ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

L. BOCCARDO
F. MURAT
J. P. PUEL

Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 11, nº 2 (1984), p. 213-235
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1984_4_11_2_213_0>

Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires.

L. BOCCARDO (*) - F. MURAT (**) - J. P. PUEL (***)

1. – Introduction.

Considérons un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière sera notée Γ, et soit $p \in]1, +\infty[$:

Nous allons étudier le problème

$$(1.1) \qquad \begin{cases} A(u) + F(u, \nabla u) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\,, \end{cases}$$

où l'opérateur A est de type Leray-Lions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual, et où $F(\cdot, \cdot)$ est une application non linéaire dont la croissance par rapport à ∇u est d'ordre au plus p. Plus précisément nous ferons les hypothèses suivantes:

$$(1.2) \qquad A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(u, \nabla u)\,,$$

où pour une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, nous posons

$$(1.3) \qquad A_i(u, \nabla u)(x) = a_i(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega\,.$$

Les fonctions a_i: $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont de Carathéodory, c'est-à-dire qu'elles vérifient

$$(1.4) \qquad \forall (\eta, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n\,, \quad x \to a_i(x, \eta, \xi) \text{ est mesurable}\,,$$

$$(1.5) \qquad \text{p.p. en } x \in \Omega\,, \quad (\eta, \xi) \to a_i(x, \eta, \xi) \text{ est continue}\,.$$

(*) Université de Rome II et Université de Lille I (pendant l'année 1981-82).
(**) C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie.
(***) Université Nancy II et Université Pierre et Marie Curie.
Pervenuto alla Redazione il 23 Nov. 1982 ed in forma definitiva il 30 Aprile 1983.

Nous supposerons de plus que

$$
(1.6)\quad \begin{cases} \exists \alpha > 0\,, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall \eta \in \mathbf{R}, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n\,, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \eta, \xi)\cdot \xi_i \geqslant \alpha |\xi|^p\,, \end{cases}
$$

$$
(1.7)\quad \begin{cases} \exists \beta > 0, \quad \exists k \in L^{p'+\varepsilon_1}(\Omega) \qquad \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\,;\ \varepsilon_1 > 0\right), \\ \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall \eta \in \mathbf{R}, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \quad |a_i(x, \eta, \xi)| \leqslant \beta[|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x)], \end{cases}
$$

$$
(1.8)\quad \begin{cases} \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad \forall \eta \in \mathbf{R}, \quad \forall \xi, \hat{\xi} \in \mathbf{R}^n, \quad \xi \neq \hat{\xi}, \\ \sum_{i=1}^{n} [a_i(x, \eta, \xi) - a_i(x, \eta, \hat{\xi})]\ (\xi_i - \hat{\xi}_i) > 0\,. \end{cases}
$$

Remarquons que l'hypothèse (1.7) est légèrement plus forte que celle faite habituellement (qui consiste à prendre $\varepsilon_1 = 0$). Nous n'aurons besoin de $\varepsilon_1 > 0$ que pour établir la proposition 3.8.

D'autre part, pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, nous définirons $F(u, \nabla u)$ par

$$
(1.9)\qquad F(u, \nabla u)(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega\,,
$$

où la fonction $f\colon \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est de Carathéodory, c'est-à-dire vérifie (1.4), (1.5), et satisfait d'autre part à

$$
(1.10)\quad \begin{cases} \text{Il existe une fonction croissante } r \to C(r) \text{ de } \mathbf{R}^+ \text{ dans } \mathbf{R}^+ \text{ telle ques} \\ \text{pour presque tout } x \in \Omega, \\ \qquad |f(x, \eta, \xi)| \leqslant C(|\eta|)\,(1 + |\xi|^p)\,. \end{cases}
$$

Remarquons que sous les hypothèses précédentes, si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $A(u) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $F(u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$, ce qui donne bien un sens au problème (1.1).

Nous allons montrer ici que, moyennant l'existence d'une sous-solution φ et d'une sur-solution ψ pour le problème (1.1) (avec φ, ψ lipschitziennes telles que $\varphi \leqslant \psi$ p.p. dans Ω), il existe une solution u du problème (1.1) avec $\varphi \leqslant u \leqslant \psi$ p.p. dans Ω.

Un cas particulier est constitué, lorsque $p = 2$, par le problème

$$
(1.11)\quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\cdot, n) \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + F(u, \nabla u) = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\ u \in H_0^1(\Omega)\,, \end{cases}
$$

où F vérifie (1.9) et (1.10) pour $p = 2$, et où les coefficients a_{ij} sont des fonctions de Carathéodory qui vérifient une hypothèse de coercivité uniforme (correspondant à (1.6))

$$\text{(1.12)} \qquad \begin{cases} \exists \alpha > 0, \ \text{ p.p. en } x \in \Omega, \ \ \forall \eta \in \mathbf{R}, \ \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, \eta)\xi_i \xi_j \geqslant \alpha |\xi|^2, \end{cases}$$

ainsi que (hypothèse analogue à (1.7))

$$\text{(1.13)} \qquad \operatorname*{Sup}_{|\eta| \leqslant r} |a_{ij}(x, \eta)| \leqslant C'(r) , \qquad \forall r \in \mathbf{R}^+ ,$$

où C' est une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$.

Ce type de problèmes a été étudié (avec des hypothèses non toujours comparables entre elles) par de nombreux auteurs, en particulier par O. A. Ladyzenskaya - N. N. Uralceva [16], J. Serrin [20], F. Tomi [22], Y. Choquet-Bruhat - J. Leray [8], J. P. Puel [19], H. Amann - M. G. Crandall [1], J. Deuel - P. Hess [9], P. Hess [13], H. Hofer [15], A. Bensoussan - J. Frehse - U. Mosco [3], A. Bensoussan - J. Frehse [2], ...

Tous ces travaux, à l'exception des deux derniers cités, utilisent de manière essentielle, soit des résultats de régularité sur l'opérateur A (qui nécessitent des hypotheses de régularité sur l'ouvert Ω, sur les coefficients et sur la dépendance de f par rapport à ses arguments), soit des hypothèses impliquant que la croissance de F par rapport à ∇u est d'ordre strictement inférieur à p.

La méthode que nous employons ici n'utilise que des hypothèses de régularité minimum, ce qui permet sa généralisation au cas des opérateurs A de type Leray-Lions dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et à la croissance d'ordre p de F par rapport à ∇u. Elle se décompose en plusieurs étapes:

1) En modifiant les opérateurs A et F par une troncature appropriée, on se ramène à résoudre un problème dont toute solution est automatiquement comprise entre la sous-solution φ et la sur-solution ψ.

2) On définit une équation approchée dont les solutions sont encore comprises entre φ et ψ, donc bornées dans $L^\infty(\Omega)$.

3) On obtient une estimation $W_0^{1,p}(\Omega)$ en multipliant par des fonctions test du type $\exp[tu^2]u$, t étant une constante convenablement choisie.

4) En multipliant par des fonctions test $\exp[t(u - M)^2]\theta^p(u - M)$, où $\theta \in \mathcal{D}^+(\Omega)$ et M est la moyenne de u sur une boule de rayon R, on

obtient une estimation dans $W^{1,q}(\omega)$, $q > p$, pour tout $\omega \subset\subset \Omega$. Ce résultat de régularité de type Meyers permet d'obtenir des renseignements de compacité et de passer à la limite dans l'équation approchée.

Pour le cas du problème (1.11), ainsi que pour le cas du problème (1.1) moyennant une hypothèse de forte monotonie (remplaçant (1.8)) il est possible de donner une démonstration plus simple du résultat d'existence sans utiliser de résultat de type Meyers mais en montrant directement la convergence forte dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ des solutions des équations approchées. On trouvera cette démonstration dans L. Boccardo - F. Murat - J. P. Puel [5], où sont également données des extensions au cas d'un problème d'inéquation variationnelle avec obstacle et d'un système de structure très particulière.

Remarquons enfin que dans le présent travail, tout comme dans [5], l'estimation $L^\infty(\Omega)$ joue un rôle fondamental. On peut cependant donner des résultats d'existence dans certains cas particuliers où les solutions n'appartiennent pas à $L^\infty(\Omega)$. C'est ainsi que nous démontrons dans L. Boccardo - F. Murat - J. P. Puel [6] l'existence d'une solution de

$$(1.14) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\cdot, u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u|\nabla u|^2 = h & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\ u \in H_0^1(\Omega)\,, \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions de Carathéodory, bornées, qui vérifient l'hypothèse de coercivité (1.12), et où h appartient seulement à $H^{-1}(\Omega)$. Plus généralement nous démontrons dans [6] l'existence d'une solution de (1.14) dans le cas où le terme $u|\nabla u|^2$ est remplacé par une non-linéarité qui vérifie des « conditions d'un seul côté ». La méthode de démonstration est alors complètement différente de celle employée ici, et utilise le lemme de Fatou comme dans A. Bensoussan - J. Frehse [2].

2. – Résultats.

Nous devons définir tout d'abord les notions de sous et sur-solutions pour le problème (1.1).

DÉFINITION. *Une fonction $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une sous-solution pour le problème* (1.1) *si*

$$(2.1) \qquad \begin{cases} A(\varphi) + F(\varphi, \nabla\varphi) \leqslant 0 & (\textit{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)) \\ \varphi|_\Gamma \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Une fonction $\psi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *est une sur solution pour le problème* (1.1) *si*

$$(2.2) \qquad \begin{cases} A(\psi) + F(\psi, \nabla\psi) \geqslant 0 & \text{(au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)) \\ \psi|_\Gamma \geqslant 0 \,. \end{cases}$$

Remarquons, comme précédemment, que les relations (2.1) et (2.2) ont bien un sens puisque, pour $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $A(\varphi) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $F(\varphi, \nabla\varphi) \in L^1(\Omega)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cet article.

THÉORÈME 2.1. *Sous les hypothèses* (1.2) *à* (1.10), *s'il existe une sous-solution* φ *et une sur-solution* ψ *du problème* (1.1) *avec* $\varphi, \psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *et* $\varphi \leqslant \psi$ p.p. *dans* Ω, *alors il existe une solution* u *du problème* (1.1) *avec* $\varphi \leqslant u \leqslant \psi$ p.p. *dans* Ω. *De plus il existe* $q > p$ *tel que* $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

REMARQUES 2.1:

1) Ce résultat généralise en particulier le théorème d'existence donné dans P. Hess [13], qui ne considère que des opérateur F dont la croissance par rapport à ∇u est d'ordre strictement inférieur à p. Par contre, nous faisons ici des hypothèses techniques légérement plus fortes, comme (1.7) et le fait que φ et ψ appartiennent à $W^{1,\infty}(\Omega)$ et non pas seulement à $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

2) Le résultat précédent ne concerne que l'existence d'une solution. Pour le cas $p = 2$, on pourra trouver un résultat sur la multiplicité des solutions dans H. Amann - M. G. Crandall [1].

3) La condition (1.7) peut être affaiblie. En fait, dans (1.7), nous n'avons besoin de faire varier η que dans un intervalle $[-\|\varphi\|_{L^\infty}, \|\psi\|_{L^\infty}]$. ce qui permet d'enlever toute restriction de croissance sur la dépendance par rapport à η des termes $a_i(x, \eta, \xi)$.

4) Si l'on remplace l'hypothèse (1.8) par l'hypothèse de forte monotonie par rapport à ξ

$$(1.8') \qquad \left| \begin{array}{l} \exists \alpha_0 > 0, \ \text{ p.p. en } x \in \Omega, \ \ \forall \eta \in \mathbf{R}, \ \ \forall \xi, \hat{\xi} \in \mathbf{R}^n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, \eta, \xi) - a_i(x, \eta, \hat{\xi})] \,.\, (\xi_i - \hat{\xi}_i) \geqslant \alpha_0 |\xi - \hat{\xi}|^p , \end{array} \right.$$

alors le résultat d'existence du théorème 2.1 reste valable si dans (1.7) on suppose seulement que $k \in L^{p'}(\Omega)$. (On perd alors bien sûr la régularité $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > p$).

Dans ce cas, la méthode de démonstration est analogue à celle utilisée dans L. Boccardo - F. Murat - J. P. Puel [5].

5) Dans le théorème 2.1, le résultat d'existence suppose la possibilité d'exhiber une sous-solution et une sur solution pour le problème, ce qui n'est pas toujours chose aisée. Nous donnons ci-dessous des exemples pour lesquels il est simple de conclure.

EXEMPLE 2.1. Considérons le problème

$$(2.3)\qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\cdot, u)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u + g(\cdot, u)|\nabla u|^2 = h \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\ u|_\Gamma = 0\,, \end{cases}$$

où $(x, \eta) \to a_{ij}(x, \eta)$ et $(x, \eta) \to g(x, \eta)$ sont des fonctions de Carathéodory vérifiant (1.13), les coefficients a_{ij} vérifient (1.12), et de plus $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ et

$$a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0 \quad \text{p.p. en } x \in \Omega\,.$$

Si $h \in L^\infty(\Omega)$, il est aisé de voir qu'on peut prendre comme sous et sur solutions des fonctions constantes

$$\left(\varphi = \frac{-\|h\|_{L^\infty}}{\alpha_0}\,; \qquad \psi = \frac{\|h\|_{L^\infty}}{\alpha_0}\right),$$

ce qui assure l'existence d'une solution pour le problème (2.3).

EXEMPLE 2.2. Pour $p > 1$ on considère

$$(2.4)\qquad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2}u + g(\cdot, u)|\nabla u|^p = h \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\ u|_\Gamma = 0\,, \end{cases}$$

où g est une fonction de Carathéodory vérifiant (1.13) et $h \in L^\infty(\Omega)$.

Ici encore nous obtenons des sous et sur solutions constantes qui assurent, grâce au théorème 2.1, l'existence d'une solution pour (2.4).

EXEMPLE 2.3. Soient des coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant (1.12), et considérons le problème

$$(2.5)\qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + F(u, \nabla u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\ u|_\Gamma = 0\,, \end{cases}$$

où F vérifie (1.9), (1.10) (où $p=2$) avec f de Carathéodory et telle que

$$(2.6)\quad \begin{cases} \exists C_1>0, \ \exists C_2>0, \ \text{tels que} \\ \text{p.p. en } x\in\Omega, \ \forall\eta\in\mathbb{R}, \ \forall\xi\in\mathbb{R}^n \quad f(x,\eta,\xi)\cdot\eta\geqslant -C_1|\xi|^2-C_2 . \end{cases}$$

(La condition (2.6) est utilisée dans de nombreux travaux, souvent en supposant $C_1<\alpha$, et est habituellement appelée « one-sided condition », cf. [2], [3], [14]).

Soit $B(0,R)$ une boule de rayon R qui contient Ω et soit ψ_0 telle que:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{a}_{ij}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_j}=k_0 \quad \text{dans } B(0,R), \\ \psi_0=0 \quad \text{sur } \partial B(0,R), \end{cases}$$

où les $\tilde{a}_{ij}$ sont des prolongements des a_{ij} à la boule $B(0,R)$ tels que (1.12) et (1.13) soient encore vérifiés, et où $k_0\geqslant 1$ (par exemple $k_0=1$).

Si $\psi_0\in W^{1,\infty}(B(0,R))$, en prenant $\delta\in\mathbb{R}$ assez grand on voit que $\psi_0+\delta$ et $-\psi_0-\delta$ sont sur-solution et sous-solution pour (2.5), ce qui assure l'existence d'une solution.

3. – Démonstrations.

Les démonstrations conduisant au résultat du théorème 2.1 se feront en plusieurs étapes que nous détaillons ci-dessous.

3.1. *Etape de troncature.*

Pour presque tout $x\in\Omega$ et pour $(\eta,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, nous définissons

$$(3.1)\qquad b_i(x,\eta,\xi)=\begin{cases} a_i(x,\eta,\xi) & \text{si } \varphi(x)<\eta<\psi(x), \\ a_i(x,\varphi(x),\xi) & \text{si } \eta\leqslant\varphi(x), \\ a_i(x,\psi(x),\xi) & \text{si } \eta\geqslant\psi(x); \end{cases}$$

$$(3.2)\qquad g(x,\eta,\xi)=\begin{cases} f(x,\eta,\xi) & \text{si } \varphi(x)<\eta<\psi(x), \\ f(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) & \text{si } \eta\leqslant\varphi(x), \\ f(x,\psi(x),\nabla\psi(x)) & \eta\geqslant\psi(x). \end{cases}$$

Cette troncature a été utilisée en particulier dans P. Hess [13].

Remarquons que la fonction g n'est pas de Carathéodory. Maintenant, pour $v\in W^{1,p}(\Omega)$, nous pouvons définir $B_i(v,\nabla v)$, $B(v)$ et $G(v,\nabla v)$ par les relations suivantes:

$$B_i(v, \nabla v)(x) = b_i(x, v(x), \nabla v(x)) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \tag{3.3}$$

$$B(v) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(v, \nabla v) \tag{3.4}$$

$$G(v, \nabla v)(x) = g(x, v(x), \nabla v(x)) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Nous allons considérer le problème

$$\begin{cases} B(u) + G(u, \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{3.6}$$

Les résultats qui suivent précisent les propriétés des opérateurs B et G et permettent en particulier de donner un sens au problème (3.6).

LEMME 3.1. *Les fonctions b_i définies par* (3.1) *vérifient* (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), *ce qui fait de B un opérateur du type Leray-Lions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$* $(1/p + 1/p' = 1)$.

La démonstration de ce lemme est évidente d'après la définition de b_i et les hypothèses faites sur les fonctions a_i.

LEMME 3.2. *L'opérateur $G: v \to G(v, \nabla v)$ est défini et continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$\forall v \in W^{1,p}(\Omega), \quad \text{p.p. en } x \in \Omega, \quad |G(v, \nabla v)(x)| \leq C_0(1 + |\nabla v(x)|^p). \tag{3.7}$$

DÉMONSTRATION. L'opérateur G est le composé de F par l'opérateur de troncature $\mathcal{T}$ défini par

$$\mathcal{T}(v) = v - (v - \psi)^+ + (\varphi - v)^+.$$

Or d'une part, $\mathcal{T}$ est défini et continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans lui même (cf. G. Stampacchia [21]) et envoie $W^{1,p}(\Omega)$ dans un borné de $L^\infty(\Omega)$ (l'intervalle des fonctions comprises entre φ et ψ); d'autre part on montre, en utilisant en particulier le théorème de Vitali, que sur un borné de $L^\infty(\Omega)$, F est défini et continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$.

Par suite $G = F \circ \mathcal{T}$ est défini et continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$; il est immediat de vérifier (3.7) (où C_0 depend de $\|\varphi\|_{W^{1,\infty}}$ et $\|\psi\|_{W^{1,\infty}}$).

Les deux lemmes précédents permettent de préciser que dans le problème (3.6), l'équation

$$B(u) + G(u, \nabla u) = 0$$

a bien un sens dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou plus précisément dans $W^{-1,p'}(\Omega)+L^1(\Omega)$.

PROPOSITION 3.3. *Toute solution u du problème* (3.6) *vérifie $\varphi\leqslant u\leqslant\psi$ p.p. dans Ω; elle est en fait solution du problème* (1.1).

DÉMONSTRATION. Soit u une solution de (3.6). Montrons que $\varphi\leqslant u$ p.p. dans Ω. Puisque $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $\varphi\leqslant 0$ sur Γ, nous avons

$$(\varphi-u)^+\in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Pour $M\in\mathbf{R}^+$, nous tronquons la fonction $(\varphi-u)^+$ à M en posant

$$(\varphi-u)^+_M(x)=\begin{cases}(\varphi-u)^+(x) & \text{si } (\varphi-u)^+(x)<M\\ M & \text{si } (\varphi-u)^+(x)>M\,.\end{cases}$$

Alors, pour tout $M\in\mathbf{R}^+$, $(\varphi-u)^+_M\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

D'après (2.1) et la définition de B, nous avons

$$B(\varphi)+F(\varphi,\nabla\varphi)\leqslant 0\qquad\text{dans } W^{-1,p'}(\Omega)+L^1(\Omega)\,.$$

Donc, d'après (3.6),

$$B(\varphi)-B(u)+F(\varphi,\nabla\varphi)-G(u,\nabla u)\leqslant 0\qquad\text{dans } W^{-1,p'}(\Omega)+L^1(\Omega)\,. \tag{3.8}$$

En multipliant (3.8) par $(\varphi-u)^+_M$ qui est un élément positif de $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega\sum_{i=1}^n[B_i(\varphi,\nabla\varphi)-B_i(u,\nabla u)]\frac{\partial}{\partial x_i}[(\varphi-u)^+_M]\,dx&\\ +\int_\Omega[F(\varphi,\nabla\varphi)-G(u,\nabla u)](\varphi-u)^+_M\,dx&\leqslant 0\,.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Posons:

$$\omega_0=\{x\colon x\in\Omega,\ \varphi(x)-u(x)\geqslant 0\}\,,$$

$$\omega_0^M=\{x\colon x\in\Omega,\ 0\leqslant\varphi(x)-u(x)\leqslant M\}\subset\omega_0\,,$$

(ces ensembles sont définis à des ensembles négligeables près). Alors:

$$\begin{cases}(\varphi-u)^+_M=0 & \text{si } x\in\Omega-\omega_0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi-u)^+_M=0 & \text{si } x\in\Omega-\omega_0^M.\end{cases}$$

D'autre part, d'après la définition de B_i et de G, nous avons presque partout sur ω_0 (donc aussi sur ω_0^M)

$$\left\{\begin{array}{ll} B_i(u, \nabla u)(x) = a_i(x, \varphi(x), \nabla u(x))\,, \\ B_i(\varphi, \nabla\varphi)(x) = a_i(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x))\,, \\ G(u, \nabla u)(x) \ = F(\varphi, \nabla\varphi)(x)\,. \end{array}\right.$$

Donc

$$\int\limits_\Omega [F(\varphi, \nabla\varphi) - G(u, \nabla u)]\,(\varphi - u)_M^+\,dx = \int\limits_{\omega_0} [F(\varphi, \nabla\varphi) - G(u, \nabla u)]\,(\varphi - u)_M^+\,dx = 0\,,$$

et (3.9) devient

$$\int\limits_{\omega_0^M} \sum_{i=1}^n [a_i(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) - a_i(x, \varphi(x), \nabla u(x))]\,\frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi(x) - u(x)]\,dx \leqslant 0. \tag{3.10}$$

D'après (1.8), cela entraine que

$$\nabla\varphi = \nabla u \quad \text{p.p. sur } \omega_0^M,$$

et donc

$$\nabla(\varphi - u)_M^+ = 0\,, \quad \text{soit } (\varphi - u)_M^+ = 0\,.$$

Par suite, nous avons

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ : \quad (\varphi - u)_M^+ = 0\,,$$

et donc

$$(\varphi - u)^+ = 0\,.$$

Par un raisonnement analogue, nous pouvons montrer que

$$(u - \psi)^+ = 0\,,$$

soit finalement que

$$\varphi \leqslant u \leqslant \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.$$

En utilisant la propriété que sur l'ensemble où $u = \varphi$, nous avons $\nabla u = \nabla\varphi$ p.p. (de même sur l'ensemble où $u = \psi$, $\nabla u = \nabla\psi$ p.p.) (cf. G. Stampacchia [21]), nous obtenons aisément

$$B(u) = A(u) \quad \text{dans } W^{-1,p'}(\Omega)\,,$$

$$G(u, \nabla u) = F(u, \nabla u) \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (\text{donc dans } L^1(\Omega))\,;$$

puisque u vérifie (3.6), elle est bien solution de (1.1).

La proposition 3.3 nous permet de nous ramener dorénavant à la recherche de solutions pour le problème (3.6).

3.2. *Etape d'approximation.*

A l'aide d'une troncature simple, nous allons définir un problème approché du problème (3.6) pour lequel nous pourrons montrer l'existence d'une solution.

Pour $m \in \mathbf{N}$, nous définissons une fonction $g_m\colon \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de la manière suivante:

pour presque tout $x \in \Omega$, et pour tout $(\eta, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ nous posons

$$(3.11) \qquad g_m(x, \eta, \xi) = \begin{cases} g(x, \eta, \xi) & \text{si } |g(x, \eta, \xi)| \leqslant m\,, \\ m\,\dfrac{g(x, \eta, \xi)}{|g(x, \eta, \xi)|} & \text{si } |g(x, \eta, \xi)| > m\,. \end{cases}$$

Pour $v \in W^{1,p}(\Omega)$, nous considérons $G_m(v, \nabla v)$ défini par

$$(3.12) \qquad G_m(v, \nabla v)(x) = g_m(x, v(x), \nabla v(x)) \quad \text{p.p. en } x \in \Omega\,.$$

Pour $m \in \mathbf{N}$ fixé, pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega)$ il est clair que $G_m(v, \nabla v) \in L^\infty(\Omega)$ et de plus pour tout $q \in [1, +\infty[$, l'application

$$v \to G_m(v, \nabla v)$$

est continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

D'autre part, d'après (3.7) et (3.11) nous avons

$$(3.13) \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega)\,, \quad \text{p.p. en } x \in \Omega\,, \quad |G_m(v, \nabla v)(x)| \leqslant C_0(1 + |\nabla v(x)|^p)$$

(où la constante C_0 est définie en (3.7) et est indépendante de m).

Nous allons maintenant nous intéresser au problème

$$(3.14) \qquad \begin{cases} B(u_m) + G_m(u_m, \nabla u_m) = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(\Omega)\,, \\ u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)\,. \end{cases}$$

PROPOSITION 3.4. *Pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *le problème* (3.14) *admet une solution* u_m.

DÉMONSTRATION. Elle consiste à montrer que l'opérateur:

$$T_m(v) = B(v) + G_m(v, \nabla v)$$

satisfait les hypothèses du théorème 1 de J. Leray - J. L. Lions [17], ou encore est un « opérateur du calcul des variations » au sens de la définition 2.2 de J. L. Lions [18] (page 180). Notons que comme l'opérateur G_m est défini à partir d'une fonction g_m qui n'est pas de Carathéodory (à cause de la troncature effectuée en (3.2)), les théorèmes « concrets » de type « Leray-Lions » enoncés dans la littérature ne s'appliquent pas tels quels au cas présent.

En suivant la présentation de J. L. Lions [18], définissons pour u, $v \in W^{1,p}(\Omega)$

$$B_i(u, \nabla v)(x) = b_i(x, u(x), \nabla v(x)) \quad \text{p.p. dans } \Omega\,, \tag{3.15}$$

$$T_m(u, v) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(u, \nabla v) + G_m(u, \nabla u)\,.$$

On a alors

$$T_m(v) = T_m(v, v)\,.$$

Comme $G_m(v, \nabla v)$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$, il est facile de vérifier la coercivité de T_m. Pour établir que T_m est un « opérateur du calcul des variations » au sens de J. L. Lions [18] (définition 2.2, page 180), il suffit de suivre les raisonnements effectués dans ce livre. Le seul point différent consiste à utiliser le lemme suivant:

LEMME 3.5. *Si* $u_\mu \rightharpoonup u$ *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *faible et si*

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [B_i(u_\mu, \nabla u_\mu) - B_i(u_\mu, \nabla u)],\ u_\mu - u \right\rangle \to 0\,,$$

alors $u_\mu \to u$ *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *fort.*

La démonstration de ce lemme se trouve dans F. E. Browder [7], page 27 (démonstration de la propriété S). Si on le compare avec le lemme 3.3 de J. Leray - J. L. Lions [17] (page 104) ou avec le lemme 2.2 de J. L. Lions [18] (page 184), on constate que le lemme 3.5 donne un résultat plus fort que celui de ces auteurs (convergence forte des u_μ), car l'hypothèse de coercivité (1.6) faite ici est plus forte que la leur.

3.3. *Etape d'estimations.*

Nous allons maintenant obtenir sur les solutions du problème (3.14) des estimations indépendantes de m, successivement dans $L^\infty(\Omega)$, dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, puis dans $W^{1,q}(\omega)$ où $q > p$ et $\omega \subset\subset \Omega$.

3.3.1. *Estimation dans* $L^\infty(\Omega)$.

Posons

$$m_0 = \operatorname{Sup}\left[|F(\varphi, \nabla\varphi)|_{L^\infty(\Omega)}, |F(\psi, \nabla\psi)|_{L^\infty(\Omega)}\right]. \tag{3.16}$$

Nous avons alors le résultat suivant qui donne en particulier une estimation dans $L^\infty(\Omega)$ pour les solutions de (3.14).

PROPOSITION 3.6. *Si* $m \geqslant m_0$, *toute solution de* (3.14) *vérifie* $\varphi \leqslant u_m \leqslant \psi$ *p.p. dans* Ω.

DÉMONSTRATION. Montrons par exemple que $\varphi \leqslant u_m$ p.p. dans Ω. Puisque $m \geqslant m_0$,

$$G_m(\varphi, \nabla\varphi) = G(\varphi, \nabla\varphi) = F(\varphi, \nabla\varphi).$$

Si u_m est solution de (3.14) nous avons

$$B(\varphi) - B(u_m) + F(\varphi, \nabla\varphi) - G_m(u_m, \nabla u_m) \leqslant 0. \tag{3.17}$$

Nous procédons alors comme à la proposition 3.3, en multipliant (3.17) par $(\varphi - u_m)_M^+$ ($M \in \mathbb{R}^+$).

Il faut alors remarquer que sur l'ensemble des points où $u_m \leqslant \varphi$, nous avons presque partout $G(u_m, \nabla u_m) = G(\varphi, \nabla\varphi)$ et donc, puisque $m \geqslant m_0$, $G_m(u_m, \nabla u_m) = G(\varphi, \nabla\varphi) = F(\varphi, \nabla\varphi)$.

On obtient ainsi comme à la proposition 3.3

$$(\varphi - u_m)_M^+ = 0 \qquad \forall M \in \mathbb{R}^+,$$

soit $\varphi \leqslant u_m$ p.p. dans Ω.

De manière analogue, on montre également que

$$u_m \leqslant \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

d'où la proposition 3.6.

3.3.2. *Estimation dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nous savons maintenant que pour $m \geqslant m_0$, u_m reste bornée dans $L^\infty(\Omega)$ indépendemment de m. Nous allons montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.7. *Pour $m \geq m_0$, si u_m est solution de* (3.14), *u_m reste bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ indépendemment de m.*

DÉMONSTRATION. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ (nous choisirons plus loin $t = C_0^2/2\alpha^2$, où C_0 est donnée par (3.7)) et considérons la fonction

$$v_m = \exp[tu_m^2]\cdot u_m \tag{3.18}$$

(des fonctions test de ce type ont été utilisées par de nombreux auteurs, en particulier par O. A. Ladyzenskaya - N. N. Uralceva [16] et S. Hildebrandt - K. O. Widman [14]).

Comme $u_m \in L^\infty(\Omega)$, nous avons

$$v_m \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Multiplions (3.14) par v_m, il vient

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\exp[tu_m^2]\,dx + 2t\int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\cdot u_m^2\cdot \exp[tu_m^2]\,dx + \int_\Omega G_m(u_m, \nabla u_m)\exp[tu_m^2]\cdot u_m\,dx = 0\,.$$

En utilisant (1.6) et (3.13), nous obtenons

$$\alpha\int_\Omega \exp[tu_m^2]\,|\nabla u_m|^p\,dx + 2t\alpha\int_\Omega \exp[tu_m^2]\,|\nabla u_m|^p u_m^2\,dx \leq C_0\int_\Omega \exp[tu_m^2]\,|u_m|\,(1+|\nabla u_m|^p)\,dx\,.$$

Avec le choix $t = C_0^2/2\alpha^2$, nous avons, puisque u_m est bornée dans $L^\infty(\Omega)$,

$$C_0\int_\Omega \exp[tu_m^2]\,|u_m|\,dx \leq C_1 \qquad (\text{avec } C_1 \text{ indépendante de } m)\,,$$

et en appliquant l'inégalité de Young au terme

$$C_0\int_\Omega \exp[tu_m^2]|u_m|\,|\nabla u_m|^p\,dx = C_0\int_\Omega \left[\exp[\tfrac12 tu_m^2]|u_m|\,|\nabla u_m|^{p/2}\right]\left[\exp[\tfrac12 tu_m^2]|\nabla u_m|^{p/2}\right]dx \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \exp[tu_m^2]|\nabla u_m|^p\,dx + \frac{C_0^2}{2\alpha}\int_\Omega \exp[tu_m^2]|u_m|^2\,|\nabla u_m|^p\,dx\,,$$

il vient

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}\exp[tu_m^2]|\nabla u_m|^p\,dx+\frac{C_0^2}{2\alpha}\int_{\Omega}\exp[tu_m^2]|u_m|^2\,|\nabla u_m|^p\,dx\leqslant C_1\,.$$

Donc u_m reste bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ indépendemment de m.

3.3.3. *Estimation dans* $W^{1,q}(\omega)$ $(q>p,\ \omega\subset\subset\Omega)$.

Dans le cas où l'hypothèse (1.8) est remplacée par l'hypothèse (1.8′) de forte monotonie par rapport à ξ pour les fonctions a_i, cette partie peut être remplacée par la démonstration directe de la convergence forte d'une sous-suite de (u_m) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, comme cela est fait pour (1.11) dans L. Boccardo - F. Murat - J.P. Puel [5].

Sous les hypothèses plus faibles considérées ici, nous allons remplacer cet argument par une estimation de u_m dans $W^{1,q}(\omega)$, où $q>p$ (pour tout ω tel que $\omega\subset\subset\Omega$). Ceci donnera un résultat de régularité dans $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour les solutions de (1.1), résultat qui se révèle d'autre part fort utile lorsqu'on considère, au lieu de l'opérateur A, une famille d'opérateurs A_ε uniformément elliptiques et bornés (voir L. Boccardo - F. Murat [4] pour l'homogénéisation de tels problèmes).

PROPOSITION 3.8. *Il existe $q>p$ tel que pour tout ouvert ω vérifiant $\omega\subset\subset\Omega$ et pour toute solution u_m du problème* (3.14), *$u_m\in W^{1,q}(\omega)$ et u_m reste bornée dans $W^{1,q}(\omega)$ indépendemment de m.*

La proposition 3.8 donne un résultat de régularité de type Meyers. La démonstration qui suit reprend une idée de M. Giaquinta - E. Giusti [11]. Le résultat pour $p=2$ peut être trouvé dans M. Giaquinta - G. Modica [12] (page 156).

DÉMONSTRATION. Soit $\bar\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases}0\leqslant\bar\theta\leqslant1\,,\\ \bar\theta=1 & \text{sur la boule } B(0,\tfrac12)\,,\\ \bar\theta=0 & \text{en dehors de la boule } B(0,1)\,.\end{cases}$$

Pour $x_0\in\Omega$, on notera

$$R(x_0)=\operatorname{Sup}\{R\colon R\in\mathbb{R}^+,\ B(x_0,R)\subset\Omega\}\,.$$

Puisque Ω est borné, $R(x_0)$ est borné indépendemment de x_0.

Si $R < R(x_0)$, nous considérons θ_R définie par

$$\theta_R(x) = \bar{\theta}\left(\frac{x - x_0}{R}\right).$$

Alors $\theta_R \in \mathcal{D}(\Omega)$ et de plus

$$(3.19)\qquad \begin{cases} \theta_R = 1 & \text{sur } B\left(x_0, \dfrac{R}{2}\right), \\ \theta_R = 0 & \text{en dehors de } B(x_0, R), \\ \left|\dfrac{\partial \theta_R}{\partial x_i}\right| \leqslant \dfrac{C_2}{R}, & \text{où } C_2 \text{ ne dépend que de } \bar{\theta}. \end{cases}$$

D'autre part, nous appellerons $\overline{u_m^R}$ la moyenne de la fonction u_m sur la boule $B(x_0, R)$, c'est-à-dire

$$(3.20)\qquad \overline{u_m^R} = \frac{1}{\operatorname{mes} B(x_0, R)} \int\limits_{B(x_0,R)} u_m(x)\, dx.$$

(Remarquons que les nombres $\bar{u}_m^R$ sont bornés indépendemment de m et de R). Posons pour simplifier les notations dans les calculs

$$t = \frac{C_0^2}{2\alpha^2}, \qquad M = \overline{u_m^R};$$

pour $R < R(x_0)$ nous définissons

$$(3.21)\qquad w_m = \exp\left[t(u_m - M)^2\right](u_m - M)\theta_R^p.$$

Nous savons qu'alors $w_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et que

$$\frac{\partial w_m}{\partial x_i} = \theta_R^p \cdot \exp\left[t(u_m - M)^2\right]\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + 2t\theta_R^p \cdot \exp\left[t(u_m - M)^2\right]\cdot (u_m - M)^2\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + p\exp\left[t(u_m - M)^2\right](u_m - M)\cdot \theta_R^{p-1}\cdot \frac{\partial \theta_R}{\partial x_i}.$$

Multiplions (3.14) par w_m pour $m \geqslant m_0$: il vient

$$(3.22)\qquad \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m)\cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\cdot \exp\left[t(u_m - M)^2\right]\cdot \theta_R^p\, dx + 2t\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m)\cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\cdot (u_m - M)^2 \cdot \theta_R^p \cdot \exp\left[t(u_m - M)^2\right] dx$$

$$+ p\int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m)\cdot\frac{\partial\theta_R}{\partial x_i}\cdot\theta_R^{p-1}\cdot\exp[t(u_m-M)^2]\cdot(u_m-M)\,dx$$

$$+\int_\Omega G_m(u_m, \nabla u_m)\cdot\exp[t(u_m-M)^2]\cdot(u_m-M)\cdot\theta_R^p\,dx = 0\,.$$

En utilisant (1.6), (1.7) et (3.13), nous obtenons

$$\text{(3.23)}\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|\nabla u_m|^p\cdot\theta_R^p\,dx\\ &\quad + 2t\alpha\int_\Omega \exp[t(u_m-)M^2]\,(u_m-M)^2\cdot|\nabla u_m|^p\cdot\theta_R^p\,dx\\ &\leqslant C_0\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|\,(1+|\nabla u_m|^p)\,\theta_R^p\,dx\\ &\quad + C_3\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|\,[1+k+|\nabla u_m|^{p-1}]\cdot\theta_R^{p-1}|\nabla\theta_R|\,dx\,.\end{aligned}\right.$$

(les constantes C_i seront toujours indépendantes de m et de R; k est la fonction intervenant dans (1.7)).

En appliquant l'inégalité de Young, nous pouvons majorer les termes du deuxième membre de (3.23) de la manière suivante:

$$C_0\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|\,|\nabla u_m|^p\,\theta_R^p\,dx \leqslant \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|\nabla u_m|^p\,\theta_R^p\,dx$$
$$+\frac{C_0^2}{2\alpha}\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|^2\,|\nabla u_m|^p\,\theta_R^p\,dx\,;$$

$$C_3\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|\,|\nabla u_m|^{p-1}\,\theta_R^{p-1}\,|\nabla\theta_R|\,dx$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{4}\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|\nabla u_m|^p\,\theta_R^p\,dx$$
$$+ C_4\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|^p\,|\nabla\theta_R|^p\,dx;$$

$$C_3\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|\,(1+k)\,\theta_R^{p-1}\,|\nabla\theta_R|\,dx$$
$$\leqslant C_4\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m-M|^p\,|\nabla\theta_R|^p\,dx$$
$$+ C_5\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,(1+k)^{p'}\,\theta_R^p\,dx\,.$$

En utilisant maintenant ces majorations dans (3.23) il vient

$$\frac{\alpha}{4}\int_\Omega \exp[t(u_m - M)^2]\,|\nabla u_m|^p\,\theta_R^p\,dx + \frac{C_0^2}{2\alpha}\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,(u_m-M)^2\,|\nabla u_m|^p\,\theta_R^p\,dx$$
$$\leq 2C_4\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,|u_m - M|^p\,|\nabla\theta_R|^p\,dx$$
$$+ C_6\int_\Omega \exp[t(u_m-M)^2]\,[|u_m - M| + |1+k|^{p'}]\,\theta_R^p\,dx\,.$$

Posons $\tilde{k} = |u_m - M| + |1+k|^{p'}$; nous avons alors

$$\tilde{k}\in L^{1+\varepsilon_2}(\Omega) \qquad \text{avec } \varepsilon_2 > 0\,,$$

et du fait de l'estimation de u_m dans $L^\infty(\Omega)$, $\tilde{k}$ reste borné dans $L^{1+\varepsilon_2}(\Omega)$ indépendemment de m et nous obtenons

$$\int_{B(x_0,R/2)} |\nabla u_m|^p\,dx \leq \frac{C_7}{R^p}\int_{B(x_0,R)} |u_m - \overline{u_m^R}|^p\,dx + C_8\int_{B(x_0,R)} \tilde{k}\,dx\,. \tag{3.24}$$

Soit maintenant s défini par

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \leq 1\,, \\ s = 1 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} > 1\,. \end{cases}$$

Le théorème de plongement de Sobolev implique alors

$$W^{1,s}(B(x_0,R)) \subset L^p(B(x_0,R))\,.$$

De plus, en travaillant sur $B(0,1)$ puis en effectuant une translation et une homothétie de rapport R, on montre que

$$\begin{cases} \forall v \in W^{1,s}(B(x_0,R)), \\ \left(\displaystyle\int_{B(x_0,R)} |v - \overline{v^R}|^p\,dx\right)^{1/p} \leq C_9 R^{n(1/p+1/n-1/s)}\left(\displaystyle\int_{B(x_0,R)} |\nabla v|^s dx\right)^{1/s} \end{cases} \tag{3.25}$$

où C_9 est une constante indépendante de R et de x_0, et où $\overline{v^R}$ désigne la moyenne de v sur $B(x_0,R)$.

En utilisant (3.25) dans (3.24) il vient

$$\int_{B(x_0,R/2)} |\nabla u_m|^p \, dx \leqslant \frac{C_{10}}{R^p} \cdot R^{np(1/p+1/n-1/s)} \Bigl(\int_{B(x_0,R)} |\nabla u_m|^s dx \Bigr)^{p/s} + C_8 \int_{B(x_0,R)} \tilde{k} \, dx \,. \tag{3.26}$$

En divisant par mes $B(x_0, R/2)$ et en notant $\fint_{B(x_0,\varrho)}$ la moyenne sur la boule $B(x_0, \varrho)$, nous obtenons

$$\fint_{B(x_0,R/2)} |\nabla u_m|^p \, dx \leqslant C_{11} \Bigl(\fint_{B(x_0,R)} |\nabla u_m|^p dx \Bigr)^{p/s} + C_{12} \fint_{B(x_0,R)} \tilde{k} \, dx \,. \tag{3.27}$$

En posant

$$\left| \begin{array}{ll} r = p/s & (r > 1) \\ h_m = |\nabla u_m|^s & (h_m \in L^p(\Omega)) \,, \end{array} \right.$$

nous pouvons réécrire (3.27) sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} \forall x_0 \in \Omega, \quad \forall R < R(x_0) \,, \\ \displaystyle \fint_{B(x_0,R/2)} h_m^r \, dx \leqslant C_{11} \Bigl(\fint_{B(x_0,R)} h_m \, dx \Bigr)^r + C_{12} \fint_{B(x_0,R)} \tilde{k} \, dx \end{array} \right. \tag{3.28}$$

(où $\tilde{k} \in L^{1+\varepsilon_3}(\Omega)$).

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de F. W. Gehring [10] (voir M. Giaquinta · G. Modica [12], Proposition 5.1), qui assure qu'il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $C_{13}(\omega)$ tels que:

$$h_m \in L^{r+\varepsilon_3}(\omega) \qquad \text{et} \qquad \|h_m\|_{L^{p+\varepsilon_3}} \leqslant C_{13}(\omega) \,.$$

Donc il existe $q > p$ tel que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, $u_m \in W^{1,q}(\omega)$ et u_m reste bornée dans $W^{1,q}(\omega)$ par une constante indépendante de m. Ceci termine la démonstration de la proposition 3.8.

3.4. *Etape de passage à la limite.*

Les résultats précédents nous permettent de dire qu'on peut extraire de la suite (u_m) une sous-suite, encore notée (u_m) telle que si $m \to +\infty$

$$\left| \begin{array}{ll} u_m \rightharpoonup u & \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ faible} \,, \\ u_m \to u & \text{dans } L^p(\Omega) \text{ fort et p.p. dans } \Omega \,. \end{array} \right. \tag{3.29}$$

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega \subset\subset \Omega$ et soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\theta \geqslant 0$, telle que $\theta = 1$ sur ω. Nous noterons ω' le support de θ ($\omega' \subset\subset \Omega$).

Multiplions (3.14) par $\theta(u_m - u)$. Il vient (cf. (3.15) pour la définition de $B_i(u, \nabla v)$)

$$(3.30)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m) \frac{\partial}{\partial x_i}(u_m - u)\theta \cdot dx \\ &+\int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(u_m - u)\,dx + \int_\Omega G_m(u_m, \nabla u_m)\cdot\theta\cdot(u_m - u)\,dx = 0\,, \end{aligned}\right.$$

soit encore

$$(3.31)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^n [B_i(u_m, \nabla u_m) - B_i(u_m, \nabla u)] \frac{\partial}{\partial x_i}(u_m - u)\cdot\theta\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u_m) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(u - u_m)\,dx \\ &+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n B_i(u_m, \nabla u) \frac{\partial}{\partial x_i}(u - u_m)\cdot\theta\,dx + \int_\Omega G_m(u_m, \nabla u_m)\cdot\theta\cdot(u - u_m)\,dx\,. \end{aligned}\right.$$

Montrons que chacun des termes du 2ème membre de (3.31) tend vers 0 lorsque $m \to +\infty$.

1er *terme*: D'après (1.7), $B_i(u_m, \nabla u_m)$ reste borné dans $L^{p'}(\Omega)$. Nous savons que $\partial\theta/\partial x_i \in L^\infty(\Omega)$ et que $(u - u_m) \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ fort. Donc ce premier terme tend vers 0.

2ème *terme*: Puisque $u_m \to u$ p.p. dans Ω, d'après (1.5) et (1.7), $B_i(u_m, \nabla u) \to B_i(u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ fort. D'autre part, $\theta \in L^\infty(\Omega)$ et $(\partial/\partial x_i)(u - u_m) \rightharpoonup 0$ dans $L^p(\Omega)$ faible. Par suite ce deuxième terme tend vers 0.

3ème *terme*: Comme u_m est bornée dans $W^{1,q}(\omega')$, d'après (3.13), $G_m(u_m, \nabla u_m)$ est bornée dans $L^{q/p}(\omega')$ (avec $q/p > 1$). D'autre part

$$(u - u_m) \to 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et

$$|u - u_m|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{est bornée}.$$

Donc en particulier

$$(u - u_m) \to 0 \quad \text{dans } L^{(q/p)'}(\omega') \text{ fort}$$

et ce troisième terme tend également vers 0.

Par conséquent, de (3.31) nous déduisons

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n [B_i(u_m, \nabla u_m) - B_i(u_m, \nabla u)] \frac{\partial}{\partial x_i}(u_m - u)\cdot\theta\, dx \to 0\,, \qquad \text{si } m \to +\infty\,.$$

D'après (1.8) et les propriétés de θ, ceci nous donne

$$\int_\omega \sum_{i=1}^n [B_i(u_m, \nabla u_m) - B_i(u_m, \nabla u)] \frac{\partial}{\partial x_i}(u_m - u)\, dx \to 0\,, \quad \text{si } m \to +\infty\,. \tag{3.32}$$

En raisonnant comme pour établir le lemme 3.5 ci dessus (voir F. E. Browder [7], lemme 3, page 13, et démonstration de la propriété S, page 27) nous obtenons que si $m \to +\infty$,

$$u_m \to u \quad \text{dans } W^{1,p}(\omega) \text{ fort}\,.$$

Alors d'après le lemme 3.2,

$$G(u_m, \nabla u_m) \to G(u, \nabla u) \quad \text{dans } L^1(\omega) \text{ fort}\,,$$

ce qui entraine, en utilisant le théorème de Vitali, que

$$G_m(u_m, \nabla u_m) \to G(u, \nabla u) \quad \text{dans } L^1(\omega) \text{ fort}\,.$$

De plus, nous avons

$$B_i(u_m, \nabla u_m) \to B_i(u, \nabla u) \quad \text{dans } L^{p'}(\omega) \text{ fort}\,.$$

Si maintenant $\hat\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec supp $\hat\theta \subset \omega$, nous pouvons multiplier (3.14) par $\hat\theta$ et passer à la limite, ce qui donne

$$\langle B(u), \hat\theta\rangle + \int_\Omega G(u, \nabla u)\hat\theta\, dx = 0\,.$$

Comme ceci est valable pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, nous avons bien

$$B(u) + G(u, \nabla u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,,$$

et donc u est solution de (3.6). De plus, nous savons bien sûr que $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, et ceci termine la démonstration du théorème 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. AMANN - M. G. CRANDALL, *On some existence theorems for semi-linear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), pp. 779-790.

[2] A. BENSOUSSAN - J. FREHSE, *Jeux differentiels stochastiques et systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, **293**, Série I (1981), pp. 187-190, et article à paraître.

[3] A. BENSOUSSAN - J. FREHSE - U. MOSCO, *A stochastic impulse control problem with quadratic growth Hamiltonian and the corresponding quasi-variational inequality*, J. Reine Angew. Math., **331** (1982), pp. 124-145.

[4] L. BOCCARDO - F. MURAT, *Homogénéisation de problèmes quasilinéaires*, Atti del Convegno « Studio di Problemi limite della Analisi Funzionale » (Bressanone, sett. 1981), Pitagora Editrice, Bologna (1982), pp. 13-51.

[5] L. BOCCARDO - F. MURAT - J. P. PUEL, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasilinéaires à croissance quadratique*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, vol. IV, ed. by H. BREZIS and J. L. LIONS, Research Notes in Mathematics, **84**, Pitman, London (1983), pp. 19-73.

[6] L. BOCCARDO - F. MURAT - J. P. PUEL, *Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires*, Portugaliae Math., **41** (1982) (volume dedié à la mémoire de J. Sebastião e Silva), à paraître.

[7] F. E. BROWDER, *Existence theorems for nonlinear partial differential equations*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XVI, ed. by S. S. CHERN and S. SMALE, American Mathematical Society, Providence (1970), pp. 1-60.

[8] Y. CHOQUET-BRUHAT - J. LERAY, *Sur le problème de Dirichlet quasilinéaire d'ordre 2*, C. R. Acad. Sc. Paris, **274**, série A (1972), pp. 81-85.

[9] J. DEUEL - P. HESS, *Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions*, Israel J. Math., **29** (1978), pp. 92-104.

[10] F. W. GEHRING, *The L^p integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping*, Acta Math., **130** (1973), pp. 265-277.

[11] M. GIAQUINTA - E. GIUSTI, *Nonlinear elliptic systems with quadratic growth*, Manuscripta Math., **24** (1978), pp. 323-349.

[12] M. GIAQUINTA - G. MODICA, *Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems*, J. Reine Angew. Math., **311-312** (1979), pp. 145-169.

[13] P. HESS, *On a second order nonlinear elliptic boundary value problem*, Nonlinear Analysis, A collection of papers in honor of E. H. ROTHE, ed. by L. CESARI, R. KANNAN and H. F. WEINBERGER, Academic Press, New York (1978), pp. 99-107.

[14] S. HILDEBRANDT - K. O. WIDMAN, *Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order*, Math. Z., **142** (1975), pp. 67-86.

[15] H. HOFER, *Existence and multiplicity result for a class of second order elliptic equations*, Proc. Roy. Soc. Edimburgh, série A, **88** (1981), pp. 83-92.

[16] O. A. LADYZENSKAYA - N. N. URALCEVA, *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris (1968).

[17] J. LERAY - J. L. LIONS, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), pp. 97-107.

[18] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[19] J. P. PUEL, *Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasilinéaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Serie IV, **3** (1976), pp. 89-119.

[20] J. SERRIN, *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equation with many independent variables*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, **264** (1969), pp. 413-496.

[21] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, n°. 16, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1966).

[22] F. TOMI, *Über semilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z., **111** (1969), pp. 350-366.

L.B. Dipartimento di Matematica
II Università di Roma
Via Orazio Raimondo
00173 (La Romanina) Roma

F.M. - J.P.P. Laboratoire d'Analyse Numèrique
Université Pierre et Marie Curie
Tour 55-65 - 5ème étage
4 Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05