

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALOMON OFMAN

La transformation de Radon analytique en codimension 1

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 20, n° 3 (1993), p. 415-459

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1993_4_20_3_415_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La transformation de Radon analytique en codimension 1

SALOMON OFMAN

INTRODUCTION

La transformation de Radon est classiquement définie sur les fonctions de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n par leur intégration sur les sous-espaces affines de ces espaces. Dans [G-H], S. Gindikin et G. Henkin ont défini la transformation de Radon pour les formes différentielles d'' -fermées de type (n, q) sur certains ouverts Y de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$; pour $q = n - 1$, on en rappelle la construction.

Soit \mathbb{C}^{n+1} muni de sa base canonique, $(\mathbb{C}^{n+1})'$ son dual muni de la base duale; pour tout $z = (z^0, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \in (\mathbb{C}^{n+1})'$, on pose $\langle \zeta, z \rangle = \zeta_0 z^0 + \dots + \zeta_n z^n$. Soient $\xi, \eta \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})'$, on note $\check{\xi}$ (respectivement $\check{\eta}$) l'hyperplan de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ d'équation homogène $\langle \xi, z \rangle = 0$ (respectivement $\langle \eta, z \rangle = 0$) et $\frac{\eta}{\xi}$ la fonction méromorphe de pôle $\check{\xi}$ induite sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par l'application: $z \mapsto \frac{\langle \eta, z \rangle}{\langle \xi, z \rangle}$.

Si ψ est une forme différentielle d'' -fermée de type $(n, n - 1)$ sur Y , on définit sa transformée de Radon notée \mathcal{R}_ψ de la façon suivante:

$$\mathcal{R}_\psi(\xi, \eta) = \int_{\check{\xi}} \text{Res}_{\check{\xi}} \left(\psi \cdot \frac{\eta}{\xi} \right)$$

où $\text{Res}_{\check{\xi}} \left(\psi \cdot \frac{\eta}{\xi} \right)$ est le résidu au sens de Leray de la forme différentielle semi-méromorphe $\left(\psi \cdot \frac{\eta}{\xi} \right)$ de pôle $\check{\xi}$. Cette transformation définit une section de fibré au-dessus d'un espace de drapeaux $D = \{(\check{\xi}, \check{\eta}) \in C_{n-1}^1(Y) \times C_{n-2}^1(Y); \check{\xi} \subset \check{\eta}\}$, $C_q^1(Y)$ désignant l'espace des q -plans de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ contenus dans Y .

Cette transformation invariante est bien adaptée au cas de l'espace projectif complexe et de ses hyperplans. Dans cet article, nous allons la généraliser

au cas d'une variété analytique complexe Y (ayant certaines propriétés de convexité-concavité) et à ses cycles analytiques de codimension 1. Dans la suite, n désignera la dimension complexe de Y et $C_q(Y)$ l'espace des cycles analytiques compacts de dimension (pure) q sur Y .

La construction de la transformation de Radon analytique est faite au Chapitre III. Il est nécessaire d'établir auparavant un certain nombre de résultats; ceci est fait aux deux premiers chapitres. Dans le premier, on considère la variation des diviseurs des fonctions méromorphes pour de petites perturbations de celles-ci. Dans le deuxième, on étudie la transformation I qui à une forme différentielle ψ lisse (i.e. C^∞) de Y associe une application I_ψ définie sur l'espace \mathcal{M} des fonction méromorphes à support compact de Y ; plus précisément, soit $(f) = (f)^+ - (f)^-$ le diviseur de $f \in \mathcal{M}$. Lorsque $(f)^- = c'$ est lisse, I_ψ est donnée simplement par:

$$I_\psi(f) = \int_{c'} \text{Res}_{c'}(\psi \cdot f)$$

où $\text{Res}_{c'}(\psi \cdot f)$ est la classe-résidue de $(\psi \cdot f)$ au sens de Leray ([L]); pour c' quelconque, on étend la définition de I_ψ grâce à la théorie des courants-résidus de Herrera-Lieberman et de Coleff-Herrera.

Cette transformation servira à définir la transformation de Radon au chapitre suivant. La Proposition 2.2 montre que I peut s'interpréter à travers la dualité de certaines suites de cohomologie; on en déduit la Proposition 2.3 qui généralise un théorème de [M] sur les fonctionnelles analytiques.

Au paragraphe 3, on établit une relation entre deux transformations intégrales ρ^0 et ρ^1 (Proposition 3.1) qui sera utilisée pour démontrer le Théorème 4.4 au chapitre suivant; ces transformations sont des cas particuliers de transformations intégrales très générales construites à partir de la double fibration

$$\begin{array}{ccc} & G_Y = \{(x, c) \in Y \times C_q(Y); x \in |c|\} & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ Y & & C_q(Y) \end{array}$$

où $|c|$ désigne le support du cycle c ; ces transformation sont en particulier essentielles dans la théorie des twisteurs (cf. [B-E] par exemple). Le résultats de ce paragraphe sont basés sur les propriétés des courants-résidus obtenus dans [C-H].

Dans la première partie du Chapitre III, on construit un fibré E essentiel pour obtenir une bonne généralisation de la transformation de Radon de [G-H]. Pour cela, on considère D' l'espace des cycles-drapeaux (i.e. $D' = \{(c', \tilde{c}) \in C_{n-1}(Y) \times C_{n-2}(Y); \tilde{c} \subset c'\}$); soit π' la projection sur le premier facteur. A tout $f \in \mathcal{M} - \mathcal{O}(Y)$ (\mathcal{O} faisceau des germes de fonctions holomorphes sur Y), on associe le drapeau $\xi(f) = ((f)^-, (f)^+ \cap (f)^-) \in D'$. Soit W un ouvert d'une sous-variété analytique de $C_{n-1}(Y)$ formés de diviseurs principaux et $D \subset \pi'^{-1}(W)$; on note M' le sous-ensemble de $\mathcal{M} \times D$ défini par $M' = \{(h, \xi) \in \mathcal{M} \times D; \xi = \xi(h) \text{ pour } h \in \mathcal{M} - \mathcal{O}(Y)\}$. Par passage au quotient sur

M' , on obtient E ainsi qu'une application naturelle $\sigma : E \rightarrow TW$ (fibré tangent de W) vérifiant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & TW \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ D & \xrightarrow{\pi'} & W \end{array}$$

π (respectivement π_1) désignant l'application quotient de la projection de M' sur D (respectivement la projection canonique de TW sur W). Cela permet de munir E d'une structure de fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur D (Théorème 4.1).

Soit p_2 la projection naturelle de M' sur E ; on montre que $I_\psi(f)$ est constant lorsque le couple $(f, \xi) \in M'$ décrit une fibre de p_2 . Soit E^* le fibré dual de E ; on définit alors la transformation de Radon analytique $R : H^{n-1}(Y, \Omega^n) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}(E^*))$ (espace des sections globales de E^*), via l'isomorphisme de Dolbeault, en posant:

$$R(\psi) : \dot{f} \in E \mapsto I_\psi(f), \quad \psi \in \dot{\psi}, \quad p_2(f, \xi) \in \dot{f}.$$

On montre que R peut être également définie en utilisant la dualité entre l'espace des hyperfonctions à support dans un fermé et celui des fonctions holomorphes définies au voisinage de ce fermé. On en déduit certaines propriétés de R ; en particulier, le Théorème 4.4 donne une relation fondamentale entre les transformations R et ρ^1 ; elle généralise celle que nous avons établie dans [O1] entre la transformation de Radon de [G-H] et la transformation ρ^0 . Il est alors possible d'utiliser les méthodes et les résultats obtenus dans des travaux précédents, en particulier pour l'étude de l'injectivité de la transformation de Radon; le Théorème 4.5 en est une illustration.

Certains des résultats de cet article ont été annoncés dans [O4], [O5] et [O6]. On se borne ici au cas des diviseurs effectifs d'une variété analytique complexe. La transformation de Radon dans le cadre des cycles de dimension quelconque fera l'objet d'un article ultérieur.

CHAPITRE I

Fonctions méromorphes, espace de diviseurs

1. - Notations

Soit Y une variété analytique complexe (connexe, paracompacte) de dimension complexe $n \geq 2$. On appelle diviseur effectif c de Y un diviseur de la forme $c = \sum_{i=1}^p n_i \cdot c_i$, où les c_i sont des hypersurfaces irréductibles de Y et n_i des entiers strictement positifs. Soit $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ l'ensemble des diviseurs effectifs de Y , $C_{n-1}(Y)$ l'espace des cycles analytiques compacts de Y de dimension $n - 1$ (i.e. des diviseurs effectifs compacts de Y); si $c \in \mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ (respectivement $c \in C_{n-1}(Y)$), on note $|c|$ le support de c , c'est-à-dire l'ensemble des points de Y appartenant à c ; si $c = \sum_{i=1}^p n_i \cdot c_i$ est la décomposition de c en composantes irréductibles ($c_i \neq c_j$ si $i \neq j$, $n_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$) alors $|c| = \{z \in Y; z \in \bigcup_{i=1}^p c_i\}$. Pour une hypersurface H de Y , on confond H et son support $|H|$. L'espace $C_{n-1}(Y)$ (et plus généralement $C_q(Y)$ espace des cycles analytiques compacts de dimension q de Y) est muni d'une structure analytique naturelle (cf. les rappels du paragraphe 3).

Soit W un ouvert d'un sous-espace lisse de $C_{n-1}(Y)$ tel que $\bigcup_{c \in W} |c| = Y$; on fixe W et on note G_Y l'ensemble $G_Y = \{(x, c) \in Y \times W; x \in |c|\}$.

On a des applications naturelles α et β induites sur G_Y par les projections de $Y \times W$ sur chacun des facteurs:

$$\begin{array}{ccc} & G_Y & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ Y & & W \end{array}$$

Pour tout sous-espace S de Y , on désigne par \mathcal{C}_S^∞ (respectivement $\mathcal{A}_S^{r,s}$, $\mathcal{K}_S^{r,s}$, \mathcal{O}_S , Ω_S^p) le faisceau des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ (respectivement de formes différentielles \mathcal{C}^∞ de type (r, s) , de courants de type (r, s) , de fonctions holomorphes, de formes différentielles de degré p) sur S ; lorsque $S = Y$, on omettra généralement l'indice. Soit \mathcal{F} un faisceau sur S ; on désigne par $H^r(S, \mathcal{F})$ (respectivement $H_k^r(S, \mathcal{F})$) le r -ième groupes de cohomologie de \mathcal{F} (respectivement à support compact) et on utilisera indifféremment les notations $H^0(S, \mathcal{F})$ ou $\mathcal{F}(S)$ (respectivement $H_k^0(S, \mathcal{F})$ ou $\mathcal{F}_k(S)$).

On note $M(Y)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans Y et \mathcal{M} (respectivement \check{M}) le sous-ensemble de $M(Y)$ formé des fonctions dont la partie négative (respectivement positive) du diviseur appartient à W ; si $f \in M(Y)$, (f) désigne le diviseur de f dans Y , $(f)^+$ (respectivement $(f)^-$) la partie positive (respectivement négative) de (f) (autrement dit $(f)^-$ (respectivement $(f)^+$) est l'adhérence dans Y de l'ensemble des points où f (respectivement $1/f$) s'anule muni des multiplicités convenables). On note enfin $M(Y)^*$ (respectivement \mathcal{M}^* , \check{M}^*) l'ensemble $M(Y)^* = (M(Y) - \mathcal{O}(Y))$ (respectivement $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} - (\mathcal{M} \cap \mathcal{O}(Y))$, $\check{M}^* = \check{M} - (\check{M} \cap \mathcal{O}(Y))$) et \mathbb{C}^* le groupe multiplicatif $\mathbb{C} - \{0\}$.

On munit $\mathcal{A}_k^{r,s}(Y)$ (respectivement $\mathcal{A}^{r,s}(Y)$) de la topologie de la convergence uniforme sur Y (respectivement sur tout compact de Y) des (r, s) -formes différentielles ainsi que de leurs dérivées (relativement à un recouvrement quelconque de Y par des ouverts de coordonnées). (cf. [S] par exemple); les espaces $\mathcal{K}_k^{n-r, n-s}(Y)$ et $\mathcal{K}^{n-r, n-s}(Y)$, respectivement dual de $\mathcal{A}^{r,s}(Y)$ et de $\mathcal{A}_k^{r,s}(Y)$, seront naturellement munis de la topologie duale (forte); tous ces espaces sont des espaces de Fréchet. L'isomorphisme de Dolbeault

$$H^s(Y, \Omega^r) \cong \text{Ker}(\mathcal{A}^{r,s}(Y) \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{r,s+1}(Y)) / d'' \mathcal{A}^{r,s-1}(Y)$$

(respectivement $H_k^s(Y, \Omega^r) \cong \text{Ker}(\mathcal{K}_k^{r,s}(Y) \xrightarrow{d''} \mathcal{K}_k^{r,s+1}(Y)) / d'' \mathcal{K}_k^{r,s-1}(Y)$) permet de munir ces espaces d'une topologie quotient naturelle. En général, ces topologies ne sont pas séparées; cependant d'après le théorème d'image fermée, si les opérateurs d'' sont d'image fermée, les topologies quotients sont séparées; dans ce cas, $H^s(Y, \Omega^r)$ et $H_k^s(Y, \Omega^r)$ sont encore des espaces de Fréchet (pour cette topologie).

Ces espaces seront, sauf mention du contraire, supposés munis des topologies définies ci-dessus. Dans la suite, il sera également nécessaire de considérer les espaces $\mathcal{K}_k^{r,s}(Y)$ et $\mathcal{K}^{r,s}(Y)$ munis de leur topologie faible (i.e. de la topologie de la convergence simple sur Y); on le précisera alors expressément.

Si U et V sont deux sous-ensemble de Y , U sous-ensemble relativement compact de V est noté $U \subset\subset V$.

DÉFINITION ([A]). Une variété Y est dite pseudoconcave, s'il existe ϕ , fonction C^∞ sur Y à valeurs réelles telle que:

- i) $E_c = \{z \in Y; \phi(z) \geq c\}$ est compact pour tout $c > \inf_{z \in Y} \phi(z)$.
- ii) Il existe un compact $K \subset Y$ tel que le Hessien de ϕ en tout point de $Y - K$ ait au moins 2 valeurs propres positives.

DÉFINITION. On dira qu'une variété analytique Y vérifie la propriété (*) si les seules fonctions holomorphes sur Y sont les constantes.

REMARQUE 1.

- i) Soit Y un espace topologique connexe, $\mathcal{C}^0(Y)$ l'espace des fonctions continues sur Y à valeurs complexes, f appartenant à $\mathcal{C}^0(Y)$ non constante sur Y , alors les puissances de f sont linéairement indépendantes sur \mathbb{C} ; en particulier, si

F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(Y)$ stable pour la multiplication et contenant une fonction non constante, alors F est un espace vectoriel de dimension infinie.

ii) Une variété analytique connexe pseudoconcave, vérifie la propriété (*): en effet l'espace vectoriel des fonctions analytiques $H^0(Y, \mathcal{O})$ sur Y est de dimension finie ([A-N]) et, d'après ci-dessus, toute fonction analytique sur Y (connexe) est donc constante.

EXEMPLES.

i) Une variété compacte est pseudoconcave.

ii) Soit X une sous-variété de codimension au moins 2 d'une variété compacte Z , alors $Y = Z - X$ est pseudoconcave ([A-N2]).

iii) Plus généralement, soit Z une variété pseudoconcave, X un ensemble quelconque contenu dans une sous-variété de codimension au moins 2 de Z , alors $Y = Z - X$ vérifie la propriété (*).

2. - Intégration partielle sur les cycles

A) La transformation ρ^0 ([A-N2], [O2], [O3])^(*).

DÉFINITION. Soit φ une forme différentielle \mathcal{C}^∞ de type $(n-1, n-1)$ sur Y . On note $\rho^0\varphi$ la fonction différentiable sur $W \subset C_{n-1}(Y)$ définie par:

$$\rho^0\varphi = \beta_*\alpha^*\varphi.$$

Si φ est une forme différentielle d'' - (respectivement $d'd''$ -) fermée dans Y , $\rho^0\varphi$ est une fonction analytique (respectivement pluriharmonique) sur W (cf. [A-N2]).

B) La transformation ρ^1 .

DÉFINITION. Soit ψ une forme différentielle \mathcal{C}^∞ de type $(n, n-1)$ sur Y . On note $\rho^1\psi$ le courant de degré 1 sur $W \subset C_{n-1}(Y)$ défini par:

$$\rho^1\psi = \beta_*\alpha^*\psi.$$

LEMME 2.1. Si ψ est d'' -fermée dans Y , alors $\rho^1\psi$ est une 1-forme différentielle holomorphe sur Y .

DÉMONSTRATION. Les applications α et β étant analytiques, la différentielle d'' commute avec leurs images directe et inverse; ψ est de type $(n, n-1)$, d'où également $\alpha^*\psi$; la fibre au-dessus de tout point $c \in W$ est de dimension pure $n-1$ (car $c \in W$) et $\beta_*\alpha^*\psi$ est donc un courant de type $(1, 0)$. Enfin puisque $d''\beta_*\alpha^*\psi = \beta_*\alpha^*d''\psi = 0$, $\beta_*\alpha^*\psi$ est un courant holomorphe de degré 1 et par

(*) Dans les articles précédents ρ^0 était noté ρ_0 .

régularité de l'opérateur d'' (cf. [GR-H] par exemple), c'est en fait une forme différentielle sur l'espace W .

C) *Passage à la d'' -cohomologie.*

Si φ (respectivement ψ) est d'' -exacte, $\rho^0\varphi$ (respectivement $\rho^1\psi$) est identiquement nulle. En effet, les fibres de β étant de dimension $(n - 1)$, $\beta_*u = 0$ pour toute forme différentielle u de type (r, s) sur G_Y tel que $\inf(r, s) < n - 1$; si l'on pose: $\varphi = d''\vartheta$ (respectivement $\psi = d''\chi$), ϑ (respectivement χ) est de type $(n - 1, n - 2)$ (respectivement $(n, n - 2)$), d'où également leur image inverse par α ; on obtient les égalités $\rho^0\varphi = \beta_*\alpha^*d''\vartheta = d''\beta_*\alpha^*\vartheta = \beta_*\alpha^*d''\chi = \rho^1\psi = 0$.

D'après l'isomorphisme de Dolbeault, les transformations ρ^0 et ρ^1 définissent des applications sur les groupes de d'' -cohomologie (respectivement $H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1})$ et $H^{n-1}(Y, \Omega^n)$) notées encore ρ^0 et ρ^1 :

$$\rho^0 : H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \rightarrow H^0(W, \mathcal{O}_W)$$

$$\rho^1 : H^{n-1}(Y, \Omega^n) \rightarrow H^0(W, \Omega_W^1)$$

où:

$$\rho^0\dot{\varphi}(c) = \rho^0\varphi(c), \quad \dot{\varphi} \in \varphi \in H^{n-1}(Y, \Omega_Y^{n-1})$$

et

$$\rho^1\dot{\psi}(c) = \rho^1\psi(c), \quad \dot{\psi} \in \psi \in H^{n-1}(Y, \Omega_Y^n)$$

pour tout $c \in W$.

Il existe une relation très simple entre les deux transformations:

LEMME 2.2. $d\rho^0\varphi = \rho^1d\varphi$.

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de la commutativité de la différentielle d avec les images directe et inverse d'applications analytiques.

3. - Famille analytique de diviseurs

1) *Définitions.*

A toute fonction f de M (respectivement de \check{M}) et à tout sous-ensemble $D \subset \mathbb{C}$, on associe les familles suivantes de fonctions et de cycles:

$$\mathcal{M}_f(D) = \left\{ f_t; \frac{1}{f_t} = \frac{1}{f} - t, t \in D \right\} \text{ et } \mathcal{C}_f(D) = \{c'_t = (f_t)^-; f_t \in \mathcal{M}(D)\}$$

(respectivement

$$\check{M}_f(D) = \left\{ \check{f}_t; \check{f}_t = f - t, t \in D \right\} \quad \text{et} \quad \check{C}_f(D) = \{ \check{c}_t = (\check{f}_t)^+; \check{f}_t \in \check{M}(D) \}.$$

Par construction, on doit choisir $D \subset \mathbb{C}$ assez petit pour que f_t appartienne à $M_f(D)$ (respectivement \check{f}_t appartienne à $\check{M}_f(D)$) pour tout $t \in D$, c'est-à-dire afin que les cycles c'_t (respectivement \check{c}_t) appartiennent à W pour tout $t \in D$.

Soit $D(x, r)$ (respectivement D_r) le disque de centre x (respectivement 0) et de rayon r . On note:

$$R_f = \sup\{r; \text{ pour tout } t \in D_r, f_t \in M\}, \quad V_f(r) = \{z \in |c'_t|; c'_t \in C_f(D_r)\}$$

$$\check{R}_f = \sup\{r; \text{ pour tout } t \in D_r, \check{f}_t \in \check{M}\}, \quad \check{V}_f(r) = \{z \in |\check{c}_t|; \check{c}_t \in \check{C}_f(D_r)\}$$

et on écrira encore $M_f(r)$ pour $M_f(D_r)$ (respectivement $\check{M}_f(r)$ pour $\check{M}_f(D_r)$).

2) *Rappels sur la structure analytique de $C_{n-1}(Y)$.*

La construction classique de l'espace de Chow a été généralisée au cas analytique complexe par D. Barlet; on en donne ci-dessous un rapide résumé en ce qui concerne les diviseurs.

i) Soit c appartenant à $C_{n-1}(Y)$, on note $c = \sum_{i=1}^p n_i \cdot c_i$ sa décomposition en hypersurfaces irréductibles. Soit $V = U \times B$ un polydisque (relativement compact) de \mathbb{C}^n , où U et B sont respectivement des polydisques de \mathbb{C}^{n-1} et \mathbb{C} ; si π est la projection de V sur U , on dit que V est adapté (relativement à π) lorsque l'intersection $|c| \cap (U \times \partial B)$ est vide.

Soit c_i une hypersurface de Y et $V = U \times B$ un ouvert adapté à c_i ; le théorème de préparation de Weierstrass permet d'associer à c_i un revêtement ramifié au-dessus de U . On appelle degré de c_i dans V , pour la projection π , noté $\text{deg}_\pi(c_i)$, le degré de ce revêtement; si $B \times U$ est adapté à $c = \sum_{i=1}^p n_i \cdot c_i$, le degré d de c dans V pour la projection π est donné par:

$$d = \text{deg}_\pi c = \sum_{i=1}^p n_i \cdot \text{deg}_\pi c_i.$$

ii) Soit \mathcal{G}_h le groupe des permutations de $\{1, \dots, h\}$, $B^h = B \times \dots \times B$ (h fois), $\text{Sym}^h(B) = B^h / \mathcal{G}_h$; on note $[Z] = [z_1, \dots, z_h]$ la classe de $Z = (z_1, \dots, z_h) \in B^h$ dans $\text{Sym}^h(B)$. Pour tout polydisque $B' \subset \mathbb{C}^p$, l'ensemble $\text{Sym}^h(B')$ admet en général une structure naturelle d'espace analytique; plus précisément, pour $B \subset \mathbb{C}$, elle est donnée par le plongement $j : \text{Sym}^h(B) \rightarrow \mathbb{C}^h$ défini par:

$$j([z_1, \dots, z_h]) = (s_1(z_1, \dots, z_h), \dots, s_h(z_1, \dots, z_h))$$

où les s_i décrivent les fonctions symétriques élémentaires d'ordre h (i.e. $s_i(z_1, \dots, z_h) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq h} z_{j_1} \cdot \dots \cdot z_{j_i}$).

iii)

DÉFINITION. Soit S un espace analytique et $(c_s)_{s \in S}$ une famille de cycles compacts de $C_{n-1}(Y)$; on dit que cette famille est analytique si pour tout $s_0 \in S$ et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)$ de c_{s_0} par des polydisques $V_i = U_i \times B_i$ adaptés à c_{s_0} (U_i et B_i polydisques respectivement de \mathbb{C}^{n-1} et \mathbb{C}) il existe un voisinage $S_1 \subset S$ de s_0 vérifiant:

α) $|c_s| \subset \cup V_i$ pour tout $s \in S_1$ (auquel cas, on peut choisir S_1 assez petit afin que les V_i soient adaptés à c_s pour tout $s \in S_1$).

β) $\deg_{\pi_i} c_s = \deg_{\pi_i} c_{s_0}$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et tout $s \in S_1$ (π_i étant la projection de V_i sur U_i).

γ) On note f_i l'application: $S_1 \times U \rightarrow \text{Sym}^{k_i}(B)$ définie par passage au quotient de l'application $g_i : S_1 \times U \rightarrow B^{k_i}$ qui à $(s, u) =$ associe le k_i -uplet (ordonné arbitrairement) $\pi_i^{-1}(u) \cap |c_s| \in B^{k_i}$ (les points étant comptés avec leurs multiplicités); on demande alors que les f_i soient analytiques pour tout i .

D'après la structure de $C_{n-1}(Y)$, l'analyticité d'une famille de cycles $C = \{c_s; s \in S\}$ contenue dans $C_{n-1}(Y)$ signifie encore que l'application de S dans $C_{n-1}(Y)$ qui à s associe le cycle c_s est analytique.

REMARQUE 2. Tout diviseur de Y définit un élément de $\mathcal{K}^{1,1}(Y)$ (espace des courants de degré (1,1)) qui est le courant d'intégration de ce diviseur. L'espace $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ est inclus dans $\mathcal{K}^{1,1}(Y)$ et on le munit d'une structure topologique induite par la topologie faible de $\mathcal{K}^{1,1}(Y)$; cette topologie sera appelée la topologie naturelle de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$. Dans la suite, on supposera que les composantes connexes de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ (ou plus précisément celles rencontrant W) sont compactes (cf. Remarque 2 du Chapitre III). Cette hypothèse sert essentiellement à simplifier les démonstrations. Il faudrait, dans le cas contraire, substituer aux \check{c}_t de $\check{C}_f(D)$ les cycles \check{k}_t définis de la façon suivante: pour tout $t \in D$, on remplace $\check{c}_t = \sum_{i=1}^p n_i(t) \check{c}_i(t) \in \check{C}_f(D)$ par $\check{k}_t = \sum_{j=1}^q n_{i_j}(t) \check{c}_{i_j}(t)$, la sommation étant étendue sur tous les $\check{c}_i(t)$ vérifiant: la famille $(\check{c}_i(t))_{t \in D}$ est relativement compacte dans $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ (avec une construction analogue pour $\mathcal{C}_f(D)$).

3) Topologie de la famille \mathcal{C}_f et \check{C}_f .

LEMME 3.1. Soient $f \in \check{M}$ (respectivement $f \in \mathcal{M}$), $c = (f)^+$, $c' = (f)^-$, $\check{c}_t = (\check{f}_t)^+$ et $c'_t = (f_t)^-$.

i) Soit U un voisinage quelconque de $|c|$ (respectivement de $|c'|$); il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ tel que pour tout $t \in D(\varepsilon)$, on ait $|\check{c}_t| \subset U$ (respectivement $|c'_t| \subset U$).

ii) Les réels R_f et \check{R}_f sont strictement positifs et pour tout $r < \check{R}_f$ (respectivement $r < R_f$), $\check{V}_f(r)$ (respectivement $V_f(r)$) est contenu dans un ouvert relativement compact de Y .

iii) La famille $(\check{c}_t)_{t \in D_{\check{R}_f}}$ (respectivement $(c'_t)_{t \in D_{R_f}}$) est contenue dans une même composante connexe de W .

DÉMONSTRATION. Pour tout $t \in D_r$, on note $|\check{c}_t| = |(f_t)^+|$, $|\check{c}| = |\check{c}_t \cap c'| = |c \cap c'|$; soit $\check{c}_t = \sum_{i=1}^p n_i(t) \check{c}_i(t)$ la décomposition en hypersurfaces irréductibles de \check{c}_t .

a) On va montrer tout d'abord que pour tout \check{c}_S ($S \in D_{\check{R}_f}$), on peut choisir des voisinages relativement compacts $U_S \subset\subset U'_S$ de $|\check{c}_S|$ et un réel $\eta > 0$ en sorte que pour tout $s \in D(S, \eta)$ on ait $|\check{c}_s| \cap (U_S - U'_S) = \emptyset$.

En posant $g = f - S$, on se ramène au cas $S = 0$ (i.e $\check{c}_S = c$). Soit $(V_i)_{i \in \{1, \dots, q\}}$ un recouvrement fini de $|c|$ par des ouverts de cartes relativement compacts et $V = \bigcup_{i=1}^q V_i$; on peut écrire dans chaque V_i , $f = \alpha^i / \beta^i$ ($\alpha^i, \beta^i \in \mathcal{O}(\overline{V}^i)$) et choisir ε_i en sorte que $V'_i = \{z \in V_i; |\alpha^i(z)| < \varepsilon_i\}$ soit relativement compact dans V_i . Les V'_i forment un recouvrement ouvert de $|c|$ et $V' = \bigcup_i V'_i$ est un voisinage

relativement compact de $|c|$; en outre, les fonctions β_i étant continues dans \overline{V}_i compact, $\text{Sup}\{|\beta_i(z)|; z \in V - \overline{V}^i, i \in \{1, \dots, q\}\} = M$ est borné.

Soit $\varepsilon = (1/(2M)) \cdot \text{Min}_i \{\varepsilon_i\}$; si z appartient à $|\check{c}_t| \cap (V - \overline{V}')$, on a alors $f(z) = t = (\alpha^i(z)/\beta^i(z))$ d'où $|t| > \varepsilon$; $|\check{c}_s|$ et $(V - \overline{V}')$ sont donc disjoints pour tout $s \in D_\varepsilon$.

b) Tout diviseur compact c induit un courant d'intégration $\{c\} \in \mathcal{K}_k^{1,1}(Y)$; d'après la Proposition 2.3 de [FU], la topologie induite sur $C_{n-1}(Y)$ par $\mathcal{K}_k^{1,1}(Y)$ muni de la topologie faible est identique à la topologie naturelle sous-jacente à celle d'espace analytique. Dans la suite de la démonstration, $\mathcal{K}^{1,1}(Y)$ et $\mathcal{K}_k^{1,1}(Y)$ seront munies de leur topologie faible.

On pose $Y' = Y - |c|$, $\check{f}'_t = \check{f}'_{t|_{Y'}}$, $f' = f|_{Y'}$, $\check{k}'_t = (\check{f}'_t)^+$, $\check{k}' = (f')^+$; d'après le Corollaire 2 de [A-N1], on a dans $\mathcal{K}^{1,1}(Y) : \lim_{t \rightarrow S} \{\check{k}'_t\} = \{\check{k}'_S\}$, autrement dit pour toute forme différentielle $\varphi' \in \mathcal{A}_k^{n-1, n-1}(Y')$ et tout $t, S \in D_r$, on obtient:

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow S} \int_{\check{c}_t} \varphi' = \int_{\check{c}_S} \varphi'.$$

En particulier sur tout compact K de Y , en décomposant \check{c}_t en $\check{c}_t = \sum_{h=1}^q n_{i_h}(t) \check{c}_{i_h}(t) + \sum_{j=1}^r n_{j_u}(t) \check{c}_{j_u}(t)$ où $|\check{c}_{i_h}| \cap K \neq \emptyset$ (respectivement $|\check{c}_{j_u}| \cap K = \emptyset$),

les entiers $N(t) = \sum_{h=1}^q n_{i_h}(t)$ sont uniformément majorés par un nombre N_K .

c) Soit alors φ une forme différentielle C^∞ dans Y de support K compact, $M = \sup_Y |\varphi|$, $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages compacts de $|\tilde{c}|$ et $(\rho_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^∞ à support compact dans Y' identiquement égales à 1 sur $(K - K_m)$; on va montrer que l'on a une majoration

$$(2) \quad \left| \int_{\check{c}_t} (\rho_m \cdot \varphi) - \varphi \right| \leq M \cdot A_m$$

où M est une constante indépendante de t et $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = 0$ uniformément en t . C'est un raffinement de la majoration des $N(t)$ obtenue en b).

Tous les K_m étant contenus dans un même compact (soit K_1), il suffit évidemment de le montrer dans un polydisque V de Y voisinage relativement compact d'un point $z_0 \in |\tilde{c}|$. En prenant V assez petit, on peut choisir des coordonnées $(z^1, \dots, z^n) = (z', z^n)$ en sorte que $V = U \times B$ (U et B respectivement polydisque de \mathbb{C}^{n-1} et \mathbb{C}), $z_0 = (0, \dots, 0)$ et \check{c}_t soit représenté comme un revêtement ramifié à $p(t)$ feuillets au-dessus de U . On considère U , B et \check{c}_t orientés canoniquement; on note π la projection de V sur U , $\omega = (i/2)^{n-1} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge dz^{n-1} \wedge d\bar{z}^{n-1}$ la forme volume sur U et A_m l'aire de $\pi(K_m)$. D'après (1), on a dans $(K_2 - K_3) \subset\subset (K_2 - K_4)$

la majoration $M'' > \left| \int_{\check{c}_t \cap (K_2 - K_3)} \pi^* \omega \right| = N(t) \cdot p(t) \cdot A$ avec $A = A_2 - A_3$

et M'' indépendant de t ; $p(t)$ est donc uniformément borné dans K_2 par

$M' = N \cdot M''/A$, d'où $\left| \int_{\check{c}_t \cap K_m} \omega \right| < M \cdot A_m$. D'après le théorème d'image

directe, $\pi(|\tilde{c}|)$ est un sous-ensemble analytique strict de U et donc est de mesure nulle dans U ; en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{aire}(\pi(K_m)) = \text{aire}(|\tilde{c}|) = 0$ car $|\tilde{c}| = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$, ce qui établit la formule (2).

L'inégalité $\left| \int_{\check{c}_t} \varphi - \int_{\check{c}_s} \varphi \right| \leq \left| \int_{\check{c}_t} \rho_m \varphi - \int_{\check{c}_s} \rho_m \varphi \right| + \left| \left(\int_{\check{c}_t} (1 - \rho_m) \varphi \right) + \int_{\check{c}_s} (1 - \rho_m) \varphi \right|$ et les formules (1) et (2) donnent alors

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow S} \int_{\check{c}_t} \varphi = \int_{\check{c}_S} \varphi$$

d) On va montrer que pour tout voisinage U de $|c|$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ en

sorte que pour $t \in D_r$, toute composante irréductible de \check{c}_t soit contenue dans U . Supposons donc le contraire.

D'après le a), il existe U, U' ($U \subset \bar{U} \subset U'$) voisinages ouverts relativement compacts de $|c|$ et $\varepsilon > 0$ en sorte que pour tout $t \in D_\varepsilon$, on ait $|\check{c}_t| \cap (U' - \bar{U}) = \emptyset$;

on peut alors décomposer $\check{c}_t = \sum_{i=1}^p n_{i_i}(t)\check{c}_{i_i}(t)$ en deux cycles $C_t = \sum_{i=1}^q n_{i_j}(t)\check{c}_{i_j}(t)$

et $D_t = \sum_{h=q+1}^r n_{i_h}(t)\check{c}_{i_h}(t)$, les \check{c}_{i_j} (respectivement \check{c}_{i_h}) désignant les hypersurfaces

$\check{c}_j(t)$ (respectivement $\check{c}_h(t)$) incluse dans U (respectivement disjointes de \bar{U}). On note $D_\varepsilon^* = D_\varepsilon - \{0\}$.

α) Soit φ une forme différentielle \mathcal{C}^∞ dans U ; en appliquant cette fois à U le corollaire 2 de [A-N1], on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{C_t} \varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{C_t} \varphi|_{\bar{U}'} = \int_c \varphi|_{\bar{U}'} = \int_c \varphi,$$

autrement dit, lorsque t tend vers 0, la famille $(\{C_t\})_{t \in D_\varepsilon}$ converge vers $\{c\}$ donc $(C_t)_{t \in D_\varepsilon}$ converge vers c dans $C_{n-1}(Y)$.

Le même raisonnement appliqué à D_S ($S \in D_\varepsilon^*$) donne la convergence de la famille $(D_t)_{t \in D(S, \eta(S))}$ ($\eta(S)$ assez petit) lorsque t tend vers S . L'addition des cycles (qui correspond à celle des courants dans $\mathcal{K}_k^{1,1}(Y)$) étant continue, en prenant $\eta(S) < \varepsilon$ on obtient pour tout $S \in D_\varepsilon^*$, la convergence dans $C_{n-1}(Y)$ de la famille $(\check{c}_t = C_t + D_t)_{t \in D(S, \eta(S))}$; en réduisant au besoin $\eta(S)$, elle sera donc contenue dans une même composante connexe de $C_{n-1}(Y)$ donc de W . Soit D' l'ensemble

$$D' = \{t \in D_\varepsilon^*, \check{c}_{\varepsilon/2} \text{ et } \check{c}_t \text{ appartiennent à une même composante connexe de } W\};$$

d'après ce qui précède, D' est à la fois ouvert et fermé dans D_ε^* connexe d'où $D' = D_\varepsilon^*$. D'après l'hypothèse faite sur W (cf. remarque 2), pour tout $t \in D_\varepsilon$, les \check{c}_t sont contenus dans un même compact K de $C_{n-1}(Y)$.

β) De la famille $(\check{c}_t)_{t \in D_\varepsilon^*}$ on peut donc extraire une sous-suite convergente dans $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ et en particulier, on obtient une suite de cycles $D_n, |D_n| \subset Y - \bar{U}$ qui converge vers $D \in \mathfrak{C}_{n-1}(Y)$.

LEMME. Soit $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de cycles de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ convergente vers D dans $E_{n-1}(Y)$; pour tout voisinage V de $|D|$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|D_m| \cap V \neq \emptyset$ pour tout $m > p$.

DÉMONSTRATION. Dans le cas contraire, on obtient une sous-suite soit $(D_q)_{q \in \mathbb{N}}$ vérifiant $|D_q| \cap V \neq \emptyset$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Soit φ une forme différentielle de type $(n-1, n-1)$ à support compact dans V et strictement positive sur $|D|$ (par exemple $\rho \cdot \omega^{\wedge(n-2)}$ où ω est la forme différentielle d'une métrique hermitienne dans Y et ρ une fonction à support compact dans V égale à 1 sur

$|D|$); on a alors pour n assez grand $\int_D \varphi > 0$ et $\int_{D_q} \varphi = 0$; la suite $(\{D_q\})_{q \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas vers $\{D\}$ dans $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ (la topologie étant celle induite par la topologie faible de $\mathcal{K}^{1,1}(Y)$) contrairement à notre hypothèse.

γ) D'après le lemme ci-dessus, on peut choisir $z_q \in |D_q| \subset Y - \bar{U}$ (donc $z_q \notin |\check{c}|$) en sorte que la suite (z_q) converge vers $z \in |D|$; par continuité de f sur $Y - \bar{U}$, on a $|f(z)| = \lim_{q \rightarrow \infty} |f(z_q)| = 0$, d'où $z \in |c|$ et D (donc D_q pour q assez grand) coupe U contrairement à la définition des D_q .

Pour tout $t \in D_\varepsilon$, on a donc nécessairement $|\check{c}_t|$ contenu dans $U \subset \bar{U} \subset U'$, ce qui prouve la première partie du lemme 3.1. En outre, soit $\varphi \in \mathcal{A}^{n-1, n-1}(Y) \subset \mathcal{A}^{n-1, n-1}(U')$; en appliquant le résultat cité de [A-N1] à U' , on obtient:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\check{c}_t} \varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\check{c}_t} \varphi|_{\bar{U}} = \int_c \varphi|_{\bar{U}} = \int_c \varphi,$$

autrement dit la suite \check{c}_t converge vers c dans W et puisque la famille $(\check{c}_t)_{t \in D_\varepsilon}$ est contenue dans une même composante connexe de W , il en est de même de $(\check{c}_t)_{t \in D_\varepsilon}$; en procédant alors comme au α), on en déduit que cela reste vrai pour la famille $(\check{c}_t)_{t \in D_{R_f}}$, ce qui démontre le iii).

e) Il reste à prouver la seconde partie du Lemme 3.1. D'après le résultat précédent appliqué cette fois-ci à f_S (S décrivant $D_{r'}$ avec $R_f > r' > r$), si U_S est un voisinage ouvert de $|\check{c}_S|$ il existe $\eta(S) > 0$ tel que pour tout $t \in D(S, \eta(S))$, on ait $|\check{c}_t| \subset U_S$; les $D(S, \eta(S))$ donnent un recouvrement ouvert de \bar{D}_r compact d'où l'on peut extraire un recouvrement fini $D(S_1, \eta(S_1)), \dots, D(S_q, \eta(S_q))$. En prenant $\varepsilon = \text{Min}_i \{\eta(S_i)\}$, on obtient $R_f > \varepsilon > 0$; en outre la réunion des U_{S_i} ($i = 1, \dots, q$), est relativement compact dans Y et contient $|c|$, ce qui termine la démonstration du lemme 3.1 pour $f \in \check{M}_f$. Le cas $g \in \mathcal{M}$ se ramène au cas précédent en posant $f = (1/g) \in \check{M}$.

3) Analyticité des familles de diviseurs.

PROPOSITION 3.2. Soient c et c' les parties positive et négative du diviseur (f) , D un polydisque assez petit pour que $M_f(D)$ (respectivement $\check{M}_f(D)$) soit contenu dans \mathcal{M} (respectivement dans $\check{\mathcal{M}}$). La famille $\mathcal{C}_f(D)$ (respectivement $\check{\mathcal{C}}_f(D)$) est alors analytique.

DÉMONSTRATION.

a) La condition α) découle immédiatement de la première partie du Lemme 3.1 en faisant $f = \check{f}_t$.

b) La fonction deg_{π_i} est localement constante sur $C_{n-1}(Y)$; d'après le iii) du Lemme 3.1, deg_{π_i, c_t} est donc constant lorsque t décrit S_1 .

c) Soit $V = U \times B$ un ouvert adapté à c ; alors, il existe un voisinage

$D_1 \subset D$ de $0 \in \mathbb{C}$ tel que V soit encore adapté aux cycles c_t pour tout $t \in D_1$; d'après le théorème de préparation de Weierstrass, on peut choisir des coordonnées (z^1, \dots, z^n) sur V telles que c et c' soient donnés respectivement par les équations:

$$(z^n)^k + \sum_{i=1}^{k-1} P_i(z) \cdot (z^n)^i = 0 \text{ et } (z^n)^h + \sum_{j=0}^{h-1} Q_j(z) \cdot (z^n)^j = 0 \quad (P_i, Q_j \in \mathcal{O}(U)).$$

Le cycle c_t est alors défini dans V par l'équation:

$$(1) \quad (z^n)^k + \sum_{i=1}^{k-1} P_i(z) \cdot (z^n)^i - v \cdot \left((z^n)^h \cdot t + \sum_{j=0}^{h-1} Q_j(z) \cdot (z^n)^j \cdot t \right) = 0$$

où v est une fonction inversible dans V .

Par définition de la structure analytique de $\text{Sym}^h(B)$, il faut alors montrer que les fonctions symétriques élémentaires en les racines des polynômes de la formule (1) dépendent analytiquement de $s \in D_1$ et $z' \in U$.

Les coefficients de l'équation (1) dépendent de manière affine de t et holomorphiquement de $z' = (z^1, \dots, z^{n-1})$; les fonctions symétriques élémentaires en les racines sont donc analytiques en (t, z') . Il en est alors de même de l'application $g : D_1 \times U \rightarrow \text{Sym}^h(B)$ associée aux revêtements définis par les \check{c}_t au-dessus de U ; ce qui démontre l'analyticité de la famille $\check{C}_f(D)$. Le cas $C_f(D)$ en résulte comme dans le Lemme 3.1.

4. - Quelques généralités sur les fonctions méromorphes

Soit U une variété analytique (connexe, paracompacte) de dimension n . On note $\mathcal{O}^*(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques ne s'annulant pas dans U . Dans cette section, c sera un cycle analytique de U non nécessairement compact.

Pour $\alpha \in \mathcal{O}(U)$, $\text{Sing}(\alpha)$ désigne l'ensemble des points singuliers de α (i.e. des points où $d\alpha$ s'annule); si c est un cycle de U d'équation $\alpha = 0$, on note $\text{Sing}(c) = \text{Sing}(\alpha) \cap |c|$; autrement dit, si $c = \sum_{i=1}^p n_i k_i$ est une décomposition de c en hypersurfaces irréductibles, on a:

$$\text{Sing}(c) = \text{Sing}(|c|) \cup \{z \in k_i; n_i > 1\}.$$

Dans la suite, on appellera point singulier de c un point $z \in |c|$ appartenant à $\text{Sing}(c)$. On dira que le cycle c est sans multiplicités si $n_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, c'est-à-dire si c est une hypersurface de Y .

DÉFINITION. Soient $c = \sum_{i=1}^p n_i k_i$ et $c' = \sum_{j=1}^{p'} m_j k'_j$ des cycles analytiques de U ; l'intersection de c et de c' notée $c \cap c'$ est définie par $c \cap c' = \sum_{i,j} (n_i + m_j)(k_i \cap k'_j)$.

REMARQUE 3. L'intersection $c \cap c'$ n'est pas nécessairement un cycle analytique, les sous-ensembles analytiques $k_i \cap k'_j$ n'étant pas toujours de même dimension. Dans la suite, on sera cependant toujours dans le cas où $\text{codim}_Y k_i \cap k'_j = \text{codim}_Y k_i + \text{codim}_Y k'_j$ et en particulier, $c \cap c'$ sera un cycle analytique. Toutefois, même dans ce cas, l'écriture de $c \cap c'$ n'est pas en général une décomposition irréductible, car on peut avoir: $k_{i_1} \cap k_{j_1} = k_{i_2} \cap k_{j_2}$ pour $i_1 \neq i_2$ ou $j_1 \neq j_2$.

Soit $c \in C_q(U)$, on note $\text{codim}_U(c) = n - q$ la codimension de c dans U .

DÉFINITION. Soient c et c' deux cycles analytiques de U ; c et c' se coupent simplement si $\text{codim}_U(c \cap c') = \text{codim}_U(c) + \text{codim}_U(c')$.

DÉFINITION. Soit $c \in C_q(U)$ et $\tilde{c} \in C_p(U)$. On dira que \tilde{c} est contenu dans c (ce que l'on note $\tilde{c} \subset c$) si

- i) $|\tilde{c}| \subset |c|$ (d'où $p \leq q$) et
- ii) pour $p = q$, on a les décompositions en hypersurfaces irréductibles suivantes:

$$\tilde{c} = \sum_{j=1}^p m_j c_j \text{ betc} = \sum_{j=1}^p m_j c_j + \sum_{j=p+1}^q n_j c'_j \text{ (i.e. } c = \tilde{c} + c').$$

REMARQUE 4.

- a) Si le cycle \tilde{c} est irréductible, la condition ii) est une conséquence triviale de la condition i).
- b) Soient $c \in C_q(U)$, $c' \in C_p(U)$, on a évidemment les inclusions: $c \cap c' \subset c$ et $c \cap c' \subset c'$.
- c) Si $p < q$, $\tilde{c} \subset c$ équivaut encore à $\tilde{c} \subset C_p(|c|)$.

Soit $c \in C_q(U)$ et z un point de c . On note \mathcal{O}_z la fibre du faisceau \mathcal{O} au point z , $\mathcal{I}_{c,z}$ l'idéal de définition de c en z , \mathcal{I}_c le faisceau d'idéaux associé et $\mathcal{O}_c = \mathcal{O}/\mathcal{I}_c$ le faisceau structural de c .

REMARQUE 5. En général, la donnée d'un cycle $c \in C_q(U)$ ne détermine pas celle du faisceau d'idéaux \mathcal{I}_c (c'est-à-dire de la structure d'espace analytique (avec éventuellement des nilpotents) de c) sauf dans le cas $q = n - 1$; par exemple dans \mathbb{P}_2 muni de coordonnées homogènes (z_0, z_1, z_2) , soient $c_i = \{z_i = 0\}$ ($i = 0, 1, 2$), $\tilde{c} = c_1 \cap c_2$, $\tilde{c}_1 = 2c_1 \cap c_2$, $\tilde{c}_2 = c_1 \cap 2c_2$; il est clair que l'on a $\mathcal{I}_{\tilde{c}_1} \neq \mathcal{I}_{\tilde{c}_2}$ bien que $\tilde{c}_1 = 2\tilde{c} = \tilde{c}_2$.

Cependant, si l'on ne considère que les cycles \tilde{c} de la forme suivante: \tilde{c} est intersection de $p - 1$ diviseurs effectifs fixés c_1, \dots, c_{p-1} et d'un diviseur effectif variable c , on peut associer de façon naturelle à \tilde{c} un unique faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\tilde{c}}$ engendré par les idéaux $\mathcal{I}_{c_1}, \dots, \mathcal{I}_{c_{p-1}}, \mathcal{I}_c$. En particulier, si \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 sont deux tels cycles, on a $\tilde{c}_1 \subset \tilde{c}_2$ si et seulement si $\mathcal{I}_{\tilde{c}_1} \supset \mathcal{I}_{\tilde{c}_2}$, l'inclusion étant prise au sens de la définition ci-dessus.

DÉFINITION. Soit f une fonction méromorphe sur Y , $(f) = c - c'$ son diviseur, \tilde{c} l'intersection $c \cap c'$. On appelle drapeau positif (respectivement négatif) de f , le couple (c, \tilde{c}) (respectivement (c', \tilde{c})),

LEMME 4.1. Soient f et g deux fonctions méromorphes dans U , si f et g définissent le même diviseurs (i.e. s'annulent et sont infinies sur les mêmes ensembles et au même ordre), il existe $\lambda \in \mathcal{O}^*(U)$ telle que $g = \lambda f$. En particulier, si U est pseudoconcave, $g = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

DÉMONSTRATION. On peut évidemment supposer f et g non identiquement nulles; soit $\lambda = f/g$, d'après les hypothèses du lemme, λ est holomorphe et puisqu'il en est de même de $1/\lambda = g/f$, elles ne s'annulent pas dans U . Si U est pseudoconcave, la propriété (*) est vérifiée et λ est constante (non nulle).

On note $\mathcal{E}'_f = \{g = \lambda f + \mu; \lambda \in \mathcal{O}^*(U), \mu \in \mathcal{O}(U)\}$ et p l'application de \mathcal{E}'_f dans $C_{n-1}(U) \times C_{n-2}(U)$ définie par $p(g) = (c_1, \tilde{c}_1)$ où $c_1 = (g)^+$ et $\tilde{c}_1 = (g)^+ \cap (g)^-$ (avec les extensions évidentes si $(f)^+$ ou $(f)^-$ sont vides).

LEMME 4.2. Soient f, g deux fonctions méromorphes dans U ;

- i) si $g \in \mathcal{E}'_f$ alors $p(f) = p(g)$;
- ii) si $p(f) = p(g)$, $g|_{|c|}$ s'étend holomorphiquement sur $|c|$.

DÉMONSTRATION. Soit $c = (f)^+, c' = (f)^-, c_1 = (g)^+$ et $c'_1 = (g)^-$. Si f est holomorphe dans U , $\mathcal{E}'_f = \mathcal{O}(U)$ et il n'y a rien à montrer; on suppose donc $f \notin \mathcal{O}(U)$.

i) a) L'ensemble polaire de g est évidemment contenu dans l'ensemble polaire de f ; soit z un point appartenant à une seule composante irréductible K_i de $|c'|$ de multiplicité l_i , V_z un voisinage de carte de z ; dans V_z , on peut écrire:

$$f|_{V_z} = \frac{s}{s'}, \quad \text{et} \quad g|_{V_z} = \frac{s_1}{s'} = \frac{s + \mu s'}{s'},$$

où s et s' sont des fonctions holomorphes de V_z ; K_i est donc un pôle de g d'ordre $l_i \leq k_i$ et comme inversement, on peut écrire $f = (1/\lambda)g - \mu$, on obtient $l_i = k_i$ d'où $c'_1 = c_1$.

b) Soit $z \in U$ et V_z un voisinage de carte de z dans lequel les cycles c ,

c' et c_1 ont pour équation respective:

$$\begin{aligned} c \cap V_z &= \{z \in V_z; s(z) = 0\}, \\ c' \cap V_z &= \{z \in V_z; s'(z) = 0\}, \\ c_1 \cap V_z &= \{z \in V_z; s_1(z) = 0\}; \end{aligned}$$

soit (t_1, \dots, t_p) l'idéal engendré dans $\mathcal{O}(V_z)$ par les fonctions $t_i \in \mathcal{O}(V_z)$; on a:

$$J_{\tilde{c}, z} = (s, s') \text{ et } J_{\tilde{c}_1, z} = (s_1, s') = (s + \mu s', s') \text{ et } J_{\tilde{c}} = J_{\tilde{c}_1}$$

d'où $\tilde{c} = \tilde{c}_1$.

ii) Soit z un point de c , V_z voisinage de z dans U dans lequel les égalités (1) soient vérifiées. On a alors

$$g|_{V_z \cap |c|} = \left(\frac{\mu s}{s'}\right)|_{V_z \cap |c|} = \mu|_{V_z \cap |c|};$$

μ étant holomorphe dans V_z , g induit bien une fonction holomorphe sur $|c|$.

LEMME 4.3. *Il existe $g \in \mathcal{E}'_f$ tel que $k = (g)^+$ n'ait pas de multiplicités (en fait, l'ensemble des fonctions ayant cette propriété est dense dans \mathcal{E}'_f).*

DÉMONSTRATION. C'est un corollaire facile du lemme de Bertini (cf. [GR-H] par exemple).

5. - Fonctions méromorphes ayant même drapeau (positif ou négatif)

On suppose dorénavant que Y est une variété pseudoconcave (ou plus généralement vérifie la propriété $(*)$) et on fixe la fonction méromorphe f . On note: $c = (f)^+$, $c' = (f)^-$, $\tilde{c} = c \cap c'$, c' étant compact (éventuellement vide).

LEMME 5.1. *Soit g une fonction méromorphe dans Y vérifiant:*

$$(g)^- \subset c' \quad \text{et} \quad c \subset (g)^+;$$

on a alors $g = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION. Si f est holomorphe dans Y (donc constante), il en est de même de g qui s'annule nécessairement lorsque f s'annule ($c \subset (g)^+$) et le lemme est vérifié. Soit $h = g/f$ et supposons $|c'|$ (donc $|c|$ d'après la propriété $(*)$) non vide; c , c' , $(g)^+$, $(g)^-$ sont des diviseurs de Y et d'après la remarque 3, on peut écrire dans tout ouvert de carte U

$$f|_U = s/s', \quad g|_U = t/t' \quad \text{avec} \quad t = su, \quad s' = t'u \quad (u, v \in \mathcal{O}(U));$$

on a donc $h|_U = \frac{su/t'}{s/(t'v)} = uv$ qui est holomorphe dans U donc partout; d'après la propriété (*), h est une fonction constante sur Y .

PROPOSITION 5.2. *Pour tout fonction méromorphe g de Y , les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) $(g)^- = c'$ et $(g)^+ \cap (g)^- = \tilde{c}$
- ii) g appartient à \mathcal{E}'_f .

DÉMONSTRATION. Il n'y a là encore rien à montrer si f est holomorphe dans Y ; on suppose donc $f \notin \mathcal{O}(Y)$.

L'implication ii) \Rightarrow i) est la première partie du Lemme 4.2. Il faut donc montrer la réciproque. D'après le Lemme 4.2, on ne change rien au problème en rajoutant une constante; on peut donc (Lemme 4.3) supposer c sans multiplicités. Soient $(g) = t - t'$, $\tilde{t} = t \cap t'$ avec $t' = c'$, $\tilde{t} = \tilde{c}$ et $g' = g|_c$; d'après la seconde partie du Lemme 4.2, g' est holomorphe sur c compact d'où $g' \equiv \mu \in \mathbb{C}$. Soit $g'' = g - \mu$; g'' vérifie les hypothèses du Lemme 5.1 et il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g'' = g - \mu = \lambda f$. En outre, λ est non nul car, dans le cas contraire, $|\tilde{c}|$ serait vide donc $|(f)^+|$ également, mais alors $1/f$ donc f serait constante dans Y .

REMARQUE 6. La Proposition 5.2 caractérise les fonctions méromorphes ayant même drapeau négatif; le cas des drapeaux positifs, se ramène au précédent en considérant les fonctions inverses.

CHAPITRE II

Dualité, relation entre ρ^0 et ρ^1

1. - Notations

On reprend les notation du Paragraphe I.2. En particulier, ψ est une forme différentielle d'' -fermée dans Y de type $(n, n-1)$, ψ sa classe de cohomologie dans $H^{n-1}(Y, \Omega^n)$. On note $\mathcal{K}^{r,s}$ (respectivement $\mathcal{K}_k^{r,s}$) le faisceau des germes de courants (respectivement à supports compacts) de type (r, s) sur Y . Si X est un sous-ensemble compact de Y , on note bX le bord de X et $\mathcal{D}(Y, X)$ l'ensemble des fonction C^∞ à support compact dans Y et identiquement égales à 1 au voisinage de X . Enfin pour H' dual d'un \mathbb{C} -espace vectoriel H , on note \langle , \rangle la forme bilinéaire de dualité.

a) Soit $f \in \mathcal{M}$; si la partie polaire de f est lisse, on pose

$$I_\psi(f) = \int_{c'} \text{Res}_{c'}(\psi \cdot f)$$

où $c' = (f)^-$ lorsque f n'est pas holomorphe (le résidu étant pris au sens de Leray [L]); si f est holomorphe, $\text{Res}_{c'}(\psi \cdot f) = 0$ pour tout $c' \in C_{n-1}(Y)$ et on pose $I_\psi(f) = 0$.

b) Si c' est une hypersurface quelconque de Y (i.e. c' est un cycle sans multiplicités), on étend la définition de $I_\psi(f)$ en utilisant la théorie des courants-résidus de Coleff-Herrera-Lieberman ou plus simplement, dans le cas qui nous intéresse ici, les valeurs principales sur les espaces analytiques (cf. [D], [H-L]). Si ϑ est une forme différentielle semi-méromorphe de pôle c' , on note $\text{Res}_{c'}\vartheta$ le courant-résidu au sens de Herrera-Lieberman. La forme $(\psi \cdot f)$ est semi-méromorphe dans Y de pole c' et de degré $2n-1$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(Y, c')$, on pose

$$I(\psi, f, \rho) = \frac{1}{2i\pi} \langle \text{Res}_{c'}(\psi \cdot f), \rho \rangle;$$

si ρ' est une autre fonction de $\mathcal{D}(Y, c')$, alors $\rho - \rho'$ étant identiquement nulle dans un voisinage de c' et $\text{Res}_{c'}(\psi \cdot f)$ un courant à support dans c' , on a $\langle \text{Res}_{c'}(\psi \cdot f), \rho - \rho' \rangle = 0$, d'où $I(\psi, f, \rho) = I(\psi, f, \rho')$ et l'on peut donc poser

$$I_\psi(f) = I(\psi, f, \rho).$$

En particulier, lorsque c' est lisse, on a d'après la formule (1) du paragraphe 1.9 de [C-H]

$$\frac{1}{2i\pi} \langle \text{Res}_{c'}(\psi \cdot f), \rho \rangle = \int_{c'} \text{Res}_{c'}(\psi \cdot f)$$

et la notation est compatible avec celle de a).

c) Soit c' un cycle compact quelconque de Y (c'est-à-dire ayant éventuellement des multiplicités), $c' = \sum_{i=1}^l n_i \cdot c'$ sa décomposition en hypersurfaces irréductibles; pour abrégé, on note $\text{Res}_{c'}$ au lieu de $\text{Res}_{|c'|}$.

2. - Dualité

Dans ce paragraphe, la fonction $f \in M$ sera fixée et pour simplifier l'écriture, on notera s' le support de $(f)^-$ (i.e. $s' = |c'|$). On rappelle qu'une hyperforme est une forme différentielle à coefficients hyperfonctions. Si \mathcal{G} est un faisceau sur Y , on note $H_k^*(Y, \mathcal{G})$ les groupes de cohomologie à supports compacts de \mathcal{G} .

A) Soit X un sous-ensemble compact de Y ; on a des suites exactes de cohomologie:

$$(1) \quad H^{n-1}(Y, \Omega^n) \xrightarrow{r} H^{n-1}(Y - X, \Omega^n) \xrightarrow{\partial} H_X^n(Y, \Omega^n) \xrightarrow{p} H^n(Y, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

$$(2) \quad H_k^1(Y, \mathcal{O}) \xleftarrow{p'} H_k^1(Y - X, \mathcal{O}) \xleftarrow{\delta} H^0(X, \mathcal{O}) \xleftarrow{r'} H_k^0(Y, \mathcal{O}) \longleftarrow 0$$

LEMME 2.1. i) Les suites (1) et (2) sont transposées l'une de l'autre.

ii) On peut réaliser δ (respectivement ∂) à partir du d'' des courants (respectivement des hyperformes). Plus précisément δ peut être définie de la manière suivante: soient $g \in H^0(X, \mathcal{O})$ et $\rho \in \mathcal{D}(Y, X)$, $\delta(g)$ est la classe définie par le courant $d''(\rho \cdot g)$ dans $H_k^1(Y - X, \mathcal{O})$.

DÉMONSTRATION. i) Soit U un ouvert de Y ; les suites:

$$(1') \quad \mathcal{A}^{n,n-2}(U) \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{n,n-1}(U) \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{n,n}(U)$$

$$(2') \quad \mathcal{K}_k^{0,2}(U) \xleftarrow{d''} \mathcal{K}_k^{0,1}(U) \xleftarrow{d''} \mathcal{K}_k^{0,0}(U)$$

sont évidemment transposées l'une de l'autre.

Les morphismes d'' de (1') sont fermés car d'identifiant à la différentielle d (les formes différentielles sont en effet saturées en dz); d'après le théorème d'image fermée de Schwartz, les suites (1') et (2') sont en dualité topologique et par passage au quotient, on a: $(H^{n-1}(U, \Omega^n))' \cong H_k^1(U, \mathcal{O})$. En particulier, $H^{n-1}(Y, \Omega^n)$ et $H_k^1(Y, \mathcal{O})$ sont en dualité; il en est évidemment de même de $H^n(Y, \Omega^n)$ et $H_k^0(Y, \mathcal{O})$; Y étant connexe, $H^n(Y, \Omega^n)$ est, ou bien une droite complexe (si Y est compacte), ou bien réduit à $\{0\}$.

Les applications r et p' (respectivement r' et p) respectivement induites par restriction et prolongement des formes différentielles et formes différentielles à support compact (respectivement des hyperfonctions et des fonctions analytiques à support compact) sont transposées l'une de l'autre.

ii) On rappelle que les courants (respectivement les hyperformes) donnent une résolution fine (respectivement flasque) des faisceaux Ω^n et \mathcal{O} .

a) Soit $g \in H^0(X, \mathcal{O})$, $\rho \in \mathcal{D}(Y, X)$; $d''(\rho \cdot g)$ est un courant à support compact dans $Y - X$ et évidemment d'' -fermé. Il est clair que la classe de $d''(\rho \cdot g)$ dans $H_k^1(Y - X, \mathcal{O})$ ne dépend pas du choix de ρ . En outre ($\mathcal{K}^{*,*}, d''$) étant une résolution fine de \mathcal{O} , le morphisme δ est induit par le d'' défini sur les distributions de Y qui sont d'' -fermées au voisinage de X ; la régularité de l'opérateur d'' permet d'identifier cet espace et celui des distributions prolongeant les fonctions analytiques au voisinage de X ; l'image de $H_k^1(Y - X, \mathcal{O})$ ne dépendant pas du choix du prolongement, on peut le prendre égal à $\rho \cdot g$.

b) De manière analogue, on montre que ∂ est définie de la façon suivante: soit u une hyperforme de type $(n, n - 1)$ et d'' -fermée dans $Y - X$; elle se prolonge à Y tout entier (le faisceau des hyperfonctions étant flasque). Soit u un tel prolongement, $d''u$ est une hyperforme d'' -fermée dans Y de type (n, n) à support dans X et la classe de cohomologie définie par $d''u$ dans $H_X^n(Y, \Omega^n)$ ne dépend que de celle de u dans $H^{n-1}(Y - X, \Omega^n)$ (cf. [O2] par exemple pour les détails de la construction).

B) L'hypersurface s' étant compacte, en faisant $X = s'$ dans la suite (1) ci-dessus, on obtient une application ∂ de $H^{n-1}(Y - X, \Omega^n)$ dans $H_s^n(Y, \Omega^n)$. Le courant $\text{Res}_{s'}(\psi \cdot f)$ est à support dans s' , de degré maximal dans Y , il définit donc une classe de d'' -cohomologie dans $H_s^n(Y, \Omega^n)$ que l'on note encore $\text{Res}_{s'}(\psi \cdot f)$.

LEMME 2.2. Soit $\psi \in \dot{\psi} \in H^{n-1}(Y, \Omega^n)$, on a la relation:

$$\partial(\psi \cdot f) = \text{Res}_{s'}(\psi \cdot f).$$

En particulier, pour toute fonction $\rho \in \mathcal{D}(Y, s')$, on obtient:

$$I_\psi(f) = \frac{1}{2i\pi} \langle \partial(\psi \cdot f), \rho \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que $\text{Res}_{s'}(\psi \cdot f)$ ne dépend pas du choix du représentant de $\dot{\psi} \in H^{n-1}(Y, \Omega^n)$. Soit vp l'opérateur valeur principale (cf. [S] par exemple); on a l'égalité (cf. [H-L]):

$$\text{Res}_{s'}(\psi \cdot f) = d(vp(\psi \cdot f)) - vp(d(\psi \cdot f)).$$

La forme ψ étant de type $(n, n - 1)$, on obtient:

$$(1) \quad \text{Res}_{s'}(\psi \cdot f) = d''(\text{vp}(\psi \cdot f))$$

Soit $\vartheta \in \dot{\psi}$ un autre représentant de $\dot{\psi}$; il existe alors $\alpha' \in \mathcal{A}^{n, n-2}(Y)$ vérifiant $\psi - \vartheta = d''\alpha'$; on a

$$(\psi - \vartheta) \cdot f = d''\alpha' \cdot f = d''(\alpha' \cdot f) = d''\alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathcal{A}^{n, n-2}(Y - s').$$

Pour tout $g \in H^0(s', \mathcal{O})$, on peut écrire

$$\langle \text{Res}_{s'}[(\psi - \vartheta) \cdot f], g \rangle = \langle d(\text{vp}(d''\alpha)), g \rangle = -\langle \text{vp}(d''\alpha), d''g \rangle;$$

mais g est holomorphe au voisinage de s' et α est \mathcal{C}^∞ en dehors de s' , on obtient donc: $\langle \text{vp}(d''\alpha), d''g \rangle = 0$.

En appliquant la seconde partie du lemme 2.1, on obtient $d''\text{vp}(\psi \cdot f) \in \partial\dot{\psi}$ et l'égalité (1) permet de conclure.

REMARQUE 1. En particulier, si $f \in \mathcal{O}(Y)$, on a $I_\psi(f) = 0$.

C) Soit (K_n) une exhaustion normale de Y (i.e. les K_n sont compacts, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $\cup K_n = Y$), les K_n étant supposés à bord régulier (par exemple \mathcal{C}^∞). On pose:

$$V_n = Y - K_n \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(\partial Y) = \varinjlim_{V_n} \mathcal{O}(V_n);$$

le bord bK_n de K_n est alors contenu dans V_{n+1} .

A tout élément $\vartheta \in H^{n-1}(Y - s', \Omega^n)$, on associe de façon naturelle une fonctionnelle sur $\mathcal{O}(\partial Y)$ de la manière suivante: soit $\rho \in \mathcal{D}(Y, V_{n+1})$ de support contenu dans V_n , $g \in \mathcal{O}(V_n)$ et ϑ une forme différentielle représentant ϑ . Pour n suffisamment grand, g est holomorphe dans V_n et la fonction $\rho \cdot g$ est \mathcal{C}^∞ dans Y , à support dans V_{n+1} disjoint de s' qui est compact; la forme différentielle $(\vartheta \cdot \rho g)$ se prolonge donc par 0 à Y tout entier.

Soit $F_\vartheta(g) = \int_{K_{n+2}} d''(\vartheta \cdot \rho g)$; par raison de type et en appliquant le théorème de Stokes dans $K_{n+2} \subset Y$, on obtient:

$$F_\vartheta(g) = \int_{K_{n+2}} d''(\vartheta \cdot \rho g) = \int_{K_{n+2}} d(\vartheta \cdot \rho g) = \int_{bK_{n+2}} \vartheta \cdot \rho g.$$

L'inclusion $bK_{n+2} \subset V_{n+1}$ donne alors:

$$(1) \quad F_\vartheta(g) = \int_{bK_{n+2}} \vartheta \cdot g.$$

L'application F_{ϑ} ne dépend donc pas du choix de $\rho \in \mathcal{D}(Y, V_{n+1})$, donc de l'ouvert V_n . Il ne dépend pas non plus du choix du représentant de la classe de cohomologie ϑ ; en effet pour $\vartheta = d'' \alpha$, on a $\vartheta \cdot g = d'' \beta = d \beta$ (β étant de type $(n, n - 2)$) d'où $\int_{bK_{n+2}} \vartheta \cdot g = 0$.

On peut donc poser:

$$F_{\vartheta}(g) = \int_{bK_{n+2}} \vartheta \cdot g, \quad \vartheta \in \vartheta.$$

D) On suppose dans la suite de cette section que Y est un ouvert d'une variété analytique compacte Z de complémentaire $X = Z - Y$ et qu'en outre: $H^{n-1}(Z - s', \Omega^n) = 0$. D'après le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, cette dernière égalité est vérifiée par exemple si s' est un diviseur positif (c'est-à-dire, lorsque sa classe de Chern est positive).

Soit $H(X)$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de X dans Z (i.e. $H(X) = H^0(X, \mathcal{O})$) et f dans $H(X)$; la fonction f est holomorphe dans un voisinage ouvert U de X et $Y - (Y \cap U) = Z - U$ est compact dans Y d'où $f|_{Y \cap U} \in \mathcal{O}(Y \cap U)$. On peut donc considérer $H(X)$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{O}(\partial Y)$ et F induit alors une application \mathcal{F} de $H^{n-1}(Y - s', \Omega^n)$ dans l'espace dual $H(X)'$ de $H(X)$.

Le but de cette section est d'obtenir sous les hypothèses ci-dessus, la

PROPOSITION 2.3. *L'application \mathcal{F} est un isomorphisme de $H^{n-1}(Y - s', \Omega^n)$ sur $H(X)'$ espace des fonctionnelles analytiques de X .*

Nous allons tout d'abord étudier certaines suites de cohomologie.

1) Les suites longues à support respectivement dans s' et X donnent l'exactitude des suites:

$$(1) \quad H_s^{n-1}(Z, \Omega^n) \xrightarrow{\tilde{q}} H^{n-1}(Z, \Omega^n) \longrightarrow H^{n-1}(Z - s', \Omega^n)$$

$$(2) \quad H_s^n(Z, \Omega^n) \xrightarrow{\tilde{q}'} H^n(Z, \Omega^n) \longrightarrow H^n(Z - s', \Omega^n)$$

$$(3) \quad \begin{aligned} H_s^{n-1}(Y, \Omega^n) &\xrightarrow{p} H^{n-1}(Y, \Omega^n) \\ &\xrightarrow{r} H^{n-1}(Y - s', \Omega^n) \xrightarrow{\partial} H_s^n(Y, \Omega^n) \longrightarrow H^n(Y, \Omega^n) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{array}{c} H_X^{n-1}(Z, \Omega^n) \longrightarrow H^{n-1}(Z, \Omega^n) \xrightarrow{r'} H^{n-1}(Y, \Omega^n) \xrightarrow{\partial'} H_X^n(Z, \Omega^n) \\ \xrightarrow{p'} H^n(Z, \Omega^n) \longrightarrow H^n(Y, \Omega^n) \end{array}$$

le dernier terme de chacune de ces suites est nul; en effet, d'après le Lemme 2.1, on a:

$$\begin{aligned} H^n(Y, \Omega^n) &= (H_k^0(Y, \mathcal{O}))' = 0 \\ H^n(Z - s', \Omega^n) &= (H_k^0(Z - s', \mathcal{O}))' = 0 \\ H^{n-1}(Z - s', \Omega^n) &= 0 \quad (\text{par hypothèse}), \end{aligned}$$

en particulier, \tilde{q}' , est un isomorphisme.

En outre, l'identification $H_X^n(Z, \Omega^n) = (H^0(X, \mathcal{O}))' = H(X)'$ permet de définir une application encore notée $\mathcal{F} : H^{n-1}(Y - s', \Omega^n) \rightarrow H_X^n(Z, \Omega^n)$.

2) L'espace $H_s^i(U, \Omega^n)$ est indépendant du choix du voisinage U de s' ; on peut donc identifier les espaces $H_s^{n-1}(Z, \Omega^n)$ et $H_s^{n-1}(Y, \Omega^n)$ (respectivement $H_s^n(Z, \Omega^n)$ et $H_s^n(Y, \Omega^n)$). Les suites (1) et (2) s'écrivent:

$$(1'') \quad H_s^{n-1}(Y, \Omega^n) \xrightarrow{q} H^{n-1}(Z, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

$$(2'') \quad 0 \longrightarrow H_s^n(Y, \Omega^n) \xrightarrow{q'} H^n(Z, \Omega^n) \longrightarrow 0.$$

D'après le Lemme 2.1, les suites:

$$(2') \quad H^0(s', \mathcal{O}) \xleftarrow{R} H^0(Z, \mathcal{O}) \longleftarrow 0$$

$$(3') \quad H^1(s', \mathcal{O}) \longleftarrow H_k^1(Y, \mathcal{O}) \longleftarrow H_k^1(Y - s', \mathcal{O}) \xleftarrow{\delta} H(s') \longleftarrow 0$$

$$(4') \quad H^1(X, \mathcal{O}) \longleftarrow H_k^1(Z, \mathcal{O}) \longleftarrow H_k^1(Y, \mathcal{O}) \xleftarrow{\delta'} H(X) \xleftarrow{R'} H^0(Z, \mathcal{O}) \longleftarrow 0$$

sont transposées respectivement des suites (2), (3) et (4).

Les suites (1''), (2''), (3) et (4) permettent de construire le diagramme (A)

suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^{n-1}(Z, \Omega^n) & & & & \\
 & q \nearrow & \downarrow r' & & & & \\
 H_s^{n-1}(Y, \Omega^n) & \xrightarrow{p} & H^{n-1}(Y, \Omega^n) & \xrightarrow{r} & H^{n-1}(Y - s', \Omega^n) & \xrightarrow{\partial} & H_s^n(Y, \Omega^n) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial' & \swarrow \mathcal{F} & & & \\
 (A) & & H_X^n(Z, \Omega^n) & & & \nearrow q' & \\
 & & \downarrow p' & & & & \\
 & & H^n(Z, \Omega^n) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

où la ligne et la colonne sont exactes.

3) On va montrer le

LEMME 2.4. *Le diagramme (A) est commutatif.*

DÉMONSTRATION. α) Les morphismes de cohomologie étant compatibles avec les applications de restriction, le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 H_s^{n-1}(Z, \Omega^n) & \xrightarrow{\tilde{q}} & H^{n-1}(Z, \Omega^n) \\
 \parallel & q \nearrow & \downarrow r' \\
 H_s^{n-1}(Y, \Omega^n) & \xrightarrow{p} & H^{n-1}(Y, \Omega^n)
 \end{array}$$

est commutatif.

D'autre part, les égalités $p' \circ \partial' = \partial \circ r = 0$ donnent trivialement la commutativité de q' avec les flèches verticale et horizontale.

β) Il reste à montrer que \mathcal{F} commute avec les morphismes du diagramme (A).

i) Soient $\psi \in H^n(Y - s', \Omega^{n-1})$, $g \in H(X)$, U un voisinage relativement compact de X dans $Y - s'$, tel que $g|_U$ soit holomorphe et V un voisinage de s' dans $Z - U$; on choisit en outre U et V à bord régulier dans Z . On pose

$$K = Z - U, \quad J = Z - V \quad \text{et} \quad K' = K \cap J$$

leurs bords étant orientés de manière convenable.

Par construction, on a:

$$\langle \mathcal{F}(\dot{\psi}), g \rangle = \int_{\mathfrak{b}K} \psi \cdot g.$$

La forme $\psi \cdot g$ étant C^∞ dans K' et $\mathfrak{b}K'$ vérifiant $\mathfrak{b}K' = \mathfrak{b}K - \mathfrak{b}J$, le théorème de Stokes donne:

$$\int_{\mathfrak{b}K'} \psi \cdot g = \int_{K'} d(\psi \cdot g) = \int_{\mathfrak{b}K} (\psi \cdot g) - \int_{\mathfrak{b}J} (\psi \cdot g) = 0$$

d'où:

$$(5) \quad \langle \mathcal{F}(\dot{\psi}), g \rangle = \int_{\mathfrak{b}K} \psi \cdot g = \int_{\mathfrak{b}J} \psi \cdot g$$

ii) Soit $\Psi \in H^{n-1}(Y, \Omega^n)$; d'après le Lemme 2.1, on a pour tout $g \in H(X)$ et $\rho \in \mathcal{D}(Y, X)$:

$$\langle \partial' \Psi, g \rangle = \langle \Psi, \delta' g \rangle = \int_Y \Psi \wedge d''(\rho g) = \int_Y d(\Psi \cdot \rho g).$$

En choisissant ρ à support dans U et en notant \bar{U} l'adhérence de U dans Y , on tire:

$$\langle \partial' \Psi, g \rangle = \int_{\bar{U}} d(\psi \cdot \rho g) = \int_J d(\psi \cdot \rho g) = \int_{\mathfrak{b}J} \psi \cdot \rho g = \int_{\mathfrak{b}J} \psi \cdot g$$

ρ étant identiquement égal à 1 sur le bord de J ; l'égalité (5) donne alors en choisissant un représentant ψ de $\dot{\psi} = r(\Psi)$

$$\langle \mathcal{F}(r(\Psi)), g \rangle = \int_{\mathfrak{b}K} r(\Psi) \cdot g = \int_{\mathfrak{b}K} \psi \cdot g = \int_{\mathfrak{b}J} \psi \cdot g = \langle \partial' \Psi, g \rangle$$

d'où $\partial' = \mathcal{F} \circ r$.

iii) Montrons enfin que $p' \circ \mathcal{F} = q' \circ \partial$.

Soient $\eta \in H_s^n(Y, \Omega^n)$ et $g \in H^0(Z, \mathcal{O})$. Les applications q' et R sont transposées (suites (2') et (2'')), on a donc:

$$\langle q' \eta, g \rangle = \langle \eta, Rg \rangle = \langle \eta, g|_W \rangle$$

où W est un voisinage quelconque de s' dans Y .

En choisissant $\eta = \partial\psi \in \text{Im } \partial$, $g = 1_Z$ (fonction identiquement égale à 1 sur Z), $W = K$, et $\rho \in \mathcal{D}(Y, X)$, le Lemme 2.1 donne

$$\langle q'\partial\psi, 1_Z \rangle = \langle \partial\psi, \rho' \rangle = \langle \psi, \delta\rho' \rangle = \int_K \psi \wedge d''(\rho\rho') = \int_K d(\psi \cdot \rho) = \int_{bK} \psi$$

et d'après (5), cette dernière intégrale est égale à $\langle \mathcal{F}(\psi), \rho' \rangle$ (où $\rho' \in \mathcal{D}(Z, X)$).

L'application p' est la transposée de l'application restriction R' (d'après les suites (4) et (4')); des égalités ci-dessus, il vient:

$$\langle q'\partial\psi, 1_Z \rangle = \langle \mathcal{F}(\psi), 1_X \rangle = \langle \mathcal{F}(\psi), R'(1_Z) \rangle = \langle p'\mathcal{F}(\psi), 1_Z \rangle.$$

L'espace $H^0(Z, \mathcal{O})$ est une droite complexe engendrée par 1_Z (car Z est connexe), d'où finalement: $p' \circ \mathcal{F} = q' \circ \partial$.

4) Démonstration de la Proposition 2.3.

i) Injectivité de \mathcal{F} .

Soit $\mathcal{F}(\psi) = 0$; d'après le Lemme 2.4, on a $p' \circ \mathcal{F}(\psi) = q' \circ \partial(\psi) = 0$, d'où $\partial(\psi) = 0$ (q' est un isomorphisme) et $\psi \in \text{Im } r$.

Soit $\psi = r\Psi$, on a: $\mathcal{F} \circ r(\Psi) = 0 = \partial'(\Psi)$, d'où $\Psi \in \text{Im } r'$. D'après l'exactitude de la suite (1), \tilde{q} donc q est surjective, d'où $\Psi \in \text{Im}(r' \circ q) = \text{Im } p$ et $r\Psi = \psi = 0$.

ii) Surjectivité de \mathcal{F} .

Soit $\vartheta \in H_X^n(Z, \Omega^n)$; q' étant un isomorphisme et ∂ surjective, $p'\vartheta$ appartient à $\text{Im } q' \circ \partial = \text{Im } p' \circ \mathcal{F}$. Il existe donc $\psi \in H^{n-1}(Y - s', \Omega^n)$ telle que $p'\vartheta = p' \circ \mathcal{F}(\psi)$ et finalement, on obtient

$$(\vartheta - \mathcal{F}(\psi)) \in \text{Ker } p' = \text{Im } \partial' = \text{Im}(\mathcal{F} \circ r) \quad \text{d'où } \vartheta \in \text{Im } \mathcal{F}.$$

REMARQUE 2. La Proposition 2.3 généralise un théorème de Martineau démontré dans [M] et utilisé par [G-H]. C'est le cas particulier où dans la proposition 2.3 on prend: $Z = \mathbb{P}_n$, $Y \subset \mathbb{P}_n$ ouvert linéellement concave de Z et $c' \subset Y$ hyperplan compact de Y .

REMARQUE 3. Si l'on identifie une fonction sur Z et sa restriction à X , le Lemme 2.2 et la Proposition 2.3 donnent: $I_\psi(f) = \mathcal{F}(\psi/f)$; cela permet de ramener certains problèmes d'un voisinage du support de c' (donc dépendant de f) à un voisinage de X .

3. - Relation entre ρ^0 et ρ^1

On rappelle les notations du chapitre précédent. Soit $f \in M^*$; pour

$\varepsilon \in [0, \check{R}_f]$ ($\check{R}_f = \text{Sup}\{|t|; \check{c}_t \in W\}$), on note:

$$D_\varepsilon = \{t \in \mathbb{C}; |t| < \varepsilon\},$$

$$\check{M}_f(D_\varepsilon) = \{\check{f}_t \in \check{M}; \check{f}_t = f - t, t \in D_\varepsilon\},$$

$$\check{C}_f(\varepsilon) = \{\check{c}_t \in W; \check{c}_t = (f_t)^+, f_t \in \check{M}(D_\varepsilon)\}, \quad \check{C}_f \xrightarrow[\varepsilon]{\lim} \check{C}_f, \quad \check{C}(f) = \check{C}_f(\check{R}_f),$$

\tilde{f} l'application: $\check{C}_f \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{f}(\check{c}_t) = t,$

$$\text{Sing}(f) = \{z \in Y; d f(z) = 0\} \cup |(f)^-|, \quad Y' = Y - \text{Sing}(f).$$

On désigne par ψ une $(n, n - 1)$ -forme différentielle d'' -fermée dans Y qui sera supposée fixée dans toute la suite de ce chapitre et on note $\check{\psi}$ sa classe dans $H^{n-1}(Y, \Omega^n)$.

Le but de ce paragraphe est d'établir la

PROPOSITION 3.1. *Pour toute $f \in \check{M}^*$ et $c \in \check{C}(f)$, on a:*

$$(1) \quad \rho^1 \check{\psi}|_{\check{C}(f)}(c) = I_\psi \left(\frac{1}{f} \right) \cdot d \tilde{f}(c)$$

La démonstration se fait en deux étapes. On considère tout d'abord le cas où c est lisse, pour lequel on a besoin seulement de la théorie des résidus de Leray; puis on passe à un cycle c quelconque en utilisant la théorie des résidus de Coleff-Herrera-Lieberman.

1) *Cas non singulier.*

LEMME 3.2. *Si c est lisse, il existe $\eta > 0$ tel que tout $\check{c}_t \in \check{C}_f(\eta)$ soit encore lisse.*

DÉMONSTRATION. Soit en effet $(V_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ un recouvrement ouvert fini de c compact par des ouverts de cartes relativement compacts tels que $V_i \cap c = \{z \in V_i; s^{(i)}(z) = 0\}$ avec $s^{(i)} \in \mathcal{O}(\overline{V}_i)$ et $d s^{(i)} \neq 0$ dans \overline{V}_i (adhérence de V_i dans Y); pour $w = \sum w_{I,J} d z^I \wedge d \bar{z}^J$, on pose $|w(z)| = \text{Max}_{I,J} |w_{I,J}(z)|$. On a alors $m = \text{Inf}\{|d s^{(i)}(z)|; z \in \overline{V}_i, i \in \{1, \dots, p\}\} > 0$.

Dans V_i , f s'écrit $f|_{V_i} = \frac{s^{(i)}}{r^{(i)}} (r^{(i)} \in \mathcal{O}(\overline{V}_i))$. Soit $M = \text{Sup}\{|d r^{(i)}(z)|; z \in \overline{V}_i, i \in \{1, \dots, p\}\}$; en choisissant $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \nu < \frac{m}{M}$ et assez petit afin que pour tout $t \in D_\eta$ on ait $c_t \in \bigcup_{i=1}^p V_i$ (ce qui est possible d'après le Lemme 3.1), on obtient:

$$c_t \cap V_i = \{z \in V_i; s^{(i)}(z) - t \cdot r^{(i)}(z) = 0\} \text{ et}$$

$$|d s^{(i)}(z) - t \cdot d r^{(i)}(z)| > m - \frac{m}{M} M = 0.$$

Pour tout $t \in D_r$, les cycles c_t sont donc non singuliers, ce qui démontre le lemme.

Soit c un cycle lisse, $\eta \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ tel que pour tout $t \in D_\eta$ le cycle $(\check{f}_t)^+ = \check{c}_t$ soit lisse; soit φ une forme différentielle de Y vérifiant la relation; $\varphi \wedge df = \psi$, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 3.3. *Si c est lisse, pour tout $f \in \check{M}^*$, on a:*

$$\rho^1 \psi|_{\check{c}_f} = \rho^0 \varphi|_{\check{c}_f} \cdot d\check{f}.$$

DÉMONSTRATION. i) On choisit tout d'abord ε assez petit pour que \check{c}_t soit lisse quel que soit $t \in D_\varepsilon$ (lemme 3.2). D'après le théorème de division de Gelfand-Leray, il existe une telle forme φ définie sur le complémentaire dans Y de l'ensemble polaire c' de f ; en c' , φ se prolonge par zéro. Si ϑ est une autre forme telle que $\vartheta \wedge df = \psi$, φ et ϑ diffèrent en dehors de c' par une forme différentielle divisible par df ; pour tout $t \in D_\varepsilon$, leurs intégrales sur \check{c}_t sont donc égales (cf. [L]). Du théorème IX.IV de [S] (intégration sur les fibres), on déduit $\rho^0 \varphi(c) = \int \varphi$ pour tout $c \in \check{C}_f(\varepsilon)$ d'où, puisque $f|_{c-\bar{c}} = 0$ ($\bar{c} = c \cap c'$), l'égalité $\rho^0 \varphi(c) = \rho^0 \vartheta(c)$.

ii) La projection β est analytique, elle permet de définir une fibration localement triviale au-dessus de W et, par restriction, au-dessus de $\check{C}_f(\varepsilon)$; soit alors v une forme différentielle C^∞ sur $\check{C}_f(\varepsilon)$ et $I = \langle \beta_* \alpha^* \psi, v \rangle$; on a les égalités suivantes:

$$I = \langle \alpha^* \psi, \beta^* v \rangle = \int_{G_Y} \alpha^* \psi \wedge \beta^* v;$$

les cycles \check{c}_t étant compacts pour tout $t \in \overline{D}_\varepsilon$, on peut appliquer le théorème Fubini:

$$I = \int_{t \in D_\varepsilon} \left(\int_{\check{c}_t} \alpha^* \varphi \wedge \alpha^* d\check{f}_t \right) \wedge \beta^* v = \int_{t \in D_\varepsilon} \left(\int_{\check{c}_t} \alpha^* \varphi \right) \alpha^* d\check{f}_t \wedge \beta^* v,$$

car la forme différentielle $\alpha^* d\check{f}_t$ ne dépend que de t ; plus précisément, on a:

$$\alpha^* d\check{f}_t = \alpha^* df = \beta^* d\check{f}.$$

En effet, d'une part la fonction $\alpha^* f$ est définie pour tout (x, \check{c}_t) appartenant à $(\check{c}_t - (c' \cap \check{c}_t)) \times \check{C}_f(\varepsilon)$ par

$$\alpha^* f(x, \check{c}_t) = f \circ \alpha(x, \check{c}_t) = f(x) = t$$

et se prolonge donc trivialement à tout $\beta^{-1}(\check{C}_f(\varepsilon))$.

D'autre part $\beta^* \tilde{f}$ vérifie

$$\beta^* \tilde{f}(x, \check{c}_t) = \tilde{f} \circ \beta(x, \check{c}_t) = \tilde{f}(\check{c}_t) = t.$$

On obtient ainsi

$$I = \int_{D_\varepsilon} \left(\int_{\check{c}_t} \alpha^* \varphi \right) \beta^* d\tilde{f} \wedge \beta^* v = \int_{D_\varepsilon} \left(\int_{\check{c}_t} \alpha^* \varphi \right) \beta^* (d\tilde{f} \wedge v)$$

et, en appliquant à nouveau Fubini

$$\langle \alpha^* \psi, \beta^* v \rangle = \int_{G_Y} \alpha^* \varphi \wedge \beta^* (d\tilde{f} \wedge v) = \langle \alpha^* \varphi, \beta^* (d\tilde{f} \wedge v) \rangle = \langle \alpha^* \varphi \wedge \beta^* d\tilde{f}, \beta^* v \rangle$$

ce qui donne l'égalité entre courants $\beta_* \alpha^* \psi = \alpha^* \varphi \wedge \beta^* d\tilde{f}$.

Les deux termes de cette égalité étant induits par des formes différentielles, on obtient quels que soient $\check{c}_t \in \check{C}_f(\varepsilon) : \beta_* \alpha^* \psi(\check{c}_t) = \alpha^* \varphi(\check{c}_t) \wedge \beta^* d\tilde{f}(\check{c}_t)$, d'où la proposition.

REMARQUE 4. D'après la démonstration, l'égalité de la Proposition 3.3 est encore vérifiée lorsque les \check{c}_t sont lisses mais pas nécessairement compacts, dès que $\rho^0 \varphi$ et $\rho^1 \psi$ sont bien définies sur \check{C}_f .

REMARQUE 5. La forme φ représente la classe-résidue $\text{Res}_c(\psi/f)$ et la Proposition 3.3 s'écrit encore:

$$\text{pour tout } \check{c}_t \in \check{C}_f, \quad \rho^1 \psi(\check{c}_t) = \left(\int_{\check{c}_t} \text{Res}_{\check{c}_t}(\psi/\check{f}_t) \right) \cdot d\tilde{f}.$$

2) *Démonstration de la Proposition 3.1.*

On note $S_t = \text{Sing}(1/\check{f}_t)$.

α) On suppose tout d'abord que c est une hypersurface analytique de Y . D'après le Lemme I.4.3, on peut choisir η assez petit afin que pour tout $t \in D_\eta$, le cycle \check{c}_t n'ait pas de multiplicités; le sous-ensemble analytique S_t de $|\check{c}_t|$ est fermé dans $|\check{c}_t|$ donc compact dans Y . On peut alors choisir une famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts dans Y formant un système fondamental de voisinages de S_t (d'où $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = S_t$); on note $Y_n = Y - K_n$ le complémentaire (ouvert) de K_n dans Y .

Soient (r_n) une suite de fonctions de $\mathcal{D}(Y_n, Y_{n-1})$; on pose $I_n = \frac{1}{2i\pi} \langle \text{Res}_{\check{c}_t}(\psi/\check{f}_t), r_n \rangle$. D'après le Théorème 1.7.6 de [C-H], le courant $\text{Res}_{\check{c}_t}(\psi/\check{f}_t)$ n'a pas de masse concentrée dans une hypersurface de $|\check{c}_t|$ et en particulier dans S_t ; on a donc: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$.

D'après la Remarque 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité (1) est vérifiée dans Y_n et par passage à la limite, elle est encore vraie dans Y .

β) Il reste à considérer le cas où c contient des composantes multiples. On va d'abord montrer un lemme de "continuité" pour I_ψ .

LEMME 3.4. *L'application: $t \rightarrow I_\psi(1/\check{f}_t)$ est continue.*

DÉMONSTRATION. En utilisant une partition de l'unité, on est ramené à démontrer le lemme dans un polydisque relativement compact $U \subset Y$, voisinage d'un point $z_0 \in |c|$. Soit (z^1, \dots, z^n) des coordonnées dans \bar{U} ; on pose $f|_U = \alpha/\beta$, $\check{f}_t|_U = (\alpha - t\beta)/\beta = \alpha_t/\beta$ ($\alpha, \alpha_t, \beta \in \mathcal{O}(\bar{U})$ pour tout $t \in D_r$, r assez petit), $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i d z^1 \wedge \dots \wedge d z^n \wedge d \bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d \bar{z}^{i-1} \wedge d \bar{z}^{i+1} \wedge \dots \wedge d \bar{z}^n$, $M = \text{Sup}\{|\beta(z)|; z \in \bar{U}\}$, $M_\psi = \|\psi\|_{\bar{U}} = \text{Sup}\{|\psi_i(z)|; i \in \{1, \dots, n\}, z \in \bar{U}\}$. Pour $\delta \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$, on note

$$\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta) = \{z \in U; |\alpha_t| \leq \delta_t\}, \quad T_{\alpha_t}(\delta) = \{z \in U; |\alpha_t| = \delta_t\}$$

(avec une notation analogue en remplaçant α_t par α).

Soit $\delta_0 < 1$ assez petit afin que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, on ait $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta)$ compact dans U ; soient $\delta_1 = \delta_0/2$ et r un réel tel que $0 < r < \text{Min}(\delta_0/4M, \delta_0^2/4M^2)$; on a alors:

1) pour tout $t \in D_r$, $|c| \subset \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_1)$.

Soit en effet $z \in |c|$, alors $\alpha(z) = 0$ d'où $|\alpha_t(z)| = |\beta(z) \cdot t| < M \cdot r < \delta_0/4 \leq \delta_1$.

2) Pour tout $t \in D_r$, $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_1)$ est contenu dans l'intérieur de $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_0)$.

Soit $z \in \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_1)$, on a en effet

- ou bien $|\alpha(z)| - |t \cdot \beta(z)| \leq 0$ d'où $|\alpha(z)| \leq M \cdot r < \delta_0/4$

- ou bien $\delta_1 \geq |\alpha(z) - t \cdot \beta(z)| \geq |\alpha(z)| - |t \cdot \beta(z)|$ d'où $|\alpha(z)| \leq \delta_1 + r \cdot M < \delta_0$.

Les ensemble $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta)$ et $T_{\alpha_t}(\delta)$ munis d'une orientation convenable définissent des chaînes semi-analytiques dans U encore notées $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta)$ et $T_{\alpha_t}(\delta)$; les conditions de dimension du Lemme 1.5 de [C-H] ($\dim \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta) = 2n$ et $T_{\alpha_t}(\delta) = 2n - 1$) sont évidemment vérifiées quels que soient $\delta \in]0, \delta_0]$ et $t \in D_r$. Pour tout $t \in D_r$, $\delta'_0 \in]0, \delta_0]$ et $\delta'_1 \in]0, \delta_1]$, on a alors ([C-H], 1.5.2 et 1.5.3):

(1) $T_{\alpha_t}(\delta'_1)$ (respectivement $T_{\alpha_t}(\delta'_0)$) est homologue à $T_{\alpha_t}(\delta_1)$
(respectivement $T_{\alpha_t}(\delta_0)$)

(2) $T_{\alpha_t}(\delta'_1)$ (respectivement $T_{\alpha_t}(\delta'_0)$) est le bord de $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta'_1)$
(respectivement $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta'_0)$).

Pour tout $t \in D_r$, la forme ψ/f est C^∞ dans $\tilde{T} = \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_0) - \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_1)$ et d-fermée car $d(\psi/\check{f}_t) = d''(\psi/\check{f}_t)$ (ψ étant saturée en dz) = 0 (ψ et \check{f}_t étant d'' -fermée

dans \tilde{T}). D'après (1), en appliquant le théorème de Stokes pour les chaînes semi-analytiques, on obtient pour tout $t \in D_r$, $\delta'_0 \in]0, \delta_0]$ et $\delta'_1 \in]0, \delta_1]$

$$(3) \quad \int_{T_{\alpha_t}(\delta'_1)} \psi / \check{f}_t = \int_{T_{\alpha_t}(\delta_1)} \psi / \check{f}_t$$

et

$$(3') \quad \int_{T_{\alpha}(\delta'_0)} \psi / f = \int_{T_{\alpha}(\delta_0)} \psi / f.$$

De même, de (2) on tire

$$\int_{(T_{\alpha}(\delta_0) - T_{\alpha_t}(\delta'_1))} \psi / f = \int_{(\tilde{T}_{\alpha}(\delta_0) - \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta'_1))} d(\psi / f) = 0;$$

en particulier, pour $\delta'_1 = \delta_1$, les inclusions $\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta'_1) \subset \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta_1) \subset \subset \tilde{T}_{\alpha}(\delta_0)$ donnent $T_{\alpha}(\delta_0) - T_{\alpha_t}(\delta'_1) = b\tilde{T}_{\alpha}(\delta_0) - b\tilde{T}_{\alpha_t}(\delta'_1) = b(\tilde{T}_{\alpha}(\delta_0) - \tilde{T}_{\alpha_t}(\delta'_1))$ (où bX désigne le bord de X). Les tubes $T_{\alpha}(\delta_0)$ et $T_{\alpha_t}(\delta'_1)$ sont donc homologues dans U , d'où

$$(4') \quad \int_{T_{\alpha_t}(\delta'_1)} \psi / \check{f}_t = \int_{T_{\alpha}(\delta_0)} \psi / \check{f}_t$$

la formule (3) devenant alors un cas particulier de (4'). Par construction, on peut écrire:

$$\|(\psi / f) - (\psi / \check{f}_t)\|_{T_{\alpha}(\delta_0)} \leq M_{\psi} \cdot \text{Sup}\{|t \cdot \beta^2(z) / (\alpha(z)(\alpha(z) - t \cdot \beta(z))|; z \in T_{\alpha}(\delta_0)\}.$$

Pour tout $z \in T_{\alpha}(\delta_0)$, on a $|\alpha(z)| = \delta_0$ et $|\alpha(z) - t \cdot \beta(z)| > \delta_0 - r \cdot M > \delta_0/2$, ce qui donne

$$(5) \quad \|(\psi / f) - (\psi / \check{f}_t)\|_{T_{\alpha}(\delta_0)} < M_{\psi} \cdot (2M^2 / \delta_0^2) \cdot |t|$$

De (4') et de (5), on obtient

$$(6) \quad \left| \int_{T_{\alpha_t}(\delta_1)} (\psi / \check{f}_t)(\psi / f) \right| = \left| \int_{T_{\alpha}(\delta_0)} (\psi / \check{f}_t) - (\psi / f) \right| < C(\delta_0, \psi) \cdot |t|$$

où $C(\delta_0, \psi) = \text{vol}(T_{\alpha}(\delta_0)) \cdot M_{\psi} \cdot 2M^2 / \delta_0$ est une constante indépendante de t ($\text{vol}(T_{\alpha}(\delta_0))$ désignant l'aire de $T_{\alpha}(\delta_0)$ dans U).

Les égalités (3) et (3') donnent pour tout $\rho \in \mathcal{D}(U, \tilde{T}_{\alpha}(\delta_0))$

$$(7) \quad \int_{T_{\alpha_t}(\delta_1)} \psi / \check{f}_t = \lim_{\delta'_1 \rightarrow 0} \int_{T_{\alpha_t}(\delta'_1)} \psi / \check{f}_t = \langle \text{Res}_{\check{c}_t}(\psi / \check{f}_t), \rho \rangle = 2i\pi \cdot I_{\psi}(1 / \check{f}_t)$$

et de même

$$(8) \quad \int_{T_\alpha(\delta_0)} \psi/f = \lim_{\delta'_0 \rightarrow 0} \int_{T_\alpha(\delta'_0)} \psi/f = 2i\pi \cdot I_\psi(1/f);$$

de (6), on tire $|I_\psi(1/\check{f}_t) - I_\psi(1/f)| \leq 2i\pi \cdot C(\delta_0, \psi) \cdot |t|$, d'où $\lim_{t \rightarrow 0} I_\psi(1/\check{f}_t) = I_\psi(1/f)$; ceci étant vrai pour tout f , on obtient la continuité recherchée.

γ) Fin de la démonstration de la Proposition 3.1.

D'après le Lemme 1.4.3, on peut choisir dans $\check{C}(f)$ une suite de cycles $\check{c}_n \in \check{C}(f)$ sans multiplicités tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{c}_n \rightarrow c$ (dans W). D'après la première partie, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3) \quad \rho^1 \psi|_{\check{c}_n(f)} = I_\psi(1/\check{f}_t) \cdot d\check{f}(\check{c}_n)$$

Les formes différentielles $\rho^1 \psi$ et $d\check{f}$ dépendant continument de \check{c}_n , d'après le Lemme 3.4, l'égalité (3) reste encore vraie par passage à la limite sur n donc pour c , ce qui termine la preuve de la Proposition 3.1.

REMARQUE 6. Le lemme prouve que dans le cadre cohomologique où l'on s'est placé, on évite les problèmes de passage à la limite des courants-résidus (cf. [P], Remarque 7.2.4).

Soit en effet $Y = \mathbb{C}$ (de coordonnée z), $\psi = dz$, $f = z^2$, $\check{f}_t = z^2 - t$, $c = 2 \cdot \{0\}$, $\check{c}_t = \{z\} + \{-z_t\}$ où z_t est une solution de l'équation $z^2 = t$; on note I et I_t les courants (à support respectivement $\{0\}$ et $\{z_t\} \cup \{-z_t\}$), $I = (1/2i\pi) \cdot \text{Res}_c(\psi/f)$ et $I_t = (1/2i\pi) \cdot \text{Res}_{\check{c}_t}(\psi/\check{f}_t)$; leurs supports étant évidemment lisses, on peut appliquer le théorème de division de Gelfand-Leray (ou bien faire un calcul direct), ce qui donne pour toute fonction $h \in C^\infty$ dans \mathbb{C}

$$\langle I, h \rangle = (1/2i\pi) \langle \text{Res}_c(\psi/z^2), h \rangle = \text{Res}_c(h \cdot dz/z^2) = (\partial h / \partial z)(0)$$

$$\langle I_t, h \rangle = (1/2i\pi) \langle \text{Res}_{\check{c}_t}(\psi/(z^2 - t)), h \rangle = \text{Res}_{\check{c}_t}(h \cdot dz/(z^2 - t))$$

$$= \frac{h(z_t)}{2z_t} - \frac{h(-z_t)}{2z_t}.$$

En prenant pour h l'application $h(z) = \bar{z}$, on tire:

$$\langle I, h \rangle = 0 \text{ et } \langle I_t, h \rangle = \frac{\bar{z}_t - \bar{-z}_t}{2z_t \cdot 2z_t} = \frac{\bar{z}_t}{z_t}.$$

Le lemme précédent est donc en défaut car $\lim_{t \rightarrow 0} |\langle I_t, h \rangle| = 1$ tandis que $\langle I, h \rangle = 0$. En fait $\langle I_t, h \rangle$ n'a pas de limite lorsque t tend vers 0; en effet, si l'on choisit par exemple $t \in \mathbb{R}$, on obtient: pour $t > 0$, z_t appartient à \mathbb{R} d'où $\langle I_t, h \rangle = 1$; pour $t < 0$, z_t appartient à $i\mathbb{R}$ d'où $\langle I_t, h \rangle = -1$.

La différence d'avec le cadre cohomologique provient de ce que la forme $h \cdot \psi$ (ici $\bar{z} \cdot dz$) n'est pas d-fermée.

CHAPITRE III

Définition, propriétés de la transformation de Radon analytique

1. - L'espace des cycles-drapeaux

DÉFINITION. On appelle cycle-drapeau (respectivement cycle-drapeau compact) d'une variété analytique Y , une suite $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ de cycles analytiques (respectivement cycles analytiques compacts) de Y telle que:

$$\xi_1 \supsetneq \xi_2 \supsetneq \dots \supsetneq \xi_k.$$

L'entier k est appelé la longueur du cycle-drapeau ξ .

NOTATIONS. On rappelle que $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ est l'ensemble des diviseurs effectifs (non nécessairement compacts) de Y .

Soit $C_{n-1}(Y)$ (respectivement $\mathcal{E}_{n-1}(Y)$) l'ensemble des éléments de $C_{n-1}(Y)$ (respectivement de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$) qui sont parties négatives de diviseurs principaux de Y . On supposera désormais que W est inclus dans $C_{n-1}(Y)$ et on notera D l'ensemble des cycle-drapeaux compacts de Y de la forme:

$$D = \{(c', \tilde{c}) \in W \times C_{n-2}(Y); \tilde{c} = c' \cap c, c \in \mathcal{E}_{n-1}(Y)\}$$

On note π' la projection de D sur W et p_1 la projection de M^* sur D définie par:

$$p_1(h) = (c', \tilde{c}) \quad \text{où } (h)^- = c' \text{ et } \tilde{c} = (h)^+ \cap (h)^-.$$

REMARQUE 1. La Proposition I.5.2 s'écrit avec les notations ci-dessus: $p_1(h) = p_1(l)$ si et seulement si $l = \lambda h + \mu$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mu \in \mathbb{C}$.

REMARQUE 2. On peut, sous certaines hypothèses, munir $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ d'une structure analytique (en le plongeant par exemple dans un espace de cycles compact convenable). Ainsi, soit Y un ouvert d'une variété kählérienne compacte Z tel que $X = Z - Y$ soit (localement) contenu dans un sous-ensemble analytique de codimension 2 de Z ; d'après le théorème de prolongement de Hartogs, d'une part Y vérifie la propriété (*) et d'autre part toute hypersurface irréductible de Y s'étend en une hypersurface irréductible (compacte) \bar{S} de Z de manière unique ($\bar{S} - S$ étant contenu dans un sous-espace de codimension réelle au moins 4, S est connexe) et l'application $S \mapsto \bar{S}$ est injective donc bijective. Cette application induit une bijection de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ sur $C_{n-1}(Z)$ ce qui permet de munir $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ d'une structure d'espace analytique. Cette dernière étant définie par celle de $C_{n-1}(Z)$, elle induit la même structure sur $C_{n-1}(Y)$ et un

raisonnement analogue à celui du c) de la démonstration du lemme I.3.1 montre qu'elle est identique à la topologie naturelle de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$. De plus, d'après le théorème d'extension de Levi (cf. [GR-H] par exemple), la restriction naturelle des fonctions méromorphes de $M(Z)$ dans $M(Y)$ est un isomorphisme. Enfin, les composantes connexes de $C_{n-1}(Z)$ étant compacts ([FU], théorème 4.5), il en est de même de celles de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$; en particulier les composantes connexes de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ coupant W sont compactes, ce que l'on supposera dans la suite afin de pouvoir appliquer le Lemme I.3.1 et la Proposition I.3.2 (dans le cas contraire, il faudrait modifier la définition des \check{C}_f et C_f conformément à la Remarque 2 du Chapitre I).

PROPOSITION 1.1. *Soient $W, W' \subset C_{n-1}(Y)$ des familles analytiques de cycles compacts de Y . L'ensemble D des drapeaux de la forme*

$$D = \{(c, \tilde{c}) \in W \times C_{n-2}(Y); \tilde{c} = c \cap c', c \in W'\}$$

admet une structure analytique induite par le produit $W \times W' \subset C_{n-1}(Y) \times C_{n-1}(Y)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{P}(Y)$ le sous-ensemble de $W \times W'$ formé des couples de diviseurs ayant des composantes irréductibles communes; $\mathcal{P}(Y)$ est un sous-espace fermé du produit $W \times W'$ et on note W_1 son complémentaire. La projection $p : W_1 \rightarrow W \times C_{n-2}(Z)$ donnée par: $p(c', c) = (c', c \cap c')$ est analytique (l'intersection de deux cycles se coupant simplement est analytique) et pour tout c' de W la fibre $p^{-1}(c', \tilde{c})$ est formée des cycles de W' sans composantes irréductibles communes avec c' d'où $p^{-1}(c')$ est ouvert dans W' . D'après le Corollaire 3.7 de [F] (qui est essentiellement conséquence du théorème d'image directe), $D = p(W_1)$ est alors localement un sous-ensemble analytique de $W \times C_{n-2}(Y)$.

REMARQUE 3. Si $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ a une structure d'espace analytique contenant $C_{n-1}(Y)$ comme sous-espace (cf. Remarque 2), on peut généraliser le lemme au cas où W' est une famille analytique de cycles de $\mathfrak{C}_{n-1}(Y)$ (c'est-à-dire non nécessairement compacts).

2. - Le fibré de Radon

Soit $M' \subset M \times D$, l'ensemble défini par:

$$M' = \{f = (h, \xi) \in M \times D; \text{ si } h \in M^*, \xi = p_1(h)\};$$

soient p'_1 et q les projections respectives de M' sur D et M . On peut décomposer M' en $M' = M'^* \cup M''$ où $M'^* = q^{-1}(M^*)$ et $M'' = M' - M'^*$. On a alors $M'' \cong \mathbb{C} \times D$ et il est clair que la restriction de q à M^* est un isomorphisme sur M'^* , ce qui

permet de confondre $f = (h, \xi) \in M^*$ et $q(f) = h \in M^*$. On peut alors prolonger I_ψ à M' de manière naturelle.

DÉFINITION. Pour tout $f \in M'$, on pose:

$$I_\psi(f) = I_\psi(q(f))$$

REMARQUE 4. D'après la Remarque 1 du Paragraphe II.2, si $f \in M''$, on a $I_\psi(f) = 0$.

DÉFINITION. Soit E l'espace quotient de M' défini par la relation d'équivalence:

$f \sim g$ si et seulement si:

- i) $p'_1(f) = p'_1(g)$
- ii) $q(g) - q(f) = \text{constante}$.

On note p_2 la projection naturelle $p_2 : M' \rightarrow E = M'/\sim$ et $\dot{f} = p_2(f)$ la classe d'équivalence de $f \in M'$ dans E .

REMARQUE 5. Si $f \in M^*$, d'après la Proposition I.5.2, la condition ii) implique la condition i).

LEMME 2.1. *L'application p'_1 passe au quotient sur E . Elle induit une projection $\pi : E \rightarrow D$ dont la fibre au-dessus de tout point est une droite complexe.*

DÉMONSTRATION. Soient $f = (h, \xi)$ et $f' = (h', \xi')$ avec $f \sim f'$. D'après la condition i), on a $\xi = \xi'$, d'où $p'_1(f) = p'_1(f')$. On peut donc poser $\pi(\dot{f}) = p'_1(f)$, $f \in \dot{f}$.

L'application π est trivialement surjective car pour $\xi \in D$, il existe par construction $f \in M(Y)$ vérifiant $(f)^- \in W$ et $\xi = ((f)^-, (f)^+ \cap (f)^-)$.

Soit $\xi = (c', \tilde{e}) \in D$ et $E_\xi = \pi^{-1}(\xi)$ la fibre de E au-dessus de D . Soient $h, h' \in M^*$; d'après la Remarque 1, on a l'équivalence

$$p'_1(h) = p'_1(h') \text{ si et seulement si } h' = \lambda h + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C};$$

il vient alors

$$p'^{-1}(\xi) = \{(h', \xi); h' = \lambda h + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\} \cup \{(\alpha, \xi), \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Soit $f = (h, \xi) \in M'$, on a les propriétés suivantes:

$$(h + \mu, \xi) \in \dot{f} \quad \text{et} \quad \pi^{-1}(\xi) = \{\lambda \dot{f}, \lambda \in \mathbb{C}^*\} \cup \{\dot{0} = (0, \xi)\} = \{\lambda \dot{f}, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

$\pi^{-1}(\xi)$ est donc bien une droite complexe.

Ceci montre que E est un fibré en droites (ensembliste).

REMARQUE 6. La classe $\hat{0}_\xi \in \pi^{-1}(\xi)$ donnée par $\hat{0}_\xi = \{(\lambda, \xi), \lambda \in \mathbb{C}\}$ est l'élément neutre de la fibre vectorielle au-dessus de ξ ; lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur ξ , on la notera par $\hat{0}$.

3. - Relation avec le fibré tangent à l'espace des cycles

Soit TW le fibré tangent de W , on définit une application $\sigma_1 : M' \rightarrow TW$ de la manière suivante:

i) Tout d'abord (en reprenant les notations de I.2) à tout $h \in M^*$, on associe la famille:

$$M_h(\varepsilon) = \left\{ h_t \in M^*; \frac{1}{h_t} = \frac{1}{h} - t, t \in D_\varepsilon \right\},$$

où D_ε est un disque de \mathbb{C} centré en 0 et de rayon ε assez petit pour que l'on ait $h_t \in M'$, c'est-à-dire $(h_t)^- \in W$ (cf. Lemme I.3.1). On obtient ainsi une application $\eta : D_\varepsilon \rightarrow W$ définie par $\eta(t) = (h_t)^-$ où $\eta(0) = (h_0)^- = c'$. D'après la Proposition I.3.2, la fonction η définit une courbe analytique dans W paramétrée par D_ε , donc un vecteur tangent $\tau(h) \in T_c W$; à tout $f = (h, \xi) \in M'^*$, on associe alors le vecteur tangent $\tau_f = \tau(h) \in TW$.

ii) Soit $f \in M''$ et $(c', \bar{c}) = p'_1(f) \in D$ (i.e. $f = (\lambda, \xi)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\xi = (c', \bar{c})$); on lui associe le vecteur tangent $\tau_f = 0 \in T_c W$.

On définit l'application $\sigma_1 : M' \rightarrow TW$ en posant $\sigma_1(f) = \tau_f$.

PROPOSITION 3.1. Soient f et g appartenant à M' ;

1) si $p_2(f) = p_2(g)$ alors $\sigma_1(f) = \sigma_1(g)$;

2) soit $\xi = p'_1(f) = (c', \bar{c})$; $\sigma_1(f)$ est nul dans $T_c W$ si et seulement si f appartient à M'' (i.e. $f = (\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times D$).

DÉMONSTRATION. 1) On pose $f = (h, \xi) \in M \times D$ et $g = (l, \xi') \in M \times D$; si $p_2(f) = p_2(g)$, on a par définition $l - h = \delta \in \mathbb{C}$ et $\xi = \xi'$.

a) Si $f \in M''$ (i.e. $h \in \mathcal{O}(Y) \cong \mathbb{C}$), l est aussi constante et on obtient

$$\sigma_1(f) = \sigma_1(g) = 0 \in T_c W.$$

b) On peut alors supposer f (donc g) dans M'^* (i.e. h et l non constantes dans Y). Soient $\mathcal{C}_h(\varepsilon) = \{c'_t; c'_t = (h_t)^-, h_t \in M_h\}$ et $\mathcal{C}_l(\varepsilon) = \{k'_t; k'_t = (l_t)^-, l_t \in M_h\}$, ε étant choisi assez petit en sorte que pour tout $t \in D_\varepsilon$, h_t et g_t appartiennent à M' . Soit $\varepsilon_1 = \sup\{r; \forall t \in D_r, h_t, g_t \in M'\}$; d'après le lemme I.3.1, on a alors $0 < \varepsilon_1 \leq \infty$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Soit $\eta \in]0, \varepsilon_1[$ fixé; pour abrégier, on pose $C_h = \mathcal{C}_h(\eta)$ et $C_l = \mathcal{C}_l(\eta)$; on note \mathcal{C}_h (respectivement \mathcal{C}_l) le germe de courbe défini par C_h (respectivement

C_l) c'est-à-dire la limite inductive suivant ε de $C_h(\varepsilon)$ (respectivement $C_l(\varepsilon)$). Pour démontrer la proposition ci-dessus, on a besoin du:

LEMME 3.2. *Les courbes C_h et C_l définissent les mêmes germes au point $c' \in W$.*

DÉMONSTRATION. i) Il est clair que $c'_0 = k'_0 = c'$: en effet, $k'_0 = \left(\frac{1}{l_0}\right)^+ = (l_0)^- = (h)^- = (h_0)^- = c'$ (Lemme I.4.2 i)).

ii) On note par η_ε (respectivement ρ_ε) les paramétrisations suivantes des courbes $C_h(\varepsilon)$ (respectivement $C_l(\varepsilon)$):

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon : D_\varepsilon &\rightarrow W & \rho_\varepsilon : D_\varepsilon &\rightarrow W \\ t &\mapsto c'_t & t &\mapsto k'_t \end{aligned}$$

où $\eta(0) = \rho(0) = c'$.

On va montrer qu'il existe $\varepsilon' (< \varepsilon_1)$ tel que pour ε assez petit, $C_h(\varepsilon) \subset C_l(\varepsilon')$. Par symétrie, il existera alors $\varepsilon'' (< \varepsilon_1)$ tel que $C_l(\varepsilon) \subset C_h(\varepsilon'')$; les courbes $C_h(\varepsilon)$ et $C_l(\varepsilon)$ coïncideront bien au voisinage de $c' \in W$.

Soit $r : \mathbb{C} - \left\{\frac{1}{\delta}\right\} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application $r(t) = \frac{t}{1 + \delta t}$; elle est analytique et vérifie

- $r(0) = 0$;

- pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2|\delta|}$, r envoie D_ε dans $D_{2\varepsilon}$; on a en effet

$$|r(t)| = \frac{|t|}{|1 + \delta t|} < \varepsilon \frac{1}{|1 - |\delta||t||} < \varepsilon \frac{1}{|1 - \varepsilon|\delta|} < 2\varepsilon.$$

On choisit $\varepsilon < \inf\left(\frac{1}{2|\delta|}, \varepsilon_1\right)$ et on fixe t dans D_ε . Soit $r = r(t) \in D_{2\varepsilon}$; on va montrer l'égalité $l_r = \lambda \cdot h_t + \mu$, $((\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$ qui donnera $(l_r)^- = (h_t)^-$ d'après la première partie du Lemme I.4.2; ceci étant vrai pour tout $t \in D_\varepsilon$, on aura l'inclusion cherchée (avec $\varepsilon' = 2\varepsilon$).

Puisque $(l_0)^- = (h_0)^- = c'$, on peut supposer $t \neq 0$. Par définition, on a $\frac{1}{h_t} = \frac{1}{h} - t$ et $\frac{1}{l_r} = \frac{1}{l} - r$ où $l_r = \frac{1}{1 - r \cdot l} = \frac{(1 + \delta t) \cdot h + \delta(1 + \delta t)}{1 - t \cdot h}$.

Un calcul facile donne $\frac{l}{1 - r \cdot l} = \frac{(1 + \delta t)^2 \cdot h + \delta(1 + \delta t)(1 - t \cdot h)}{1 - t \cdot h}$ d'où $l_r = (1 + \delta t)^2 \cdot \frac{h}{1 - t \cdot h} + \delta(1 + \delta t) = (1 + \delta t)^2 \cdot h_t + \delta(1 + \delta t)$; de plus, on a $|1 + \delta t| > 1 - |\delta|\varepsilon > \frac{1}{2}$ et $1 + \delta t$ est non nul.

c) Fin de la démonstration de la Proposition 3.1.

Pour terminer, il faut montrer que les germes C_h et C_l définissent le même vecteur tangent au point c' de W . Soit r_ε la restriction de r à D_ε et $D'_\varepsilon = r(D_\varepsilon)$

(inclus dans $D_{2\varepsilon}$ d'après b)). L'homographie r est un isomorphisme analytique de D_ε sur son image D'_ε ; en particulier, D'_ε est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C} . Soit $C'_l(\varepsilon) = \{c'_t; c'_t = (l_t)^-, l_t \in M_l, t \in D'_\varepsilon\} \subset C_l(\varepsilon)$; d'après la Proposition 3.2, $C_l = C'_l$ et la fonction r_ε est un changement de paramétrisation de la courbe $C_h(\varepsilon)$ au voisinage de c' ; on peut écrire η_ε comme composée de 2 applications

$$\eta_\varepsilon : D_\varepsilon \xrightarrow{r_\varepsilon} D'_\varepsilon \xrightarrow{\tilde{\rho}} C'_l = C_l \text{ (où } \tilde{\rho} = \rho_\varepsilon|_{D'_\varepsilon}\text{)}.$$

Le vecteur tangent associé à la paramétrisation ρ_ε de C_h est donné par

$$\eta'_\varepsilon(0) = (\tilde{\rho} \circ r_\varepsilon)'(0) = \tilde{\rho}'(r_\varepsilon(0)) \circ r'_\varepsilon(0).$$

Des égalités $r_\varepsilon(0) = 0$ et $r'(t) = \frac{1}{(1 + \delta t)^2}$, il vient finalement $\eta'_\varepsilon(0) = \tilde{\rho}'(0) = \rho'_\varepsilon(0)$.

2) Si $h \notin \mathcal{O}(Y) (\cong \mathbb{C})$, l'application $\eta_\varepsilon : D_\varepsilon \rightarrow C_h(\varepsilon)$ est analytique et évidemment bijective, c'est donc un difféomorphisme analytique, d'où $\eta'_\varepsilon(t) \neq 0$ pour tout $t \in D_\varepsilon$, ce qui donne $\sigma_1(f) = \eta'_\varepsilon(0) \neq 0$.

La Proposition 3.1 peut encore s'écrire:

PROPOSITION 3.3. *L'application $\sigma_1 : M' \rightarrow TW$ passe au quotient en une application $\sigma : E \rightarrow TW$. Soit $f \in E$, $\xi = \pi(f)$; on a $\sigma(f) = 0$ (élément neutre de $T_{\pi^{-1}(\xi)}W$) si et seulement si $f = \hat{0}$ (élément neutre de $\pi^{-1}(\xi)$).*

NOTATION. Dans la suite, $\sigma(f)$ sera aussi noté τ_f .

4. - Construction et étude de la transformation de Radon

i) L'espace vectoriel des fonctions méromorphes M n'est muni classiquement d'aucune structure analytique. Nous allons cependant munir E d'une telle structure en utilisant l'application σ et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & TW \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ D & \xrightarrow{\pi'} & W \end{array}$$

où π' (respectivement π_1) est la projection naturelle de D sur W (respectivement de TW sur W).

THÉORÈME 4.1. Le triplet (E, D, π) peut être muni d'une structure de fibré holomorphe en droites en sorte que (π', σ) soit un morphisme de fibrés holomorphes.

DÉMONSTRATION. Montrons que l'on peut considérer E comme sous-fibré d'un fibré vectoriel holomorphe E' sur D .

1) Soit $E' = \pi'^*(TW)$ le fibré image réciproque de $T(W)$ par π' . On va montrer qu'il existe sur E une structure de fibré vectoriel holomorphe et une application de fibrés vectoriels $i : E \rightarrow E'$ injective rendant le diagramme ci-dessous commutatif (on ne peut pas appliquer directement la propriété universelle d'image inverse de fibrés car E n'a pas encore de structure de fibré vectoriel holomorphe)

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{i} & E' & \xrightarrow{\sigma'} & TW \\ \pi \downarrow & & \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ D & \xrightarrow{\text{Id}_D} & D & \xrightarrow{\pi'} & W \end{array}$$

On définit l'application naturelle $i : E \rightarrow E'$ de la manière suivante: à $f \in E$ avec $\pi(f) = \xi$, on associe l'élément $\nu = (\sigma(f), \xi)$ de $\pi_2^{-1}(\xi) \subset E'$.

2) Soient $\dot{f}, \dot{g} \in \pi^{-1}(\xi)$ avec $i(\dot{f}) = i(\dot{g})$; on note $f = (h, \xi)$ (respectivement $g = (l, \xi) \in M'$ un représentant de \dot{f} (respectivement \dot{g}). Par construction, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $l = \lambda \cdot h + \mu$.

a) Si $\lambda = 0$, l est constante (i.e. $\dot{g} = 0$ dans $E|_{\pi(\xi)}$) et d'après la Proposition 3.3, on a $\tau_{\dot{g}} = 0$, d'où $i(f) = \tau_f = i(\dot{g}) = \tau_{\dot{g}} = 0$ et finalement $f = \dot{0}$.

b) On peut donc supposer $\lambda \neq 0$ et d'après la Proposition 3.1 prendre $l = \lambda h$; soit $c'_t = (h_t)^-$ et $k'_t = (l_t)^-$, on a

$$\frac{1}{l'_t} = \frac{1}{l} - t = \frac{1}{\lambda \cdot h} - t = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{h} - \lambda t \right),$$

d'où $k'_t = c'_{\lambda t}$; autrement dit, si η_1 et η_2 sont les paramétrisations respectivement associée à $\mathcal{C}_h(\varepsilon)$ et $\mathcal{C}_l(\varepsilon)$ (ε assez petit), on peut écrire:

$$\begin{array}{ccc} \eta_1 : D_\varepsilon \rightarrow W & \text{et} & \eta_2 : D_\varepsilon \rightarrow W \\ t \mapsto c'_t & & t \mapsto k'_t \end{array}$$

où η_2 est composée de l'application η_1 et de l'homothétie de rapport λ . En notant η'_i la dérivée de η_i ($i = 1, 2$), on obtient: $\eta'_2(t) = \lambda \cdot \eta'_1(t)$ et $\sigma_1(g) = \lambda \sigma_1(f)$, ce qui s'écrit encore $\lambda \tau_{\dot{g}} = \tau_{\dot{f}}$.

De a) et b), on obtient à la fois que l'injectivité de i et la linéarité sur les fibres. On peut donc mettre sur E la structure de fibré vectoriel holomorphe induite par i en considérant E comme un sous-fibré du fibré $\pi'^*(TW)$. On pose alors

DÉFINITION. Le triplet (E, D, π) est appelé le fibré de Radon (en codimension un) de Y .

ii) On est maintenant en mesure de définir la transformation de Radon.

DÉFINITION. Soit ψ une forme différentielle d'' -fermée sur Y de type $(n, n - 1)$; la transformée de Radon de ψ notée R_ψ est la section du fibré dual E^* de E définie par:

$$R_\psi(\xi) : \dot{f} \rightarrow I_\psi(f)$$

où $f \in \dot{f} \in \pi^{-1}(\xi)$.

Il faut montrer que $I_\psi(f)$ ne dépend pas du choix du représentant de \dot{f} . Soient $f = (h, \xi)$ et $f' = (h', \xi)$ deux représentants de \dot{f} où $h' = h + \mu$, $\mu \in \mathbb{C}$. Par définition, on a $I_\psi(f) = I_\psi(h)$ et $I_\psi(f') = I_\psi(h') = I_\psi(h) + I_\psi(\mu)$ (par linéarité de I_ψ) = $I_\psi(h)$ (car $I_\psi(\mu) = 0$ d'après la Remarque 4 Paragraphe 2) = $I_\psi(f)$.

REMARQUE 7. Dans les calculs, il peut être utile de se ramener à une section de fibré au-dessus de l'espace des cycles. Pour cela, on utilise la transformée de Radon partielle définie de la manière suivante: on fixe la partie positive $c = (f)^+$ de f et on définit R_ψ^c par $R_\psi^c(c') = I_\psi|_{F_c}$ où $F_c = \{f \in M; (f) = c - c'\}$; en notant \tilde{c} l'intersection $c \cap c'$, on a la relation $\langle R_\psi^c(c'), f \rangle = \langle R_\psi(c', \tilde{c}), \dot{f} \rangle$.

L'isomorphisme de Dolbeault permet de passer, dans la définition précédente, à la d'' -cohomologie et l'on pose:

DÉFINITION. On appelle transformation de Radon l'application:

$$R : H^{n-1}(Y, \Omega^n) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}(E^*))$$

définie par $R(\dot{\psi}) = R_\psi$, où $\psi \in \dot{\psi} \in H^{n-1}(Y, \Omega^n)$.

Cette définition a bien un sens car $R(\dot{\psi})$ ne dépend pas du choix du représentant ψ de $\dot{\psi}$ d'après le Lemme II.2.2. Par commodité, on notera encore $R(\dot{\psi})$ par $R_\dot{\psi}$.

PROPOSITION 4.2. La transformation de Radon vérifie l'égalité

$$\langle R(\dot{\psi})(\xi), \dot{f} \rangle = \langle \partial(\psi; h), \rho \rangle$$

où $f = (h, \xi) \in \dot{f}$, $\xi = (c', \tilde{c})$, ρ est une fonction C^∞ sur Y égale à 1 dans un voisinage de $|c'|$ et ∂ est le morphisme de cohomologie de $H^{n-1}(Y - |c'|, \Omega^n)$ dans $H_{|c'|}^n(Y, \Omega^n)$.

DÉMONSTRATION. C'est un corollaire immédiat de la construction de R et du Lemme II.2.2.

La proposition 4.2 montre qu'on peut réaliser la transformation de Radon par la dualité hyperfonctions/fonctions analytiques.

iii) Dans cette partie, nous nous placerons dans le cadre de [G-H]. Soit $Y \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ouvert linéellement convexe, W l'ensemble des hyperplans compacts contenus dans Y et \mathcal{R} la transformation de Radon définie dans [G-H]. On munit \mathbb{C}^{n+1} de sa base canonique; si ζ est un vecteur non nul de (\mathbb{C}^{n+1}) , (dual de

\mathbb{C}^{n+1}) de coordonnées $(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$ dans la base duale, on note $\langle \zeta, z \rangle$ l'image de la forme linéaire définie sur \mathbb{C}^{n+1} par $z = (z^0, \dots, z^n) \rightarrow \langle \zeta, z \rangle = \sum_{i=0}^n \zeta_i z^i$; soit $\check{\zeta}$ l'hyperplan projectif d'équation homogène $\langle \zeta, z \rangle = 0$. Pour $\eta \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})'$, on note $\frac{\eta}{\zeta}$ la fonction méromorphe sur \mathbb{P}_n induite par l'application $z \mapsto \frac{\langle \eta, z \rangle}{\langle \zeta, z \rangle}$.

PROPOSITION 4.3. *On a la relation:*

$$\mathcal{R}_\psi(\zeta, \eta) = \langle R_\psi(\xi), \dot{f} \rangle$$

où $\xi = (c', \tilde{c}) \in D$, $c' = \check{\zeta}$, $\tilde{c} = \check{\zeta} \cap \check{\eta}$ et $f = \left(\frac{\eta}{\zeta}, \xi \right) \in M'$.

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir (cf. [O1]) que pour tout $\psi \in \psi \in H^{n-1}(Y, \Omega^n)$, on peut écrire \mathcal{R} sous la forme:

$$\mathcal{R}_\psi(\zeta, \eta) = \int_{\check{\zeta}} \text{Res}_{\check{\zeta}} \left(\psi \cdot \frac{\eta}{\zeta} \right).$$

L'hypersurface $\check{\zeta} = \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{-}$ étant lisse, en conservant les notations du Paragraphe II.1, on obtient

$$\langle R_\psi(\xi), \dot{f} \rangle = I_\psi(f) = \int_{\check{\zeta}} \text{Res}_{\check{\zeta}} \left(\psi \cdot \frac{\eta}{\zeta} \right) = \mathcal{R}_\psi(\zeta, \eta).$$

REMARQUE 8. En utilisant la transformation de Radon partielle (cf. remarque précédente), on peut écrire: $\mathcal{R}_\psi(\zeta, \eta) = R_\psi^\eta(\check{\zeta})$; cette dernière transformation jouait un rôle essentiel dans l'étude de la transformation de Radon de [O1].

iv) Relation entre ρ^1 et R .

THÉORÈME 4.4. *Pour toute $\dot{f} \in E$, on a:*

$$\rho^1 \dot{\psi}(c') \cdot \tau_{\dot{f}} = R_\psi(\xi) \cdot \dot{f}$$

où $\xi = \pi(\dot{f})$ et $c' = \pi'(\xi)$.

DÉMONSTRATION. Soit $f = (h, \xi) \in M'$ avec $\xi = (c', \tilde{c}) \in W \times C_{n-2}(Y)$ un représentant de $\dot{f} \in E$.

– Si $f \in M''$ (i.e. $h \in \mathcal{O}(Y)$), alors $R_\psi(c', \tilde{c}) = 0$, $\tau_f = 0$ et l'égalité ci-dessus est donc bien vérifiée.

– On peut donc supposer h non constante d'où $c' = (h)^-$, $\tilde{c} = (h)^+ \cap (h)^-$.

Soit $l = \frac{1}{h}$ (auquel cas l appartient à \check{M}); en choisissant ε assez petit, on a $\check{c}_t = (\check{l}_t)^+ \in W$ ($\check{l}_t = l - t$) pour tout $t \in D_\varepsilon$, d'où $\check{l}_t = \frac{1-t \cdot h}{h}$ et $\frac{1}{h_t} = \frac{h}{l-t \cdot h}$ ce qui donne $(\check{l}_t)^+ = \check{c}_t = (h_t)^- = c'_t$; en particulier, on a $\check{l}_t \in \check{M}$ si et seulement si $h_t \in M$. On obtient ainsi $\check{C}_l = \check{C}_{\frac{1}{h}} = C_h$. L'application $\check{l} : \check{C}_l(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{C} : \check{c}_t \mapsto t$ s'identifie donc à l'application $\hat{h} : C_h(\varepsilon) \rightarrow D_\varepsilon : c'_t \mapsto t$.

ii) Soit $\rho : D_\varepsilon \mapsto W, t \mapsto c'_t$ la paramétrisation de la courbe W induite par \hat{h} ; on obtient $\tau_f = \rho_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (0)$ et $\check{l} \circ \rho = \text{Id}_{D_\varepsilon}$, d'où

$$\begin{aligned} \langle d\check{l}(c'), \tau_f \rangle &= \langle d\check{l}(c'), \rho_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (0) \rangle = \langle (\rho^* d\check{l})(0), \frac{\partial}{\partial t} (0) \rangle \\ &= \langle d(\check{l} \circ \rho)(0), \frac{\partial}{\partial t} (0) \rangle = \langle dt(0), \frac{\partial}{\partial t} (0) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Soit $\psi \in \dot{\psi}$, d'après la proposition II.3.1, on déduit

$$\rho^1 \psi(c') \cdot \tau_f = I_\psi(f) \cdot (d\check{l}(c') \cdot \tau_f) = I_\psi(f) = R_{\dot{\psi}}(\xi) \cdot \dot{f}$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

REMARQUE 9. Le théorème ci-dessus et le Lemme I.2.2 donnent ainsi une relation simple entre ρ^0 et R . Ceci permet en utilisant les techniques élaborées pour l'étude de ρ^0 ([A-N2], [O2], [O3]) d'obtenir un outil général pour l'étude de la transformation de Radon analytique. Comme application immédiate, on obtient de [O2] le:

THÉORÈME 4.5. Soit O un point d'une variété algébrique projective Z de dimension complexe, n , $Y = Z - \{O\}$. La transformation de Radon

$$R : H^{n-1}(Y, \Omega^n) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}(E^*))$$

est injective.

DÉMONSTRATION. i) Soit $\psi \in \dot{\psi} \in H^{n-1}(Y, \Omega^n)$; par raison de type $d'\psi = 0$ et $\bar{\psi}$ est d'' -fermée définissant une classe de d'' -cohomologie dans $H^n(Y, \Omega^{n-1})$; Y n'étant pas compact, on a $H^n(Y, \Omega^{n-1}) = (H_k^0(Y, \Omega^1))' = 0$ et il existe $\bar{\vartheta}$ forme différentielle C^∞ de type $(n-1, n-1)$ telle que $\bar{\psi} = d''\bar{\vartheta}$ d'où $\psi = d'\vartheta$ et $d'd''\vartheta = -d''\psi = 0$.

ii) Soit $\dot{\psi} \in \text{Ker } R$; pour toute $f \in M(Y)$ et $c' \in C_{n-1}(Y)$ tels que $c' = (f)^-$, le Lemme I.2.2 donne

$$(1) \quad \rho^1 \psi(c') = \rho^1 d'\vartheta(c') = \rho^1 d\vartheta(c') = d\rho^0 \vartheta(c') = 0$$

On considère Z plongée dans un espace projectif \mathbb{P}_N et soit k le degré de Z pour ce plongement. On note w la $(1, 1)$ -forme différentielle induite dans

Y par la forme de Fubini de \mathbb{P}_N et $\omega = \frac{1}{k} w^{\wedge(n-1)}$ (où $w^{\wedge r} = w \wedge \dots \wedge w$ r fois). La forme ω est d-fermée, d'où:

$$(2) \quad d\rho^0\omega = \rho^1 d\omega = 0$$

cependant elle n'est pas d-exacte car pour toute section hyperplane (compacte) c de Y , on a: $\int_c \omega = 1$.

D'après les formules (1) et (2), les fonctions $\rho^0\omega$ et $\rho^0\vartheta$ sont localement constantes sur l'espace des sections hyperplanes (compactes) de Y . Il existe alors d'après [A-N2] une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que:

$$(3) \quad \varphi = \vartheta - \lambda\omega \in \text{Ker } \rho^0$$

et le Théorème 4 de [O2] permet d'écrire:

$$(4) \quad \varphi = d'\alpha_1 + d''\alpha_2 + \tilde{\omega}$$

où α_1 (respectivement α_2 , respectivement $\tilde{\omega}$) est une forme différentielle \mathcal{C}^∞ sur Y de type $(n-2, n-1)$ (respectivement de type $(n-1, n-2)$, respectivement de type $(n-1, n-1)$ et d-fermée).

Les relations (3) et (4) donnent $\vartheta = d'\alpha_1 + d''\alpha_2 + \tilde{\omega} + \lambda\omega$ et finalement, on obtient $\psi = d'\vartheta = d'd''\alpha_2$ d'où $\dot{\psi} = 0$ dans $H^{n-1}(Y, \Omega^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] A. ANDREOTTI, *Théorème de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudoconcaves*, Bull. Soc. Math. France, **91**, p. 1-38, 1963.
- [A-N1] A. ANDREOTTI - F. NORGUET, *Quelques Propriétés de Courants Définis à l'Aide de Fonctions Holomorphes*, Acad. Bras. de Ciencias, **37**, p. 385-388, 1965.
- [A-N2] A. ANDREOTTI - F. NORGUET, *Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$ -cohomology*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **25**, p. 59-114, 1971.
- [B-E] R. BASTON - M. EASTWOOD, *The Penrose Transform*, Oxford science Publication, 1989.
- [C-H] N. COLEFF - M. HERRERA, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lecture Notes in Math. 633, Springer-Verlag, 1978.
- [D] P. DOLBEAULT, *Valeurs principales sur les espaces complexes*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1971.
- [F] G. FISCHER, *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Math. 538, 1976.
- [FU] A. FUJIKI, *Closedness of Douady Spaces of compact kähler spaces*, Publ. R.I.M.S., **14**, p. 1-52, 1978.

- [G-H] S. GINDIKIN - G. HENKIN, *Géométrie intégrale pour la d'' -cohomologie dans les domaines q -liméellement concaves de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$* , Funktsional. Anal. i Prilozhen., **12**, 4, p. 6-23, 1978.
- [GR-H] P. GRIFFITH - J. HARRIS, *Principles of algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.
- [H-L] M. HERRERA - D. LIEBERMAN, *Residues and principal values on complex spaces*, Math. Ann., **194**, p. 259-294, 1971.
- [L] J. LERAY, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, problème de Cauchy III*, Bull. Soc. Math. de France, **87**, 1959, p. 81-180.
- [M] A. MARTINEAU, *Equations différentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France, **95**, p. 109-154, 1967.
- [O1] S. OFMAN, *Transformée de Radon et intégrale sur les cycles analytiques compacts de certains ouverts de l'espace projectif complexe*, Fonct. Plus. Var. Comp. V, Lect. Notes in Math. 1188, p. 23-44, Springer Verlag, 1986.
- [O2] S. OFMAN, *Intégration des classes de d'' -cohomologie sur les cycles analytiques. Solution du problème de l'injectivité*, J. Math. Pures Appl., **68**, p. 73-94, 1989.
- [O3] S. OFMAN, *d'' , d'' -cohomologie et intégration sur les cycles analytiques*, Invent. Math., **92**, p. 389-402, 1988.
- [O4] S. OFMAN, *La transformation de Radon analytique*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **307**, p. 443-446, 1988.
- [O5] S. OFMAN, *The Analytic Radon Transform*, Proc. Symp. Pure Math., **52**, vol. 2, p. 511-516, 1991.
- [O6] S. OFMAN, *Transformation de Radon analytique générale*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **314**, p. 511-516, 1992.
- [P] M. PASSARE, *Residues, currents, and their relations to ideals of holomorphic functions*, Math. Scand. **62**, p. 75-152, 1988.
- [P-H] P. POLYAKOV - G. HENKIN, *Homotopy formulas for the $\bar{\partial}$ -operator on $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ and the Radon-Penrose transformation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **50**, 3, p. 556-597, 1986.
- [S] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

Université Paris 7
 U.F.R. de Mathématiques C.N.R.S.-U.A.212
 2, Place Jussieu
 75251 Paris Cedex 05
 France