit A une algèbre topologiquement de type fini sur K . Alors A est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si A est une algèbre réduite, de la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - tQ(x) = 0$ telle que P et Q soient deux polynômes fortement étrangers dans $K[X]$ vérifiant $\deg(P) > \deg(Q)$.

Preuve. Soit A une algèbre réduite topologiquement de type fini sur K , de la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - tQ(x) = 0$ telle que P et Q soient fortement étrangers dans $K[X]$ et $\deg(P)>\deg(Q)$. Il est immédiat de se ramener au cas où P et Q satisfont les conditions (2) , (3) , (4) du théorème V. 8. , par un changement de variable opportunément choisi. Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_o$ $(a_n \neq 0)$ et soit $Q(X) = b_m X^m + \dots + b_o$ $(m < n)$. Quel que soit $\lambda \in K$, soit $x' = \lambda x$. Alors on a trivialement

$$x'^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i} \frac{a_i}{a_n} x'^i + t \sum_{i=0}^{m} \lambda^{n-i} \frac{b_i}{a_n} x'^i = 0 .$$

Soit $P_1(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i} \frac{a_i}{a_n} X^i$ et soit $Q_1(X) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^{n-i} \frac{b_i}{a_n} X^i$. Il est clair que l'on peut choisir $\lambda \in K$ tel que $0 < |\lambda| \leq 1$ et tel que les polynômes P_1 et Q_1 satisfassent (2), (3), (4) . On voit que P_1 et Q_1 sont encore fortement étrangers dans $K[X]$; d'autre part, on a :

$$A = K\{t\}[x] = K\{t\}[x']$$

et l'on est donc ramené au cas où P et Q satisfont (2), (3), (4).

Pour achever la démonstration, considérons la surjection canonique φ de l'extension topologiquement pure $K\{T,X\}$ sur A telle que $\varphi(T) = t$, $\varphi(X) = x$. Il est clair que $P(X) - TQ(X) \in \operatorname{Ker} \varphi$ et par conséquent A est isomorphe à un quotient de l'algèbre de Krasner-Tate $\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X) - TQ(X))K\{T,X\}}$. Il en résulte, grâce à la proposition V. 5., que, puisque A est réduite, A est encore une algèbre de Krasner-Tate. Réciproquement, on sait que toute algèbre de Krasner-Tate est de la forme annoncée et le théorème V. 9. est donc établi.

Nous allons maintenant généraliser le théorème V. 8. par un théorème concernant toutes les algèbres de Krasner-Tate, dégradées ou non. Ce théorème a d'autre part l'avantage de mettre en évidence le rôle des composantes infraconnexes ; il utilisera un lemme classique qu'il faut rappeler.

LEMME V. 10. - *Soit* A *un anneau commutatif unitaire et soient* $I_1, \dots, I_n$ *des idéaux de* A *tels que* $(I_1 \cdot \dots \cdot I_q) + I_{q+1} = A$ *quel que soit* q $(1 \leq q \leq n-1)$. *Alors l'anneau quotient* $\dfrac{A}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n}$ *est isomorphe à l'anneau produit* $\dfrac{A}{I_1} \times \dots \times \dfrac{A}{I_n}$.

THEOREME V. 11. - *Soit* $H(D)$ *une algèbre de Krasner-Tate. Soit* D' *isomorphe à* D *tel que* $D' \subset U$, *soient* $D_1, \dots, D_n$ *les composantes infraconnexes de* D' *qui ne sont pas réduites à un point et soient* $a_1, \dots, a_n$ *les points isolés de* D'. *Pour toute famille de couples* (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ *de polynômes fortement étrangers de* $K[X]$, *on notera* (1), (2), (3), (4), (5), (6) *les propriétés suivantes* :

(1) *la fraction* $t_i = \dfrac{P_i}{Q_i} \in K(D_i)$ *et satisfait* $t_i(D_i) = U$, $D_i = t_i^{-1}(U)$, $(1 \leq i \leq n)$;

(2) P_i *est unitaire* $(1 \leq i \leq n)$;

(3) $\deg(P_i) > \deg(Q_i)$ $(1 \leq i \leq n)$;

(4) $1 = \|P_i\| \geq \|Q_i\|$ *pour la norme canonique de* $K\{X\}$, $(1 \leq i \leq n)$;

(5) $P_i - TQ_i$ *est irréductible dans* $K\{T, X\}$, $(1 \leq i \leq n)$;

(6) $P_i - TQ_i$ *et* $P_j - TQ_j$ *sont fortement étrangers dans* $K\{T, X\}$, *quels que soient* $i \neq j$.

Soit une famille de couples de polynômes fortement étrangers de $K[X]$ (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ *satisfaisant* (1), (2), (3). *Soient* $b_1, \dots, b_m \in U$. *Alors la famille* (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ *satisfait* (4), (5), (6) ; $H(D_i)$ *est isomorphe à*

$\dfrac{K\{T,X\}}{(P_i(X) - T\,Q_i(X))\,K\{T,X\}}$; H(D) est isomorphe à

$$\frac{K\{T,X\}}{\prod_{j=1}^{m}[(X-a_j)K\{T,X\}+(T-b_j)K\{T,X\}]\prod_{i=1}^{n}(P_i(X)-T\,Q_i(X))\,K\{T,X\}}$$

Réciproquement, soit A une algèbre topologiquement de type fini de la forme ci-dessus où $(a_j, b_j) \in U \times U$ $(1 \leq j \leq m)$ et où (P_i, Q_i) est un couple de polynômes fortement étrangers de $K[X]$ $(1 \leq i \leq n)$ satisfaisant (2), (3), (4), (5), (6). Soit $t_i = \frac{P_i}{Q_i} \in K(X)$; soit $D_i = t_i^{-1}(U)$; soit $D = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$. Alors A est isomorphe à H(D).

Preuve. Montrons d'abord la proposition directe. On sait, grâce à la proposition II. 3., que H(D') est isomorphe à l'algèbre de Banach produit $H(\{a_1\}) \times \ldots \times H(\{a_m\}) \times H(D_1) \times \ldots \times H(D_n)$ et comme D est ultracirconférencié, D' également ainsi que D_i quel que soit i $(1 \leq i \leq n)$. $H(D_i)$ est donc une algèbre de Krasner-Tate intègre et on peut lui appliquer le théorème V. 8. ; on a :

$$H(D_i) \simeq \frac{K\{T,X\}}{(P_i(X) - T\,Q_i(X))\,K\{T,X\}}$$

où (P_i, Q_i) est un couple de polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant (1), (2), (3), (4) et ceci est vrai quel que soit i $(1 \leq i \leq n)$. De plus, (P_i, Q_i) satisfait (5) car $H(D_i)$ est intègre. Enfin la famille (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ satisfait (6) d'après la proposition III. 3. car les ensembles Δ_i de couples $(\lambda, \mu) \in U \times U$ tels que $P_i(\mu) - \lambda_i Q_i(\mu) = 0$ sont deux à deux disjoints du fait que $D_i \cap D_j = \emptyset$. D'autre part, $H(\{a_j\})$ est trivialement isomorphe à $\dfrac{K\{T,X\}}{(X-a_j)K\{T,X\}+(T-b_j)K\{T,X\}}$ quel que soit j. Soient $\mathfrak{I}_i = (P_i(X) - T\,Q_i(X))K\{T,X\}$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\mathcal{J}_j = (X-a_j)K\{T,X\}+(T-b_j)K\{T,X\}$ $(1 \leq j \leq m)$. Les idéaux $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_n$, $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m$ ayant des domaines d'annulation deux à deux disjoints, il résulte de la proposisition V. 10. que l'algèbre produit

$$\frac{K\{T,X\}}{\mathcal{J}_1} \times \ldots \times \frac{K\{T,X\}}{\mathcal{J}_m} \times \frac{K\{T,X\}}{\mathfrak{I}_1} \times \ldots \times \frac{K\{T,X\}}{\mathfrak{I}_n}$$

est isomorphe à $\dfrac{K\{T,X\}}{\mathcal{J}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{J}_m \cdot \mathfrak{I}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{I}_n}$ et la proposition directe est établie.

Montrons la proposition réciproque. Puisque $P_i - TQ_i$ et $P_j - TQ_j$ sont fortement étrangers dans $K\{T,X\}$ les domaines d'annulation Δ_i et Δ_j des idéaux qu'ils engendrent sont disjoints. Mais Δ_i et Δ_j sont les spectres des algèbres $\dfrac{K\{T,X\}}{(P_i - TQ_i)K\{T,X\}}$ et $\dfrac{K\{T,X\}}{(P_j - TQ_j)K\{T,X\}}$ qui sont respectivement les algèbres de Krasner-Tate $H(D_i)$ et $H(D_j)$ d'après le théorème V. 8. Comme D_i et D_j sont les projections de Δ_i et Δ_j d'après la proposition V. 5., on a $D_i \cap D_j = \emptyset$ quel que soit $i \neq j$. D'autre part puisque $P_i - TQ_i$ est irréductible dans $K\{T,X\}$, l'algèbre $H(D_i)$ (isomorphe à $\dfrac{K\{T,X\}}{(P_i - TQ_i)K\{T,X\}}$) est intègre et D_i est donc infraconnexe $(1 \leq i \leq n)$. Il en résulte que $D_1, \dots, D_n$ sont les composantes infraconnexes de D. Puisque D_i est ultracirconférencié, D aussi et $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate. Alors on peut appliquer à $H(D)$ la proposition directe déjà établie puisque la famille (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ satisfait par définition (1) et par hypothèse (2), (3), (4), (5), (6). On a donc la condition cherchée et le théorème V. 11 est établi.

VI

PROPRIETES SPECTRALES ET ALGEBRES DE TYPE FINI

§. 1. - ALGEBRES PRINCIPALES ET DE TYPE FINI

Pour pouvoir chercher une propriété caractéristique des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Banach, il faut d'abord rappeler certains résultats classiques d'algèbre et de géométrie algébrique. Dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants on nommera algèbre de type fini sur un corps E tout algèbre quotient d'une algèbre de polynômes $E[X_1, \dots, X_n]$ par un de ses idéaux.

PROPOSITION VI. 1. - *Soit E un corps algébriquement clos et soit B une E-algèbre de type fini, intègre et intégralement close dans son corps de fractions F, telle que F soit une extension transcendante pure de E, de degré 1. Alors il existe un élément $x \in B$ et une fraction rationnelle $t \in E(x)$, de degré >0, telle que x soit entier sur $E[t]$ et que $B = E[t, x]$.*

Preuve. Soit $F = E(z)$ le corps de fractions de B et soit $B = E[x_1, \dots, x_m]$. Grâce au théorème de normalisation de Nœther ([16], ch. X, §. 4, th. 6), on sait qu'il existe $t \in B$ tel que $B = E[t, y_1, \dots, y_n]$ où B est entier sur $E[t]$. Soit $t = \varphi(z)$ et montrons qu'il existe $x \in B$ tel que x soit entier sur $E[t]$ et que $t \in E(x)$. Soit $\varphi(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P est un polynôme unitaire de $E[X]$ et Q un polynôme de $E[X]$ premier avec P. Soit $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$. Si $p > q$, alors il suffit de prendre $x = z$ car z est entier sur $E[t]$ puisque z satisfait $P(z) - tQ(z) = 0$ et que $P(X) - tQ(X)$ est un polynôme unitaire en X. Supposons donc que $p \leq q$. Alors on se ramène au cas précédent par un changement de variable opportunément choisi. Soit a un zéro de Q et soient $P_1, Q_1 \in E[X]$ tels que $P_1(X) = P(X+a)$ et $Q_1(X) = Q(X+a)$. Alors comme

P et Q sont fortement étrangers dans $E[X]$, il en est de même de P_1 et Q_1 et comme 0 est un zéro de Q_1, on a $P_1(0) \neq 0$. Soit $x = \frac{1}{z-a}$; alors on a :

$$t = \frac{P_1(\frac{1}{x})}{Q_1(\frac{1}{x})} = \frac{(a_o x^p + \ldots + a_p)\, x^{q-p}}{b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q}$$

et comme $q \geq p$, on voit que t est une fraction en x de degré > 0, d'où x est entier sur $E[t]$. D'autre part, comme B est intégralement close, on a $x \in B$, donc $E[t,x] \subset B$ et il reste donc à montrer que $B \subset E[t,x]$. Pour cela, montrons que $y_i \in E[t,x]$ quel que soit i $(1 \leq i \leq n)$. Il est clair que $E(x) = F$ donc $y_i \in E(x)$. Soit $\frac{R_i(x)}{S_i(x)}$ une forme irréductible de y_i dans $E(x)$; il suffit de montrer que $S_i(x)$ est inversible dans $E[t,x]$. Soit U_i l'inverse de S_i dans $E(x)$. Il est clair que $U_i \in B$ d'après le lemme IV. 6. puisque $x \in B$; donc U_i est entier sur $E[t]$ et il existe un polynôme unitaire en X,

$$F_i(X) = \sum_{i=0}^{s_i} \lambda_{i,j} X^j \in E[t][X]$$

tel que $F_i(U_i) = 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors S_i est inversible dans $E[t,x]$ car :

$$S_i^{s_i} F_i(U_i) = 1 + S_i(\lambda_{i,s_i-1} + \ldots + \lambda_{i,o} S_i^{s_i-1}) = 0 \ .$$

PROPOSITION VI. 2. - <u>Soit</u> E <u>un corps algébriquement clos, soit</u> A <u>une</u> E-<u>algèbre de type fini et principale, et soit</u> F <u>son corps de fractions. Alors</u> F <u>est une extension transcendante pure de</u> E <u>de degré</u> 1.

<u>Preuve.</u> (*) On empruntera les définitions habituelles de la géométrie algébrique. Considérons l'unique courbe X unicursale et complète sur E qui admette F pour corps des fonctions rationnelles. Alors A est l'anneau d'un ouvert de Zariski affine U de X et $X-U$ est un ensemble fini. On sait ([15], ch. II, th. 8) que la jacobienne de X est une variété abélienne dont la dimension g est égale au genre de F. Soit J le groupe des points de la jacobienne de X et soit $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard de X. On a donc une injection triviale de J

(*) Cette démonstration m'a été donnée par Michel Raynaud.

dans Pic(X) . Considérons l'homomorphisme de Pic(X) sur $\mathbb{Z}$ qui à toute classe de Pic(X) associe le degré de ses éléments ; on a la suite exacte

$$0 \to J \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z} \to 0 .$$

Supposons maintenant que F ne soit pas une extension transcendante pure de E , c'est-à-dire que $g \geq 1$. Comme E est algébriquement clos, le groupe de torsion de J n'est pas de type fini, donc J n'est pas de type fini et a fortiori Pic(X) n'est pas de type fini. Soit D(X) le groupe des diviseurs de X , soit D(U) le groupe des diviseurs de U et considérons l'application de restriction $\varphi : D(X) \to D(U)$. Il est clair que φ est surjective et que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est le sous-groupe des diviseurs de X dont le support est inclus dans X-U . Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de type fini puisque X-U est fini et il en résulte que, de même, l'application de restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U)$ est une surjection dont le noyau est de type fini, ce qui prouve que Pic(U) n'est pas de type fini et cela contredit le fait que A soit principale. La proposition est donc établie.

PROPOSITION VI. 3. - <u>Soit</u> E <u>un corps algébriquement clos et soit</u> B <u>une</u> E-<u>algèbre de type fini.</u> <u>Alors les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) B <u>est principale</u> ;

ii) <u>il existe</u> $x \in E$ <u>et</u> $t \in E(X)$ <u>telle que</u> $\deg(t) > 0$, <u>tels que</u> x <u>soit entier sur</u> E[t] <u>et que</u> B = E[t, x] .

<u>Preuve.</u> Montrons d'abord que i) entraîne ii) . On sait, grâce à la proposition VI. 2. , que le corps de fractions F de B est une extension transcendante pure de degré 1 de E . Mais B est intégralement clos et l'assertion ii) découle de la proposition VI. 1. . Montrons maintenant que ii) entraîne i). Grâce à la proposition IV. 6. , B est de la forme $S^{-1}E[X]$ où S est la partie multiplicative engendrée par une famille de binômes $(X-a)_{a \in \mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}$ est une partie de E et on a vu que tout idéal de B est engendré par un polynôme de E[X] .

COROLLAIRE VI. 4. - <u>Soit</u> E <u>un corps algébriquement clos et soit</u> B <u>une</u> E-<u>algèbre de type fini principale.</u> <u>Soit</u> I <u>un idéal non nul de</u> B <u>et soit</u> $B' = \frac{B}{I}$. <u>Alors le degré de transcendance de</u> B' <u>sur</u> E <u>est nul et si</u> B' <u>est réduite, il</u>

existe un entier n tel que $B' \simeq E^n$.

Preuve. C'est une conséquence évidente de la proposition VI. 3.. Puisque $B = K[t, x]$ où $t \in K(x)$, on voit que I est engendré par un polynôme $P(x) \neq 0$. Soit φ la surjection canonique de B sur B', $t' = \varphi(t)$, $x' = \varphi(x)$.

Il est clair que $B' = E[t', x']$ et comme $P(x') = 0$, x' est entier sur E, donc t' aussi. Alors B' est réduite si et seulement si tous les zéros de P sont simples ; or si P possède n zéros deux à deux distincts, on a $B' \simeq E^n$.

§. 2. - SPECTRE ALGEBRIQUE

Nous introduirons maintenant la notion de spectre algébrique.

DEFINITION. - Soit f un élément d'une algèbre A sur un corps algébriquement clos E. Nous appellerons spectre algébrique de f, que l'on notera $sa_A(f)$ l'ensemble des $\lambda \in K$ tels que $x-\lambda$ appartienne à un idéal maximal de codimension 1 de A.

Remarque. - Un élément $f \in A$ est de classe algébrique si et seulement si $sp_A(f) = sa_A(f)$.

Pour étudier les relations existant entre $sp_A(f)$ et $sa_A(f)$ nous devrons considérer les propriétés d), p) et p') suivantes d'une algèbre normée A qui admet une semi-norme spectrale $\| \cdot \|_{sp}$ et dont la norme est notée $\| \cdot \|$:

d) Pour tout $f \in A$ tel que $\|f\|_{sp} \leq 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée.

p) Pour tout $f \in A$, $\|f\|_{sp} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|f^n\|}$.

p') Pour tout $f \in A$ tel que $\|f\|_{sp} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \|f^n\| = 0$.

Dans toute la suite, on notera donc d), p) et p') ces trois propriétés et on a d'abord le lemme VI. 5. évident.

LEMME VI. 5. - *Soit* A *une algèbre de Banach admettant une semi-norme spectrale. Alors les propriétés* p) *et* p') *sont équivalentes. De plus, si* A *possède la propriété* d) , A *possède la propriété* p) .

Nous verrons, grâce à la proposition VII. 8., qu'une K-algèbre de Banach ultramétrique peut posséder la propriété p) sans posséder la propriété d) .

D'autre part, on sait que les propriétés p) et p') sont possédées par toute $\mathbb{C}$-algèbre de Banach ([3] chap. I, § 2, n° , cor. 5). Elles sont démontrées grâce à la propriété suivante : si une fonction h définie sur une couronne Γ de $\mathbb{C}$, à valeur dans un $\mathbb{C}$-espace de Banach, est dérivable dans Γ , alors h admet dans Γ un développement unique en série de Laurent. Cette propriété n'est plus vraie dans un corps ultramétrique.

Dans ces conditions, un élément f d'une K-algèbre de Banach ultramétrique A satisfait seulement la relation de la proposition II. 12. d) :

$$(1) \qquad \|f\|_{sp} = \sup\{|\lambda| , \lambda \in sa_A(f)\} \leq \sup\{|\lambda| , \lambda \in sp_A(f)\} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|} .$$

Précisément, nous verrons grâce à la proposition VI. 11. , qu'il existe des K-algèbres de Banach ultramétriques A contenant des éléments y tels que :

$$\|y\|_{sp} < \sup\{|\lambda| , \lambda \in sp_A(y)\} < \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|y^n\|}$$

ce qui prouve que la propriété p) n'est pas triviale.

On retient cependant du lemme VI. 5. et de la relation (1) ci-dessus, le lemme VI. 6. , évident.

LEMME VI. 6. - *Soit* A *une* K-*algèbre de Banach ultramétrique unitaire admettant une semi-norme spectrale* $\|\cdot\|_{sp}$ *et possédant la propriété* p) . *Soit* $x \in A$; *alors pour tout* $\lambda \in sp_A(x)$, *on a* $|\lambda| \leq \|x\|_{sp}$ *et* $(sp_A(x)) = (sa_A(x))$.

Le lemme VI. 6. a pour conséquence le théorème VI.10. que nous établirons après avoir remarqué le lemme VI. 7. , également immédiat qui est en quelque sorte l'analogue de la proposition II. 12. c) pour le spectre d'un élément.

LEMME VI. 7. - *Soit* A *une algèbre sur un corps algébriquement clos* E . *Soit* $x \in A$ *et soit* $h \in E(X)$ *une fraction rationnelle sans pôle dans* $sp_A(x)$. *Alors* $sa_A(h(x)) = h(sa_A(x))$.

Preuve. Soit $\lambda \in sa_A(h(x))$ et soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de codimension 1 tel que $h(x) - \lambda \in \mathfrak{M}$. On a donc $h(X) - \lambda = \frac{P_\lambda(X)}{Q(X)}$ où $P_\lambda(X) \in K[X]$, et $P_\lambda(x) \in \mathfrak{M}$. Il existe donc un zéro α de P_λ tel que $x - \alpha \in \mathfrak{M}$ et l'on a $h(\alpha) = \lambda$, donc $sa_A(h(x)) \subseteq h(sa_A(x))$. Réciproquement, soit $\alpha \in sa_A(x)$, soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de codimension 1 de A tel que $x - \alpha \in \mathfrak{M}$. Il est clair que $h(X) - \lambda$ est multiple de $X - \alpha$, donc $h(x) - \lambda$ est multiple de $x - \alpha$ et $h(x) - \lambda \in \mathfrak{M}$, d'où $h(sa_A(x)) \subseteq sa_A(h(x))$.

Grâce aux propriétés classiques des fractions rationnelles on a d'autre part les lemmes suivants qui font intervernir les frontières analytiques.

LEMME VI. 8. - *Soit* D *un infraconnexe fermé borné. Soit* $\Delta \subset D$ *et soit* $f \in H(\underline{\underline{D}})$. *Alors* Δ *est une frontière analytique de* D *si et seulement si* $f(\Delta)$ *est une frontière analytique de* $f(D)$.

Remarque. - Trivialement, tout infraconnexe est une frontière analytique de son enveloppe.

LEMME VI. 9. - *Soient* P *et* Q *deux parties d'un infraconnexe* D . *Alors* $P \cup Q$ *est une frontière analytique de* D *si et seulement si l'une au moins des deux parties* P *et* Q *est une frontière analytique de* D .

Preuve. C'est une conséquence triviale de la propriété iii) du théorème II. 15. Nous allons en déduire un théorème qui permet de comparer le spectre d'un élément avec son spectre algébrique.

THEOREME VI. 10. - *Soit* A *une* K-*algèbre de Banach ultramétrique unitaire, admettant une semi-norme spectrale qui possède la propriété* p) . *Soit* x *un élément de* A *dont les composantes infraconnexes du spectre* D *sont en nombre fini. On note* $D_1, \ldots, D_n$ *ces composantes infraconnexes et* Δ *le spectre algébrique de* x *dans* A ; *soit* $\Delta_i = D_i \cap \Delta$ $(1 \leq i \leq n)$. *Alors* Δ_i *est une frontière analytique de* D_i $(1 \leq i \leq n)$.

Preuve. Nous considérerons d'abord le cas où $n = 1$ (D infraconnexe). Supposons que Δ ne soit pas une frontière analytique de D ; alors il existe un polynôme $P(X) \in K[X]$ tel que $\|P\|_\Delta < \|P\|_D$ et il existe donc $\lambda \in D$ tel que $|P(\lambda)| > \|P\|_\Delta$. Soit φ un homomorphisme de A sur une extension de K tel que $\varphi(x) = \lambda$. On a $\varphi(P(x)) = P(\lambda)$, ce qui prouve que $P(\lambda)$ appartient au spectre de $P(x)$. Or $\|P\|_\Delta = \sup_{\alpha \in \Delta} |P(\alpha)| = \|P\|_{sp}$ et la relation $|P(\lambda)| > \|P\|_{sp}$ est fausse d'après le lemme VI. 6., ce qui montre que Δ est une frontière analytique de D.

Considérons maintenant le cas général et montrons que pour tout i, Δ_i est une frontière analytique de D_i. Remarquons d'abord que l'on peut trouver une homographie $h \in K(D)$ telle que $\operatorname{diam}(h(D_i)) > \operatorname{diam}(h(D_j))$ quel que soit $j \neq i$. En effet, soit r le diamètre de D_i et soit $0 \in D_i$ un point pris pour origine ; il existe trivialement un nombre $r' > r$ tel que la couronne Γ de centre 0, de rayon inférieur r, de rayon supérieur r', satisfasse $\Gamma \cap D = \emptyset$. Soit $a \in \Gamma$ tel que $|a| < \sqrt{r r'}$ et soit $h(X) = \dfrac{a^2}{X-a}$. Alors il est clair que si $\underline{\underline{D_j}} \not\subset \underline{\underline{D_i}}$, on a $\operatorname{diam}(h(D_j)) \leq \dfrac{|a|^2}{r'} < r$ et comme $\operatorname{diam}(h(D_i)) = r$, on voit que $\operatorname{diam}(h(D_j)) < \operatorname{diam}(h(D_i))$. D'autre part, si $\underline{\underline{D_j}} \subsetneqq \underline{\underline{D_i}}$, alors comme $a \notin D_i$, on a encore $h(D_j) \subsetneqq h(D_i)$ ce qui prouve que $\operatorname{diam}\overline{\overline{(h(D_j))}} < \operatorname{diam}(h(D_i))$ quel que soit $j \neq i$.

Alors d'après le lemme VI. 8. comme $h \in K(D_i)$, Δ_i est une frontière analytique de D_i si et seulement si $h(\Delta_i)$ est une frontière analytique de $h(D_i)$ et l'on est donc ramené à résoudre le problème lorsque $\operatorname{diam}(D_i) > \operatorname{diam}(D_j)$ quel que soit $j \neq i$. Soit $r_j = \operatorname{diam}(D_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ et supposons donc $r_j < r_i$ quel que soit $j \neq i$. Soit $\alpha_j \in D_j$ $(1 \leq j \leq n)$ et soit $Q(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$. D'après la proposition II. 12. on a $sp_A(Q(x)) = Q(D)$ et grâce au lemme VI. 7. on a $sa_A(Q(x)) = Q(\Delta)$. Alors $D' = Q(D)$ est infraconnexe comme réunion enchaînée des infraconnexes $D'_j = Q(D_j)$ $(1 \leq j \leq n)$, ce qui montre que $\Delta' = Q(\Delta)$ est une frontière analytique de D' et grâce au lemme VI. 9. il existe $j \in [1, n]$ tel que $\Delta'_j = Q(\Delta_j)$ soit une frontière analytique de D'. Mais pour $j \neq i$, on a $\|Q\|_{\Delta_j} \leq \|Q\|_{D_j} =$

$$r_j \prod_{k \neq j} \sup(r_j, |\alpha_k - \alpha_j|) < r_i \prod_{k \neq i} \sup(r_i, |\alpha_k - \alpha_i|) = \|Q\|_{D_i}$$ quel que soit $j \neq i$

puisque $r_j < r_i$, et on voit que Δ'_j a un diamètre inférieur à celui de D' ; ce n'est donc pas une frontière analytique de D', ce qui prouve que Δ'_i est une frontière analytique de D' donc a fortiori de D'_i puisque $\underline{\underline{D'_i}} = \underline{\underline{D'}}$. Alors il résulte du lemme VI. 8. que Δ_i est une frontière analytique de D et le théorème est établi.

COROLLAIRE VI. 11. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique unitaire possédant la propriété d) et soit t un élément de A dont le spectre est infra-connexe infini et admet U pour enveloppe. Alors l'adhérence dans A de K[t] est isomorphe algébriquement et topologiquement à une extension topologiquement pure dont la norme canonique est induite par la semi-norme spectrale de A .

Preuve. Soit Δ le spectre algébrique de x . Alors Δ est une frontière analytique de D d'après le théorème VI. 10. , donc aussi de U d'après le lemme II. 15. On voit donc que l'application Φ de l'algèbre normée $(K[X], \|\cdot\|_U)$ sur l'algèbre semi-normée $(K[t], \|\cdot\|_{sp})$ est un isomorphisme qui satisfait $\|\Phi(P(X)\|_{sp} = \|P(X)\|_U$ et comme la norme $\|\cdot\|_U$ de la convergence uniforme sur U est identique à la norme canonique $\|\cdot\|_c$ de K[X] , tandis que les normes $\|\cdot\|_{sp}$ et $\|\cdot\|$ de K[t] (où $\|\cdot\|$ désigne la norme d'algèbre de Banach de A) sont équivalentes grâce à la propriété d) , on voit que le complété $K\{X\}$ de K[X] pour la norme $\|\cdot\|_c$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'adhérence de K[t] dans A pour la norme $\|\cdot\|$.

§. 3. - EXEMPLES DE SPECTRES ALGEBRIQUES NON TRIVIAUX

Le premier exemple que nous allons construire a pour but de montrer que la propriété p) considérée au paragraphe 2 n'est pas triviale.

PROPOSITION VI. 12. - Soit $R \in]0,1[$ et soit D l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| \leq R$. Pour tout $h \in K(D)$, soit E(h) l'ensemble des pôles de h et soit $\Delta(h)$ l'ensemble des $\xi \in U$ tels que $|\xi - \alpha| \geq |\alpha|$ quel que soit $\alpha \in E(h) \cap U$. Alors l'application $h \to \|h\| = \|h\|_{\Delta(h)}$ définit sur K(D) une norme de K-algèbre et l'algèbre de Banach A complétée de K(D) pour cette norme admet une semi-norme spectrale $\|\cdot\|_{sp}$.

L'application x identique sur D, est un élément de classe algébrique tel que $\|x\|_{sp} = R < 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$; de plus, il existe un élément $y \in A$ possédant les propriétés suivantes :

i) $sp_A(y)$ n'est pas infraconnexe ;

ii) $sa_A(y)$ est infraconnexe et inclus dans l'une des composantes infraconnexes de $sp_A(y)$;

iii) $\|y\|_{sp} = R < \sup\{|\lambda|, \lambda \in sp_A(y)\} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|y^n\|} = 1$.

Preuve. Remarquons d'abord que l'on a, pour tout $h \in K(D)$, $-\log\|h\| = \inf_{\mu\geq 0}\{v(h,\mu)\}$. Il en résulte immédiatement que $\|.\|$ est une norme de K-algèbre sur $K(D)$ qui satisfait $\|h^n\| = \|h\|^n$, quel que soit $h \in K(D)$, donc quel que soit $h \in A$. Tout homomorphisme de $K(D)$ sur K est associé à un point $\alpha \in D$ et de la forme φ_α telle que $\varphi_\alpha(x) = \alpha$. Comme on a $\|h\|_D \leq \|h\|$ pour tout $h \in K(D)$, φ_α est continu pour la norme $\|.\|$ et se prolonge en un homomorphisme $\overline{\varphi}_\alpha$ de A sur K, ce qui prouve que le spectre de x dans A est encore égal à D. Soit $\|.\|_{sp}$ la semi-norme spectrale de A. Alors on a trivialement $\|x\|_{sp} = R < 1$ et $\|x^n\| = 1$ quel que soit n. Inversement, tout homomorphisme de A sur K induit un homomorphisme de $K(D)$ sur K, ce qui prouve que la semi-norme spectrale de A induit la norme $\|.\|_D$ de $K(D)$. On en déduit que $\|x\|_{sp} = R$ et comme $\|x^n\| = 1$ quel que soit n, l'assertion relative à x est établie.

Montrons maintenant l'existence de l'élément y annoncé. Pour cela, considérons une suite croissante r_n telle que $R < r_n$ et $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$; soit $a_n \in K$ tel que $|a_n| = r_n$ et soit D' l'ensemble des $\xi \in U$ tels que $|\xi - a_i| \geq r_i$ quel que soit i. Il est clair que $D \subset D'$ et que D' admet un T-filtre croissant de diamètre égal à 1 ([5]). Alors, on sait qu'il existe un élément $\pi \in H(D')$ tel que $|\pi(\xi)| = 1$ pour tout $\xi \in D$ et $\lim_{\substack{|\xi|\to 1\\ |\xi|<1}} \pi(\xi) = 0$ (th. IV. 3 de [5]), car il existe un élément non nul γ de $H(D')$ tel que $\lim_{\substack{|\xi|\to 1\\ |\xi|<1}} \gamma(\xi) = 0$ et comme γ n'a qu'un nombre fini de zéros dans D, γ se factorise sous la forme $P.\pi$ où P est un polynôme et où π est un élément de $H(D')$ tel que $|\pi(\xi)| = 1$ pour tout $\xi \in D$.

Remarquons d'autre part que l'algèbre $(H(D'),\ \| \ \|_{D'})$ s'injecte isométriquement dans $(A,\ \|.\|)$ par une injection $\mathfrak{J}$ qui induit l'identité sur $K(D)$. Soit $f = \mathfrak{J}(\pi)$. Soit h_n une suite de $K(D)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n - f\| = 0$. Pour n assez grand, on a $|h_n(\xi)| = 1$ pour tout $\xi \in D$, ce qui prouve que $sa_A(h_n(x))$ est inclus dans l'ensemble C des $\xi \in U$ tels que $|\xi| = 1$, d'où par continuité des homomorphismes de A sur K, $sa_A(f) \subset C$.

Montrons maintenant que f n'est pas inversible dans A. Supposons qu'il existe $g \in A$ tel que $fg = 1$ et soit g_n une suite de $K(D)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$. On a donc pour n assez grand $\|h_n g_n - 1\| < 1$. Soit $D'' = D' \cap \Delta(g_n)$; alors $\|h_n g_n - 1\| = \|h_n g_n - 1\|_{D''}$ et comme $\pi \in H(D'')$, on a donc $\|\pi g_n - 1\| < 1$. Or cette relation est absurde car π n'est pas minoré sur D', ni sur D'', puisque $\lim\limits_{\substack{|\xi|\to 1\\ |\xi|<1}} \pi(\xi) = 0$ et que g_n est bornée sur D''. On voit donc que f n'est pas inversible dans A, donc $0 \in sp_A(f)$. Montrons maintenant que $sp_A(f) = sa_A(f) \cup \{0\}$. Pour cela, remarquons d'abord que si $\lambda \neq 0$, alors $\pi - \lambda$ est quasi-inversible et que si $\lambda \notin sa_A(f)$, alors les zéros de $\pi - \lambda$ n'appartiennent pas à D. En effet, si $\lambda \neq 0$, $\pi - \lambda$ n'est annulé par aucun T-filtre de D', donc $\pi - \lambda$ est quasi-inversible. D'autre part, on remarque que $sa_A(f) = \pi(D)$ donc si $\lambda \notin sa_A(f)$, les zéros de $\pi - \lambda$ n'appartiennent pas à D. Alors, on voit que si $\lambda \notin sa_A(f)$, $\pi - \lambda$ se factorise sous le forme Qh où Q est un polynôme dont les zéros n'appartiennent pas à D et où h est un élément inversible de $H(D')$, d'où Q et $\mathfrak{J}(h)$ sont inversibles dans A ; on voit donc que $\lambda \notin sp_A(f)$ et $sp_A(f) = sa_A(f) \cup \{0\}$.

Soit $a \in K$ tel que $0 < |a| < 1$ et soit $z = \dfrac{1}{a-f}$. Il est clair que $sa_A(z) \subset C$ et que $sp_A(z) = sa_A(z) \cup \{\frac{1}{a}\}$. Soit $\theta \in K$ tel que $R < |\frac{\theta}{a}| < 1$, et soit $y = x + \dfrac{\theta}{a-f}$. Alors, on voit que $sa_A(y) \subset D$ tandis que $sp_A(y) = sa_A(y) = sa_A(y) \cup \{\frac{\theta}{a}\}$ et l'on a donc $\|y\|_{sp} = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in sa_A(y)\} \leq R < |\frac{\theta}{a}| = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in sp_A(y)\} < 1$.

Considérons pour conclure $\|y\|$. Pour n assez grand, on aura $v(h_n, 0) > v(a)$, d'où $v(h_n - a, 0) = v(a)$ et $v(\dfrac{\theta}{a-h_n}, 0) = v(\theta) - v(a) > 0$, d'où $v(x + \dfrac{\theta}{a-h_n}, 0) = 0$ puisque $v(x, 0) = 0$. On a donc $\|x + \dfrac{\theta}{a-h_n}\| = 1$, d'où $\|x + \dfrac{\theta}{a-f}\| = 1$. Alors comme $\|y^n\| = \|y\|^n$, on a bien :

$$\|y\|_{sp} = R < \sup\{|\lambda|\ ,\ \lambda \in sp_A(y)\} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|y^n\|} = 1\ .$$

Le résultat du théorème VI. 10. est à rapprocher de l'étude des algèbres de Krasner H(D) [5] . Considérons par exemple une algèbre de Banach intègre H(D) . Nous savons que D est un infraconnexe fermé borné, sans couple de T-filtres complémentaires, dont les idéaux maximaux de codimension 1 sont définis par les points de D et dont les idéaux maximaux de codimension infinie sont définis par les T-familles de D d'après le théorème 5 de [7]. On voit donc que si $f \in H(D)$ et si l'on note Λ le spectre de f et Δ son spectre algébrique, tout point λ de $\Lambda - \Delta$ est tel que $f-\lambda$ soit annulé par un T-filtre. Alors $|f(x)-\lambda|$ est minoré sur D ce qui prouve qu'il existe une suite $x_n \in D$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$. Or, $f(x_n) \in \Delta$, donc Δ est dense dans Λ . On pourrait donc se demander si plus généralement la densité du spectre algébrique dans le spectre n'est pas toujours vraie dans l'hypothèse du théorème VI. 10. L'exemple que nous allons étudier montre qu'il n'en est rien.

PROPOSITION VI. 13. - Soit D l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| < 1$ et soit x l'application identique sur D . Soit $A = H(D)\{T\}$ une extension topologiquement pure de H(D) de degré 1 . Alors l'algèbre A , dont la norme spectrale est la norme canonique, possède la propriété d) et le spectre de xT dans A est égal à U tandis que son spectre algébrique est égal à D .

Preuve. Remarquons d'abord que la norme $\|\ .\ \|_D$ de H(D) est une valeur absolue. Alors la norme canonique $\|\ .\ \|_c$ de A pour laquelle A est complète, définie par $\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\|_c = \sup_i \|a_i\|_D$ est également une valeur absolue. Montrons que la semi-norme spectrale $\|\ .\ \|_{sp}$ de A est égale à sa norme canonique. Pour cela, il suffit, grâce à la proposition II. 12. d) de montrer que pour tout $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in A$ et pour tout $\delta < \|f\|_c$, il existe un homomorphisme φ de A sur K tel que $|\varphi(f)| \geq \delta$. En particulier, il suffit de montrer qu'il existe $\alpha \in D$ et $\lambda \in U$ tels que $|\sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha)\lambda^i| \geq \delta$. Or, ceci est immédiat. Soit q le plus grand des entiers i tels que $\|a_i\|_D = \|\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\|$. Soit $\rho = \sup_i(\|a_i\|_D)$ et soit $\delta \in]\rho, \|f\|_c[$; il existe trivialement $\alpha \in D$ tel que $|a_q(\alpha)| \geq \delta$ et il existe $\lambda \in U$ tel que $|\sum_{i=0}^{q} a_i(\alpha)\lambda^i| \geq \delta$, d'où $|\sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha)\lambda^i| \geq \delta$ puisque

$|a_i(\alpha)| < \delta$ pour tout $i > q$, et l'on a $\|f\|_{sp} = \|f\|_c$. L'algèbre A possède donc trivialement la propriété d).

Considérons maintenant le spectre de l'élément xT. Puisque $\|xT\|_{sp} = \|xT\|_c$ le spectre algébrique Δ de xT est inclus dans U, donc son spectre Λ également car d'après le lemme VI. 5., on a : $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Lambda}} \subset U$. D'autre part, il est évident que $\Delta \subset D$ car pour tout $\alpha \in D$, l'homomorphisme $\varphi_{\alpha,1}$ de A sur K défini par $\varphi_{\alpha,1}(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha)$ satisfait $\varphi_{\alpha,1}(xT) = \alpha$. On a donc la relation (1) $D \subset \Delta \subset \Lambda \subset U$. Nous allons montrer que $D = \Delta$ et $\Lambda = U$; pour cela, il suffit d'établir que $\Lambda - \Delta \supset U - D$. Soit $\alpha \in (U-D)$ et considérons l'idéal I de A engendré par $\alpha - xT$. Il est clair que $I \cap H(D) = \{0\}$ de sorte que la surjection canonique ψ de A sur $\frac{A}{I}$ induit sur H(D) une injection. Montrons que $\frac{A}{I}$ est le complété du corps de fractions L de H(D). Montrons d'abord que l'algèbre $\frac{A}{I}$ que nous noterons B contient un sous-corps isomorphe à L. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $f \in H(D)$, $\psi(f)$ est inversible dans B. Or, on sait que H(D) est principale et que f se factorise sous la forme P. h où P est un polynôme dont les zéros appartiennent à D, et où h est inversible dans H(D). Il suffit donc de montrer que $\psi(x-a)$ est inversible pour tout $a \in D$.

Pour cela, remarquons d'abord que I est un idéal fermé car l'application $F \to (\alpha - xT)F$ de l'espace vectoriel de Banach $(A, \|.\|_c)$ sur l'espace vectoriel normé $(I, \|.\|_c)$ est bicontinue. Il en résulte que B muni de la norme quotient $\|.\|$ de celle de A est une K-algèbre de Banach. De plus, comme $\psi(\frac{T}{\alpha})$ est l'inverse de x et que $\|\frac{T}{\alpha}\|_c = 1$, on voit que $\|\psi(\frac{T}{\alpha})\| \leq 1$, donc $\|\psi(\frac{T}{\alpha})\| = 1$ et $\|\psi(x)\| = 1$ car $\|x\|_c = 1$. Il en résulte que la série de terme général $\frac{a^n}{(\psi(x))^{n+1}}$ converge dans K pour tout $a \in D$ ce qui prouve que $\psi(a-x)$ est inversible dans B et admet pour inverse $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(\psi(x))^{n+1}}$, donc B contient un corps isomorphe à L que nous confondrons avec L en considérant $L \subset B$.

Remarquons d'autre part que la norme $\|.\|$ de K-algèbre de Banach induit sur L la valeur absolue de L qui prolonge la valeur absolue $\|.\|_D$ de H(D). Il suffit en effet, pour établir cette propriété, de montrer que $\|\psi(x-a)^{-1}\| = \frac{1}{\|\psi(x-a)\|}$ quel que soit $a \in D$. Or cette relation est évidente si $a \notin D$

puisque $x-a$ est inversible dans $H(D)$ et que $\|\,.\,\|_D$ est une valeur absolue. Vérifions donc qu'elle est toujours vraie si $a \in D$. On a vu que $(\psi(x-a))^{-1} = \psi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\frac{T}{\alpha}\right)^{i+1}\right)$, ce qui montre que $\|(\psi(x-a))^{-1}\| \leq 1$, donc $\|\psi(x-a)^{-1}\| = 1$ et $\|\psi(x-a)\| = 1$, puisque $\|(x-a)\|_c = 1$. La norme $\|\,.\,\|_c$ de L est donc la valeur absolue qui prolonge la valeur absolue $\|\,.\,\|_D$ de $H(D)$. Comme $\psi(H(D)[T]) \subset L$, il est clair que L est dense dans B ce qui montre que B est le corps complété de L et par conséquent I est un idéal maximal de codimension infinie. On voit donc que $\alpha \in \Lambda - \Delta$ pour tout $\alpha \in U-D$, d'où $\Lambda - \Delta = U-D$ ce qui montre que Λ n'est pas l'adhérence de Δ.

<u>Remarque</u> : Le problème de savoir si l'algèbre $H(D)\{T\}$ est nœthérienne reste posé.

§. 4. - <u>IDEMPOTENTS ASSOCIES</u>

Rappelons la notion d'idempotent associé à un élément d'une algèbre A et à une partie de son spectre ([3], I, §. 4, n° 11, remarque 1).

DEFINITION. - Soit F un corps algébriquement clos et soit A une F-algèbre commutative dont l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de A sur F est supposé non vide. Soit $x \in A$; on appelle <u>idempotent associé à</u> x <u>et à une partie</u> E <u>de</u> $sp_A(x)$ un idempotent u de classe algébrique de A tel que $\chi(u) = 1$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$ satisfaisant $\chi(x) \in E$ et tel que $\chi(u) = 0$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$ satisfaisant $\chi(x) \notin E$.

<u>Remarques</u> :

1) Si l'intersection des idéaux maximaux de codimension 1 de A est nulle et s'il existe un idempotent associé à x et à E, alors il est unique.

2) Supposons que A soit une algèbre de fonctions sur une partie D de K et que x soit l'application identique sur D. Alors si une partie E de D admet dans A un idempotent associé à x et à E c'est la fonction caractéristique de E.

3) Si $\mathfrak{a}$ est l'affinité de K définie par $\mathfrak{a}(\xi) = a\xi + b \ (\xi \in K)$ et si u est un idempotent associé à x et à une partie E du spectre D de x, alors u est un idempotent associé à y et à la partie $\mathfrak{a}(E)$ du spectre $\mathfrak{a}(D)$ de $y = ax + b$.

L'objet de ce paragraphe est d'établir un résultat analogue au résultat connu pour le spectre d'un élément d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach A : <u>toute partie ouverte fermée</u> E <u>du spectre</u> D <u>d'un élément</u> $x \in A$ <u>admet un idempotent associé à</u> x <u>et à</u> E ([3], I, §. 4, n° 11, remarque 1). On voit en particulier que si les composantes connexes de D sont en nombre fini, alors chacune admet un idempotent associé.

Nous montrerons ici que si une K-algèbre de Banach ultramétrique A possède la propriété p) et si les composantes infraconnexes du spectre D de $x \in A$ sont en nombre fini, alors chacune d'elles admet un idempotent associé. Remarquons une nouvelle fois à ce sujet que du point de vue de l'existence d'idempotents, la notion d'infraconnexité joue un rôle analogue dans le domaine ultramétrique à la notion de connexité dans le domaine complexe. On sait qu'il n'en est pas de même du point de vue analytique puisqu'un infraconnexe n'est pas nécessairement analytique au sens de Motzkin.

LEMME VI. 14. - <u>Soit</u> A <u>une</u> K-<u>algèbre et</u> u <u>un idempotent de</u> A. <u>Alors la pseudo-norme spectrale de l'algèbre</u> uA <u>est induite par celle de</u> A. <u>De plus si</u> u <u>est un idempotent associé à un élément de classe algébrique</u> $x \in A$ <u>et à une partie</u> E <u>de</u> $sp_A(x)$, ux <u>est de la classe algébrique dans</u> uA <u>et l'on a</u> $sp_{uA}(ux) = E$.

<u>Preuve.</u> La première assertion est une conséquence évidente de la proposition II. 12. b) puisqu'il existe une surjection de A sur uA et une injection de uA dans A. Pour établir la seconde assertion, supposons que ux ne soit pas de classe algébrique. Alors il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de codimension infinie de A et $\lambda \in K$ tel que $ux - \lambda \in \mathfrak{M}$, donc $u(x-\lambda) \in \mathfrak{M}$. Or $u \notin \mathfrak{M}$ et $x - \lambda \notin \mathfrak{M}$ puisque u et x sont de classe algébrique. Donc $ux - \lambda$ n'appartient pas à $\mathfrak{M}$ et ux est de classe algébrique. Alors il est immédiat de voir que le spectre de ux est égal à E dans uA.

THEOREME VI. 15. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique unitaire admettant une semi-norme spectrale $\|\cdot\|_{sp}$ qui possède la propriété p). Alors tout idempotent de A est de classe algébrique. De plus, si u et u' sont deux idempotents tels que $\|u-u'\|_{sp} = 0$ alors $u = u'$. Si une partie E du spectre D d'un élément $x \in A$ admet un idempotent associé à x et à E, alors il est unique. Enfin, si deux parties E et F de D sont telles qu'il existe un idempotent u associé à x et à E d'une part, à x et à F d'autre part, alors on a $E \cap sa_A(x) = F \cap sa_A(x)$.

Preuve. Soit u un idempotent et supposons que $sa_A(u) \neq sp_A(u)$. Pour tout homomorphisme φ de A dans une extension L de K, on a nécessairement $\varphi(u) = 0$ ou $\varphi(u) = 1$ et il en résulte que $sp_A(u) \subset \{0,1\}$. Donc si $sa_A(u) \neq sp_A(u)$, on a $sp_A(u) = \{0,1\}$ et $sa_A(u) = \{0\}$ ou $\{1\}$, ce qui contredit le théorème VI. 6. et la première assertion est établie.

Supposons $\|u-u'\|_{sp} = 0$ et soit $r = u-u'$. On a donc :

$$0 = u'(1-u') = (u-r)(1-u+r) = r(1-2u+r)$$

Mais pour tout homomorphisme φ de A dans une extension L de K, on a $\varphi(r) = 0$ d'après l'assertion précédente et d'autre part, ou bien $\varphi(u) = 0$, ou bien $\varphi(u) = 1$, donc finalement $\varphi(1-2u+r) = \pm 1$ ce qui prouve que $1-2u+r$ est inversible, donc $r = 0$ et $u = u'$. Alors cette propriété a pour conséquence évidente l'unicité d'un idempotent associé à x et à une partie E de $sp_A(x)$. La dernière assertion découle immédiatement de la définition des idempotents associés.

PROPOSITION VI. 16. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique unitaire admettant une semi-norme spectrale $\|\cdot\|_{sp}$, dont la norme est notée $\|\cdot\|$ et possédant la propriété p). Soit $x \in A$ et soit $D = sp_A(x)$. Alors, pour toute couronne vide Γ de D, il existe un idempotent associé à x et à $\mathfrak{I}(\Gamma)$ ainsi qu'un idempotent associé à x et à $\mathcal{E}(\Gamma)$.

De plus, si les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini $(D_1, \dots, D_n)$ alors, pour tout i $(1 \leq i \leq n)$ il existe un idempotent associé à x et à D_i et l'on a $u_i u_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

<u>Preuve.</u> Il est clair, grâce à la remarque 3) que l'on peut se limiter pour faire la démonstration, au cas où D est inclus dans un disque D' de diamètre $r<1$ tel que $D'\subset U$. Nous allons montrer que pour chaque couronne vide Γ de D, il existe un idempotent associé à x et à $\mathfrak{J}(\Gamma)$ ainsi qu'à x et à $\mathscr{E}(\Gamma)$.

Soit Γ une couronne vide de D ; soit $0\in\mathfrak{J}(\Gamma)$ un point pris pour origine ; soient r_1 et r_2 les rayons inférieur et supérieur de Γ et soit R le diamètre de D. Soient ρ_1 et $\rho_2\in|K|$ tels que $r_1<\rho_1<\rho_2<r_2$. Soit Δ_1 l'ensemble des $\xi\in K$ tels que $|\xi|\leq\rho_1$ et soit Δ_2 l'ensemble des $\xi\in K$ tels que $\rho_2\leq|\xi|\leq 1$. Soit $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$; alors $D\subset\Delta$. D'autre part, $H(\Delta)$ est une algèbre de Krasner-Tate non dégradée. Soit $a\in\Gamma$ tel que $|a|^2=\rho_1\rho_2$; soit $b\in\Delta_2$ tel que $|b|^2=\rho_2$; soit $\tau=\dfrac{x(x-b)^2}{(x-a)^2}$. Il est clair que $\tau(\Delta)=U$, $\Delta=\tau^{-1}(U)$ et $\|\tau\|_D<1$. On a donc, d'après le théorème V. 8., $H(\Delta)\simeq\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X)-TQ(X))K\{T,X\}}\simeq K\{\tau\}[\xi]$ où $\dfrac{P}{Q}$ est l'unique forme irréductible de τ telle que P soit unitaire et où ξ désigne l'application identique sur Δ.

Soit Φ la surjection canonique de $K\{T,X\}$ sur $H(\Delta)$ telle que $\Phi(T)=\tau$. Comme $\Delta\supset D$, on voit que $Q(x)$ est inversible dans A. Soit $t=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\in A$. On sait que le spectre de t dans A est égal à $\tau(D)$ d'après la proposition II. 12. c), d'où $\|t\|_{sp}=\|\tau\|_D<1$ et comme D est inclus dans un disque de centre 0, de diamètre $r<1$, on a trivialement $\|x\|_{sp}<1$, ce qui montre grâce à la propriété p) que $\lim\limits_{n\to\infty}\|t^n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|=0$. Alors l'homomorphisme θ de l'algèbre normée $(K[T,X], \|.\|_c)$ (algèbre des polynômes à 2 variables normées par la norme canonique) dans l'algèbre de Banach $(A, \|.\|)$ défini par $\theta(f(T,X))=f(t,x)$ est continu et il se prolonge donc par un homomorphisme $\overline{\theta}$ de $K\{T,X\}$ dans A. Or, par définition, $P(x)-tQ(x)=0$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\overline{\theta})\supset\mathrm{Ker}(\Phi)$ et il existe donc un homomorphisme ψ de $H(\Delta)$ dans A tel que $\overline{\theta}=\psi\circ\Phi$ et par définition $\psi(\xi)=x$, $\psi(\tau)=t$.

Soit u_1 la fonction caractéristique de Δ_1 dans $H(\Delta)$ et soit u_2 celle de Δ_2 ; soit $v_1=\psi(u_1)$ et soit $v_2=\psi(u_2)$. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de K-algèbre de A sur K. Soit $\mathfrak{X}_1$ l'ensemble des homomorphismes φ de A sur K tels que $\varphi(x)\in\mathfrak{J}(\Gamma)$ et soit $\mathfrak{X}_2$ l'ensemble des homomorphismes φ de A sur K tels que $\varphi(x)\in\mathscr{E}(\Gamma)$. Il est clair que si $\varphi_1\in\mathfrak{X}_1$, on a $\varphi_1(x)\in\Delta_1$

donc $\varphi_1(\psi(u_1)) = 1$ et $\varphi_1(v_1) = 1$; comme v_1 est de classe algébrique d'après le théorème VI. 15. , on voit donc que v_1 est l'idempotent associé à x et à $\mathfrak{I}(\Gamma)$. De même, v_2 est l'idempotent associé à x et à $\mathcal{E}(\Gamma)$. Si les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini $n \geq 2$ et notées $D_1, \ldots, D_n$, alors chacune d'entre elles D_i est une intersection finie de plages P_j $(1 \leq j \leq q)$ de couronnes vides de D . Soit v_j l'idempotent associé à x et à P_j et soit $w_i = \prod_{j=1}^{q} v_j$; alors il est clair que w_i est l'idempotent associé à x et à D_i , et grâce au théorème VI. 15. , on a $u_i u_j = 0$ pour tous $i \neq j$ car $u_i u_j$ est associé à x et à la partie vide de D ; alors $\sum_{i=1}^{n} u_i$ est un idempotent associé à x et à D , donc égal à 1 .

THEOREME VI. 17. - <u>Soit</u> A <u>une</u> K-<u>algèbre de Banach ultramétrique, commutative unitaire admettant une semi-norme spectrale et possédant la propriété</u> p) .

<u>Alors si</u> A <u>est nœthérienne</u>, <u>il existe un entier</u> $q \in \mathbb{N}$ <u>qui majore le nombre des composantes infraconnexes du spectre de</u> x , <u>quel que soit</u> $x \in A$. <u>Si</u> A <u>n'admet pas d'autre idempotent que</u> 0 <u>et</u> 1 , <u>le spectre de</u> x <u>est infraconnexe quel que soit</u> $x \in A$.

<u>Preuve.</u> Si A est nœthérienne, l'ensemble de ses idempotents est fini. Soit q son cardinal. Nous allons en déduire que les couronnes vides du spectre D d'un élément $x \in A$ sont en nombre fini. Pour cela, il suffit d'établir que l'application qui à chaque couronne vide Γ fait correspondre l'idempotent associé à x et à $\mathfrak{I}(\Gamma)$ est une injection. Or ceci résulte de la dernière assertion du théorème VI.15. Par conséquent, l'ensemble des couronnes vides de D est fini et plus précisément le nombre des couronnes vides de D est trivialement $\leq q$. Alors pour chaque composante infraconnexe D_i de D il existe un idempotent associé à x et à D_i et par le même raisonnement que précédemment, on voit que deux composantes infraconnexes distinctes admettent des idempotents associés distincts, ce qui prouve que leur nombre est $\leq q$.

Si A ne contient aucun idempotent différent de 0 et 1 , D n'admet pas de couronne vide puisque si Γ était une couronne vide de D , il existerait un idempotent u associé à x et à $\mathfrak{I}(\Gamma)$ dont le spectre serait $\{0, 1\}$, donc $u \neq 0$ et 1 .

Les théorèmes VI. 10 et VI. 17 ont pour conséquence le corollaire VI. 18.

COROLLAIRE VI. 18. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire admettant une semi-norme spectrale et possédant la propriété p). Soit $x \in A$; soit D le spectre de x et soit Δ son spectre algébrique. Alors si A est intègre, Δ est une frontière analytique de l'infraconnexe D. Si A est nœthérienne et si $D_1, \dots, D_n$ sont les composantes infraconnexes de D, $\Delta \cap D_i$ est une frontière analytique de D_i quel que soit $i = 1, \dots, n$.

§. 5. - SPECTRES ET SOUS-ALGEBRES DE TYPE FINI

Nous commencerons par le lemme VI. 19.

LEMME VI. 19. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique contenant une sous-K-algèbre de type fini B dense dans A, principale. Alors, tout élément de B est de classe algébrique.

Preuve. On sait, grâce au théorème VI. 3., qu'il existe $x \in B$ et $t(X) \in K(X)$ tel que $B = K[t(x), x]$. Alors, grâce au lemme VI. 7., il est clair qu'il suffit de montrer que x est de classe algébrique pour établir le lemme VI. 19. Pour cela soit $D = sp_A(x)$, et montrons qu'il existe un homomorphisme χ de A sur K tel que $\chi(x) = \lambda$. Nous pouvons toujours définir un homomorphisme χ_o de $K[t, x]$ sur K par $\chi_o(h) = h(\lambda)$ pour tout $h \in K[t, x]$. Montrons que χ_o est continu pour la norme $\|\,.\,\|$ de A. Supposons qu'il existe $h \in K[t, x]$ tel que $|\chi_o(h)| > \|h\|$; alors $h(\lambda) - h$ est inversible dans A et comme $h(\lambda) - h$ est multiple de $x - \lambda$, $x - \lambda$ est inversible, ce qui contredit le fait que $\lambda \in D$. Donc $|\chi_o(h)| \leq \|h\|$ et χ_o est continu et se prolonge en un homomorphisme χ de A sur K tel que $\chi(x) = \lambda$, ce qui prouve que x est de classe algébrique.

THEOREME VI. 20. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire nœthérienne admettant une semi-norme spectrale $\|\,.\,\|_{sp}$, dont la

<u>norme est notée</u> $\|.\|$, <u>et possédant la propriété</u> p). <u>Soit</u> $x \in A$ <u>tel que</u> $P(x) \neq 0$ <u>pour tout polynôme non nul</u> $P(X) \in K[X]$. <u>Alors</u> $sa_A(x)$ <u>est infini.</u>

<u>Preuve.</u> Nous procéderons par l'absurde en supposant fini $sa_A(x)$ que l'on notera $D = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soit $y = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$; on voit que par construction $\|y\|_{sp} = 0$ car pour tout homomorphisme χ de A sur K il existe un indice $i \leq n$ tel que $\chi(x) = a_i$, donc $\chi(y) = 0$. Soit I l'ensemble des éléments $\xi \in A$ tels qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y^n \xi = 0$; il est clair que I est un idéal de A. Soit A' l'algèbre nœthérienne $\frac{A}{I}$ et soit φ la surjection canonique de A sur A'. Soit $y' = \varphi(y)$.

Remarquons d'abord que $y' \neq 0$ car $K[x] \simeq K[X]$ donc y n'est pas nilpotent et $y \notin I$. Nous allons montrer maintenant que y' est régulier. Soit $z' \in A'$ tel que $y'z' = 0$ et soit $z \in A$ tel que $z' = \varphi(z)$. D'autre part, $yz \in I$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y^n (yz) = 0$, d'où $y^{n+1} z = 0$ et $z \in I$, donc $z' = 0$, ce qui montre que y' est régulier. Par ailleurs, I est fermé et A' est une algèbre de Banach pour sa norme quotient $\|.\|'$ et on a trivialement $\|y'\|' \leq \|y\|$; or comme $\|y\|_{sp} = 0$, on voit que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|y'^n\|'} = 0$, donc il existe une suite croissante d'entiers q_n tels que $\lim_{n\to\infty} \frac{\|y'^{q_n+1}\|'}{\|y'^{q_n}\|'} = 0$ sinon il existerait $v > 0$ tel que $\|y'^{n+1}\|' \geq v\|y'^n\|'$ pour tout n, d'où $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|y'^n\|'} \geq v$.

Comme y' est régulier dans A', l'application $\psi : \xi \to y'\xi$ du K-espace vectoriel de Banach $(A', \|.\|)$ sur le K-espace vectoriel normé $(y'A', \|.\|')$ est donc un isomorphisme évidemment continu. Mais comme A' est nœthérienne, comme quotient d'une algèbre nœthérienne, y'A' est fermé dans A' pour la norme $\|.\|'$ donc le K-espace vectoriel normé $(y'A', \|.\|')$ est complet et il résulte du théorème de Banach ([2], §. 3, n° 3) que ψ est bicontinu.

Nous allons montrer que cette dernière affirmation est absurde. Soit λ_n une suite de K telle que $1 \leq \|\lambda_n y'^{q_n}\|' \leq 2$ quel que soit n ; il est clair, grâce à ce qui précède, que $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n y'^{q_n+1}\|' = 0$. On a donc une suite $u_n = \lambda_n y'^{q_n}$ telle que $\|u_n\|' \geq 1$ et telle que $\lim_{n\to\infty} \|\psi(u_n)\|' = 0$ ce qui montre que ψ n'est pas bicontinu et le théorème VI. 20 est démontré.

Remarque. On peut construire des algèbres satisfaisant les hypothèses du théorème VI. 20. sauf l'hypothèse nœthérienne et telle que $sp_A(x)$ soit fini. Munissons en effet $K[X]$ de la norme $\|.\|$ définie par :

$$\left\| \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \right\| = \sup_{0\leq i\leq m} |a_i| \left(\frac{1}{i+1}\right)^i .$$

Il est évident que $\|.\|$ est une norme de K-espace vectoriel et il est facile d'établir qu'il s'agit d'une norme d'algèbre. En effet, soient : $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, et soit $fg = \sum_{k=0}^{m+n} C_k X^k$. Alors on a $\|fg\| = |C_{k_o}| \left(\frac{1}{k_o+1}\right)^{k_o}$, d'où

$$\|fg\| \leq \sup_{0\leq i\leq k_o} \left[|a_i| \,.\, |b_{k_o-i}| \left(\frac{1}{i+1}\right)^i \left(\frac{1}{k_o-i+1}\right)^{k_o-i} \right] \leq \sup_{\substack{0\leq i\leq m \\ 0\leq j\leq n}} \left[|a_i| \left(\frac{1}{i+1}\right)^i . |b_j| \left(\frac{1}{j+1}\right)^j \right] = \|f\| . \|g\| .$$

Soit A l'algèbre de Banach complétée de $K[X]$ pour la norme $\|.\|$ et montrons que le spectre de X dans A est réduit à $\{0\}$. Il suffit pour cela de montrer que $X-a$ est inversible dans A pour tout $a \neq 0$, et pour cela il suffit de voir que $\lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{X}{a}\right)^n \right\| = 0$ pour tout $a \neq 0$, ce qui est évident. Montrons enfin, pour conclure, que si $\|f\|_{sp} \leq 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée. Il suffit naturellement d'établir cette propriété lorsque $f \in K[X]$. Remarquons d'abord que si $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, si $f^q = \sum_{j=0}^{qm} \alpha_j X^j$, et si $S = \sup_{0\leq i\leq m} |a_i|$, on a $|\alpha_j| \leq |a_o|^{qm-j} S^j$. Comme $|a_o| = \|f\|_{sp}$, on voit que $\|f^q\| \leq \sup_{0\leq j\leq qm} \left(\|f\|_{sp}^{q-j} S^j \|X^j\| \right)$ et comme la suite $S^n \|X^n\|$ est bornée, il est clair que si $\|f\|_{sp} \leq 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée, ce qui prouve que A satisfait l'hypothèse du théorème VI. 20. (sauf l'hypothèse nœthérienne).

VII

CARACTERISATION DES ALGEBRES DE TATE PARMI LES ALGEBRES DE BANACH

§. 1. - CARACTERISATION DES ALGEBRES DE KRASNER-TATE PARMI LES ALGEBRES DE BANACH ULTRAMETRIQUES

Rappelons qu'une K-algèbre de Banach admet une semi-norme spectrale si et seulement si l'un au moins de ses idéaux maximaux est de codimension 1 .

THEOREME VII. 1. - *Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique admettant une semi-norme spectrale $\|\,.\,\|_{sp}$ et dont la norme est notée $\|\,.\,\|$. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle possède les propriétés suivantes :*

a) A *est nœthérienne* ;

b) A *est réduite* ;

c) $\|f\|_{sp} \in |K|$ *quel que soit* $f \in A$;

d) *pour tout élément* $f \in A$ *tel que* $\|f\|_{sp} \leq 1$, *la suite* $\|f^n\|$ *est bornée* ;

e) A *contient une sous* K*-algèbre de type fini* B *dense dans* A *pour la norme* $\|\,.\,\|$, *principale.*

Preuve. Il est clair que toute algèbre de Krasner-Tate possède les propriétés a), b), c), d), e) d'après les propositions II. 7. , II. 14. , et d'après le théorème V. 4. . Montrons que réciproquement, si A possède les propriétés a) , b), c), d), e), alors A est une algèbre de Krasner-Tate.

Nous savons, grâce à la proposition VI. 3. , que B est de la forme K[t, x] où t est une fraction de x de degré > 0 . Soit D le spectre de x dans A . Grâce aux propriétés a) et d), il découle du lemme VI. 19. que x est de classe algébrique et du théorème VI. 20 que D est infini et il en résulte que $K(D)$ est isomorphe à une sous-algèbre C de A . En effet, soit $h(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(D)$ et soit $Q(X) = \prod_{i=1}^{q} (X-\alpha_i)$. Puisque $\alpha_i \notin D$, $x-\alpha_i$ est inversible dans A , donc $Q(X)$ est inversible dans A et on peut ainsi construire un homomorphisme ψ de $K(D)$ dans A défini par $\psi(h(X)) = h(x)$ $(h \in K(D))$. Alors comme D est infini, ψ est injectif car si $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, on a $P(x) = 0$, ce qui est absurde car $P(x)$ est un produit d'éléments non nuls de B et B est intègre. Nous identifierons donc désormais $K(D)$ avec C et nous considérerons A comme une $K(D)$ - algèbre.

Nous devons maintenant comparer les normes $\| \cdot \|_{sp}$ et $\| \cdot \|_D$ de $K(D)$. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur K . Puisque x est de classe algébrique d'après le lemme VI. 19., on a les relations (1) pour tout $h \in K(D)$:

$$(1) \qquad \|h\|_D = \sup_{\xi \in D} |h(\xi)| = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} |h(\chi(x))| = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} |\chi(h(x))| = \|h\|_{sp} .$$

(Il est clair que x correspond à l'application identique de $K(D)$).

Montrons maintenant que D est ultracirconférencié. Puisque A est nœthérienne, on sait, grâce à la proposition VI. 16 et au théorème VI. 17., que les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini et que pour chacune d'elles, D_i $(1 \leq i \leq n)$, il existe dans A un idempotent u_i associé à x et à D_i. On sait, grâce au lemme VI. 14., que $u_i x$ est de classe algébrique et que son spectre dans $u_i A$ est D_i . Donc, comme la semi-norme spectrale de $u_i A$ est induite par celle de A d'après le lemme VI. 14., on voit que $\operatorname{diam}(D_i) = \|u_i x - a\|_{sp}$ et que si T est un trou de D_i et si $b \in T$, $\operatorname{diam}(T) = \left\|\frac{1}{u_i x - b}\right\|_{sp}$ ce qui prouve que D_i est calibré. Il en résulte que D est calibré et on déduit de la proposition IV. 5., que D est ultracirconférencié.

L'algèbre $H(D)$ est donc une algèbre de Krasner-Tate. Supposons indexées les composantes infraconnexes de D de telle sorte que $D_1, \dots, D_q$ soient les composantes infraconnexes non réduites à un point. Nous savons, grâce au théorème VI. 15. et à la proposition VI. 16., que les idempotents u_i associés à x

et à D_i $(1 \leq i \leq n)$ satisfont les relations $u_i u_j = 0$ pour tous $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$. On a donc $A = \bigoplus_{i=1}^{n} u_i A$; nous allons montrer que $u_i A \simeq H(D_i)$ pour tout i.

Considérons d'abord le cas où $1 \leq i \leq q$. Alors D_i est un infraconnexe ultracirconférencié et $H(D_i)$ est une algèbre de Krasner-Tate intègre.

Considérons maintenant l'algèbre de Banach $(u_i A , \|.\|)$. Elle possède trivialement les propriétés a) et b) et comme D_i est infini, l'application $\psi : h \to u_i h$ de $K[t,x]$ sur $u_i K[t,x]$ est un isomorphisme car $\psi(h) = 0$ implique $h(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in D_i$, (du fait que $u_i x$ est de classe algébrique), donc $h = 0$. Il en résulte que $u_i A$ possède la propriété e). Enfin, on sait, grâce au lemme VI. 14. que la semi-norme spectrale de $u_i A$ est induite par celle de A, ce qui prouve que $u_i A$ possède les propriétés c) et d), et que D_i est le spectre de $u_i x$ dans $u_i A$. Nous sommes donc ramenés, pour montrer que $u_i A \simeq H(D)$ si $i \leq q$, à établir le théorème VII. 1. dans le cas où D est infraconnexe. Pour cela, supposons donc D infraconnexe et construisons un homomorphisme injectif de $H(D)$-algèbre ψ de $H(D)$ dans A. D'après le théorème V. 3., il existe une fraction $\tau \in K(D)$ telle que $\tau(D) = U$, $D = \tau^{-1}(U)$, $\deg(\tau) \geq 1$, $H(D) = K\{\tau\}[x]$. On peut naturellement supposer que $\|x\|_{sp} \leq 1$ et l'on a donc $D \subset U$. Alors la forme irréductible $\frac{P}{Q}$ de τ telle que P soit unitaire satisfait la relation $1 = \|P\|_c \geq \|Q\|_c$ pour la norme canonique $\|.\|_c$ de $K[X]$. Alors on sait, grâce au théorème V.8., que $H(D) \simeq \dfrac{K\{T,X\}}{(P(X) - TQ(X))\,K\{T,X\}}$ et il existe une surjection canonique φ de $K\{T,X\}$ sur $H(D)$ telle que $\varphi(T) = \tau$, $\varphi(X) = x$. D'autre part, comme $\tau \in K(D) \subset A$, on a $\|\tau\|_{sp} = \|\tau\|_D = 1$ et $\|x\|_{sp} = \|x\|_D \leq 1$ puisque $D \subset U$. Donc les suites $\|\tau^n\|$ et $\|x^n\|$ sont bornées et l'homomorphisme θ de $K[T,X]$ dans A tel que $\theta(f(T,X)) = f(\tau,x)$ est continu et se prolonge en un homomorphisme $\overline{\theta}$ de $K\{T,X\}$ dans A tel que $\theta(f(T,X)) = f(\tau,x)$ pour tout $f(T,X) \in K\{T,X\}$ et comme $P(x) - \tau Q(x) = 0$, il est clair que $\mathrm{Ker}(\varphi) = (P(X) - TQ(X))\,K\{T,X\} \subset \mathrm{Ker}(\overline{\theta})$ et il existe donc un homomorphisme ψ de $H(D)$ dans A tel que $\overline{\theta} = \psi \circ \varphi$. De plus, comme $\overline{\theta}(X) = \varphi(X) = x$ et $\overline{\theta}(T) = \varphi(T) = \tau$, on voit que ψ induit l'identité sur $K(D)$ et c'est donc un homomorphisme de $K(D)$-algèbre. Il en résulte que ψ est injectif. En effet, comme $H(D)$ est intègre et nœthérienne, tout idéal non nul de $H(D)$ est engendré par un polynôme en x d'après la proposition II. 3. et a donc une intersection non nulle avec $K(D)$, et comme $\mathrm{Ker}(\psi) \cap K(D) = \{0\}$ on voit que $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$. L'algèbre

$\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X) - T\,Q(X))\,K\{T,X\}}$ est donc isomorphe à une sous-algèbre A' de A qui contient B par un isomorphisme de $K(D)$ - algèbre et A' est donc complète pour sa norme spectrale. Or cette norme spectrale coïncide avec celle induite par $\|.\|_{sp}$ sur $K(D)$ puisque $\|h\|_D = \|h\|_{sp}$ pour tout $h \in K(D)$. Alors, comme $K(D)$ est dense dans A' pour la norme spectrale de A', on voit que la norme spectrale de A' est induite par $\|.\|_{sp}$ et comme les suites $\|\tau^n\|$ et $\|x^n\|$ sont bornées il résulte du lemme II. 9. que les normes induites sur A' par $\|.\|_{sp}$ et $\|.\|$ sont équivalentes. Or $A' \supset K(D) \supset B$, donc A' est dense dans A pour la norme $\|.\|$ et $A' = A \simeq H(D)$.

Nous avons traité le cas où D est infraconnexe, ainsi que dans le cas général, le cas des composantes infraconnexes de D non réduites à un point. Il reste pour conclure, à montrer que si D_i est réduit à un point $\{a_i\}$, alors $u_iA \simeq H(\{a_i\}) \simeq K$. Considérons l'algèbre $u_iK[t,x]$; comme le spectre de u_ix se réduit à un seul point, il est évident que u_iA n'admet qu'un seul idéal maximal de codimension 1 car deux homomorphismes de A sur K coincideraient sur $u_iK[t,x]$ donc sur u_iA. D'autre part, u_iA est nœthérienne. Alors il résulte du théorème VI.20. que l'application $\pi : h \to u_ih$ de $K[t,x]$ sur $u_iK[t,x]$ n'est pas injective car sinon u_iA satisfairait l'hypothèse du théorème VI. 20. et son spectre de codimension 1 serait infini. Alors comme u_iA est réduite grâce à la propriété b) il résulte du corollaire VI. 4., que u_iA est isomorphe à K^m $(m \in \mathbb{N})$ Mais comme u_iA ne possède qu'un seul idéal maximal de codimension 1, on voit que $m = 1$ et $u_iA \simeq H(\{a_i\})$. Le théorème VII. 1. est donc démontré.

Dans le cas où A est une algèbre de Banach ultramétrique intègre dont le spectre maximal de codimension 1 est infini, on a le corollaire VII. 2.

COROLLAIRE VII. 2. - <u>Une</u> K - <u>algèbre de Banach ultramétrique intègre dont l'ensemble des idéaux maximaux de codimension</u> 1 <u>est infini</u> (<u>resp. une</u> K - <u>algèbre de Banach ultramétrique dont les seuls idempotents sont</u> 0 <u>et</u> 1 <u>et qui admet une norme spectrale</u>) <u>est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle possède les propriétés</u> c), d), e) <u>du théorème VII. 1.</u>

Preuve. Comme précédemment, il suffit de montrer que si l'algèbre A considérée possède les propriétés c) , d) , e) , alors A est une algèbre de Krasner-Tate. Reprenons la démonstration du théorème VII. 1.. On constate que la propriété b) est inutile ici puisque A est intègre ou bien admet une norme spectrale. D'autre part, du fait que A n'admet pas d'idempotent autre que 0 et 1 , D est infraconnexe et on remarque que la propriété a) intervient seulement pour montrer que D est infini. Or, si A admet une norme spectrale, l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de A sur K est infini, et si $\mathfrak{X}$ est infini, alors D est infini car l'application Φ de $\mathfrak{X}$ dans D définie par $\Phi(\varphi) = \varphi(x)$ (où $B = K[t, x]$, $t \in K(x)$) est une injection du fait que B est dense dans A et que φ est continue. Donc dans chaque hypothèse du corollaire, la propriété a) n'est plus nécessaire.

Remarque. - Le théorème VII. 1. et le corollaire VII.2. nous donne en particulier des conditions suffisantes pour qu'une algèbre de Banach soit une algèbre de Krasner et pour qu'elle soit une algèbre de Tate. Ces conditions sont intéressantes dans la mesure où elles ne rappellent ni la définition d'une algèbre de Krasner ni celle d'une algèbre de Tate. On peut également appliquer le théorème VII. 1. aux algèbres topologiquement de type fini ce qui est avantageux du fait qu'elles vérifient déjà les conditions a), c), d). On obtient le théorème :

THEOREME VII. 3. - Une K-algèbre topologiquement de type fini A est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle est réduite et contient une sous-K-algèbre de type fini, principale, dense dans A .

Comme une algèbre de Krasner satisfait trivialement les propriétés b) et d) du théorème VII. 1. , on voit qu'elle est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle possède les propriétés a), c), e) du théorème VII. 1.. En fait, ce résultat serait peu intéressant en comparaison du théorème V. 5.. Nous pouvons cependant obtenir une légère amélioration du théorème V. 5..

THEOREME VII.4. - Une algèbre de Krasner H(D) est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle possède les deux propriétés suivantes :

i) D est calibré ;
ii) H(D) contient une sous-K-algèbre de type fini, principale, dense dans H(D) .

Preuve. Nous devons montrer que si D est calibré et s'il existe u et $\tau \in H(D)$ tels que τ soit une fraction de u et que $K[\tau, u]$ soit principal et dense dans $H(D)$, alors $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate. Soit Δ le spectre de u ; alors il est immédiat de voir que $H(D)$ est isomorphe à $H(\Delta)$. En effet, considérons l'application ψ de $K(\Delta)$ dans $H(D)$ définie par $\psi(h) = h(u)$ quel que soit $h \in K(\Delta)$. Il est clair que l'on a $\|\psi(h)\|_D = \|h\|_\Delta$, et comme ψ est une injection de façon évidente, ψ se prolonge en un monomorphisme de $H(\Delta)$ sur une sous-algèbre fermée de $H(D)$. Mais $\psi(H(\Delta)) \supset K[\tau, u]$, donc $\psi(H(\Delta))$ est dense dans $H(D)$ et $\psi(H(\Delta)) = H(D)$. D'autre part, on sait, grâce à la proposition IV. 1. que l'image Δ d'un ensemble calibré D par un élément u de $H(D)$ est calibré, ce qui montre que $H(\Delta)$ est une algèbre de Krasner-Tate et le théorème est établi.

§. 2. - EXEMPLES NON CLASSIQUES D'ALGEBRES DE BANACH ULTRAMETRIQUES

Nous verrons notamment, grâce à des exemples, que les propriétés a), b), c), d), e) sont indépendantes et qu'une K-algèbre de Banach ultramétrique possédant les popriétés a), b), c), d) et contenant une sous-K-algèbre de type fini dense n'est pas forcément une algèbre de Tate.

LEMME VII. 5. - Soit Γ un corps valué non archimédien complet et soit E un Γ-espace vectoriel égal à la somme directe d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces de E. Pour tout $j \in I$, on note π_j le projecteur de E tel que pour tout $x \in E$, $x - \pi_j(x) \in \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} E_i$. Soient $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|'$ deux normes ultramétriques définies sur E telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ satisfaisant $\|x\| \leq M \|x\|'$ pour tout $x \in E$, telles que leurs restrictions à E_i soient équivalentes quel que soit $i \in I$ et telles que $\|x\| = \sup_{i \in I} \|x_i\|$ et $\|x\|' = \sup_{i \in I} \|x_i\|'$. Soient F et F' les complétés respectifs de E pour les normes $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|'$. Alors il existe une injection continue ψ de F' dans F qui induit l'identité sur E.

Preuve. Grâce à l'hypothèse faite sur la norme $\| . \|$, l'application identique φ de E est une injection continue de l'espace vectoriel normé $(E, \| . \|')$ sur l'espace vectoriel normé $(E, \| . \|)$ et φ se prolonge trivialement en une application linéaire continue ψ de F' sur F qui induit l'identité sur E. Pour établir que ψ est injectif, il suffit donc d'établir que si une suite u_n de E est telle que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$ alors la suite u_n ne converge pas dans F' pour la norme $\| . \|'$ vers une limite non nulle, c'est-à-dire que si $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|' \neq 0$, la suite u_n n'est pas une suite de Cauchy pour la norme $\| . \|'$.

En effet, supposons qu'une suite u_n de E converge dans F' vers un élément $u_0 \neq 0$ et que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$. On doit toujours se ramener au cas où l'on a dans F', $\|u_0\|' \geq 1$ et $\|u_n\|' \geq 1$ pour tout n. Nous allons montrer qu'il existe une suite $n \to i_n$ de I telle que $i_m \neq i_n$ pour tout $m \neq n$, et telle que $\|\pi_{i_n}(u_n)\|' \geq 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Si une telle suite n'existait pas, il existerait un entier $\ell \in \mathbb{N}$ et des éléments $i_1, \ldots, i_\ell \in I$ tels que $\|\pi_i(u_n)\|' < 1$ quel que soit $i \neq i_1, \ldots, i_\ell$. Mais puisque les normes $\| . \|$ et $\| . \|'$ induisent sur E_i des normes équivalentes et que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$, on voit que $\lim_{n\to\infty} \|\pi_i(u_n)\| = 0$ quel que soit i, donc $\lim_{n\to\infty} \|\pi_i(u_n)\|' = 0$ quel que soit i, et pour n assez grand $\|\pi_i(u_n)\|' < 1$ quel que soit $i = i_1, \ldots, i_\ell$. Mais comme $\|\pi_i(u_n)\|' < 1$ pour tout $i \neq i_1, \ldots, i_\ell$ et comme l'ensemble des $i \in I$ tels que $\pi_i(u_n) \neq 0$ est fini, on voit que finalement $\|u_n\|' < 1$ ce qui contredit l'hypothèse et il existe donc une suite injective $n \to i_n$ telle que $\|\pi_{i_n}(u_n)\|' \geq 1$.

Alors il est clair que la suite u_n n'est pas une suite de Cauchy pour la norme $\| . \|'$. En effet, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $\pi_i(u_m) \neq 0$ étant fini, il existe trivialement un entier $n > m$ tel que $\pi_{i_n}(u_m) = 0$ et que $\|\pi_{i_n}(u_n)\|' \geq 1$, d'où $\|u_n - u_m\|' \geq \|\pi_{i_n}(u_n - u_m)\|' = \|\pi_{i_n}(u_n)\|' \geq 1$ et la suite u_n n'est pas de Cauchy ; le lemme VII. 5. est donc établi.

LEMME VII. 6. - <u>Soit</u> A <u>une sous-algèbre pleine d'une algèbre de Banach principale</u> $H(D)$ <u>telle que</u> $K(D) \subset A \subset H(D)$. <u>On suppose que</u> A <u>est l'adhérence complète de</u> $K(D)$ <u>pour une norme</u> $\| . \|$ <u>telle qu'il existe</u> $M \in \mathbb{R}^+$ <u>satisfaisant</u> $\|(x-\alpha)f\| \geq M \|(x-\alpha)\| . \|f\|$ <u>quel que soit</u> $f \in A$. <u>Alors</u> A <u>est principale et tout idéal de</u> A <u>est engendré par un polynôme en</u> x.

Preuve. On voit que tout élément $f \in A$ tel que $f(\alpha) = 0$ se factorise dans A sous la forme $f = (x-\alpha)g$ où $g \in A$ car f est la limite pour la norme $\| . \|$ d'une suite de $K(D)$ de la forme $(x-\alpha)\, g_n$ et g_n est une suite de Cauchy de A grâce à la relation $\|(x-\alpha)g_n\| \geq M \|x-\alpha\| . \|g_n\|$. D'autre part, comme $H(D)$ est principale, on sait grâce au théorème V.8(f), de [5] que f se factorise de façon unique dans $H(D)$ sous la forme $f = P.h$ où P est un polynôme unitaire dont les zéros appartiennent à D et où h est inversible dans $H(D)$. On voit donc par identification que $h \in A$ et comme A est pleine dans $H(D)$, h est inversible dans A, donc $P \in A$. Alors il est immédiat de conclure. Soit I un idéal de A et soit P le P. G. C. D. des polynômes de I dont tous les zéros appartiennent à D. Soit $f \in I$; alors $f = Qh$ où h est inversible dans A et où Q est un polynôme dont les zéros appartiennent à D. Donc $Q \in I$ et Q est multiple de P ce qui prouve que $I = P.A$.

THEOREME VII. 7. - On considère l'application $\| . \|$ définie sur $K[X]$ de la façon suivante : pour tout polynôme $P(X) = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$, soit $\|P\| = \sup_{0 \leq n \leq p} |a_n|(n+1)$. Alors l'application $\| . \|$ définit sur $K[X]$ une norme de K-algèbre. Soit A l'algèbre de Banach complétée de $K[X]$ pour la norme $\| . \|$. Alors A est algébriquement isomorphe à une sous-algèbre pleine A' de $H(U)$ telle que $K(U) \subsetneq A' \subsetneq H(U)$, par un isomorphisme Φ qui associe à X l'application identique sur U. La semi-norme spectrale A' est une norme induite par la norme $\| . \|_U$ de $H(U)$. L'algèbre A est principale et possède la propriété p) mais non la propriété d).

Remarque. - Le théorème VII. 7. montre en particulier l'existence d'algèbres de Banach sur K satisfaisant les conditions a), b), c), e) du théorème VII. 1., mais non la condition d), ce qui prouve que la condition d) n'est pas une conséquence de a), b), c), e). Par ailleurs, il est clair qu'il existe des algèbres de Banach $H(D)$ qui satisfont a), b), c), d) mais non e), et il existe des algèbres de Banach $H(D)$ satisfaisant b), c), d), e) mais non a), d'après la proposition IV. 8. Si $K \neq \mathbb{R}$, il est immédiat de construire un disque D tel que $H(D)$ satisfasse a), b), d), e) mais non c). Enfin la remarque 2 qui suit le théorème V. 5. montre qu'il existe des algèbres de Tate qui satisfont a), c), d), e) mais non b). On voit donc qu'aucune des cinq propriétés a), b), c), d), e) n'est une conséquence des quatre autres.

Preuve du théorème VII. 7. - Montrons d'abord que l'application $\|.\|$ définit sur $K[X]$ une norme de K-algèbre. Il est immédiat de voir que c'est une norme de K-espace vectoriel ; montrons donc que l'on a $\|PQ\| \leq \|P\| \, \|Q\|$ $(P, Q \in K[X])$. Soit $P = \sum_{m=0}^{p} a_m X^m$ et $Q(X) = \sum_{n=0}^{q} b_n X^n$. Soit $\|P(X)\| = |a_{m_o}|(m_o+1)$ et $\|Q(X)\| = |b_{n_o}|(n_o+1)$. Alors on a, quels que soient $m \leq p$ et $n \leq q$:

$$\|P\| \, \|Q\| = |a_{m_o}|(m_o+1)|b_{n_o}|(n_o+1) \geq |a_m|(m+1)|b_{n_o}|(n_o+1) \geq$$

$$\geq |a_m|(m+1)|b_n|(n+1) \geq |a_m b_n| \, (m+n+1) .$$

Soit $P(X)\,Q(X) = R(X) = \sum_{h=0}^{p+q} c_h X^h$. Il est clair que $|c_h| \leq \sup |a_i b_{h-i}|$, d'où :

$$|c_h|(h+1) \leq \|P\,Q\| \qquad \text{quel que soit} \quad h \leq p+q ,$$

et :

$$\|P\,Q\| \leq \|P\| \, \|Q\| .$$

Considérons $K[X]$ comme la somme directe des sous-espaces $E_i = \{\lambda X^i \mid \lambda \in K\}$; on constate que $K[X]$ muni des normes $\|.\|_U$ et $\|.\|$ satisfait l'hypothèse du lemme VII. 5. (où $\|.\|_U$ joue le rôle de $\|.\|$ et $\|.\|$ celui de $\|.\|'$). Il en résulte que A est isomorphe à une sous-algèbre A' de H(U) et il est clair que toute série formelle restreinte de H(U) dont le rayon de convergence est >1 appartient à A', de sorte que l'on a $K(U) \subset A' \subset H(U)$. Ceci montre en particulier que la semi-norme spectrale $\|.\|_{sp}$ de A satisfait $\|t\|_{sp} = \|t\|_U$ quel que soit $t \in K(U)$ d'après la proposition II. 12. b) ; mais comme $K[X]$ est dense dans A pour la norme $\|.\|$, donc a fortiori pour la semi-norme spectrale, on voit que la semi-norme spectrale de A' est une norme induite par la norme $\|.\|_U$ de H(U). Alors $\|X\|_{sp} = 1$ et comme par hypothèse la suite $\|X^n\|$ est non bornée, on voit que A ne satisfait pas la condition d) du théorème VII. 1.

Nous allons voir maintenant que A possède la propriété p). Pour commencer, si $Q \in K[X]$ et si $\|Q\|_{sp} < 1$, alors on a $\lim_{n \to \infty} \|Q_n\| = 0$ car $\|Q\| \leq (\deg Q + 1) \, \|Q\|_{sp}$ et $\|Q^n\| \leq (n \deg Q + 1) \, \|Q\|_{sp}^n$. Considérons maintenant f et $g \in A$ tels que $\|f-g\| \leq 1$ et $M \geq 1$; pour tout entier $q \geq 0$, notons (q) la relation :

$$(q) \qquad \|f^q g^m\| \leq M \quad , \quad \text{pour tout } m \geq 0 .$$

Il est clair que la relation (q) implique la relation (q+1) car :

$$\|f^{q+1} g^m\| = \|f^q g^{m+1} + f^q g^m (f-g)\| \leq \sup (\|f^q g^{m+1}\| , \|f^q g^m\|).$$

Nous allons appliquer ce résultat ; soit $t \in A$ tel que $\|t\|_{sp} < 1$ et montrons d'abord que la suite $\|t^n\|$ est bornée. Soit $P \in K[X]$ tel que $\|t-P\| \leq 1$. Alors on a $\|t-P\|_{sp} \leq 1$, donc $\|P\|_{sp} \leq 1$ et la suite $\|P^n\|$ est bornée par $M \geq 1$. Alors si t et P jouent les rôles de f et g, on voit que la relation (0) est trivialement vérifiée, donc la relation (q) est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$ et l'on a $\|t^q P^m\| \leq M$ pour tous q et $m \in \mathbb{N}$ et en particulier $\|t^q\| \leq M$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to \infty} \|t^n\| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $Q \in K[X]$ tel que $\|t - Q\| < \frac{\varepsilon}{M}$. Alors on voit que $\|t^n - Q^n\| = (t-Q)(\sum\limits_{i=1}^{n-1} t^i Q^{n-i}) \|$, d'où $\|t^n - Q^n\| \leq \varepsilon$ d'après ce qui précède. Or, par hypothèse, $\|Q\|_{sp} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = 0$, ce qui prouve que pour n assez grand, on a :

$$\|t^n\| \leq \varepsilon \quad , \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to \infty} t^n = 0 .$$

On en déduit immédiatement que A est une sous-algèbre pleine de $H(U)$. Supposons en effet qu'un élément $f \in A$ soit inversible dans $H(U)$. Pour simplifier les notations, supposons par exemple que $f(0) = 1$. Soit $t = 1-f$; puisque f est inversible dans $H(U)$, on sait que $\|t\|_U < 1$. Mais d'après ce qui vient d'être vu, $\lim\limits_{n \to \infty} \|t^n\| = 0$ et il en résulte que $f = 1-t$ est inversible dans A.

Montrons enfin que A est principale. Nous savons déjà que tout élément f de $H(U)$ se décompose sous la forme $f = Pg$ où P est un polynôme dont tous les zéros appartiennent à U et où g est inversible dans $H(U)$. Nous allons montrer que si $f \in A$, alors $g \in A$. Puisque A est pleine dans $H(U)$, il en résulte que g est inversible dans A. Alors il est immédiat de conclure que tout idéal de A est engendré par un polynôme dont tous les zéros appartiennent à U.

Pour établir la décomposition $f = Pg$ où $g \in A$, il suffit de montrer que si $f \in A$ et si $a \in U$ tel que $f(a)=0$ alors il existe $h \in A$ tel que $f = (x-a)h$ puisque les zéros de P sont en nombre fini. Nous savons que si $f(a) \doteq 0$, il existe $h \in H(U)$ tel que $f = (x-a)h$. Il reste donc à établir que si $f \in A$, alors $h \in A$.

Pour cela, il suffit, grâce au lemme VII. 6. , de montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|(x-\alpha)f\| \geq M \|x-\alpha\| . \|f\|$.

Or il est clair que $\|xf\| > \|f\|$, d'où $\|(x-\alpha)f\| = \|xf\| > \|f\|$ pour tout $\alpha \in U$ et pour tout $f \in A$. On voit donc que $\|(x-\alpha)\| \geq \frac{1}{2} \|(x-\alpha)\| . \|f\|$ et l'on peut appliquer le lemme VII. 6. , ce qui achève la démonstration.

PROBLEME. - Le théorème IV. 8. avait montré qu'une algèbre de Banach contenant une sous-algèbre de type fini, dense, n'est pas forcément topologiquement de type fini, car elle peut ne pas être nœthérienne. Nous voyons, grâce au théorème VII. 7. , qu'une algèbre de Banach nœthérienne contenant une sous-algèbre de type fini, dense, n'est pas forcément non plus topologiquement de type fini car elle peut ne pas vérifier la condition d) du théorème VII. 1. . On peut donc se demander si une algèbre de Banach ultramétrique nœthérienne, contenant une sous-algèbre de type fini dense, et satisfaisant les conditions c) et d) du théorème VII. 1. est topologiquement de type fini. L'exemple que nous allons construire montre qu'il n'en est rien.

PROPOSITION VII. 8. - Soit (a_n) une suite de U telle que $|a_n| = |a_n - a_m| = 1$ pour tous $n \neq m$ et soit D l'ensemble des $\xi \in U$ tels que $|\xi - a_n| = 1$ quel que soit n . Soit (ε_n) une suite de K telle que $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ et soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{x-a_n} \in H(D)$. Soit x l'application identique sur D . Alors $K[x, f]$ est dense dans $H(D)$; l'algèbre $H(D)$ possède les propriétés a), b), c), d) du théorème VII. 1. et n'est pas topologiquement de type fini sur K .

Preuve. Il est évident que $H(D)$ est nœthérienne d'après le théorème V. 8. de [5] car D est un infraconnexe ouvert sans T-filtre. D'autre part, $H(D)$ possède par construction les propriétés b), c), d). Enfin, il est clair que $H(D)$ n'est pas topologiquement de type fini sur K car ce serait une algèbre de Krasner-Tate mais D n'est pas ultracirconférencié. Il reste donc à montrer que la sous-algèbre de type fini $B = K[x, f]$ est dense dans $H(D)$.

Soit $\overline{B}$ l'adhérence de B dans $H(D)$. Pour montrer que $\overline{B} = H(D)$, il suffit de montrer que $\frac{1}{x-a_n} \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à la décomposition

Mittag-Löfflerienne (théorème IV. 4.). Les éléments a_i jouant le même rôle, il est clair qu'il suffit de montrer que $\frac{1}{x-a_1} \in B$. Soit $g_n = \prod_{i=2}^{n} (x-a_i)f$. Considérons la décomposition en éléments simples de la fraction $h(X) = \frac{\prod_{i=2}^{n} (X-a_i)}{X - a_1}$.

Comme les coefficients du polynôme $P_n(X) = \prod_{i=2}^{n} (X-a_i)$ ont une valeur absolue ≤ 1 , il en est de même du polynôme $Q_n(Y)$ tel que $P_n(X) = Q_n(X-a_1)$, de sorte que $h(X)$ peut s'écrire $\Delta_n(X)+\frac{\lambda_n}{X-a_1}$ où $\Delta_n(X) \in K[X]$ et où λ_n est un élément de K tel que $|\lambda_n| \leq 1$. Plus précisément, on remarque que le polynôme Q_n ne s'annulle pas dans le disque non circonférencié de centre 0 de diamètre 1 , de sorte que l'on a $|\lambda_n| = |Q_n(0)| = \|Q_n\|_U = \|P_n\|_U = 1$ et en particulier $|\lambda_n| = 1$. D'autre part, il est clair que :

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon_i}{x - a_i} \prod_{i=2}^{n} (X - a_i) \in K[X]$$

et l'on a donc :

$$g_n - \sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon_i}{x - a_i} \prod_{i=2}^{n} (x-a_i) - \Delta_n(x) \in B \ ,$$

c'est-à-dire $\frac{\varepsilon_i \lambda_n}{x - a_1} + f_n \in B$ avec $f_n = \prod_{i=2}^{n} (x-a_i) \sum_{i>n} \frac{\varepsilon_i}{x-a_i}$.

Finalement, on voit que $\frac{1}{x - a_1} + \frac{f_n}{\varepsilon_1 \lambda_n} \in B$, et comme $|\lambda_n| = 1$ et $\|f_n\|_D \leq \sup_{i>n} |\varepsilon_i|$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{\varepsilon_1 \lambda_n} = 0$, ce qui prouve que $\frac{1}{x-a_1} \in \overline{B}$, d'où $\overline{B} = H(D)$.

Nous allons voir maintenant qu'une algèbre de Banach admettant une norme spectrale et possédant les propriétés a), b), c), d) du théorème VII. 1. , n'est pas forcément complète pour cette norme spectrale. En fait nous allons construire un nouvel exemple d'algèbre de Banach principale qui n'est pas une algèbre de Krasner $H(D)$.

PROPOSITION VII. 9. - Soit une suite a_n de U telle que $|a_n| = |a_{n+1} - a_n| = 1$ quel que soit n ; soit D_n l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a_n| \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, et soit $D = U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right)$.

Soit E_n le sous-espace vectoriel de $H(D)$ des fractions rationnelles de $K(D_n)$ dont le degré est ≤ -1 et soit $E_o = K[x]$ (où x est l'application identique sur D).

Soit $E = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E_n$ et pour tout $q \geq 0$, soit π_q le projecteur de E tel que $x - \pi_q(x) \in \bigoplus_{\substack{n=0 \\ n\neq q}}^{\infty} E_n$. Soit $\|\,.\,\|$ la norme définie sur E par $\|x\| = \sup_{n\geq 0} (n+1) \|\pi_n(x)\|_D$ et soit A le complété de E pour la norme $\|\,.\,\|$. Alors A est isomorphe à une sous-algèbre A' de $H(D)$ telle que $K(D) \subsetneq A' \subsetneq H(D)$ et A possède les propriétés a), b), c), d) du théorème VII. 1., mais sa norme n'est pas équivalente à sa norme spectrale.

Preuve. L'application $\|\,.\,\|$ définie sur E est évidemment une norme de K-espace vectoriel. D'autre part il est clair que E est une sous-algèbre de $H(D)$ qui contient $K(D)$. Alors la norme $\|\,.\,\|$ est une norme de K-algèbre. Soient f et $g \in E$. On sait que pour tout n, $\|\pi_n(fg)\|_D \leq \|\pi_n(f)\|_D \,.\, \|\pi_n(g)\|_D$, d'où, trivialement, quel que soit $n \geq 0$, $(n+1)\ \|\pi_n(fg)\|_D \leq (n+1)\ \|\pi_n(f)\|_D (n+1)\ \|\pi_n(g)\| \leq$ $\leq [\sup_{m\geq 0} (m+1) \|\pi_m(f)\|_D][\sup_{p\geq 0} (p+1) \|\pi_p(g)\|_D] = \|f\| . \|g\|$ donc $\|fg\| \leq \|f\| . \|g\|$.

Le complété A de E pour la norme $\|\,.\,\|$ est donc une K-algèbre de Banach et il résulte du lemme VII. 5. que A est isomorphe à une sous-algèbre A' de $H(D)$ telle que $K(D) \subsetneq A' \subsetneq H(D)$. On confondra désormais A et A' et on considère donc A comme une sous-algèbre de $H(D)$. Alors, grâce à la relation $K(D) \subset A \subset H(D)$, on voit que A admet une norme spectrale induite par $\|\,.\,\|_D$ et l'algèbre A possède les propriétés c) et d) du théorème VII. 1.. Comme $H(D)$ est intègre, A est intègre et possède donc la propriété b).

Montrons maintenant que A est une sous-algèbre pleine de $H(D)$. Soit f un élément de A inversible dans $H(D)$ et montrons que f est inversible dans A. On peut évidemment se ramener au cas où $f(0) = 1$. D'autre part, puisque D est la réunion d'une famille de disques non circonférenciés, contigus, on sait, grâce aux résultats classiques ([5] et [17]) que la norme $\|\,.\,\|_D$ est une valeur absolue de $H(D)$ et l'on a $|f(\xi)| = |f(0)| = 1$ pour tout $\xi \in D$. Soit $h \in K(D)$ tel que $\|f-h\|_D < 1$; on a donc $|h(\xi)| = 1$ pour tout $\xi \in D$ et h est inversible dans $H(D)$, donc dans $K(D)$, donc dans A. Soit $\varepsilon = h-f$. On voit que

$\|h^{-1}\|_D = \frac{1}{\|h\|_D} = 1$, d'où $\|h^{-1}\varepsilon\|_D = \|\varepsilon\|_D < 1$, ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} \|(h^{-1}\varepsilon)^n\| = 0$ et $1-h^{-1}\varepsilon$ est inversible dans A , donc f est inversible dans A .

Montrons maintenant que A est principale. Pour cela, nous allons établir que pour tout $f \in E$, pour tout $\alpha \in D$, on a la relation $\|(x-\alpha)f\| = \|f\|$. Pour tout $\alpha \in D$, on a trivialement $\|(x-\alpha)f\| \leq \|(x-\alpha)\| . \|f\| = \|f\|$ quel que soit $f \in E$. Nous allons montrer que $\|(x-\alpha)f\| = \|f\|$ et pour cela, nous établirons que si $\|\pi_n[(x-\alpha)f]\|_D < \|\pi_n(f)\|_D$, alors $n = 0$ et il existe $q > 0$ tel que $\|\pi_q(f)\| \geq \|\pi_o(f)\|$.

Considérons d'abord le cas où $n \geq 1$. Le sous-espace $\bigoplus_{\substack{i=0 \\ i\neq n}}^{\infty} E_i$ est également une sous-algèbre de E et l'on a :

$$\pi_n[(x-\alpha)\,\pi_i(f)] = 0 \quad , \text{ pour tout } i \neq n \; .$$

Nous allons en déduire que $\|\pi_n[(x-\alpha)f]\|_D = \|\pi_n(f)\|_D$. En effet, on sait que $\pi_n(f)$ se décompose dans H(D) sous la forme :

$$\pi_n(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{(x-a_n)^j} \quad \text{où} \quad \lim_{j\to\infty} \lambda_{j,n} = 0 \; .$$

Comme les normes $\|\,.\,\|_D$ et $\|\,.\,\|$ sont équivalentes, cette décomposition existe également dans l'espace vectoriel topologique E_n et l'on a naturellement :

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{(x-a_n)^j}\Big\|_D = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_{j,n}| \; .$$

Alors on a la relation (2) :

$$(x-\alpha)\,\pi_n(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,n}(a_n-\alpha) - \lambda_{j+1,n}}{(x-a_n)^j} + \lambda_{1,n}$$

d'où :

$$\pi_n[(x-\alpha)f] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,n}(a_n-\alpha) - \lambda_{j+1,n}}{(x-a_n)^j} \; .$$

Or comme $|a_n - \alpha| = 1$ par hypothèse, il est clair que :

$$\sup_{1\leq j} |\lambda_{j,n}(a_n-\alpha) - \lambda_{j+1,n}| = \sup_{1\leq j} |\lambda_{j,n}| \quad ,$$

d'où la relation cherchée :

$$\|\pi_n((x-\alpha)f)\|_D = \|\pi_n(f)\|_D \quad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

Considérons maintenant le cas où $n = 0$, et supposons que :

$$\|\pi_n(f)\|_D < \|\pi_o(f)\|_D \quad \text{pour tout } n > 0 .$$

La relation (2) montre que si l'on note $\pi_n(f) = \sum_{j=1}^{S_n} \frac{\lambda_{j,n}}{(x-a_n)^j}$ et si q désigne le plus petit des entiers m tels que $\pi_m(f) = 0$, on a :

$$\pi_o[(x-\alpha)f] = (x-\alpha)\,\pi_o(f) + \sum_{n=1}^{q} \lambda_{1,n} \quad .$$

Mais $|\lambda_{i,n}| \leq \|\pi_n(f)\|_D < \|\pi_o(f)\|_D = \|(x-\alpha)\,\pi_o(f)\|$, d'où :

$$\|\pi_o[(x-\alpha)f]\| = \|(x-\alpha)\,\pi_o(f)\| = \|\pi_o(f)\|$$

et la propriété cherchée est donc établie.

Nous allons maintenant en déduire que $\|(x-\alpha)f\| = \|f\|$ pour tout $\alpha \in D$. Soit $f \in E$ et soit r le plus grand des entiers n tels que $\|f\| = \|\pi_n(f)\|_D(n+1)$. Si $r \geq 1$, on voit que $\|\pi_r[(x-\alpha)f]\| = \|\pi_r(f)\|_D$, donc $\|(x-\alpha)f\| \geq \|f\|$ et comme $\|(x-\alpha)\| = 1$, on a $\|(x-\alpha)f\| = \|f\|$. Supposons maintenant $r = 0$. Alors il est clair que $\|\pi_n(f)\|_D < \|\pi_o(f)\|_D$, et l'on a vu que dans ce cas : $\|\pi_o(f)\|_D = \|\pi_o[(x-\alpha)f]\|_D$, donc $\|(x-\alpha)f\| = \|f\|$.

Alors comme $H(D)$ est principale de façon évidente (d'après les résultats de [5]) il est clair que A est principale d'après le lemme VII. 6.

§. 3. - EXEMPLE D'ALGEBRE DE TATE QUI N'EST PAS UNE ALGEBRE DE KRASNER-TATE

Nous avons vu précédemment qu'une algèbre de la forme $\dfrac{K\{T,Y\}}{(Y^2 - TY)\,K\{T,Y\}}$ n'est pas une algèbre de Krasner-Tate bien qu'elle soit de degré 1 . On peut cependant remarquer que l'idéal engendré par $Y^2 - TY$ est strictement inclus dans l'idéal premier de hauteur 1 engendré par Y. Nous allons voir dans ce paragraphe que même si un idéal I de $K\{T, Y\}$ est un idéal premier de hauteur 1, $\frac{K\{T, Y\}}{I}$ n'est pas forcément une algèbre de Krasner. Ce contre-exemple montre en même temps qu'un quotient intègre de $K\{T, Y\}$ et non trivial (c'est-à-dire différent de K et de $K\{T, Y\}$) n'est pas forcément une algèbre de Krasner. La proposition VII. 10., par laquelle il faut commencer, permet de mieux poser le problème.

PROPOSITION VII. 10. - Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini, intègre contenant une sous-K-algèbre B de type fini, dense dans A, dont le corps de fraction est une extension transcendante pure de degré 1 de K. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si A est intégralement close.

Preuve. Il est bien clair que si A n'est pas intégralement close, alors A n'est pas une algèbre de Krasner puisque toute algèbre de Krasner-Tate intègre est principale. Montrons que réciproquement, si A est intégralement close, alors A est une algèbre de Krasner. Soit $K(x)$ le corps des fractions de B et soit $B = K[y_1, \dots, y_n]$. Soit $y_i = \psi_i(x) \in K(x)$ $(1 \leq i \leq n)$. Deux cas se présentent : ou bien $\deg \psi_i \leq 0$ quel que soit i, ou bien il existe $i_o \in [1, n]$ tel que $\psi_{i_o} > 0$. Supposons par exemple $\deg(\psi_1) > 0$. Alors il est clair que x est entier sur B puisque ψ_1 admet dans $K(x)$ une forme irréductible $\frac{P_1}{Q_1}$ telle que P_1 soit unitaire et $\deg(P_1) > \deg(Q_1)$, et x satisfait $P_1(x) - y_1 Q_1(x) = 0$ où $P_1(X) - y_1 Q_1(X)$ est un polynôme unitaire de $B[X]$. Considérons $B' = B[x]$; comme A est intégralement close, $x \in A$ et $B' \subset A$. Alors B' est une sous-K-algèbre de A principale d'après la proposition VI. 1. et trivialement dense dans A, d'où il résulte que A est une algèbre de Krasner-Tate d'après le théorème VII. 2.. Il reste donc pour conclure à étudier le cas où $\deg(\psi_i) \leq 0$ quel que soit i. Mais on se ramène immédiatement au cas précédent par changement de variable en considérant comme dans la démonstration de la proposition VI. 1. une homographie $h : x \to Z = h(x)$ telle que la fraction φ_1 définie par $\varphi_1(Z) = \psi_1(x)$ soit de degré ≥ 1. Alors on a toujours $F = K(Z)$, où Z est entier sur B et on est ramené au cas précédent.

Nous allons voir maintenant un exemple d'algèbre de Tate qui n'est pas une algèbre de Krasner-Tate.

PROPOSITION VII. 11. - *Soit* $A = \dfrac{K\{Y_1, \dots, Y_n\}}{I}$ *une* K-*algèbre topologiquement de type fini intègre où* I *est un idéal de l'extension topologiquement pure* $K\{Y_1, \dots, Y_n\}$. *Soit* φ *la surjection canonique de* $K\{Y_1, \dots, Y_n\}$ *sur* I *et soit* $y_i = \varphi(Y_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. *Supposons que le corps de fraction* F *de* $K[y_1, \dots, y_n]$ *soit une extension transcendante pure de degré* 1 , K(u), *de* K *telle que* $u \in A$. *Soit* $y_i = \psi_i(u) \in K(u)$ $(1 \leq i \leq n)$. *Alors le spectre* Λ *de* u *ne contient aucun point* a *tel que* $\psi_i'(a) = \Lambda$ *quel que soit* i .

Preuve. Il est clair que ψ_i n'admet pas de pôle dans Λ . Supposons en effet que $\alpha \in \Lambda$ soit un pôle de ψ_i et soit $\dfrac{P_i(X)}{Q_i(X)}$ une forme irréductible de ψ_i . Soit χ un homomorphisme de A sur K tel que $\chi(u) = \alpha$; alors $\chi(P_i(u)) = \chi(y_i)\,\chi(Q_i(u)) = \chi(y_i)\,Q_i(\alpha) = 0$, d'où $P_i(\chi(u)) = P_i(\alpha) = 0$ ce qui contredit le fait que P_i et Q_i soient fortement étrangers dans $K[X]$. Il en résulte que ψ_i définit sur Λ une application $\xi \to \psi_i(\xi)$ en tout point dérivable. Mais d'autre part, u est par définition de la forme $f(y_1, \dots, y_n)$ où $f(Y_1, \dots, Y_n) \in K\{Y_1, \dots, Y_n\}$. Considérons la fonction F définie sur Λ par $F(\xi) = f(\psi_1(\xi), \dots, \psi_n(\xi))$. Il est clair que cette fonction est dérivable en tout point de Λ . Supposons maintenant qu'il existe $a \in \Lambda$ tel que $\psi_i'(a) = 0$ quel que soit i $(1 \leq i \leq n)$. Alors, on a donc $F'(a) = 0$ ce qui est absurde puisque F est égal à l'application identique de Λ .

COROLLAIRE VII. 12. - *L'algèbre* $A = \dfrac{K\{T, Y\}}{(Y^2 - T^3)\,K\{T, Y\}}$ *n'est pas une algèbre de Krasner-Tate.*

Preuve. Soit φ la surjection canonique de $K\{T, Y\}$ sur A ; soit $t = \varphi(T)$, $y = \varphi(Y)$. Supposons A intègre ; alors si A est une algèbre de Krasner-Tate, A est principale, donc intégralement close et comme le corps de fraction de $B = K[t, y]$ est de façon évidente $K(\frac{y}{t})$, on voit que $y = u^3$, $t = u^2$ et que $u \in A$ puisque u est entier sur B . Or il est clair que 0 appartient au spectre de u et que $\dfrac{dy}{du}(0) = \dfrac{dt}{du}(0) = 0$ ce qui est absurde d'après la proposition VII. 11..

Il reste donc à montrer que A est intègre, c'est-à-dire que l'idéal $(Y^2 - T^3)K\{T, Y\}$ est premier. Nous allons raisonner par l'absurde. Si $(Y^2 - T^3)K\{T, Y\}$ n'est pas premier, il existe deux éléments non inversibles f_1 et $f_2 \in K\{T, Y\}$ tels que $f_1 f_2 = Y^2 - T^3$ car $K\{T, Y\}$ est factoriel. Mais on sait, grâce à la proposition 6 de [21] qu'il existe deux polynômes unitaires en Y, P_1 et $P_2 \in K\{T\}[Y]$, tels que $Y^2 - T^3 = P_1 P_2$. Chaque polynôme P_i est donc de la forme $P_i = Y + \Sigma_i(T)$ où $\Sigma_i(T) \in K\{T\}$ $(i = 1, 2)$, (en effet, si par exemple le degré en Y de P_1 était nul, P_1 qui est unitaire serait égal à 1 ce qui contredit le fait que P_1 soit non inversible dans $K\{T, Y\}$). On a donc :

$$Y^2 - T^3 = Y^2 + Y(\Sigma_1(T) + \Sigma_2(T)) + \Sigma_1(T)\Sigma_2(T) ,$$

d'où par identification,

$$\Sigma_2 = -\Sigma_1 \quad \text{et} \quad \Sigma_1^2 = T^3 .$$

Or il est clair que T^3 n'est pas un carré dans $K\{T\}$ donc $Y^2 - T^3$ est irréductible dans $K\{T, Y\}$ et le corollaire est établi.

PROBLEME. - L'algèbre $\dfrac{K\{T, Y\}}{(Y^2 - T^3)K\{T, Y\}}$ étudiée ci-dessus n'est pas intégralement close comme l'a montré la démonstration.

On peut donc se poser le problème suivant : une K-algèbre topologiquement de type fini et principale A est-elle une algèbre de Krasner-Tate ? Une première étape consisterait à établir l'existence d'un élément $X \in A$ tel que tout idéal soit engendré par un polynôme en X, mais le problème n'est pas simple, comme nous l'avions déjà remarqué au chapitre V avec l'exemple de l'algèbre $\dfrac{K\{T, Y\}}{(Y^3 + 4Y^2T + 5YT^2 + 2T^3 + Y + 1)K\{T, Y\}} = K\{T\}[y]$ (où y est l'image de Y par la surjection canonique). Si l'on veut mettre en évidence les générateurs d'idéaux maximaux, cette forme n'est pas la bonne car l'idéal engendré par y n'est pas maximal. Par contre, si l'on considère $X = Y + T$, on a :

$$\frac{K\{T, X\}}{[X^2 + X + 1 - T(-X^2 + 1)]\, K\{T, X\}} = K\{T\}[x]$$

(où x est l'image de X par la surjection canonique) et sous cette forme il est clair que A est une algèbre de Krasner-Tate dont tout idéal est engendré par un polynôme en x .

§. 4. - CARACTERISATION DES ALGEBRES DE TATE REDUITES PARMI LES ALGEBRES DE BANACH

Nous avons vu, grâce à la proposition VII. 8. qu'une K-algèbre de Banach ultramétrique admettant une semi-norme spectrale, possédant les propriétés a), b), c), d), et contenant une sous-algèbre de type fini dense n'est pas nécessairement topologiquement de type fini sur K .

Nous allons chercher maintenant une forme de caractérisation des algèbres topologiquement de type fini sur K réduites et de degré 1 parmi les K-algèbres de Banach ultramétriques. Nous établirons d'abord le lemme VII. 13. qui est immédiat.

LEMME VII. 13. - Soit E un corps algébriquement clos, soit A une E-algèbre et soit B une extension entière de A . Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A et soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B tel que $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$. Alors $\mathfrak{n}$ est de codimension 1 si et seulement si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de codimension 1 de A .

Preuve. Soit θ l'injection identique de A dans B et soit φ la surjection canonique de B sur $\frac{B}{\mathfrak{n}}$. Alors, il est clair que $\mathrm{Ker}(\varphi \circ \theta) = \mathfrak{m}$. Soit ψ la surjection canonique de A sur $\frac{A}{\mathfrak{m}}$; on voit qu'il existe une injection γ de $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}$ telle que $\varphi \circ \theta = \gamma \circ \psi$. De plus, si $\mathfrak{n}$ est de codimension 1 , alors $\frac{B}{\mathfrak{n}} \simeq E$ et $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ (qui est une E-algèbre) est isomorphe à E .

D'autre part, comme B est entier sur A , $\frac{B}{\mathfrak{n}}$ est une extension algébrique de $\frac{A}{\mathfrak{m}}$; donc si $\frac{A}{\mathfrak{m}} \simeq E$, alors $\frac{B}{\mathfrak{n}} \simeq E$ et le lemme VII. 13. est établi.

On en déduit la proposition VII. 14. .

PROPOSITION VII. 14. - Soit A une K-algèbre admettant une pseudo-norme spectrale et soit B une extension entière de A. Alors B admet une pseudo-norme spectrale qui induit celle de A.

Preuve. Montrons d'abord que B admet une pseudo-norme spectrale. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de codimension 1 de A. Alors $\mathfrak{m}$ est inclus dans un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B et comme $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$, il résulte du lemme VII. 13. que $\mathfrak{m}$ est de codimension 1. Montrons maintenant que la pseudo-norme spectrale de A est induite par celle de B. On sait, grâce à la proposition II. 12, que si $\|\,.\,\|_{sp}$ est la pseudo-norme de A et $\|\,.\,\|'_{sp}$ celle de B, on a $\|f\|_{sp} \geq \|f\|'_{sp}$ pour tout $f \in A$. Soit χ un homomorphisme de A sur K et montrons l'existence d'un homomorphisme χ' de B sur K tel que $\chi'(f) = \chi(f)$. Soit $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\chi)$ et soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de codimension 1 de B qui contient $\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{n}$ est le noyau d'un homomorphisme χ' de B sur K dont la restriction à A est égale à χ, donc $\chi'(f) = \chi(f)$ pour tout $f \in A$ et $\|f\|_{sp} = \|f\|'_{sp}$.

PROPOSITION VII. 15. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique réduite admettant une semi-norme spectrale $\|\,.\,\|_{sp}$, dont la norme est notée $\|\,.\,\|$, et qui possède les propriétés suivantes :

c) $\|f\|_{sp} \in |K|$ pour tout $f \in A$,

d) si $\|f\|_{sp} \leq 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée,

e') A contient une sous-K-algèbre de type fini $K[y_1, \dots, y_q]$ dense dans A pour la norme $\|\,.\,\|$ de A, dont la dimension algébrique sur K est ≥ 1,

f') A contient un élément t dont le spectre Δ est infraconnexe et infini, tel que A soit une extension entière de l'adhérence dans A de $K[t]$.

Alors A est topologiquement de type fini de degré 1 sur K.

Preuve. Soit $\mathbb{R}$ le diamètre de Δ. Grâce à la propriété c) et au fait que $R > 0$, il existe a et $b \in K$ tels que $\underline{\underline{\mathrm{sa}_A}}(at+b) = U$ et comme $K[t] = K[at+b]$ on voit qu'on peut toujours se ramener au cas où $\underline{\underline{\Delta}} = U$. Supposons donc $\underline{\underline{\Delta}} = U$;

alors grâce au théorème VI. 10. , on sait que Δ est une frontière analytique de $sp_A(t)$ et de l'enveloppe U de Δ , ce qui prouve que l'adhérence dans A de $K[t]$ pour la norme d'algèbre de Banach de A est une extension topologiquement pure $K\{t\}$ dont la norme canonique est induite par la semi-norme spectrale $\|\,.\,\|_{sp}$ de A grâce à la propriété d) et au corollaire VI. 11.. Soit $C = K\{t\}[y_1,\dots,y_q]$. Par construction, C est topologiquement de type fini de degré 1 sur K , et comme A est réduite, C est réduite. Sa semi-norme spectrale, qui est induite par celle de A d'après la proposition VII. 14. est donc une norme équivalente à sa norme d'algèbre topologiquement de type fini. D'autre part, comme la norme $\|\,.\,\|_q$ d'algèbre topologiquement de type fini de C satisfait trivialement $\|f\|_q \geq \|f\|_{sp}$, il est bien clair que si $\|f\|_q \leq 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée grâce à la propriété d) . Donc d'après le lemme II. 9. , il existe $M>0$ tel que $\|f\| \leq M\|f\|_q$ pour tout $f \in A$, et comme les normes $\|\,.\,\|_{sp}$ et $\|\,.\,\|_q$ de C sont équivalentes, il existe N tel que $\|f\| \leq N\|f\|_{sp}$ pour tout $f \in C$. Mais, comme A est complète pour la norme $\|\,.\,\|$, on a trivialement $\|f\|_{sp} \leq \|f\|$ pour tout $f \in A$, ce qui prouve que les normes $\|\,.\,\|_{sp}$ et $\|\,.\,\|$ induisent sur C des normes équivalentes et comme C est dense dans A pour $\|\,.\,\|$ et complet pour $\|\,.\,\|_{sp}$, on voit que $C = A$.

La proposition VII. 15. a pour conséquence le théorème VII.16. .

THEOREME VII. 16. - Une K-algèbre de Banach ultramétrique réduite A admettant une semi-norme spectrale $\|\,.\,\|_{sp}$, dont la norme est notée $\|\,.\,\|$ est topologiquement de type fini de degré 1 sur K si et seulement si elle possède les propriétés a), c), d), e'), f) :

a) A est nœthérienne,

c) si $\|f\|_{sp} \leq 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée,

d) $\|f\|_{sp} \in |K|$ pour tout $f \in A$,

e') A contient une sous-K-algèbre B de type fini sur K , dense dans A , dont la dimension algébrique sur K est ≥ 1 ,

f) A contient un élément t tel que A soit une extension entière de l'adhérence de $K[t]$ dans A .

<u>Preuve.</u> On sait qu'une algèbre topologiquement de type fini de degré 1 sur K possède les propriétés a), c), d), e'), f). Montrons que réciproquement, si une K-algèbre de Banach réduite possède les propriétés a), c), d), e'), f), alors c'est une K-algèbre topologiquement de type fini de degré 1 .

Puisque A est nœthérienne, les composantes infraconnexes du spectre D de t dans A sont en nombre fini d'après le théorème VI. 17.. Soient $D_1, \dots, D_m$, ces composantes infraconnexes et soient $u_1, \dots, u_m$, des idempotents associés respectivement à x et à $D_1, \dots, D_m$ tels que $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$ et $u_i u_j = 0$ pour tout $i \neq j$. Soit $A_i = u_i A$ $(1 \leq i \leq m)$. Alors A est égal à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ et pour établir que A est topologiquement de type fini sur K , il suffit d'établir que chacune des algèbres A_i est topologiquement de type fini sur K . Pour cela, il suffit de montrer que A_i satisfait l'hypothèse de la proposition VII. 15.

Tout d'abord, comme A est réduite, A_i est réduite et grâce au lemme VI. 14., il est clair que sa semi-norme spectrale possède les propriétés c) et d). De plus, $u_i A'$ est algébriquement de type fini sur K et dense dans A_i . Si la dimension algébrique sur K de $u_i A'$ est ≥ 1 , alors A_i qui est nœthérienne, satisfait l'hypothèse du théorème VI. 20. et il en résulte que $sa_{u_i A}(u_i t)$ est infini ; on voit donc que $u_i A$ possède les propriétés c), d), e'). Montrons que A_i est une extension entière de l'adhérence dans A_i de $K[u_i t]$. Si B désigne l'adhérence de K[t] dans A , alors l'adhérence de $K[u_i t]$ dans A_i contient $u_i B$ et comme tout élément de $u_i A$ est entier sur $u_i B$ de façon évidente, on voit que $u_i A$ possède la propriété f') de la proposition VII. 15. car $sp_{u_i A}(u_i t) = D_i$ d'après le lemme VI. 14.. Donc A_i satisfait l'hypothèse de la proposition VII. 15. ce qui montre que A_i est topologiquement de type fini sur K . Supposons maintenant que la dimension algébrique sur K de $u_i A'$ soit égal à 0 . Alors $u_i A' \simeq K^m$ d'après le corollaire VI. 4. et comme $u_i A'$ est dense dans $u_i A$, on a $u_i A' = u_i A$ (car ce sont des K-espaces vectoriels de dimension finie), donc $u_i A \simeq K^m$ et ce cas est trivial.

Finalement, pour tout $i \leq n$, $u_i A$ est topologiquement de type fini sur K et il reste donc à montrer que son degré est 1 .

Ce dernier point est immédiat. Il est clair qu'une au moins des algèbres

A_i est de degré 1 sur K car sinon, elles seraient toutes des extensions entières de K, donc A aussi ce qui est impossible grâce à la propriété e'). Supposons donc les algèbres A_i indexées de façon telle que A_i soit de degré 1 pour $i \leq q$ et de degré 0 pour $i > q$ (avec $q \leq m$). Alors pour $i \leq q$, A_i est une extension entière finie d'une extension topologiquement pure $K\{T_i\}$. Soit $T = \sum_{i=1}^{q} T_i$; alors il est clair que $\overline{K[T]}$ est une extension topologiquement pure et comme tout idempotent de A est trivialement entier sur K, on voit que $u_i K\{T_i\} = u_i K\{T\}$ est entier fini sur $K\{T\}$, d'où $u_i A$ est entier fini sur $K\{T\}$ quel que soit $i \leq m$ et A est entier fini sur $K\{T\}$, donc topologiquement de type fini sur K et de degré 1.

Comme nous l'avons fait pour le théorème VII. 1., nous allons pouvoir déduire de la proposition VII. 15. un théorème particulier dans le cas où A est intègre ou n'admet d'autre idempotent que 0 et 1.

THEOREME VII. 17. - <u>Soit</u> A <u>une</u> K-<u>algèbre de Banach ultramétrique intègre dont l'ensemble des idéaux maximaux de codimension</u> 1 <u>est infini</u> (<u>resp. sans idempotent différent de</u> 0 <u>et</u> 1 <u>et qui admet une norme spectrale</u>). <u>Alors</u> A <u>est une algèbre topologiquement de type fini de degré</u> 1 <u>si et seulement si elle possède les propriétés</u> c), d), e'), f).

<u>Preuve.</u> Dans chacune des deux hypothèses du théorème VII. 17., on voit que le spectre de t est infraconnexe d'après le théorème VI. 17.. D'autre part, dans chacune de ces deux hypothèses, l'ensemble $\mathfrak{X}$ des homomorphismes de A sur K est infini. Si $sa_A(t)$ est fini, il se réduit à un point $a \in K$ et l'on a $\varphi(t) = a$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$, d'où $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$ pour tout $y \in \overline{K[t]}$ et pour tous φ_1 et $\varphi_2 \in \mathfrak{X}$ de sorte que d'après le lemme VII. 13., $\overline{K[t]}$ n'admet qu'un seul idéal maximal de codimension 1 ce qui est faux par hypothèse. Donc l'hypothèse " $sa_A(t)$ fini " est absurde. Alors on peut appliquer la proposition VII. 15. et A est topologiquement de type fini sur K, de degré 1.

<u>Remarque.</u> - Si l'on fait la conjecture que l'affirmation : <u>une</u> K-<u>algèbre de Banach admettant une semi-norme spectrale et possédant les propriétés</u> a), c), d), e') <u>est topologiquement de type fini sur</u> K, (qui est fausse dans le cas général comme on a vu au début de ce paragraphe) est vraie si la sous-algèbre de

type fini, dense, a une dimension algébrique sur K égale à 1, on est amené à penser que la condition f) du théorème VII. 16. est superflue. En fait, cette conjecture, si elle est vraie, doit être difficile à établir car la propriété e') est peu maniable. En effet, on sait, grâce à l'exemple de la proposition IV. 8. que les propriétés c), d), e') peuvent être satisfaites même si A n'est pas nœthérienne.

INDEX

NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Fonctions ultramétriques. Frontières analytiques dans certains quasi-connexes fermés d'un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos. C. R. A. S. Paris, t. 268, p. 1251-1253 (28 mai 1960).

[2] BOURBAKI Nicolas. - Algèbre commutative. Chap. V, Hermann, Paris, 1953 (Actualité Scientifique et Industrielle).

[3] BOURBAKI Nicolas. - Théorie spectrale. Chap. I, Hermann, Paris, 1967 (Actualité Scientifique et Industrielle).

[4] ESCASSUT Alain. - Algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner. C. R. A. S., Paris, t. 270, p. 758-761, (23 mars 1970).

[5] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse de 3e cycle, Fac. des Sciences de Bordeaux, 1970.

[6] ESCASSUT Alain. - Complément sur le prolongement analytique dans un corps valué non archimédien complet algébriquement clos. C. R. A. S., Paris, t. 271, p. 718-721, (12 octobre 1970).

[7] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Krasner. C. R. A. S., Paris, t. 272, p. 598-601, (premier mars 1971).

[8] GERRITZEN Lothar. - Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten affinoiden Algebren. Journal für die reine und angewandte Mathemathematik Band 231, 1968.

[9] GRAUERT Hans et REMMERT Reinhold. - Uber die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis. Inv. Math. t. 2, p. 87-133, 1966.

[10] GRAUERT Hans. - Affinoide Überdeckungen eindimensionaler, affinoïder Räume. Presses Universitaires de France, Paris, I. H. E. S., Publications mathématiques, n° 34, 1968.

[11] GRUSON Laurent. - Algèbres de Banach ultramétriques. (Journées Poitou-Aquitaine, Poitiers, 1967).

[12] GRUSON Laurent. - Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, p. 45 à 89, 1968.

[13] HOUZEL Charles. - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique (d'après Tate). Colloque Poitou-Aquitaine, 1965.

[14] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque du C. N. R. S. , Clermont-Ferrand, 1964.

[15] LANG Serge. - Abelian varieties. Interscience tracts in pure and applied mathematics, number 7. Interscience publischers, Inc. New-York, 1958.

[16] LANG Serge. - Algebra Addison Wesley. Publishing Company Inc. Reading Massachussetts, 1965.

[17] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique. Presses Universitaires de France, Paris, I. H. E. S. , Publications mathématiques n° 14, 1962.

[18] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe. - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique en analyse p-adique. C. R. A. S. , Paris, t. 269, p. 126-129 (21 juillet 1969).

[19] REMMERT Reinhold. - Algebraische Aspekte in der nichtarchimedischen analysis. Proceeding of a conference on local fields. Nuffic Summer school held at Driebergen (The Netherlands) in 1966. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.

[20] ROBBA Philippe. - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets. Astérisque, fasc. 10, octobre 1973.

[21] SALMON Pietro. - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici (Annali di Matematica pura ed applicata, serie IVT LXV, 1964).

[22] TATE John. - Rigid analytic spaces. Inv. Math. t. 12, fasc. 4, p. 257-289, 1971.

Alain ESCASSUT

U.E.R. de Mathématiques
Bâtiment 425
Centre d'Orsay
Université de Paris-Sud

91405 ORSAY