

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN VAILLANT

Systèmes fortement hyperboliques 4×4 , dimension réduite et symétrie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 29,
n° 4 (2000), p. 839-890

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_4_839_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Systemes fortement hyperboliques 4×4 , dimension reduite et symetrie

JEAN VAILLANT

Abstract. a is a matrix valued 4×4 strongly hyperbolic operator ; we state the following result : if the reduced dimension of a is superior or equal to 8, a is symmetric in a convenient basis.

Mathematics Subject Classification (2000): 35L40.

On considere un operateur differentiel matriciel lineaire du 1o ordre a coefficients reels $a(D) = ID_0 + a(D')$. Il est bien connu que la symetrie de la matrice $(a_j^i(D))$ implique l'hyperbolicite forte de l'operateur. Nous nous posons le probleme reciproque. P.D. Lax [2] donne un exemple d'operateur fortement hyperbolique 3×3 tel qu'il n'existe pas de matrice T a coefficients constants telle que : $T^{-1}(a_j^i(\xi))T$ soit symetrique, pour tout ξ . G. Strang [7] a montre que tout operateur 2×2 fortement hyperbolique est symetrisable par une matrice T convenable. J. Vaillant [9] montre que tout operateur $m \times m$ diagonalisable peut etre symetrisé dans ce sens, nous dirons est presymetrique, si sa dimension reduite [9] (la dimension de l'espace vectoriel de matrices engendré par les matrices (I, a_1, a_k, a_n)) est maximum, c'est-à-dire est égale à $\frac{m(m+1)}{2}$, et si une hypothese naturelle, mais inutile, comme le montrera Nishitani [3], est verifiee. T. Nishitani [3] montre que tout operateur $m \times m$ diagonalisable est presymetrique si sa dimension reduite est superieure ou egale à : $\frac{m(m+1)}{2} - 1$. D'autre part, Oshime [6] avait completement classifié les operateurs 3×3 diagonalisables et uniformement diagonalisables ; en particulier, il avait montre qu'il existe des operateurs 3×3 , de dimension reduite $\frac{3 \times (3+1)}{2} - 2 = 4$, non presymetriques.

Nous conjecturons que, si $m \geq 4$ et si la dimension reduite est superieure ou egale à : $\frac{m(m+1)}{2} - 2$, les operateurs fortement hyperboliques sont presymetriques. Les demonstrations de [9], [3] s'appuient fortement sur le cas $m = 3$. Il paraît donc naturel d'examiner d'abord le cas $m = 4$. Nous obtenons que, dans ce cas,

la conjecture est vérifiée : tout opérateur 4×4 , de dimension réduite supérieure ou égale à 8 est présymétrique.

L'intérêt des résultats à coefficients constants est d'une part, qu'ils ont une extension naturelle au cas des coefficients réguliers ; en effet dans [5], T. Nishitani et J. Vaillant montrent, dans le cas $m \times m$, $m \geq 3$, que, si pour chaque x , l'opérateur $a(x, D)$ est diagonalisable et si sa dimension réduite d est supérieure ou égale à : $\frac{m(m+1)}{2} - 1$, alors il est régulièrement symétrisable au sens précédent ($T(x)$ est régulière) ; pour $m = 2$ on suppose : $d \geq 3$. D'autre part, ils présentent un intérêt en semi-linéaire où ils permettent de remplacer l'hypothèse usuelle de symétrie de la partie principale par celle d'hyperbolicité forte.

0. – Définitions, notations, rappels et résultats

E et F sont des espaces vectoriels réels de dimensions $n + 1$ et m . a est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des applications linéaires de F dans F .

DÉFINITION 0.1. On appelle dimension réduite de a le rang de a :

$$d = \text{rang } a.$$

On notera : ξ un élément de E ; la valeur de a pour ξ est : $a(\xi)$.

DÉFINITION 0.2. Soit $N \in E$; on dit que N n'est pas caractéristique pour a si et seulement si : $\det a(N) \neq 0$.

Posons : $a^\# = a^{-1}(N)a$; la dimension réduite de $a^\#$ est encore d et l'on a : $a^\#(N) = I$. On supposera plus simplement dans la suite que a est de dimension réduite d et telle que : $a(N) = I$.

Si on choisit une base de E de 1^o vecteur N , on a :

$$a(\xi) = \xi_0 I + \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \xi_k = \xi_0 I + a(\xi')$$

d est la dimension du sous espace des applications linéaires de F dans F , engendré par $\{(I, a_1, \dots, a_n, \dots, a_n)\}$; si $\{(I, a_1, \dots, a_{d-1})\}$ est une base de cet espace, on a évidemment :

$$a(\xi) = \xi_0 I + \sum_{1 \leq k \leq d-1} a_k \xi_k$$

et a est de dimension réduite $d - 1$.

Si on choisit une base dans F , on a les matrices :

$$a_j^i(\xi) = \xi_0 I_j^i + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{jk}^i \xi_k.$$

d est la dimension du sous espace vectoriel engendré par les matrices $((I), \dots, (a_k), \dots)$; d est aussi la dimension réduite du sous espace vectoriel engendré par les formes linéaires :

$$\xi \rightarrow a_j^i(\xi),$$

lorsque i et j varient.

DÉFINITION 0.3. a est diagonalisable (dans le réel) par rapport à N si et seulement si :

- i) les zéros en τ de : $\det[\tau I + a(\xi)] = 0$, sont tous réels, quelque soit ξ
- ii) lorsque $\tau(\xi)$ est un zéro, la dimension du noyau de : $\tau(\xi)I + a(\xi)$ est égale à la multiplicité du zéro $\tau(\xi)$.

Choisissons une base de E de 1^o vecteur N , cette définition équivaut à dire que :

- i) les valeurs propres de $a(\xi')$ sont toutes réelles, $\forall \xi'$
- ii) la dimension du sous espace propre correspondant à une valeur propre est égale à la multiplicité de la valeur propre.

Dans ces conditions, on notera $\Delta(\xi')$ un diagonalisateur de la matrice $a(\xi')$:

$$\Delta^{-1}(\xi') a(\xi') \Delta(\xi') = D(\xi');$$

$D(\xi')$ diagonale.

DÉFINITION 0.4. a est uniformément diagonalisable par rapport à N si et seulement si :

- i) a est diagonalisable par rapport à N
- ii) il existe un diagonalisateur Δ et un $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\forall \xi' \neq 0 \quad \|\Delta(\xi')\| = 1, \det |\Delta(\xi')| > \varepsilon,$$

cette définition ne dépend pas évidemment du choix de la base de E de premier vecteur N , ni du choix de la base de F .

REMARQUE 0.5. Le théorème de Kasahara - Yamaguti (Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto 33 Ser A (1960) p. 1-23) montre que l'uniforme diagonalisabilité de a par rapport à N équivaut à l'hyperbolicité forte par rapport à N de l'opérateur différentiel : $a(D)$.

DÉFINITION 0.6. a est présymétrique par rapport à N , si et seulement si : il existe une base de E de premier vecteur N et une base de F telles que, dans ces bases, les matrices :

$$(a_j^i(\xi)) \text{ soit symétriques } \forall \xi.$$

Cette définition équivaut à dire que les matrices $(a_j^i(\xi'))$ sont symétriques $\forall \xi'$. Autrement dit, si on a une base de E de premier vecteur N et une base de F dans lesquelles la matrice de a est $a_j^i(\xi')$, il existe une matrice de changement de base T réelle telle que :

$$T^{-1} (a_j^i(\xi')) T \text{ soit symétrique } \forall \xi'.$$

La symétrie est évidemment ensuite conservé dans les changements de base orthonormaux de F . On démontre dans ce papier le théorème suivant :

THÉORÈME. Si $a(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N , si $m = 4$, si $d \geq \frac{4 \times (4+1)}{2} - 2 = 8$, alors a est présymétrique par rapport à N .

La démonstration utilise d'abord deux lemmes.

LEMME 0.7 [1]. Si a est diagonalisable par rapport à N , si $m = 4$, $d \geq 8$, alors il existe un $\xi' \neq 0$ tels que la plus grande valeur propre de $a(\xi')$ soit de multiplicité 3.

La variété caractéristique de $a : \det a(\xi) = 0$ a donc un point triple différent de l'origine.

LEMME 0.8 [11]. E est de dimension 3. F est de dimension 4. On suppose que :

- i) $a(D)$ est fortement hyperbolique par rapport à N
- ii) il existe un $\xi' \neq 0$ tel que $a(\xi')$ ait une valeur propre de multiplicité 3.

Alors :

i) on peut choisir une base de E de premier vecteur N et une base de F telles que :

$$(a_j^i(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & & \\ * & & C & \\ * & & & \end{pmatrix} \xi_2,$$

où C est une matrice 3×3 diagonalisable (dans le réel)

ii) on diagonalise C ; $(a_j^i(\xi))$ s'écrit dans la nouvelle base de F :

$$(a_j^i(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & \alpha_1 & & 0 \\ b_5 & & \alpha_2 & \\ b_6 & 0 & & \alpha_3 \end{pmatrix} \xi_2.$$

On convient que : $\text{sign } b_i = \text{sign } b_j$, si : $b_i b_j > 0$ ou $b_i = b_j = 0$; on a alors :

1. si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont différents deux à deux

$$\text{sign } b_1 = \text{sign } b_4 ; \quad \text{sign } b_2 = \text{sign } b_5 ; \quad \text{sign } b_3 = \text{sign } b_6$$

2. si $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$:

$$\left[(b_1 b_4 + b_2 b_5 > 0) \quad \text{ou} \quad (b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = 0) \right]$$

et $\text{sign } b_3 = \text{sign } b_6$

3. si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

$$b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6 > 0 \quad \text{ou} \quad (b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = b_3 = b_6 = 0)$$

iii) on peut symétriser $(a_j^i(\xi))$: il existe une base de F telle que dans cette base : $b_1 = b_4$, $b_2 = b_5$, $b_3 = b_6$.

Un résumé de la preuve du théorème avait été donné dans [10].

1. – On notera souvent, abusivement, la matrice :

$$(a_j^i(\xi)) = a(\xi).$$

Comme il résulte du lemme 0.7 qu'il existe un $\xi' \neq 0$, soit $\underline{\xi}'$ tel que $a(\underline{\xi}')$ ait une valeur propre triple, en choisissant $a(\underline{\xi}')$ comme matrice élément d'une base de l'espace des matrices, et en remarquant qu'elle est diagonalisable, on obtient :

$$a(\xi) = \xi_0 I + e\xi_1 + b(\xi'');$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_7); b \text{ est une matrice de formes linéaires en } \xi'';$$

$b_1^1(\xi'') \equiv 0$; on a remarqué que si la dimension réduite de a est strictement supérieure à 8 , elle est présymétrique [3] et qu'il suffit donc de considérer le cas $d = 8$.

On notera :

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & & & \\ b_5(\xi'') & & C(\xi'') & \\ b_6(\xi'') & & & \end{pmatrix}$$

b est de dimension réduite 6.

On remplace ξ'' par $u\xi''$, $u \in \mathbb{R}$. Pour tout ξ'' , la matrice :

$$a(\xi_1, u) = e\xi_1 + ub(\xi''),$$

considérée, comme matrice de formes linéaires en (ξ_1, u) est uniformément diagonalisable.

Le lemme 0.8 implique :

- i) pour tout ξ'' , $C(\xi'')$ est diagonalisable ;
- ii) soit $U(\xi'')$ inversible telle que :

$$D(\xi'') = U^{-1}(\xi'')C(\xi'')U(\xi'')$$

soit diagonale.

On note :

$$U(\xi'') = (U_j^i(\xi'')), 1 \leq i, j \leq 3.$$

On pose :

$$V(\xi'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & U(\xi'') & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et on transforme a par $V(\xi'')$, on obtient :

$$e\xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & D(\xi'') & \\ * & & & \\ * & & & \end{pmatrix} u.$$

La première ligne de la matrice b transformée s'écrit :

$$\left(0, \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i(\xi'') U_1^i(\xi''), \sum_{1 \leq i \leq 3} b_1(\xi'') U_2^i, \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i(\xi'') U_3^i(\xi'') \right).$$

La première colonne s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left(0, (U^{-1})_1^1(\xi'') b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^1(\xi'') b_5(\xi''), (U^{-1})_3^1(\xi'') b_6(\xi''), \right. \\ & \quad (U^{-1})_1^2(\xi'') b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^2 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^2 b_6(\xi''), \\ & \quad \left. (U^{-1})_1^3(\xi'') b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^3 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^3 b_6(\xi'') \right). \end{aligned}$$

$\forall \xi''$ tel que les éléments de $D(\xi'')$ sont distincts, on a :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \text{sign}(b_1 U_1^1(\xi'') + (b_2 U_1^2(\xi'') + (b_3 U_1^3(\xi'')) \\ & = \text{sign} \left(((U^{-1})_1^1 b_4(\xi'') + ((U^{-1})_2^1 b_5(\xi'') + ((U^{-1})_3^1 b_6(\xi'')) \right) \end{aligned}$$

et brièvement :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & \text{sign} (b_1 U_2^1 + b_2 U_2^2 + b_3 U_2^3)(\xi'') \\ & = \text{sign} [(U^{-1})_1^2 b_4 + (U^{-1})_2^2 b_5 + (U^{-1})_3^2 b_6](\xi'') \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \text{sign} (b_1 U_3^1 + b_2 U_3^2 + b_3 U_3^3)(\xi'') \\ & = \text{sign} [(U^{-1})_1^3 b_4 + (U^{-1})_2^3 b_5 + (U^{-1})_3^3 b_6](\xi''). \end{aligned}$$

Notons $D(\xi'') = \text{diag} (D_1^1(\xi'') D_2^2(\xi''), D_3^3(\xi''))$;

$\forall \xi''$ tel que $D_2^2(\xi'') = D_3^3(\xi'')$, $D_1^1(\xi'') \neq D_2^2(\xi'')$, on a la condition (1.1). On a, de plus :

$$(1.4) \quad \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i U_2^i(\xi'') = \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i U_3^i(\xi'') = 0$$

implique :

$$(U^{-1})_1^2 b_4 + (U^{-1})_2^2 b_5 + (U^{-1})_3^2 b_6(\xi'') = (U^{-1})_1^3 b_4 + (U^{-1})_2^3 b_5 + (U^{-1})_3^3 b_6(\xi'') = 0$$

$\forall \xi''$ tel que $D_1^1(\xi'') = D_2(\xi'') = D_3(\xi'')$, on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} b_i U_1^i(\xi'') = \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i U_2^i(\xi'') = \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i U_3^i(\xi'') = 0$$

implique :

$$\begin{aligned} (1.5) \quad & (U^{-1})_1^1 b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^1 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^1 b_6(\xi'') \\ & = (U^{-1})_1^2 b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^2 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^2 b_6(\xi'') \\ & = (U^{-1})_1^3 b_4(\xi'') + (U^{-1})_2^3 b_5(\xi'') + (U^{-1})_3^3 b_6(\xi'') = 0. \end{aligned}$$

REMARQUE 1.1. Si $C(\xi'')$ est symétrique, alors $U(\xi'')$ est orthogonale et $(U^{-1})(\xi'') = {}^t U(\xi'')$.

REMARQUE 1.2. $C(\xi'')$ est nécessairement de dimension réduite ≥ 3 . En effet si C est de dimension réduite 2, comme $b(\xi'')$ est de dimension réduite 6, par un changement de base dans E , on peut choisir deux formes de $C(\xi'')$ et 4 formes de la 1ère ligne et de la 1ère colonne de $b(\xi'')$, comme formes linéaires de base ; on peut donc écrire, par exemple :

$$b(\eta'') = \begin{pmatrix} 0 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \\ \eta_7 & C(\eta_2, \eta_3) & & \\ * & & & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

En posant $\eta_2 = \eta_3 = 0$, $\eta_4 = 0$, $\eta_5 = \eta_6 = 0$, $\eta_7 = 1$ et en appliquant le 0.8 lorsque les valeurs propres de $C(\eta_2, \eta_3)$ sont égales, on obtient une impossibilité. On raisonne de même si C est de dimension 0 ou 1.

$C(\xi'')$ est diagonalisable ; on en déduit aisément [9] que sa dimension réduite est inférieure ou égale à $\frac{3 \times (3+1)}{2} - 1 = 5$. Nous allons examiner les différents cas possibles selon la dimension réduite de $C(\xi'')$.

2. – Cas où $C(\xi'')$ est de dimension réduite égale à 3

$C(\xi'')$ est une matrice 3×3 diagonalisable ; il résulte de [6], que l'on peut choisir un $\underline{\xi}'' \neq 0$ pour lequel $C(\underline{\xi}'')$ a une valeur propre double ; plus précisément Oshime [6] donne les formes réduites possibles de $C(\xi'')$, ce qui revient à choisir des bases convenables dans E et F .

On pose :

$$e' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I - La première forme réduite est ([6], p. 950) :

$$C(\xi'') = e' \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_4,$$

$0 \leq \alpha < 1$ et :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_3 + \alpha \xi_4 & \xi_4 \\ b_5(\xi'') & \xi_3 - \alpha \xi_4 & 0 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la dimension réduite de $b(\xi'')$ est 6, on peut prendre 3 des formes $b_i(\xi'')$ comme formes de base. Distinguons les cas possibles

a) $b_1(\xi'')$, $b_2(\xi'')$, $b_3(\xi'')$ peuvent être prises comme formes de base ; sans changer de notation, on a :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_3 + \alpha \xi_4 & \xi_4 \\ b_5(\xi'') & \xi_3 - \alpha \xi_4 & 0 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notons : $b_i(\xi'') = \sum_{2 \leq k \leq 7} \beta_{ik} \xi_k$, $i \in \{4, 5, 6\}$; posons : $\xi_3 = \xi_4 = 0$, $\xi_2 \neq 0$; il résulte de (1.4) que :

$$\beta_{45} > 0, \quad \beta_{42} \xi_2 + \beta_{46} \xi_6 + \beta_{47} \xi_7 \equiv 0,$$

soit : $\beta_{42} = \beta_{46} = \beta_{47} = 0$.

$$\beta_{52} \xi_2 + \beta_{55} \xi_5 \equiv 0, \quad \beta_{62} \xi_2 + \beta_{65} \xi_5 \equiv 0;$$

soit :

$$\beta_{52} = \beta_{55} = \beta_{62} = \beta_{65} = 0.$$

On a donc :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43} \xi_3 + \beta_{44} \xi_4 + \beta_{45} \xi_5 & \xi_2 & \xi_3 + \alpha \xi_4 & \xi_4 \\ \beta_{53} \xi_3 + \beta_{54} \xi_4 + \beta_{56} \xi_6 + \beta_{57} \xi_7 & \xi_3 - \alpha \xi_4 & 0 & 0 \\ \beta_{63} \xi_3 + \beta_{64} \xi_4 + \beta_{66} \xi_6 + \beta_{67} \xi_7 & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons, pour ξ'' convenablement choisi, diagonaliser $C(\xi'')$ et écrire les conditions du type (1.1), (1.2), (1.3)

i) On pose : $\xi_3 = 0$, $\xi_2 = (1 - s^2)\sqrt{1 - \alpha^2}$, $\xi_4 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$.
On diagonalise la matrice :

$$C(s) = \begin{pmatrix} (1 - s^2)\sqrt{1 - \alpha^2} & \alpha s & s \\ -\alpha s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les opposés des valeurs propres sont les valeurs distinctes :

$$(s^2\sqrt{1 - \alpha^2}, -\sqrt{1 - \alpha^2}, 0).$$

On détermine les vecteurs propres correspondants. On peut choisir :

$$U(s) = \begin{pmatrix} s\sqrt{1 - \alpha^2} & \sqrt{1 - \alpha^2} & 0 \\ \alpha & -\alpha s & -1 \\ -1 & s & \alpha \end{pmatrix}$$

dét $U(s) = (1 + s^2)(1 - \alpha^2)^{3/2} = s\delta(s) \neq 0$, $\delta(s) > 0$.

$$U^{-1}(s) = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\delta(s)} \begin{pmatrix} s\sqrt{1 - \alpha^2} & -\alpha & -1 \\ \sqrt{1 - \alpha^2} & \alpha s & s \\ 0 & -(1 + s^2) & -\alpha(1 + s^2) \end{pmatrix}$$

$(U^{-1}CU)(s)$ est diagonale à valeurs propres distinctes.

On suppose d'abord $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) ; on obtient :

$$(U^{-1})_1^i \beta_{44} + (U^{-1})_2^i \beta_{54} + (U^{-1})_3^i \beta_{64} = 0,$$

d'où :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0.$$

ξ_5, ξ_6, ξ_7 sont maintenant quelconques. La condition (1.1) s'écrit : $\forall \xi_5, \xi_6, \xi_7$, $s \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left(s\sqrt{1 - \alpha^2}\xi_5 + \alpha\xi_6 - \xi_7 \right) \\ & = \text{sign} \left(s\sqrt{1 - \alpha^2}\beta_{45}\xi_5 - (\alpha\beta_{56} + \beta_{66})\xi_6 - (\alpha\beta_{57} + \beta_{67})\xi_7 \right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$(2.1) \quad \beta_{45} > 0; \alpha\beta_{56} + \beta_{66} = -\alpha\beta_{45}; \alpha\beta_{57} + \beta_{67} = \beta_{45},$$

ii) On pose : $\xi_2 = \xi_4 = 0$; $\xi_3 \neq 0$.

On diagonalise la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3.$$

Les valeurs propres sont : $(0, \pm \xi_3)$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$U^{-1}CU$ est diagonale à valeurs propres distinctes.

On suppose d'abord : $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) ; on obtient :

$$(U^{-1})_1^i \beta_{43} + (U^{-1})_2^i \beta_{53} + (U^{-1})_3^i \beta_{63} = 0,$$

d'où :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = 0.$$

On suppose $\xi_7 = 0$; on écrit la condition (1.1) :

$$\beta_{66} \xi_6 \equiv 0;$$

d'où :

$$(2.2) \quad \beta_{66} = 0.$$

On suppose ξ_5, ξ_6, ξ_7 quelconques ; on écrit la condition (1.2) :

$$\text{sign}(\xi_5 - \xi_6) = \text{sign}(\beta_{45} \xi_5 - \beta_{56} \xi_6 - \beta_{57} \xi_7);$$

on en déduit :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \beta_{57} &= 0 \\ \beta_{45} &= \beta_{56} \end{aligned}$$

d'où à l'aide des formules (2.1), (2.2), (2.3) :

1) si $\alpha \neq 0$: $\beta_{45} = 0, \beta_{45} > 0$

ce cas est impossible

2) si $\alpha = 0$: $\beta_{66} = \beta_{57} = 0$; $\beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} > 0$

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{45} \xi_5 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{45} \xi_6 & \xi_3 & 0 & 0 \\ \beta_{45} \xi_7 & \xi_7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que a est présymétrique en la transformant par :

$$T = \text{diag} \left((1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}) \right)$$

b) Les formes $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ ne sont pas linéairement indépendantes, et l'ensemble :

$$(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')) \text{ est de rang } 5$$

b₁) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_5(\xi'')$ ou $b_6(\xi'')$, $b_2(\xi'')$, $b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes ; (par exemple, on choisit $b_5(\xi'')$, l'autre cas étant analogue) ; on les choisit comme élément d'une base

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \text{c.lin. } (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_6 & \xi_7 \\ \text{c.lin. des} & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \text{formes de base} & & & \\ \xi_5 & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ \text{c.lin. des} & \xi_4 & 0 & 0 \\ \text{formes de base} & & & \end{pmatrix}.$$

On fait $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; $\xi_5 = 1$ du lemme 2, on déduit que ce cas est impossible.

b₂) On n'a pas l'hypothèse de b₁) et :

$$(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_4(\xi'), b_2(\xi''), b_3(\xi'')) \text{ sont linéairement indépendantes ;}$$

on a :

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_6 & \xi_7 \\ \xi_5 & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7) & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On fait : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; $\xi_5 = 1$ le lemme 2 implique une impossibilité.

b₃) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ ne sont pas linéairement indépendantes ; $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. On a donc :

$\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_3(\xi'')$ et une des formes $(b_4(\xi''), b_5(\xi''), b_6(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. On a par exemple :

$$b(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \xi_5 & \text{c.lin.}(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6) & \xi_6 \\ * & \xi_2 & \xi_3 + \alpha\xi_4 & \xi_4 \\ \xi_7 & \xi_3 - \alpha\xi_4 & 0 & 0 \\ * & \xi_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fait : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_7 = 1$; compte tenu du lemme 2 on a une impossibilité.

b₄) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ ne sont pas linéairement indépendants ;
 $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendants.

Ce cas est analogue au précédent.

c) $\{\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')\}$ est de rang ≤ 4 . Par transposition, on se ramène aux cas a) et b).

Les seuls cas possibles sont ceux où a est présymétrique par rapport à N .

II - La deuxième forme réduite est : ([6], p. 953)

$$C(\xi'') = e' \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ d_1 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_4$$

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & c_1 \xi_3 + d_1 \xi_4 & c_2 \xi_3 + d_2 \xi_4 \\ b_5(\xi'') & c_1 \xi_3 + d_1 \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & c_2 \xi_3 + d_2 \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

II-1) Si $d_2 \neq 0$, on peut, par un changement de base de E , remplacer $c_2 \xi_3 + d_2 \xi_4$ par ξ_4 . On suppose donc dans le II-1) : $c_2 = 0$, $d_2 = 1$

a) $b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')$ peuvent être pris comme formes de base. On a :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & c_1 \xi_3 + d_1 \xi_4 & \xi_4 \\ b_5(\xi'') & c_1 \xi_3 + d_1 \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$$b_i(\xi'') = \sum_{2 \leq k \leq 7} \beta_{ik} \xi_k, \quad 4 \leq i \leq 6.$$

Comme au début de I a), on se ramène à :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43} \xi_3 + \beta_{44} \xi_4 + \beta_{45} \xi_5 & \xi_2 & c_1 \xi_3 + d_1 \xi_4 & \xi_4 \\ \beta_{53} \xi_3 + \beta_{54} \xi_4 + \beta_{56} \xi_6 + \beta_{57} \xi_7 & c_1 \xi_3 + d_1 \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ \beta_{63} \xi_3 + \beta_{64} \xi_4 + \beta_{66} \xi_6 + \beta_{67} \xi_7 & \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

a₁) $c_1 \neq 0$

i) On pose : $\xi_4 = 0$; $\xi_2 = s + c_1(1 - s^2)$; $\xi_3 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$.

On diagonalise la matrice :

$$C(s) = \begin{pmatrix} s + (1 - s^2)c_1 & c_1s & 0 \\ c_1s & s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix}$$

Les opposés des valeurs propres sont :

$$(-s + c_1s^2, -s - c_1, s);$$

elles sont distinctes si : $s \neq \frac{2}{c_1}$ et $s \neq \frac{-c_1}{2}$. On détermine les vecteurs propres correspondant et on pose :

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det U(s) = 1 + s^2;$$

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{1 + s^2} {}^tU(s).$$

$(U^{-1}CU)(s)$ est diagonale à valeurs propres distinctes. On suppose d'abord : $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = 0.$$

On suppose : $\xi_7 = 0$; la condition (1.3) donne :

$$\beta_{66} = 0.$$

On suppose ξ_5, ξ_6, ξ_7 quelconques ; la condition (1.1) s'écrit :

$$\text{sign}(\xi_5 + s\xi_6) = \text{sign}(\beta_{45} + s\beta_{56}\xi_6 + s\beta_{57}\xi_7) ;$$

on en déduit :

$$\beta_{57} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56} > 0$$

ii) On pose $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$.

On diagonalise la matrice :

$$C = \xi_4 \begin{pmatrix} 0 & d_1 & 1 \\ d_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont :

$$(0, \pm \sqrt{1 + d_1^2} \xi_4);$$

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + d_1^2} & \sqrt{1 + d_1^2} & 0 \\ -d_1 & d_1 & -1 \\ -1 & 1 & d_1 \end{pmatrix};$$

$$U^{-1} = \frac{1}{2(d_1^2 + 1)} {}^t U.$$

$U^{-1}CU$ est diagonale à valeurs propres distinctes. On suppose d'abord : $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$; on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) on obtient :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0.$$

On suppose ξ_5, ξ_6, ξ_7 quelconques ; on écrit la condition (1.3) :

$$\text{sign}(-\xi_6 + d_1 \xi_7) = \text{sign}(-\beta_{56} \xi_6 + \beta_{67} d_1 \xi_7).$$

- Si $d_1 \neq 0$, on a : $\beta_{56} = \beta_{67}$;

on en déduit aisément que a est présymétrique par rapport à N .

- Si $d_1 = 0$, on écrit la condition (1) :

$$\text{sign}(\xi_5 - \xi_7) = \text{sign}(\beta_{45} \xi_5 - \beta_{67} \xi_7),$$

d'où : $\beta_{45} = \beta_{67}$

et on a le même résultat.

a₂) $c_1 = 0$.

Si $\xi_4 = 0$

$$C = \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix};$$

on en déduit :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0;$$

$$\beta_{45} > 0, \quad \beta_{56} > 0, \quad \beta_{67} > 0.$$

Si comme au a₁) ii) précédent, on pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$, on obtient de même

$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0$ et à l'aide des conditions (1.3) et (1.1) :

$$\text{si } d_1 \neq 0, \quad \beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67}$$

et a est présymétrique ;

si $d_1 = 0$, on a : $\beta_{45} = \beta_{67}$.

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & 0 & \xi_4 \\ \beta_{56}\xi_6 & 0 & \xi_3 & 0 \\ \beta_{45}\xi_7 & \xi_4 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

on pose : $T = \text{diag}(1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{56}}, \sqrt{\beta_{45}})$ et en transformant $a(\xi')$ par T , on obtient une matrice symétrique.

b) c) On procède comme dans les cas I b) c) lorsque les formes $\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')$ ne sont pas linéairement indépendantes et on obtient que ces cas sont impossibles ou présymétriques.

II-2) $d_2 = 0$

$d_1 \neq 0$ sinon la dimension réduite de $C(\xi'')$ serait 2. Par changement de coordonnées dans E , on se ramène à :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & c\xi_3 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & c\xi_3 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. Avec les notations précédentes on a, comme avant

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & \xi_4 & c\xi_3 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & \xi_4 & \xi_7 & 0 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & c\xi_3 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a₁) $c \neq 0$

On pose $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = s$; $\xi_2 = s$; $\xi_7 = -s + c(1 - s^2)$; $s \in \mathbb{R}^*$.

$$U(s) = \begin{pmatrix} -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul analogue à celui du II 1, a₁ i), on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{67} > 0.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$; on obtient comme au II 1 a₁) ii) :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56}.$$

On a la présymétrie de a , comme à la fin du I a)

a₂) $c = 0$.

En posant $\xi_4 = 0$, on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0; \quad \beta_{45} > 0, \beta_{56} >, \beta_{67} > 0.$$

En posant $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 \neq 0$, (cf. I a) ii) :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56}.$$

On transforme $a(\xi')$ par :

$$T = \text{diag} (1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{67}})$$

et on obtient la présymétrie.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement dépendantes, on obtient comme avant dans ces cas, ou bien une impossibilité ou bien la présymétrie de a .

III - La troisième forme réduite [6] (p. 954) comporte 2 cas

III₁

$$C(\xi'') = e' \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ \delta_1 & 0 & 1 \\ \delta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_4,$$

avec : $c_1 > 0$; $d_2 > \frac{1}{2}(c_1 + \frac{d_1^2}{c_1})$; $\delta_2 > \frac{1}{2}(c_1 + \frac{\delta_1^2}{c_1})$.

On remarque que les hypothèses impliquent :

$$\delta_2^2 - \delta_1^2 > (c_1 - \delta_2)^2 \geq 0$$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes.

On a, comme au début du I a) :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & d_2\xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & \delta_2\xi_4 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

i) On pose : $\xi_2 = s + c_1(1 - s^2)$; $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = s \in \mathbb{R}^*$, C et U sont les formes du II 1a)₁ i). On en déduit de même, comme $c_1 \neq 0$:

$$(2.4) \quad \beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{57} = \beta_{66} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56} > 0$$

ii) On pose $\xi_3 = 0$; $\xi_4 = s \neq 0$

$$C(\xi_2, s) = \begin{pmatrix} \xi_2 & d_1 s & d_2 s \\ \delta_1 s & 0 & s \\ \delta_2 s & s & 0 \end{pmatrix} .$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$(\xi_0 + \xi_2)(\xi_0^2 - s^2) + \varphi s^3 - \psi s^2 \xi_0 = 0 ,$$

où l'on a posé : $\varphi = d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1$; $\psi = d_1 \delta_1 + d_2 \delta_2$; elle a une racine nulle si :

$$\xi_2 = \varphi s ;$$

on note alors : $C(\varphi s, s) = C'(s)$, les autres racines vérifient alors :

$$\xi_0^2 + \varphi s \xi_0 - s^2(1 + \psi) = 0 ;$$

le discriminant vaut :

$$\Delta = [\varphi^2 + 4(1 + \psi)]s^2 .$$

Comme $C'(s)$ est diagonalisable dans le réel, on a :

$$\Delta \geq 0 ;$$

on pose :

$$\varphi^2 + 4(1 + \psi) = \rho^2 , \quad \rho \geq 0 ;$$

ii₁) Les 3 racines sont distinctes, si :

$$\rho > 0 \quad \text{et} \quad \psi \neq -1 .$$

Elles valent :

$$\left(\frac{-\varphi + \rho}{2} s , -\frac{(\varphi + \rho)}{2} s , 0 \right) .$$

On détermine les vecteurs propres correspondants et :

$$U(s) = \begin{pmatrix} \frac{(\rho - \varphi)^2}{4} - 1 & \frac{(\rho + \varphi)^2}{4} - 1 & 1 \\ \delta_2 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_1 & \delta_2 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_1 & -\delta_2 \\ \delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 & \delta_1 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix} ;$$

$$\det U(s) = \frac{\rho(\delta_2^2 - \delta_1^2)(\rho^2 - \varphi^2)}{4} = \delta(s) \neq 0$$

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{\delta(s)} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(\varphi + \rho)(\delta_2^2 - \delta_1^2)}{2} & \left(\frac{\varphi + \rho}{2}\right) \left[\delta_1 \left(\frac{\varphi + \rho}{2}\right) + \delta_2\right] & -\left(\frac{\varphi + \rho}{2}\right) \left[\delta_2 \left(\frac{\varphi + \rho}{2}\right) + \delta_1\right] \\ \left(\frac{\varphi - \rho}{2}\right) (\delta_1^2 - \delta_2^2) & -\left(\frac{\varphi - \rho}{2}\right) \left[\delta_1 \left(\frac{\varphi - \rho}{2}\right) + \delta_2\right] & \left(\frac{\varphi - \rho}{2}\right) \left[\delta_2 \left(\frac{\varphi - \rho}{2}\right) + \delta_1\right] \\ \rho(\delta_2^2 - \delta_1^2) & \rho(\varphi\delta_1 + \delta_2) - \rho\delta_2 \left(\frac{\rho^2 - \varphi^2}{4}\right) & -\rho(\varphi\delta_2 + \delta_1) + \frac{\rho\delta_1(\rho^2 - \varphi^2)}{4} \end{pmatrix}$$

On fait $\xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 0$ et on écrit les conditions (1.1), (1.2), (1.3) ; on obtient comme précédemment

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0.$$

La condition (1.3) s'écrit :

$$\text{sign}(\xi_5 - \delta_2\xi_6 - \delta_1\xi_7) = \text{sign} \left[(U^{-1})_1^3 \beta_{45} \xi_5 + (U^{-1})_2^3 \beta_{56} \xi_6 + (U^{-1})_3^3 \beta_{67} \xi_7 \right].$$

On fait d'abord $\xi_7 = 0$ et on obtient, (comme $\delta_2 \neq 0$) et compte tenu de (2.4) :

$$\delta_2 (U^{-1})_1^3 + (U^{-1})_2^3 = 0$$

soit :

$$(\delta_2^2 - \delta_1^2)\delta_2 + \left[(\varphi\delta_1 + \delta_2) - \frac{\delta_2(\rho^2 - \varphi^2)}{4} \right] = 0$$

et en explicitant φ et ψ , compte tenu que $\delta_2^2 - \delta_1^2 \neq 0$, on obtient :

$$(2.5) \quad \delta_2 = d_2.$$

On fait $\xi_6 = 0$ et on obtient, si $\delta_1 \neq 0$:

$$\delta_1 (U^{-1})_1^3 \beta_{45} + (U^{-1})_3^3 \beta_{67} = 0;$$

d'où en explicitant :

$$(2.6) \quad \delta_1 \beta_{45} - d_1 \beta_{67} = 0.$$

On voit que si $\delta_1 = 0$, ce résultat est encore vrai.

La condition (1.1) s'écrit pour $\xi_5 = 0$:

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left[\left(\delta_2 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_1 \right) \xi_6 + \left(\delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 \right) \xi_7 \right] \\ &= \text{sign} \left[(U^{-1})_2^1 \beta_{56} \xi_6 + (U^{-1})_3^1 \beta_{67} \xi_7 \right]. \end{aligned}$$

La condition (1.2) s'écrit pour $\xi_5 = 0$:

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left[\left(\delta_2 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_1 \right) \xi_6 + \left(\delta_1 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_2 \right) \xi_7 \right] \\ &= \text{sign} \left[(U^{-1})_2^2 \beta_{56} \xi_6 + (U^{-1})_3^2 \beta_{67} \xi_7 \right]. \end{aligned}$$

Supposons d'abord :

$$\delta_2 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_1 \neq 0, \quad \delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 \neq 0, \quad \delta_2 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_1 \neq 0, \quad \delta_1 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_2 \neq 0.$$

Les conditions ci-dessus donnent :

$$\begin{aligned} (2.7) \quad & (U^{-1})_2^1 \beta_{56} \left(\delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 \right) - (U^{-1})_3^1 \beta_{67} \left(\delta_2 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_1 \right) = 0 \\ & (U^{-1})_2^2 \beta_{56} \left(\delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 \right) - (U^{-1})_3^2 \beta_{67} \left(\delta_2 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Considérons les comme un système en (β_{56}, β_{67}) . Si le déterminant de ce système était non nul, on aurait (cf. aussi i) :

$$\beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} = 0,$$

ce qui est impossible.

On a donc :

$$\begin{aligned} & (U^{-1})_2^1 (U^{-1})_3^2 \left(\delta_1 + \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \delta_2 \right) \left(\delta_2 + \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) \delta_1 \right) \\ & - (U^{-1})_3^1 (U^{-1})_2^2 \left(\delta_2 + \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \delta_1 \right) \left(\delta_1 + \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) \delta_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

soit en explicitant, et simplifiant :

$$\begin{aligned} & \left[\delta_1 \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) + \delta_2 \right]^2 \left[\delta_1 + \delta_2 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right]^2 \\ & - \left[\delta_1 + \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) \delta_2 \right]^2 \left[\delta_2 + \delta_1 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right]^2 = 0. \end{aligned}$$

On a donc, soit :

$$\begin{aligned} & \left[\delta_1 \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) + \delta_2 \right] \left[\delta_1 + \delta_2 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right] \\ & - \left[\delta_1 + \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \delta_2 \right] \left[\delta_2 + \delta_1 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

qui s'écrit :

$$\rho(\delta_2^2 - \delta_1^2) = 0$$

et est donc impossible ; soit :

$$\begin{aligned} & \left[\delta_1 \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) + \delta_2 \right] \left[\delta_1 + \delta_2 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right] \\ & = - \left[\delta_1 + \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) \delta_2 \right] \left[\delta_2 + \delta_1 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi :

$$(U^{-1})_2^1 \left[\delta_1 + \delta_2 \left(\frac{\varphi - \rho}{2} \right) \right] = -(U^{-1})_3^1 \left[\delta_2 + \delta_1 \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) \right]$$

et la condition (2.7) donne :

$$(2.8) \quad \beta_{56} = \beta_{67}$$

En considérant (2.4), (2.6), (2.8), on obtient : $\delta_2 = d_2$, $\delta_1 = d_1$ et a est présymétrique par transformation par $T = (1, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}}, \sqrt{\beta_{45}})$.

Ensuite, on remarque que si : $\delta_2 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_1 = 0$, on a : $\delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 \neq 0$, (sinon, on aurait : $\delta_1^2 - \delta_2^2 = 0$, ce qui est exclu par les hypothèses du cas III). La condition (1.1) donne alors :

$$\delta_1 \left(\frac{\varphi + \rho}{2} \right) + \delta_2 = 0,$$

d'où : $\delta_1 = \delta_2 = 0$, ce qui est exclu par les mêmes hypothèses.

De même, on ne peut avoir $\delta_1 + \frac{\varphi - \rho}{2} \delta_2 = 0$ ou $\delta_2 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_1 = 0$ ou $\delta_1 + \frac{\varphi + \rho}{2} \delta_2 = 0$.

ii) On suppose : $\rho = 0$

$C'(s)$ a une valeur propre double : $\xi_{20} = -\frac{\varphi s}{2}$; comme elle est diagonalisable, les mineurs d'ordre 2 de $\xi_0 I + C'(s)$ sont tous nuls ; on a donc :

$$(d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1)^2 - 4 = 0, \quad (d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1)^2 + 4d_2 \delta_2 = 0,$$

d'où : $d_2 \delta_2 = -1$, qui est exclu par les hypothèses.

iii₃) On suppose $\rho > 0$ et : $\psi = -1$

$\xi_0 = 0$ est au moins valeur propre double de $C(s)$; comme la matrice $C(s)$ est diagonalisable, tous les mineurs d'ordre 2 de $C'(s)$ sont nuls, ce qui est impossible.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement dépendantes ; on obtient, comme avant, dans ce cas, ou bien une impossibilité ou bien la présymétrie de a .

III₂ $C(\xi'')$ est symétrique ([6], p. 954) :

$$C(\xi'') = e'\xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ d_1 & 0 & 1 \\ d_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_4$$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendantes. On a, comme dans le cas III₁ :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & d_2\xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & d_2\xi_4 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

i) On pose $\xi_4 = 0$. Si $c_1 \neq 0$, comme au III₁ a) i), on pose : $\xi_2 = s + c_1(1 - s^2)$; $\xi_3 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$; on obtient de même :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{66} = \beta_{57} = 0 ; \quad \beta_{45} = \beta_{56} > 0 .$$

Si $c_1 = 0$, on a directement :

$$\beta_{43} = \beta_{53} = \beta_{63} = \beta_{66} = \beta_{57} = 0 ; \quad \beta_{45} > 0, \beta_{56} > 0, \beta_{57} > 0 .$$

ii) Comme au III₁ a) ii), avec les mêmes notations, on pose : $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = s$; $s \in \mathbb{R}^*$; $\xi_2 = \varphi s$:

$$C(s) = \begin{pmatrix} \varphi & d_1 & d_2 \\ d_1 & 0 & 1 \\ d_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} s .$$

L'équation caractéristique de C a une racine nulle ; les autres racines vérifient :

$$\xi_0^2 + \varphi s \xi_0 - s^2(1 + \psi) = 0 .$$

Le discriminant Δ vaut :

$$\Delta = \rho^2 s^2 ;$$

$$\rho^2 = \varphi^2 + 4(1 + \psi) = 4(d_1^2 d_2^2 + 1 + d_1^2 + d_2^2) > 0$$

et les trois racines caractéristiques sont distinctes.

ii₁) On obtient comme précédemment, si $d_1^2 - d_2^2 \neq 0$

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} > 0$$

et a est présymétrique.

ii₂) Si $d_1^2 - d_2^2 = 0$ on a : $d_2 = \varepsilon d_1$, $\varepsilon = \pm 1$; $\varphi = 2\varepsilon d_1^2$

$$U(s) = \begin{pmatrix} (\varepsilon - 1)d_1 & (\varepsilon + 1)d_1 & 1 \\ 1 & 1 & -\varepsilon d_1 \\ -1 & 1 & -d_1 \end{pmatrix} s$$

$\det U(s) = 2(2d_1^2 + 1)$.

On obtient à l'aide des conditions (1.1), (1.2), (1.3) :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{56} = \beta_{67}; \quad \text{si } d_1 \neq 0, \beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67};$$

et a est présymétrique dans tous les cas.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement dépendantes ; on obtient, comme avant, ou bien une impossibilité ou bien la présymétrie de a .

IV - La quatrième forme réduite ([6], p. 959) est :

$$C(\xi'') = e' \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 + \begin{pmatrix} 0 & d_1 & -d_2 \\ d_1(1 - \delta) & 1 & 0 \\ -2\delta & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi_4$$

avec : $0 < \delta < 1$, $d_2 > \frac{d_1^2}{8}$

a) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, b_s(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendants. On a, comme au début du I a :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{43}\xi_3 + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 & \xi_2 & \xi_3 + d_1\xi_4 & -d_2\xi_4 \\ \beta_{53}\xi_3 + \beta_{54}\xi_4 + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7 & \xi_3 + d_1(1 - \delta)\xi_4 & \xi_4 & \xi_3 \\ \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{66}\xi_6 + \beta_{67}\xi_7 & -2\delta\xi_4 & 0 & -\xi_4 \end{pmatrix}$$

On pose : $\xi_4 = 0$; $\xi_2 = 1 - s^2$; $\xi_3 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$; on a alors :

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & s & 1 \\ s^2 - 1 & -1 & s \\ -s & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En écrivant la condition 1-1, on a une impossibilité.

b) En raisonnant comme dans le cas b) précédent, on voit que ce cas est impossible.

3. – Cas où $C(\xi'')$ est de dimension réduite 4

Il résulte de [6] que $C(\xi'')$ est présymétrique ; on se ramène donc aisément au cas où $C(\xi'')$ est symétrique

I ([6], p. 963-4) donne une première forme réduite :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & c_1\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 \\ c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & \xi_3 & 0 \\ c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Comme la dimension réduite de C est 4, on peut écrire :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

et

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a) On suppose que $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 6

a₁) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendants. On peut écrire :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7)$.

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 \neq 0, \xi_3 \neq 0, \xi_2 \neq \pm\xi_3$; il résulte du lemme 0.8, que :

$$b_4(\xi'') = \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 + \beta_{46}\xi_6, \quad \beta_{46} > 0$$

$$b_5(\xi'') = \beta_{54}\xi_4 + \beta_{55}\xi_5 + \beta_{57}\xi_7, \quad \beta_{57} > 0$$

et :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5, \quad k > 0.$$

i) Posons $\xi_5 = 0$; $\xi_4 = s$; $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1, s \in \mathbb{R}^*$; on diagonalise la matrice :

$$C(\xi_3, s) = \begin{pmatrix} \xi_3 + s^2 - 1 & s & 0 \\ s & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres sont :

$$(-\xi_3 + 1, -\xi_3 - s^2, \xi_3);$$

elles sont distinctes si : $\xi_3 \neq \frac{1}{2}$ et $\xi_3 \neq -\frac{s^2}{2}$.

On détermine les vecteurs propres correspondants et on pose :

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{1+s^2} {}^t U(s).$$

$U^{-1}CU(s)$ est diagonale à valeurs propres distinctes.

La condition (1.1) s'écrit :

$$\text{sign}(\xi_6 - s\xi_7) = \text{sign}[(\beta_{44}s + \beta_{46}\xi_6 - s(\beta_{54}s + \beta_{57}\xi_7))]$$

$\xi_6 = \xi_7 = 0$ implique : $\beta_{44} - \beta_{54}s \equiv 0$, d'où : $\beta_{44} = \beta_{54} = 0$; on a aussi :

$$\beta_{46} = \beta_{57} > 0.$$

La condition (1.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{sign}[\beta_{32}(\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{34}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7] \\ & = \text{sign}[k(\beta_{32}(\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}s]. \end{aligned}$$

• Si $\beta_{32} + \beta_{33} \neq 0$, ou $\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{37} \neq 0$, on en déduit :

$$k\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{64}s \equiv k[\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{34}s],$$

d'où :

$$\beta_{64} = k\beta_{34}.$$

• Si $\beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{32} + \beta_{33} = 0$, on a :

$$\text{sign}[\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{34}s] = \text{sign}[k\beta_{32}(s^2 - 1) + \beta_{64}s], \quad \forall s \in \mathbb{R}^*, .$$

• Si $\beta_{32} \neq 0$, en prenant pour s une racine non nulle du 1er membre, on obtient encore :

$$\beta_{64} = k\beta_{34}.$$

• Si $\beta_{32} = 0$,

$$b_3(\xi'') = \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5; \quad b_6(\xi'') = \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5;$$

la condition (1.3) donne : $\text{sign } \beta_{64} = \text{sign } \beta_{34}$; on pose donc encore :

$$\beta_{64} = k\beta_{34} \quad k > 0.$$

ii) Posons $\xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$; $\xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}^*$; on diagonalise la matrice :

$$C(\xi_3, s) = \begin{pmatrix} -\xi_3 + s^2 - 1 & 0 & s \\ 0 & \xi_3 & 0 \\ s & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix};$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix}.$$

$U^{-1}CU(s)$ est diagonale à valeurs propres distincts, pour $\xi_3 = -\frac{1}{2}$, $\xi_3 \neq \frac{s^2}{2}$.

La condition (1.3) donne : $\beta_{55} = 0$. La condition (1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left[s\xi_6 + \beta_{32}(-\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{35}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7 \right] \\ &= \text{sign} \left[s(\beta_{45}s + \beta_{46}\xi_6) + k(\beta_{32}(-\xi_3 + s^2 - 1) + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{65}s \right]. \end{aligned}$$

Si $\beta_{36} \neq 0$, comme on doit avoir :

$$\text{sign}(s + \beta_{36}) = \text{sign}(s\beta_{46} + k\beta_{36}),$$

on obtient :

$$\beta_{46} = k;$$

d'où : $\beta_{65}s + \beta_{45}s^2 = k\beta_{35}s$ et :

$$\beta_{65} = k\beta_{35}, \quad \beta_{45} = 0.$$

Si $\beta_{36} = 0$, comme $\beta_{46} \neq 0$, on a, si $\beta_{37} \neq 0$, ou $\beta_{33} - \beta_{32} \neq 0$:

$$\beta_{46} = k,$$

d'où encore :

$$\beta_{65} = k\beta_{35}, \quad \beta_{45} = 0.$$

Si $\beta_{36} = \beta_{37} = 0$, $\beta_{33} - \beta_{32} = 0$, on a, si $\beta_{32} \neq 0$:

$$\beta_{46} = k; \quad \beta_{45} = 0, \quad \beta_{65} = k\beta_{35}.$$

Dans tous ces cas, on a aisément la présymétrie de a .

iii) Si $\beta_{32} = \beta_{33} = \beta_{36} = \beta_{37} = 0$, on a :

$$\beta_{45} = 0, \quad \beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35};$$

on a donc dans ce cas :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5 \\ \beta_{46}\xi_6 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \beta_{46}\xi_7 & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ k\beta_{34}\xi_4 + \beta_{46}\beta_{35}\xi_5 & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta_{34} = 0$, on obtient la présymétrie de a .

Si $\beta_{34} \neq 0$, on pose : $\xi_1 = \xi_6 = \xi_7 = 0$, $\xi_3 = \xi_5 = 1$,

$$\xi_4 = -\frac{\beta_{35}}{\beta_{34}}, \quad \xi_2 = \left[\left(\frac{\beta_{35}}{\beta_{34}} \right)^2 - 1 \right],$$

alors 0 est valeur propre double de $a(\xi')$, on en déduit que les mineurs d'ordre 3 sont nuls, d'où :

$$(\beta_{46} - k)\beta_{35} = 0.$$

Si $\beta_{35} \neq 0$, on obtient $\beta_{46} = k$ et la présymétrie.

Si $\beta_{35} = 0$, on pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 = \xi_5 \neq 0$, on diagonalise $C(\xi_4)$, on écrit la condition (1.1) et on obtient :

$$\beta_{46} = k$$

et la présymétrie de a .

a₂) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement dépendantes.

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''))$ sont linéairement indépendantes, on a donc aussi :

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_3(\xi'))$ sont linéairement indépendantes, et on peut écrire :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 + \beta_{24}\xi_4 + \beta_{25}\xi_5 + \beta_{26}\xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8).$$

En échangeant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes de la matrice en échangeant ξ_4 et ξ_5 , en changeant ξ_3 en $-\xi_3$ on se ramène au a₁) ; de même les seuls cas possibles sont ceux où a est présymétrique.

a₃) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''))$ sont linéairement dépendantes

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_{12}\xi_2 + \dots + \beta_{15}\xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8).$

On procède comme au a₁). On a d'abord :

$$\begin{aligned} b_5(\xi'') &= \beta_{54}\xi_4 + \beta_{55}\xi_5 + \beta_{56}\xi_6, & \beta_{56} > 0 \\ b_6(\xi'') &= \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 + \beta_{67}\xi_7, & \beta_{67} > 0 \\ b_4(\xi'') &= k(\beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3) + \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5, & k > 0. \end{aligned}$$

En posant $\xi_5 = 0, \xi_4 = s, \xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1, s \in \mathbb{R}^*$, on obtient comme au a₁) i) :

$$\beta_{54} = \beta_{64} = 0, \quad \beta_{44} = \beta_{56}\beta_{41}, \quad k = \beta_{56}.$$

En posant $\xi_4 = 0, \xi_5 = s, \xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1, s \in \mathbb{R}^*$, on obtient comme au a₁) ii) :

si $\beta_{12} \neq \beta_{13}$ ou si $\beta_{12} = \beta_{13} \neq 0, k = \beta_{67}, \beta_{55} = \beta_{65} = 0, \beta_{45} = \beta_{56}\beta_{15}$ et la présymétrie de a :

si $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$, on a :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_{14}\xi_4 + \beta_{15}\xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{56}\beta_{14}\xi_4 + \beta_{67}\beta_{15}\xi_5 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \beta_{56}\xi_6 & \xi_4 & \xi_3 & 0 \\ \beta_{67}\xi_7 & \xi_5 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\beta_{15} \neq 0$, on pose : $\xi_1 = \xi_6 = \xi_7 = 0 ; \xi_3 = \xi_4 = 1 ; \xi_5 = -\frac{\beta_{14}}{\beta_{15}}$ et ξ_2 est choisi de sorte que $\xi_0 = 0$ soit valeur propre double ; on obtient : $\beta_{14}(\beta_{56} - \beta_{67}) = 0$.

- Si $\beta_{14} \neq 0$, on a la présymétrie de a .
- Si $\beta_{14} = 0$, comme à la fin du a₁), on pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_4 = \xi_5 = 1$, on obtient : $\beta_{56} = \beta_{67}$ et la présymétrie.

Si $\beta_{15} = 0$, on procède exactement comme pour $\beta_{14} = 0$ et on obtient la présymétrie.

b) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 5. On peut choisir une des formes b_1, b_2, b_3 comme forme de base, soit ξ_6 ; une des formes b_4, b_5, b_6 est aussi choisie comme forme de base soit ξ_7 .

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; le cas où ξ_6 et ξ_7 sont en position symétrique par rapport à la diagonale est évidemment impossible (poser $\xi_6 = -\xi_7 = 1$) ; les autres cas se traitent tous de la même façon ; soit par exemple, $b_1(\xi'') = \xi_6$; $b_5(\xi'') = \xi_7$:

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \beta_{22}\xi_2 + \dots + \beta_{26}\xi_6 & \beta_{32}\xi_2 + \dots + \beta_{36}\xi_6 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & 0 & 0 \\ \xi_7 & 0 & \xi_3 & 0 \\ b_6(\xi'') & 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix} ;$$

on doit avoir :

$$\text{sign } \xi_7 = \text{sign}(\beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 + \beta_{26}\xi_6),$$

ce qui est évidemment impossible.

c) Si $b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi'')$ dépendent linéairement de $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$, $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ et deux des formes b_4, b_5, b_6 sont linéairement indépendantes ; par symétrie autour de la 1ère diagonale ce cas se traite comme le a) .

II - La deuxième forme réduite pour $C(\xi'')$ est ([6], p. 964) :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 \\ c_1\xi_3 + d_1\xi_4 + f_1\xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix} .$$

Si $f_1 \neq 0$, on peut aussi bien écrire, par changement de base dans E , et comme la dimension réduite de C est 4

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix} .$$

Si $f_1 = 0, f_2 \neq 0$, on remplace de même $c_2\xi_3 + d_2\xi_4 + f_2\xi_5$ par ξ_5 ; ensuite par échange des deux dernières colonnes et des deux dernières lignes, et en échangeant ξ_3 et $-\xi_3$, on se ramène au cas précédent (avec $\tau = 0$).

Le cas $f_1 = f_2 = 0$ est impossible, compte tenu de l'hypothèse sur la dimension réduite de C .

On considère donc C sous la forme (3.1) et :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\xi'' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7).$$

a) On suppose que $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 6 .

a₁) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendantes.

On a, par un changement de base :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{32}\xi_2 + \dots + \beta_{37}\xi_7 \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0, \xi_2 \neq 0$, on obtient :

$$\beta_{42} = \beta_{47} = 0, \quad \beta_{46} > 0.$$

En posant de plus $\xi_7 = 0$, on déduit du lemme 0.8 que :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{36}\xi_6) + \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 + \beta_{67}\xi_7, \quad k > 0.$$

On distingue les cas

1) $\rho \neq 0$

i) Posons : $\xi_4 = \xi_5 = 0 ; \xi_2 = -s + \rho(1 - s^2) ; \xi_3 = s ; s \in \mathbb{R}^*$. C a la forme du § 2 II 2 a₁). On obtient U et les conditions (1.3) et (1.1) donnent :

$$\beta_{43} = 0; \quad \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{56} = 0; \quad \beta_{57} > 0;$$

$$\beta_{63} = \beta_{46}\beta_{43}, \quad \beta_{67} = \beta_{46}\beta_{37}; \text{ si } \beta_{32} \text{ ou } \beta_{36} \neq 0, \quad k = \beta_{46} > 0.$$

On a donc dans tous les cas :

$$b_4(\xi'') = \beta_{44}\xi_4 + \beta_{45}\xi_5 + \beta_{46}\xi_6, \quad \beta_{46} > 0$$

$$b_5(\xi'') = \beta_{54}\xi_4 + \beta_{55}\xi_5 + \beta_{57}\xi_7, \quad \beta_{57} > 0$$

$$b_6(\xi') = \beta_{46} [\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7] + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5$$

ii) Posons $\xi_4 = 0, \xi_3 = -\frac{\tau}{\rho}s, \xi_5 = s, \xi_2 = -\frac{2\tau}{\rho}s + 1 - s^2, s \in \mathbb{R}^*$.

$$C(s) = \begin{pmatrix} -\frac{2\tau}{\rho}s + 1 + s^2 & s & 0 \\ s & -\frac{\tau}{\rho}s & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{\rho}s \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres sont :

$$\left(-\frac{\tau}{\rho}s, \frac{\tau}{\rho}s + s^2, \frac{\tau}{\rho}s - 1 \right)$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det U(s) = s^2 + 1 \neq 0$.

On diagonalise $C(s)$; la condition (1.1) donne :

$$\beta_{45} = \beta_{55} = 0; \quad \beta_{46} = \beta_{57} > 0.$$

La condition (1.3) donne si : β_{32} ou β_{36} ou $\beta_{37} \neq 0$:

$$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$$

iii) Posons $\xi_5 = 0$, $\xi_3 = -\frac{\sigma}{\rho}s$, $\xi_4 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{\rho}s & s \\ 0 & s & \frac{\sigma}{\rho}s \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres sont :

$$\left(-\xi_2, \pm s \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} \right)$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sigma}{\rho} - \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} & \frac{\sigma}{\rho} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} \end{pmatrix}$$

$\det U(s) = 2\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} \neq 0$.

On diagonalise $C(s)$; la condition (1.1) donne : $\beta_{44} = 0$. Les conditions (1.2) et (1.3), après quelques calculs donnent si : $\beta_{32} \neq 0$ ou si : $\beta_{36} \neq 0$:

$$\beta_{54} = 0, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}.$$

Si $\beta_{32} \neq 0$ ou si $\beta_{36} \neq 0$, il résulte du ii) et du iii) que :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{45} = \beta_{55} = 0; \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}; \quad \beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$$

et on obtient que a est présymétrique.

Il reste donc à étudier les cas $\beta_{32} = \beta_{36} = 0$

iv) On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \tau \\ 1 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} s$$

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\tau^2} & \sqrt{1+\tau^2} & 0 \\ -1 & 1 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix}, \det U \neq 0$$

$$U^{-1} = \frac{1}{2(1+\tau^2)} {}^t U.$$

On diagonalise $C(s)$; la condition (1.1) donne :

$$\tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0$$

donc si $\tau \neq 0$, on a : $\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$.

v) On pose $\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = 0$; $\xi_4 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \\ \sigma & 1 & 0 \end{pmatrix} s$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ -\sigma & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{1+\sigma^2} & \sqrt{1+\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

$\det U \neq 0$.

Les conditions (1.1) et (1.2) impliquent, si $\sigma \neq 0$:

$$\beta_{54} = 0, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}.$$

• Si $\sigma = 0$, on obtient :

si $\beta_{37} \neq 1$, $\beta_{54} - (\beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34}) = 0$;

si $\beta_{37} = 1$, $\beta_{54} + \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0$.

On obtient donc que, si $\tau \neq 0$ et [$\sigma \neq 0$ ou ($\sigma = 0$ et $\beta_{37} \neq \pm 1$)], on a :

$$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}, \quad \beta_{54} = 0, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$$

a est donc présymétrique.

Il reste si $\tau \neq 0$, à examiner le cas $\sigma = 0$, $\beta_{37} = \pm 1$.

vi) On pose alors : $\xi_2 = -2s$, $\xi_3 = 2s$, $\xi_4 = (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}$, $\xi_5 = -\frac{2\rho s}{\tau}$, $s \in \mathbb{R}^*$.

$$C(s) = \begin{pmatrix} -2s & -\frac{2\rho s}{\tau} & 0 \\ -\frac{2\rho s}{\tau} & 2s & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} \\ 0 & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} & -2s \end{pmatrix}.$$

Les opposées des valeurs propres de $C(s)$ sont :

$$(s^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}, \quad -(s^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}, \quad 2s$$

et sont génériquement distinctes.

$$U(s) = \begin{pmatrix} \frac{2\rho s}{\tau} & \frac{2\rho s}{\tau} & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} \\ (s^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} - 2s & (s^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} - 2s & 0 \\ -(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} & \frac{2\rho s}{\tau} \end{pmatrix}$$

$\det U(s) \neq 0$.

On écrit la condition (1.3) :

$$\begin{aligned} & \text{sign}(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}\beta_{46}\xi_6 + \frac{2\rho s}{\tau} \left\{ \beta_{46} \left[2\beta_{33}s - 2\frac{s\rho}{\tau}\beta_{35} + \beta_{37}\xi_7 \right] \right. \\ & \quad \left. + \beta_{64}(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} \right\} \\ & = \text{sign}(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}\xi_6 + \frac{2\rho s}{\tau} \left\{ 2\beta_{33}s - \frac{2s\rho}{\tau}\beta_{35} + \beta_{37}\xi_7 + \beta_{34}(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}} \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$$

et d'après la fin du V :

$$\beta_{54} = 0,$$

a est donc présymétrique.

vii) On considère maintenant le cas $\tau = 0$. Il résulte du i), ii), iii) que :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & \beta_{33}\xi_3 + \beta_{34}\xi_4 + \beta_{35}\xi_5 + \beta_{37}\xi_7 \\ \beta_{46}\xi_6 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 \\ \beta_{54}\xi_4 + \beta_{46}\xi_7 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{46}(\beta_{33}\xi_3 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

Si $\sigma \neq 0$, on a de plus : $\beta_{54} = 0$, $\beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$.

On pose : $\xi_2 = \frac{2\sigma}{\rho}s$, $\xi_3 = -\xi_2$; $\xi_4 = 2s$; $\xi_5 = \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}(s^2 - 1)}$, $s \in \mathbb{R}$;
on a : $\rho\xi_3 + \sigma\xi_4 = 0$ et :

$$U(s) = \begin{pmatrix} -2s & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} \\ 0 & -(s^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} - 2\frac{\sigma}{\rho}s & (s^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} - 2\frac{\sigma}{\rho}s \\ (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\rho^2}} & 2s & 2s \end{pmatrix}$$

$\det U(s) \neq 0$; la condition (1.1) implique :

$$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$$

et la présymétrie.

viii) Si $\sigma = 0$, on pose d'abord : $\xi_5 = 0$; $\xi_2 = \xi_3 = s^2 - 1$; $\xi_4 = 2s\sqrt{1 + \rho^2}$;
on obtient

$$U(s) = \begin{pmatrix} 2s\sqrt{1 + \rho^2} & \rho(s^2 - 1) & \rho(s^2 - 1) \\ \rho(1 - s^2) & 2s\sqrt{1 + \rho^2} & 2s\sqrt{1 + \rho^2} \\ 0 & -(s^2 + 1)\sqrt{1 + \rho^2} + 1 - s^2 & (s^2 + 1)\sqrt{1 + \rho^2} + 1 - s^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit de (1.1) et (1.3) :

$$\beta_{54} = 0 ; \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}$$

Si $\beta_{37} \neq 0$, on a vu que : $\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$ et la présymétrie est obtenue. Il reste le cas : $\beta_{37} = 0$. On pose $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = \xi_5$; $\xi_2 = \xi_3(1 - \rho^2)$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ -1 & * & * \\ \rho & * & * \end{pmatrix} ; \text{ on en déduit :}$$

$\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$; d'où la présymétrie est obtenue.

2) $\rho = 0$

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; on en déduit que :

$$\beta_{43} = \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{56} = 0; \quad \beta_{57} > 0$$

et que :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7) + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5, \quad k > 0$$

i) On pose $\xi_5 = 0$

$$\xi_2 = \xi_3 = (s^2 - 1)\sqrt{1 + \sigma^2}, \quad \xi_4 = 2s, \quad s \in \mathbb{R}^*; \text{ on obtient :}$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & s\sigma \\ -\sigma & 1 & s \\ 0 & -s\sqrt{1 + \sigma^2} & \sqrt{1 + \sigma^2} \end{pmatrix},$$

la condition (1.1) implique :

$$\text{sign} [2\beta_{44}s + \beta_{46}\xi_6 - \sigma(2\beta_{54}s + \beta_{57}\xi_7)] = \text{sign} \xi_6 - \sigma\xi_7 ;$$

d'où : $\beta_{44} - \sigma\beta_{54} = 0$ et :

$$\sigma(\beta_{46} - \beta_{57}) = 0; \quad \beta_{46} > 0;$$

la condition (1.2) implique :

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left\{ (\sigma - s\sqrt{1 + \sigma^2}\beta_{36})\xi_6 + (1 - s\sqrt{1 + \sigma^2}\beta_{37})\xi_7 \right. \\ & \quad \left. - s\sqrt{1 + \sigma^2} [(\beta_{33} + \beta_{32})(s^2 - 1)\sqrt{1 + \sigma^2} + 2\beta_{34}s] \right\} \\ & = \text{sign} \left\{ (\sigma\beta_{46} - s\sqrt{1 + \sigma^2}k\beta_{36})\xi_6 + (\beta_{57} - s\sqrt{1 + \sigma^2}k\beta_{37})\xi_7 \right. \\ & \quad \left. - s\sqrt{1 + \sigma^2} [k(\beta_{33} + \beta_{32})(s^2 - 1)\sqrt{1 + \sigma^2} + 2\beta_{64}s] + 2(\sigma\beta_{44} + \beta_{54})s \right\} \end{aligned}$$

d'où si $\beta_{36} \neq 0$, $\sigma(\beta_{46} - k) = 0$ et si : $\beta_{37} \neq 0$: $\beta_{57} = k$. On a : si : $\sigma \neq 0$ et $(\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{37} \neq 0)$:

$$\beta_{46} = \beta_{57} = k; \quad \beta_{44} = \beta_{54} = 0; \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34};$$

si $\sigma \neq 0$ et $\beta_{36} = \beta_{37} = 0$:

$$\beta_{46} = \beta_{57}, \quad \beta_{44} = \beta_{54} = 0, \quad \beta_{64} = \beta_{46}\beta_{34}; \text{ si, de plus :}$$

on a : $\beta_{33} + \beta_{32} \neq 0$, on a aussi : $\beta_{46} = k$;

si $\sigma = 0$ et ($\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{37} \neq 0$) :

$$\beta_{57} = k, \quad \beta_{44} = \beta_{54} = 0; \quad \beta_{64} = \beta_{57}\beta_{34};$$

si $\sigma = \beta_{36} = \beta_{37} = 0$: $\beta_{44} = \beta_{54} = 0$, $\beta_{64} = \beta_{57}\beta_{34}$;

si de plus, on a : $\beta_{33} + \beta_{32} \neq 0$, on a : $\beta_{57} = k$.

ii) On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$, on a :

$$C(s) = \begin{pmatrix} 0 & s & \tau s \\ s & 0 & 0 \\ \tau s & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\tau^2} & \sqrt{1+\tau^2} & 0 \\ -1 & 1 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix}; \text{dét } U > 0.$$

Les conditions (1.1), (1.2), (1.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & \text{sign}(\sqrt{1+\tau^2} - \tau\beta_{36})\xi_6 - (1 + \tau\beta_{37})\xi_7 - \tau\beta_{35}s \\ & = \text{sign}(\sqrt{1+\tau^2}\beta_{46} - \tau k\beta_{36})\xi_6 - (\beta_{37} + \tau k\beta_{37})\xi_7 \\ & \quad + (\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45} - \beta_{55} - \tau\beta_{65})s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \text{sign}(\sqrt{1+\tau^2} + \tau\beta_{36})\xi_6 + (1 + \tau\beta_{37})\xi_7 + \tau\beta_{35}s \\ & = \text{sign}(\sqrt{1+\tau^2}\beta_{46} + \tau k\beta_{36})\xi_6 + (\beta_{37} + \tau k\beta_{37})\xi_7 \\ & \quad + (\sqrt{1+\tau^2}\beta_{45} + \beta_{55} + \tau\beta_{65})s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.3) \quad & \text{sign } \beta_{36}\xi_6 + (\beta_{37} - \tau)\xi_7 + \beta_{35}s \\ & = \text{sign } k\beta_{36}\xi_6 + (k\beta_{37} - \tau\beta_{57})\xi_7 + (-\tau\beta_{55} + \beta_{65})s. \end{aligned}$$

On doit distinguer des cas :

ii)' $\tau \neq 0$,

ii₁)' $\beta_{36} \neq 0$.

On obtient de (3.3) :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & k = \beta_{57}, \\ & -\tau\beta_{55} + \beta_{65} - \beta_{57}\beta_{35} = 0 \end{aligned}$$

ii_{1.1})' Si de plus : $\tau\beta_{37} \neq 1$.

On déduit de (3.1) que : $\beta_{46} = \beta_{57}$ et que :

$$\sqrt{1 + \tau^2}\beta_{45} - \beta_{55} - \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0,$$

il résulte de (3.2) que :

$$\sqrt{1 + \tau^2}\beta_{45} + \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0 :$$

on a donc :

$$\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0.$$

ii_{1.2})' $\tau\beta_{37} = -1$

Si $\sqrt{1 + \tau^2} \neq \pm\tau\beta_{36}$, on déduit de (3.1), (3.2) et (3.4) que :

$$\tau\beta_{36}\beta_{55} + \beta_{45} = 0,$$

et que :

$$\tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) + \tau\beta_{45}\beta_{36} + \beta_{55} = 0.$$

Si $\sqrt{1 + \tau^2} = \varepsilon\tau\beta_{36}$, $\varepsilon = \pm 1$, on déduit de (3.1) et (3.2) que :

$$\beta_{46} = k$$

et que :

$$\sqrt{1 + \tau^2}\beta_{45} + \varepsilon[\beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35})] = 0$$

ii)₂' $\beta_{36} = 0$

On déduit de (3.1) et (3.2) que :

$$\beta_{57} - \beta_{46} + \tau\beta_{37}(k - \beta_{46}) = 0$$

$$\beta_{45} = 0, \quad \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0..$$

De (3.3) on déduit :

si $\tau \neq \beta_{37}$: $\beta_{37}(\beta_{65} - k\beta_{35}) - \tau(\beta_{65} - \beta_{57}\beta_{35}) - \tau\beta_{55}(\beta_{37} - \tau) = 0$,

si $\tau = \beta_{37}$: $\beta_{57} = k$.

ii)'' $\tau = 0$

Il résulte de (3.1), (3.2) que : $\beta_{46} = \beta_{57}$, $\beta_{45} = \beta_{55} = 0$ et de (3.3) que : si β_{36} ou $\beta_{37} \neq 0$, $\beta_{65} = k\beta_{35}$.

En récapitulant les résultats obtenus en i) et ii), on obtient la présymétrie de $a(\xi)$ excepté dans les cas suivants

A $\sigma \neq 0$ et $\tau \neq 0$

$$A_1 \beta_{36} \neq 0, \tau\beta_{37} = -1, \sqrt{1 + \tau^2} = \varepsilon\tau\beta_{36}$$

$$A_2 \beta_{36} = 0, \tau = \beta_{37} \neq 0$$

$$A_3 \beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{32} + \beta_{33} = 0.$$

B $\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$

$$B_1 \beta_{36} \neq 0, \tau\beta_{37} = -1$$

$$B_2 \beta_{36} = 0, \beta_{37} = \tau$$

$$B_3 \beta_{36} = 0, \tau\beta_{37} = -1$$

$$B_4 \beta_{36} = \beta_{37} = \beta_{32} + \beta_{33} = 0.$$

C $\tau = 0, \beta_{36} = \beta_{37} = 0.$

Pour traiter le cas **A**, on considère, comme $\tau \neq 0$, le cas iii).

iii) On pose : $\xi_2 = -\xi_3 = -(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}, \xi_4 = 2s, \xi_5 = -\frac{2\sigma}{\tau}s, s \in \mathbb{R}^*$

$$C(s) = \begin{pmatrix} -(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} & -\frac{2\sigma}{\tau}s & 0 \\ -\frac{2\sigma}{\tau} & (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} & 2s \\ 0 & 2s & -(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \end{pmatrix}$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\tau}s & -\frac{\sigma}{\tau} & \tau \\ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} & \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}s & 0 \\ -s & 1 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Dans les cas A_1 et A_2 , on sait que : $\beta_{46} = \beta_{57} = k,$

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0.$$

La condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left(\frac{\sigma}{\tau} - \beta_{36} \right) s \xi_6 + \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} - \beta_{37} s \right) \xi_7 \\ & - s \left[\beta_{33} - \beta_{32} \right] \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} (s^2 - 1) + 2\beta_{34} s - \frac{2\sigma}{\tau} \beta_{35} s \Big] \\ & = \text{sign} \beta_{46} \left(\frac{\sigma}{\tau} - \beta_{36} \right) s \xi_6 + \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \beta_{37} s \right) \beta_{46} \xi_7 - 2\beta_{45} \frac{\sigma^2}{\tau^2} s^2 - 2\beta_{55} \frac{\sigma}{\tau} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} s \\ & - s \beta_{46} \left[(\beta_{33} - \beta_{32}) \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} (s^2 - 1) + 2\beta_{34} s \right] - 2\beta_{65} \frac{\sigma}{\tau} s^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\beta_{45} \frac{\sigma}{\tau} s + \beta_{55} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} + (\beta_{65} - \beta_{46} \beta_{35}) s \equiv 0$$

et

$$\beta_{55} = 0, \quad \beta_{45} \frac{\sigma}{\tau} + \beta_{65} - \beta_{46} \beta_{35} = 0;$$

du ii)', on déduit : $\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46} \beta_{35} = 0$ et la présymétrie.

Dans le cas A_3 , on considère la condition (1.3)

$$\begin{aligned} & \text{sign} \tau \xi_6 + \sigma \left[-2\beta_{32} (s^2 - 1) \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} + 2\beta_{34} s - 2\beta_{35} \frac{\sigma}{\tau} s \right] \\ & = \text{sign} \beta_{46} \tau \xi_6 + \sigma k \left[-2\beta_{32} (s^2 - 1) \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \right] + \sigma \beta_{46} \left[2\beta_{34} s - 2\beta_{35} \frac{\sigma}{\tau} s \right] \end{aligned}$$

on obtient, si $\beta_{32} \neq 0$, $k = \beta_{46}$ et la présymétrie ; si $\beta_{32} = 0$, on a évidemment aussi la présymétrie.

Pour traiter le cas **B**, on pose :

iv) $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = (1 - \tau^2)s$, $\xi_3 = \xi_5 = s$

$$C(s) = \begin{pmatrix} (1 - \tau^2) & 1 & \tau \\ 1 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \end{pmatrix} s.$$

On note : $\delta = \sqrt{(1 + \tau^2)^2 + 8}$; on remarque que : $\tau^2 - 3 - \delta \neq 0$;

$$U = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\tau^2 + 1 + \delta}{2} & \frac{\tau^2 + 1 - \delta}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\tau & \frac{-\tau(\tau^2 + 1 + \delta)}{\tau^2 + \delta - 3} & \frac{-\tau(\tau^2 + 1 - \delta)}{\tau^2 - \delta - 3} \end{pmatrix},$$

dét $U > 0$.

Dans les cas B_1, B_2, B_3 on a : $\beta_{57} = k$; la condition (1.2) donne :

$$\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{57}\beta_{34} = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{sign} \frac{\tau^2 + 1 + \delta}{2} \xi_6 - \xi_7 - \frac{\tau(\tau^2 + 1 + \delta)}{\tau^2 + \delta - 3} [\beta_{32}(1 - \tau^2)s + \beta_{33}s + \beta_{35}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7] \\ &= \text{sign} \frac{\tau^2 + 1 + \delta}{2} [\beta_{45}s + \beta_{46}\xi_6] - (\beta_{55}s + \beta_{57}\xi_7) \\ & \quad - \frac{\tau(\tau^2 + 1 + \delta)}{\tau^2 + \delta - 3} \left\{ \beta_{32}[(1 - \tau^2)s + \beta_{33}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7] + \beta_{65}s \right\} \end{aligned}$$

la condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned} & \text{sign} \xi_6 - \xi_7 + \tau [\beta_{32}(1 - \tau^2)s + \beta_{33}s + \beta_{35}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7] \\ &= \text{sign} \beta_{45}s + \beta_{46}\xi_6 - \beta_{55}s - \beta_{57}\xi_7 \\ & \quad + \tau\beta_{57} [\beta_{32}(1 - \tau^2)s + \beta_{33}s + \beta_{36}\xi_6 + \beta_{37}\xi_7] + \tau\beta_{65}s. \end{aligned}$$

Dans le cas B_1 , on utilise d'abord la condition (1.2) ; comme $\tau\beta_{37} = -1$, le coefficient de ξ_7 dans le premier membre est : $-1 + \frac{\tau^2 + \delta + 1}{\tau^2 + \delta - 3} \neq 0$; on considère les coefficients de ξ_6 et on en déduit :

$$\beta_{46} = \beta_{57};$$

si $\sqrt{1 + \tau^2} \neq \varepsilon\tau\beta_{36}$, il résulte des résultats précédents que l'on a :

$$-\tau\beta_{55} + \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0, \quad \tau\beta_{36}\beta_{55} + \beta_{45} = 0, \quad \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{55}) + \tau\beta_{45}\beta_{36} + \beta_{55} = 0$$

d'où la présymétrie.

Si $\sqrt{1 + \tau^2} = \varepsilon\tau\beta_{36}$, on a :

$$-\tau\beta_{55} + \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0; \quad \beta_{45} + \varepsilon\sqrt{1 + \tau^2}\beta_{55} = 0,$$

la condition (1.1) donne, comme $\tau\beta_{36} \neq -1$

$$\beta_{45} - \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0.$$

Si $\tau^2 \neq 3$, on obtient : $\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$ et la présymétrie.

Si $\tau^2 = 3$, la condition (1.2) donne la présymétrie.

Dans le cas B_2 , on sait que : $\beta_{46} = \beta_{57} = k$ et que :

$$\beta_{45} = 0, \quad \beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0;$$

la condition (1.1) donne :

$$-\beta_{55} + \tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) = 0$$

et la présymétrie.

Dans le cas B_3 , on sait que : $\beta_{57} = k$ et que : $\beta_{45} = 0$

$$\beta_{65} - \beta_{57}\beta_{35} - \tau\beta_{55} = 0$$

$$\tau(\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35}) + \beta_{55} = 0;$$

la condition (1.2) donne : $\beta_{46} = \beta_{57}$ et la présymétrie.

Dans le cas B_4 , on sait que : $\beta_{46} = \beta_{57}$, $\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0$, $\beta_{45} = \beta_{55} = \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$; la condition (1.1) donne :

$$\text{sign } \xi_6 - \xi_7 + \tau(-\tau^2\beta_{32} + \beta_{35})s = \text{sign } \beta_{46}(\xi_6 - \xi_7) + \tau(-\tau^2k\beta_{32} + \beta_{46}\beta_{35})s,$$

d'où : $\beta_{32}(k - \beta_{46}) = 0$;

si $\beta_{32} \neq 0$, on a : $k = \beta_{46}$ et la présymétrie

si $\beta_{32} = 0$, la présymétrie résulte directement des calculs précédents.

Dans le cas C , distinguons 2 cas :

C_1 : $\beta_{32} + \beta_{33} \neq 0$, on a :

$$\beta_{46} = \beta_{57} = k; \quad \beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{55} = 0$$

C_2 : $\beta_{32} + \beta_{33} = 0$, on a :

$$\beta_{46} = \beta_{57}; \quad \beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{55} = 0.$$

Posons : $\xi_4 = 0$, $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1$, $\xi_5 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$, $\xi_3 \neq \frac{1}{2}$, $\xi_3 \neq \frac{-s^2}{2}$ comme au I a i)

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas C_1 , on obtient par la formule (1.3)

$$\begin{aligned} & \text{sign } \beta_{32}(s^2 - 1) + (\beta_{32} + \beta_{33})\xi_3 + \beta_{35}s \\ & = \text{sign } \beta_{46} \left[\beta_{32}(s^2 - 1) + (\beta_{32} + \beta_{33})\xi_3 \right] + \beta_{65}s, \end{aligned}$$

d'où : $\beta_{65} = \beta_{46}\beta_{35}$ et la présymétrie.

Dans le cas C_2 , on obtient de même

$$\beta_{65} = k\beta_{35};$$

il reste à montrer que : $\beta_{46} = k$.

Supposons d'abord $\sigma \neq 0$.

On pose : $\xi_2 = 2\sigma^2s^3$, $\xi_3 = 1 + s^2$, $\xi_4 = s(1 + s^2)$, $\xi_5 = \sigma s(1 + s^2)$.

On obtient $C(s)$; la 1ère colonne de $U(s)$ est : $[1 + s^2, -\sigma s(s + 1), -\sigma s(s - 1)]$.

La condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned} & \text{sign } \xi_6(1 + s^2) - \sigma s(s + 1)\xi_7 - \sigma s(s - 1) \\ & \times \left[\beta_{32}(2\sigma^2s^3 - 1 - s^2) + \beta_{34}s(1 + s^2) + \beta_{35}\sigma s(1 + s^2) \right] \\ & = \text{sign } \beta_{46}\xi_6(1 + s^2) - \beta_{46}\sigma s(s + 1)\xi_7 - \sigma s(s - 1) \\ & \times \left\{ k \left[\beta_{32}(2\sigma^2s^3 - 1 - s^2) + \beta_{35}\sigma s(1 + s^2) \right] + \beta_{46}\beta_{34}s(1 + s^2) \right\} \end{aligned}$$

d'où :

$$(k - \beta_{46}) \left[\beta_{32}(2\sigma^2s^3 - 1 - s^2) + \beta_{35}\sigma s(1 + s^2) \right] = 0, \quad \forall s.$$

Si β_{32} ou $\beta_{35} \neq 0$, on a la présymétrie car $k = \beta_{46}$

Si $\beta_{32} = \beta_{35} = 0$, on l'a directement.

Supposons $\sigma = 0$.

On pose : $\xi_3 = -\xi_2 = s^2 - 1$, $\xi_4 = \xi_2$, $\xi_5 = 2\sqrt{2}s$, $s \in \mathbb{R}$.

La première colonne de $U(s)$ est : $(s^2 - 1, 0, 2\sqrt{2}s)$.

La condition (1.1) donne :

$$\begin{aligned} & \text{sign}(s^2 - 1)\xi_6 + 2\sqrt{2}s \left[(2\beta_{32} + \beta_{34})(1 - s^2) + 2\beta_{35}\sqrt{2}s \right] \\ & = \text{sign } \beta_{46}(s^2 - 1)\xi_6 + 2\sqrt{2}s \left\{ k \left[2\beta_{32}(1 - s^2) + 2\beta_{35}\sqrt{2}s \right] + \beta_{46}\beta_{34}(1 - s^2) \right\} \end{aligned}$$

d'où :

$$(k - \beta_{46}) \left[\beta_{32}(1 - s^2) + \beta_{35}\sqrt{2}s \right] = 0, \quad \forall s.$$

On obtient la présymétrie.

a₂) $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_3(\xi''))$ sont linéairement indépendants ; b_2 est combinaison linéaire de $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ et $b_1(\xi'')$.

Pour un changement de base dans E , on a :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & b_2(\xi'') & \xi_7 \\ b_4 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ b_5 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_3 + \tau\xi_5 & -\xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

b_2 ne dépend pas de ξ_7 .

Par un changement de base dans F et un changement de notations :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_6 & \xi_7 & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Si $\tau \neq 0$, un changement de base dans E de la forme $\eta_5 = \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5$, (les autres coordonnées inchangées), ramène le cas a₂) au cas a₁).

Si $\tau = 0$, on pose : $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$; on en déduit :

$$\beta_{42} = \beta_{47} = 0.$$

Si de plus, on pose : $\xi_7 = 0$, on en déduit :

$$b_6(\xi'') = k(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{36}\xi_6) + \beta_{63}\xi_3 + \beta_{64}\xi_4 + \beta_{65}\xi_5 + \beta_{67}\xi_7, \quad k > 0.$$

On distingue ensuite :

i) $\rho \neq 0$. On pose $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 = s + \rho(-s^2 + 1)$, $\xi_3 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$; on a :

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne :

$$\begin{aligned} & \text{sign } \beta_{32} [s + \rho(1 - s^2)] + \beta_{33}s + \beta_{36}\xi_6 \\ & = \text{sign } k \{ \beta_{32} [s + \rho(1 - s^2)] + \beta_{36}\xi_6 \} + \beta_{63}s + \beta_{67}\xi_7, \end{aligned}$$

d'où :

$$\beta_{67} = 0;$$

et si : $\beta_{36} \neq 0$ ou $\beta_{32} \neq 0$; $\beta_{63} = k\beta_{33}$; si $\beta_{36} = \beta_{32} = 0$, on peut poser : $\beta_{63} = k\beta_{33}$, $k > 0$.

La condition (1.1) donne :

$$\text{sign } \xi_6 + s\xi_7 = \text{sign } \beta_{43}s + \beta_{46}\xi_6 + s\left\{\beta_{52}\left[s + \rho(1 - s^2)\right] + \beta_{53}s + \beta_{56}\xi_6 + \beta_{57}\xi_7\right\}$$

d'où :

$$\beta_{56} = 0, \quad \beta_{46} = \beta_{67}; \quad \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{43} = 0.$$

On pose maintenant $\xi_3 = 0$; $\xi_2 = 4\sigma s$, $\xi_4 = 1 - s^2$, $\xi_5 = 2s$. On obtient :

$$U(s) = \begin{pmatrix} \sigma(s^2 + 1) - 2s\sqrt{\sigma^2 + 1} & \sigma(s^2 + 1) + 2s\sqrt{\sigma^2 + 1} & s^2 - 1 \\ (s^2 - 1)\sqrt{\sigma^2 + 1} & (1 - s^2)\sqrt{\sigma^2 + 1} & 2s \\ s^2 + 1 & s^2 + 1 & \sigma(1 - s^2) \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne : $\beta_{55} = 0$. La condition (1.1) donne alors : $(k - \beta_{46})\beta_{36} = 0$, $\beta_{44} = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0$; $\beta_{45} = 0$, $2\sigma\beta_{32}(k - \beta_{46}) + \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$.

Si $\beta_{36} \neq 0$, on a la présymétrie ; si $\beta_{36} = 0$, on pose : $\xi_4 = \xi_3 = 0$; $\xi_2 = s^2 - 1$, $\xi_5 = s$;

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix};$$

de la condition (1.1), on déduit :

$$\beta_{32}(k - \beta_{46}) = 0;$$

si $\beta_{32} \neq 0$, on a la présymétrie.

Si $\beta_{36} = \beta_{32} = 0$, on a seulement : $\beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0$; on pose $\xi_4 = 0$; $\xi_3 = s$, $\xi_2 = (\rho^2 - 1)s$, $\xi_5 = s$.

La 1ère colonne de $U(s)$ est : $(1, -\rho, 1)$; la condition (1.1) donne :

$$(k - \beta_{46})\beta_{33} = 0;$$

dans tous les cas, on a la présymétrie

ii) $\rho = 0$. On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; on obtient :

$$\beta_{43} = \beta_{52} = \beta_{53} = \beta_{56} = \beta_{67} = 0; \quad \beta_{63} = k\beta_{33}.$$

Comme avant, on pose : $\xi_3 = 0$; $\xi_2 = 4\sigma s$; $\xi_4 = 1 - s^2$; $\xi_5 = 2s$.

La condition (1.3) donne :

$$\beta_{57} - \beta_{46} + \sigma(k - \beta_{57})\beta_{36} = 0; \quad \beta_{55} = 0.$$

La condition (1.1) donne, d'abord :

$$\sigma(\beta_{57} - \beta_{46}) - (k - \beta_{57})\beta_{36} = 0,$$

d'où : $\beta_{57} = \beta_{46}$ et : $(k - \beta_{46})\beta_{36} = 0$.

On a aussi :

$$\beta_4 = \beta_{54} = \beta_{64} - \beta_{46}\beta_{34} = 0; \quad \beta_{45} = 0,$$

$$2(k - \beta_{46})\beta_{32}\sigma + \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0.$$

Si $\beta_{36} \neq 0$, on a la présymétrie ; si $\beta_{36} = 0$, on pose :

$\xi_4 = 0$, $\xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1$, $\xi_5 = s$; comme on l'a déjà vu (I a) ii) :

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) donne :

$$(k - \beta_{46})\beta_{32} = 0, \quad (k - \beta_{46})\beta_{33} = 0, \quad \beta_{65} - \beta_{46}\beta_{35} = 0,$$

d'où dans tous les cas la présymétrie.

$a_3) b_1(\xi'')$ est combinaison linéaire de $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$; $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_2(\xi''), b_3(\xi'')$ sont linéairement indépendants.

Par un changement de base de E , on a :

$a(\xi') =$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3 + \beta_{14}\xi_4 + \xi_{15}\xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \\ \beta_{42}\xi_2 + \dots + \beta_{47}\xi_7 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 \\ \beta_{52}\xi_2 + \dots + \beta_{57}\xi_7 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{62}\xi_2 + \dots + \beta_{67}\xi_7 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$; on obtient :

$$\beta_{46} = \beta_{47} = 0; \quad \text{sign } \beta_{42} = \text{sign } \beta_{12}$$

$$\beta_{52} = \beta_{62} = 0.$$

On distingue des cas

i) $\rho \neq 0$

i₁) On pose $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 = s + \rho(-s^2 + 1)$, $\xi_3 = s$, $s \in \mathbb{R}^*$ (cf. § 2-II-2a1)

$$U(s) = \begin{pmatrix} -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & s & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.3) donne :

$$\beta_{53} = \beta_{57} = 0, \quad \beta_{56} > 0.$$

La condition (1.1) donne :

$$\beta_{66} = 0; \quad \beta_{42} = \beta_{67}\beta_{12}; \quad \beta_{63} = 0; \quad \beta_{43} = \beta_{67}\beta_{13}; \quad \beta_{67} > 0.$$

i₂) On pose :

$$\xi_4 = 0; \quad \xi_3 = -\frac{\tau}{\rho}s; \quad \xi_5 = s; \quad \xi_2 = -\frac{2\tau}{\rho}s + 1 - s^2; \quad s \in \mathbb{R}^*$$

(cf. § 3-II 3a₁) (1) ii), on a le même $U(s)$.

La condition (1.3) donne : $\beta_{65} = 0$.

La condition (1.1) donne :

$$\beta_{55} = 0; \quad \beta_{12}(\beta_{67} - \beta_{56}) = 0; \quad -\frac{\tau}{\rho}(\beta_{67} - \beta_{56})\beta_{13} + \beta_{45} - \beta_{56}\beta_{15} = 0.$$

i₃) On pose :

$$\xi_5 = 0; \quad \xi_3 = -\frac{\sigma}{\rho}s; \quad \xi_4 = s, \quad s \in \mathbb{R}^*$$

(cf. § 3-II a₁) (1) iii), on a le même $U(s)$.

Les conditions (1.2) et (1.3) donnent :

$$\beta_{56} = \beta_{67}; \quad \beta_{54} = \beta_{64} = 0.$$

La condition (1.1) donne :

$$\text{si } \beta_{12} \neq 0 \text{ ou } \sigma\beta_{13} \neq 0, \text{ alors } : \beta_{44} = \beta_{56}\beta_{14}.$$

On conclut donc que si $\beta_{12} \neq 0$ ou $\sigma\beta_{13} \neq 0$, on a la présymétrie.

i₄) Dans le cas, où $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$, $\sigma \neq 0$, on pose :

$$\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = 0; \quad \xi_4 = s; \quad s \in \mathbb{R}^* \quad (\text{cf. § 3-II } a_1) (1) \text{ V}).$$

On a le même $U(s)$; on obtient :

$$\beta_{44} = \beta_{56}\beta_{14},$$

d'où la présymétrie.

i₅) Dans le cas où $\beta_{12} = \sigma = 0$, on doit distinguer.

i₅)' On a $\tau \neq 0$.

On pose : $\xi_2 = -2s$; $\xi_3 = 2s$, $\xi_4 = (s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\tau^2}}$; $\xi_5 = -\frac{2\rho}{\tau}s$;
 $s \in \mathbb{R}^*$ (cf. § 3-II a₁ (1) IV).

On a le même $U(s)$ et on obtient la présymétrie.

i₅)'' On a $\tau = 0$.

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = 0$; $\xi_4 = 2s$; $\xi_5 = s^2 - 1$ (comme dans la fin du § 3 II a₁ (1) avec $\sigma = 0$).

On a le même $U(s)$ et on obtient la présymétrie.

ii) $\rho = 0$.

On obtient d'abord en posant : $\xi_4 = \xi_5 = 0$:

$$\beta_{53} = \beta_{57} = \beta_{63} = \beta_{66} = 0; \quad \beta_{42}\xi_2 + \beta_{43}\xi_3 = k(\beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3), \quad k > 0;$$

(on a obtenu avant :

$$\beta_{46} = \beta_{47} = \beta_{52} = \beta_{62} = 0).$$

On pose ensuite $\xi_5 = 0$ et comme au § 3 II a₁ (2), on pose :

$$\xi_2 = \xi_3 = (s^2 - 1)\sqrt{1 + \sigma^2}, \quad \xi_4 = 2s, \quad s \in \mathbb{R}^* \quad \text{et}$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & s\sigma \\ -\sigma & 1 & s \\ 0 & -s\sqrt{1 + \sigma^2} & \sqrt{1 + \sigma^2} \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) implique :

$$\beta_{44} - \beta_{56}\beta_{14} - \sigma\beta_{54} = 0$$

et si $\beta_{12} + \beta_{13} \neq 0$: $k = \beta_{56}$.

La condition (1.2) implique alors :

$$\beta_{56} = \beta_{67}; \quad \beta_{54} = \beta_{64} = 0; \quad \beta_{44} = \beta_{56}\beta_{14}; \quad \beta_{64} = 0.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = s$. Comme au § 3 II a₁ (1) IV :

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \tau^2} & \sqrt{1 + \tau^2} & 0 \\ -1 & 1 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit de (1) (2) (3) :

$$\beta_{55} = \beta_{65} = 0; \quad \beta_{45} = \beta_{56}\beta_{15}.$$

Si $\beta_{12} + \beta_{13} \neq 0$, la présymétrie est obtenue.

Si $\beta_{12} + \beta_{13} = 0$, on doit distinguer les cas $\tau \neq 0$ et $\tau = 0$.

Si $\tau \neq 0$, comme au § 3, II a₁) (1) iii), on pose :

$$\xi_2 = -\xi_3 = -(s^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}; \quad \xi_4 = 2s; \quad \xi_5 = -\frac{2\sigma}{\tau}s; \quad s \in \mathbb{R}^*.$$

$U(s)$ a la même valeur ; on déduit de la condition (3) la présymétrie lorsque $\sigma \neq 0$.

Lorsque $\sigma = 0$, comme au § 3 II a₁) (2) IV), on pose :

$$\xi_4 = 0; \quad \xi_2 = (1 - \tau^2)s, \quad \xi_3 = \xi_5 = s.$$

$U(s)$ a la même valeur ; on déduit de la condition (1) la présymétrie.

Si $\tau = 0$, on pose : $\xi_4 = 0, \xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1; \xi_5 = s$.

Comme au I a) i) on obtient $U(s)$ et de la condition (1.1), on déduit la présymétrie.

b) On suppose que : $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 6.

b₁) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''))$ sont linéairement indépendants. Par un changement de base on peut se ramener à $b_1(\xi'') \equiv \xi_6$.

Si $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_4(\xi''))$ sont linéairement indépendants ; on peut se ramener à $b_4(\xi'') \equiv \xi_7$.

On pose $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$; il résulte de (1.1)

$$\text{sign } \xi_7 = \text{sign } \xi_6, \text{ d'où une impossibilité.}$$

On a donc : ou bien $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_5(\xi''))$ sont linéairement indépendants, ou bien $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_6(\xi''))$ sont linéairement indépendants.

(1) Dans le 1er cas, on se ramène à $b_5(\xi'') = \xi_7$

$$a(\xi') =$$

$$\begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_6 & \beta_{22}\xi_2 + \dots + \beta_{27}\xi_7 & \beta_{32}\xi_2 + \dots + \beta_{37}\xi_7 \\ \beta_{42}\xi_2 + \dots + \beta_{47}\xi_7 & \xi_2 & \xi_5 & \rho\xi_3 + \tau\xi_4 + \tau\xi_5 \\ \xi_7 & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \beta_{62}\xi_2 + \dots + \beta_{67}\xi_7 & \rho\xi_3 + \sigma\xi_4 + \tau\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

• Si $\beta_{27} \neq 0$, par un changement de base, on peut se ramener à :

$$\beta_2(\xi'') \equiv \xi_7, \quad \beta_5(\xi'') = \beta_{52}\xi_2 + \dots + \beta_{57}\xi_7;$$

c'est le cas étudié au a₁) du § 3 II. On en déduit la présymétrie.

- Si $\beta_{37} \neq 0$, on se ramène de même au cas a₂) et on obtient la présymétrie. On suppose donc $\beta_{27} = \beta_{37} = 0$.

On pose $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_7 = 1$, il résulte de (1.5) une impossibilité.

Dans le 2ème cas, on se ramène à : $b_6(\xi'') = \xi_7$ et on procède de même qu'au cas (1) ; ce cas est impossible.

b₂) $b_1(\xi')$ dépend linéairement de $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$. $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_2(\xi''))$ sont linéairement indépendants [le cas $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_3(\xi''))$ linéairement indépendants se ramène au précédent par échange de lignes et colonnes convenables]. On se ramène à : $b_2(\xi'') \equiv \xi_6$.

- Si $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_5(\xi''))$ sont linéairement indépendants, on peut se ramener à $b_5(\xi'') \equiv \xi_7$.
- Si $\beta_{37} \neq 0$, on se ramène au cas a₃) précédent et on obtient la présymétrie.
- Si $\beta_{37} = 0$, on pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_7 = 1$ il résulte de (1.5), une impossibilité.

On a donc ou bien $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_4(\xi''))$ sont linéairement indépendants, ou bien $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_6(\xi''))$ sont linéairement indépendants.

Dans le 1er cas, on se ramène à $b_4(\xi'') \equiv \xi_7$.

- Si $\beta_{37} \neq 0$, on se ramène au cas a₃) et on obtient la présymétrie. Si $\beta_{37} = 0$, on a un cas impossible.

Dans le 2ème cas on se ramène à : $b_6(\xi'') \equiv \xi_7$ et on procède de même

c) On suppose que $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_1(\xi''), b_2(\xi''), b_3(\xi''))$ est de rang 5. On a alors $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, b_4(\xi''), b_5(\xi''), b_6(\xi''))$ est de rang 7.

Ce cas se ramène au cas a) par transposition.

4. – Cas où $C(\xi'')$ est de dimension réduite 5

C est présymétrique ((6), p. 964) ; on se ramène donc à C symétrique ; on peut donc écrire :

$$C(\xi'') = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_5 & \xi_6 \\ \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_6 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

et

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \xi_6 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \xi_6 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

a) On suppose que $(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, b_2(\xi''))$ est de rang 6 .
 Par un changement de base, on peut supposer que $b_1(\xi'') = \xi_7$. En posant :
 $\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$, la condition (1.1) donne : $\beta_{42} = \beta_{43} = 0$; $\beta_{47} > 0$;

$$\begin{aligned} \beta_{52}\xi_2 + \beta_{53}\xi_3 + \beta_{57}\xi_7 &= k(\beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 + \beta_{27}\xi_7), & k > 0; \\ \beta_{62}\xi_2 + \beta_{63}\xi_3 + \beta_{67}\xi_7 &= \ell(\beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 + \beta_{37}\xi_7), & \ell > 0. \end{aligned}$$

On pose ensuite : $\xi_5 = \xi_6 = 0$; $\xi_3 = s^2 - 1$; $\xi_4 = 2s$; $s \in \mathbb{R}$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) implique : $\beta_{44} = 0$, $\beta_{47} > 0$. La condition (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{sign} \left[(sk\beta_{27} + \ell\beta_{37})\xi_7 + (sk\beta_{22} + \ell\beta_{32})\xi_2 + (sk\beta_{23} + \ell\beta_{33})(s^2 - 1) + 2\beta_{54}s^2 + 2\beta_{64}s \right] \\ &= \text{sign} \left[(s\beta_{27} + \beta_{37})\xi_7 + (s\beta_{22} + \beta_{32})\xi_2 + (s\beta_{23} + \beta_{33})(s^2 - 1) + 2\beta_{24}s^2 + 2\beta_{34}s \right]. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{sign}(sk\beta_{27} + \ell\beta_{37}) = \text{sign}(s\beta_{27} + \beta_{37})$$

i) Si $\beta_{27} \neq 0$, $\beta_{37} \neq 0$, on a :

$$(4.1) \quad k = \ell; \quad \beta_{54} = k\beta_{24}; \quad \beta_{64} = k\beta_{34}$$

ii) Si $\beta_{27} \neq 0$, $\beta_{37} = 0$, on distingue :

ii₁) $\beta_{32} \neq 0$ ou $\beta_{33} \neq 0$, on a encore : (4.1)

ii₂) $\beta_{32} = \beta_{33} = 0$; on a :

$$(4.2) \quad \beta_{54} = k\beta_{24}; \quad \beta_{64} = k\beta_{34}$$

iii) Si $\beta_{27} = 0$, $\beta_{37} \neq 0$, on distingue :

iii₁) $\beta_{22} \neq 0$ ou $\beta_{23} \neq 0$, on a : (4.1)

iii₂) $\beta_{22} = \beta_{23} = 0$; on a :

$$(4.3) \quad \beta_{54} = \ell\beta_{24} ; \quad \beta_{64} = \ell\beta_{34} .$$

iv) Si $\beta_{27} = \beta_{37} = 0$, on distingue :

iv₁) $\beta_{22} \neq 0, \beta_{32} \neq 0$; on a encore (4.1)

iv₂) $\beta_{22} \neq 0, \beta_{32} = 0$

Si $\beta_{33} \neq 0$, on a : (4.1) ; si $\beta_{33} = 0$, on a : (4.2)

iv₃) $\beta_{22} = 0, \beta_{32} \neq 0$

Si $\beta_{23} \neq 0$, on a : (4.1) ; si $\beta_{23} = 0$, on a : (4.3) .

On pose : $\xi_4 = \xi_6 = 0$; $\xi_5 = s$; $\xi_2 = \xi_3 + s^2 - 1$; $s \in \mathbb{R}^*$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La condition (1.3) donne : si $\beta_{37} \neq 0$:

$$\beta_{65} = \ell\beta_{35} .$$

La condition (1.1) donne si $\beta_{27} \neq 0$ ou $\beta_{22} + \beta_{23} \neq 0$ ou $\beta_{22} \neq 0$:

$$k = \beta_{47} ; \quad \beta_{45} = 0 ; \quad \beta_{55} = \beta_{47}\beta_{25} ;$$

si $\beta_{27} = \beta_{22} = \beta_{23} = 0$, on a :

$$\beta_{45} = 0 ; \quad \beta_{55} = \beta_{47}\beta_{25} .$$

On pose : $\xi_4 = \xi_5 = 0$; $\xi_2 = -\xi_3 + s^2 - 1$; $\xi_6 = s, s \in \mathbb{R}^*$

$$U(s) = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{pmatrix} .$$

La condition (1.3) donne si : $\beta_{27} \neq 0$:

$$\beta_{56} = k\beta_{26} .$$

La condition (1.1) donne si $\beta_{37} \neq 0$ ou $\beta_{32} \neq \beta_{33}$ ou $\beta_{32} \neq 0$:

$$\ell = \beta_{47} ; \quad \beta_{46} = 0 ; \quad \beta_{66} = \beta_{47}\beta_{36}$$

si $\beta_{37} = \beta_{32} = \beta_{33} = 0$, on a seulement :

$$\beta_{46} = 0 ; \quad \beta_{66} = \beta_{47}\beta_{36} .$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = 0$; $\xi_4 = 2s$, $\xi_5 = s^2 - 1$, $s \in \mathbb{R}$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 2s & 1 - s^2 & s^2 - 1 \\ 0 & 1 + s^2 & 1 + s^2 \\ 1 - s^2 & -2s & 2s \end{pmatrix}.$$

La condition (1.1) donne si $\beta_{37} = 0$: $\beta_{64} = \beta_{47}\beta_{34}$, $\beta_{65} = \beta_{47}\beta_{35}$.

La condition (1.2) donne si $\beta_{27} = \beta_{37} = 0$:

$$\beta_{54} = \beta_{47}\beta_{24}.$$

On pose : $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; $\xi_5 = 2s$, $\xi_6 = 1 - s^2$, $s \in \mathbb{R}$

$$U(s) = \begin{pmatrix} 0 & s^2 + 1 & s^2 + 1 \\ s^2 - 1 & -2s & 2s \\ 2s & s^2 - 1 & 1 - s^2 \end{pmatrix}.$$

La condition (1.2) donne si $\beta_{27} = 0$,

$$\beta_{56} = \beta_{47}\beta_{26}.$$

On vérifie qu'on obtient la présymétrie dans tous les cas

b) b_1 est combinaison linéaire de (ξ_1, \dots, ξ_6) ; $(\xi_1, \dots, \xi_6, b_2(\xi''))$ ou $(\xi_1, \dots, \xi_6, b_3(\xi''))$ sont indépendants.

Les 2 cas étant semblables, traitons le 1° : on se ramène à $b_2(\xi'') = \xi_7$

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & b_1(\xi'') & \xi_7 & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_2 & \xi_5 & \xi_6 \\ b_5(\xi'') & \xi_5 & \xi_3 & \xi_4 \\ b_6(\xi'') & \xi_6 & \xi_4 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Par échange de lignes et de colonnes, on se ramène à :

$$a(\xi') = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_7 & b_2(\xi'') & b_3(\xi'') \\ b_4(\xi'') & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ b_5(\xi'') & \xi_4 & -\xi_3 & \xi_6 \\ b_6(\xi'') & \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \end{pmatrix}.$$

Par un changement de base conservant N , on se ramène au cas du a).

c) b_1, b_2, b_3 sont des combinaisons linéaires de (ξ_1, \dots, ξ_6) . Alors une des formes b_4, b_5, b_6 est linéairement indépendante de (ξ_1, \dots, ξ_6) ; par transposition on se ramène au cas précédent.

REFERENCES

- [1] H. DELQUIE —J. VAILLANT, *Dimension réduite et valeurs propres multiples d'une matrice diagonalisable 4×4* , Bull. Sci. Math. **124** (2000) 319-331.
- [2] P. D. LAX, *Differential equations, difference equations and matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 175-194.
- [3] T. NISHITANI, *Symmetrization of a class of hyperbolic systems with real constant coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **21** (1994), 97-130.
- [4] T. NISHITANI, *Symmetrization of hyperbolic systems with non degenerate characteristics*, J. Func. Anal. **132** (1995), 251-272.
- [5] T. NISHITANI —J. VAILLANT, *Smoothly symmetrizable systems and the reduced dimensions*, Tsukuba J. Math. (à paraître).
- [6] T. OSHIME, *Canonical forms of 3×3 strongly hyperbolic systems with real constant coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 937-982.
- [7] G. STRANG, *On strong hyperbolicity*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 397-417.
- [8] S. SPAGNOLO, *On the uniformly diagonalisable systems*, Colloque Jean Leray, 1999, Karlskrona, Kluwer Acad. Publish. (à paraître).
- [9] J. VAILLANT, *Symétrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **5** (1978), 405-427.
- [10] J. VAILLANT, *Systèmes fortement hyperboliques et systèmes symétriques*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 407-412.
- [11] J. VAILLANT, *Symétrie des opérateurs fortement hyperboliques 4×4 ayant un point triple caractéristique dans \mathbb{R}^3* , Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sc. Mat. Suppl. vol. **XLV** (1999) 339-363.

Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques
Boite courrier 172
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France