ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. BENSOUSSAN
J.-L. LIONS

Problèmes de temps d'arrêt optimal pour les systèmes distribués stochastiques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 5, nº 1 (1978), p. 181-213

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1978_4_5_1_181_0>

Problèmes de temps d'arrêt optimal pour les systèmes distribués stochastiques.

A. BENSOUSSAN (*) - J.-L. LIONS (**)

dédié à Jean Leray

Introduction.

Considérons d'abord un système gouverné par une équation différentielle stochastique en *dimension finie*; l'état est donné, pour $t > 0$, par la solution de:

(1) $$dy = g(y)\,dt + \sigma(y)\,dw(t)\,, \qquad t > 0$$

où w est un processus de Wiener à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$ et où dans (1)

(2) $$y(0) = h \in \boldsymbol{R}^n\,.$$

Soit $y_h(t)$ la solution de (1) (2) (sous des hypothèses convenables sur g et σ). On considère, pour tout temps d'arrêt θ, la fonction coût:

(3) $$J_h(\theta) = E\Big[\int_0^\theta \exp[-\alpha t]\,L(y_h(t))\,dt + l(y_h(\theta))\exp[-\alpha\theta]\Big]$$

avec L et l fonctions données sur $\boldsymbol{R}^n$, puis le problème de *contrôle de temps d'arrêt optimal*: *trouver*

(4) $$u(h) = \inf_\theta J_h(\theta)$$

(*) Université Paris IX.
(**) Collège de France.
Pervenuto alla Redazione il 1° Giugno 1977.

et, admettant u trouvé, en déduire un temps d'arrêt optimal $\hat{\theta}$ (dont on montre en même temps l'existence).

Nous avons montré dans des travaux antérieurs (Bensoussan-Lions [1] [2]) que ce problème équivaut à la résolution d'une *Inéquation variationnelle* (I.V) (cf. Lions-Stampacchia [1] pour les I.V. stationnaires et d'évolution).

Notre objet est ici d'aborder l'étude de ce problème lorsque (1) est remplacée par une *équation aux dérivées partielles stochastiques.*

Il y a ici deux types de difficultés principales:

(i) l'extension (si possible) de la théorie de Ito aux équations aux dérivées partielles;

(ii) l'extension, sous une forme convenable, de la théorie des I.V. *en dimension infinie.*

L'étude de (i) a été abordée de façon de plus en plus systématique par Bensoussan-Temam [1], Pardoux [1], Viot [1]. Pour éviter une longueur excessive à cet article, nous nous bornons à un *cas particulier très simple* (le plus simple possible en fait) d'équation aux dérivées partielles stochastiques, cas particulier où une solution directe simple est possible; si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, de frontière Γ, on considère:

$$(5)\qquad \left| \begin{array}{l} dy(t) = (\Delta y)\, dt + F(y)\, dw(t)\,, \\ y = y(x, t, \omega)\,, \\ y = 0 \ \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, +\infty[\,, \\ y(x, 0, \omega) = h(x)\,, \end{array} \right.$$

où:

$$(6)\qquad h \in H = L^2(\mathcal{O})\,,$$

où Δ désigne le Laplacien en x, où F est une fonction (convenable) de $H \to \mathcal{L}(H; H)$ (cf. hypothèse au n. 1.2) et où w est un processus de Wiener à valeurs dans H.

On montre que, dans un sens convenable, il existe une solution y_h et une seule de (5).

Si maintenant L et l sont des fonctions données sur H-espace *qui remplace* $\boldsymbol{R}^n$-alors on peut définir (3) et ensuite (4).

Notre problème est alors:

Peut-on « caractériser » $u(h)$ et peut-on en déduire-supposant $u(h)$ connu-l'existence d'un contrôle optimal et sa construction?

Nous apportons ici quelques éléments de réponse.

Nous montrons essentiellement:

(j) que u peut être caractérisée *comme l'élément maximum de l'ensemble de fonctions vérifiant*:

$$\text{(7)} \qquad \left| \begin{array}{l} w \leqslant l\,, \\[2ex] w \leqslant \displaystyle\int_0^t \exp\left[-\alpha s\right]\phi(s) L\, ds + \exp\left[-\alpha t\right]\phi(t) w \qquad \forall t \geqslant 0 \end{array} \right.$$

où $\phi(t)$ est le *semi-groupe* défini sur une fonction f mesurable et bornée sur H par:

$$\text{(8)} \qquad \big(\phi(t) f\big)(h) = Ef\big(y_h(t)\big) \;;$$

(jj) qu'un contrôle optimal est donné, pour h fixé, par:

$$\text{(9)} \qquad \hat{\theta}_h = \inf_{t \geqslant 0} \left\{ t | u\big(y_h(t)\big) = l\big(y_h(t)\big) \right\} .$$

Notons que l'élément maximum de l'ensemble (7) est solution *en dimension finie et si l est assez régulière* d'une I.V. pour un opérateur elliptique du *2ème ordre*; même en dimension finie si l est seulement *continue*, cela est peut être la seule forme raisonnable d'une « Inéquation Variationnelle » pour des opérateurs du 2ème ordre *sous forme non divergence*; il n'est donc pas déraisonnable de considérer (j) comme une solution d'une I.V. en dimension infinie, mais il est clair qu'il s'agit là seulement d'un premier pas et que de nombreux problèmes restent à résoudre dans ces directions.

Le plan est le suivant:

1. – *Un modèle de système distribué stochastique*

1.1. Notations. Intégrale stochastique hilbertienne.
1.2. E.D.P. stochastique.

2. – *Démonstration du théorème* 1.1.

2.1. Etude de l'équation linéaire.
2.2. Méthode itérative.
2.3. Unicité.

3. – *Propriétés markoviennes de la solution*

3.1. Notations.
3.2. Démonstration des propriétés (3.3*e*) et (3.3*f*).

4. – *Résolution d'un problème de temps d'arrêt optimal*

4.1. Notations. Le problème.
4.2. Démonstration du théorème 4.1.
4.3. Remarques diverses.

Bibliographie

1. – Un modèle de système distribué stochastique.

1.1. *Notations. Intégrale stochastique hilbertienne.*

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de R^n. On pose $H = L^2(\mathcal{O})$, $V = H^1_0(\mathcal{O})$, $V' = H^{-1}(\mathcal{O})$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On se donne un processus de Wiener à valeurs dans H, d'opérateur de covariance Q, i.e., un processus $w(t)$, à valeurs dans H tel que:

$$\forall t,\ \forall h \in H,\ (w(t), h) \text{ est une V.A. réelle gaussienne de moyenne } 0\,, \tag{1.1}$$

$$\left|\begin{array}{l} E(w(t), h_1)(w(s), h_2) = (Qh_1, h_2)\min(t, s),\ \forall h_1,\ h_2 \in H \text{ où} \\ Q \in \mathcal{L}(H; H),\ Q \geqslant 0,\ Q = Q^*,\ Q \text{ est un opérateur nucléaire } (^1)\,. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

On notera $\mathcal{F}^t$ la σ algèbre engendrée par $w(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Soit $\alpha(t, \omega)$ un processus à valeurs dans H, adapté à $\mathcal{F}^t$ tel que:

$$E\int_0^T |\alpha(t, \omega)|^2_H \, dt < \infty\,.$$

Il est facile de définir l'intégrale stochastique:

$$I = \int_0^T (\alpha(t, \omega), dw(t))$$

par extension du cas de la dimension finie.

On peut, par exemple, procéder par approximation. Soit en effet, h_1,

(1) Ce qui se caractérise en particulier par le fait que:

$$\sum_n (Qh_n, h_n) < \infty\,, \qquad \forall\, h_n \text{ base orthonormée de } H$$

(cf. Gelfand-Vilenkin [1]).

$h_2, \dots, h_n \dots$ une *base orthonormée* de H. On pose:

$$w_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \big(w(t), h_i\big) h_i$$

qui est donc un processus de Wiener m dimensionnel (naturellement non standard). On pose:

$$I_m = \int_0^T \sum_{i=1}^{m} (\alpha(t), h_i)\, d\big(w(t), h_i\big)$$

dont la définition ne pose aucun problème, puisque l'on est en dimension finie. On a pour $m \geqslant p+1$:

$$E(I_m - I_p)^2 = E\left[\int_0^T \sum_{i=p+1}^{m} (\alpha(t), h_i)\, d\big(w(t), h_i\big)\right]^2$$

$$= E \sum_{i,j=p+1}^{m} \left(\int_0^T (\alpha(t), h_i)\, d\big(w(t), h_i\big)\right)\left(\int_0^T (\alpha(t), h_j)\, d\big(w(t), h_j\big)\right)$$

$$= \sum_{i,j=p+1}^{m} E \int_0^T (\alpha(t), h_i)(\alpha(t), h_j)(Qh_i, h_j)\, dt =$$

$$= E \int_0^T \left[Q \sum_{i=p+1}^{m} (\alpha(t), h_i) h_i, \sum_{j=p+1}^{m} (\alpha(t), h_j) h_j\right] dt \to 0 \text{ lorsque } p,\ m \to +\infty,$$

donc $I_m \to I$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et I est *par définition*, l'intégrale stochastique. On vérifie aisément toutes les propriétés des intégrales stochastiques.

1.2. *E.D.P. stochastique.*

Soit F une application de $H \to \mathcal{L}(H, H)$ telle que:

(1.3) $$\|F(h)\|_{\mathcal{L}(H.H)} \leqslant C\,,$$

(1.4) $$\|F(h_1) - F(h_2)\|_{\mathcal{L}(H.H)} \leqslant C|h_1 - h_2|\,, \qquad \forall h_1, h_2 \in H\,.$$

Pour $h \in H$ *donné*, on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles stochastique, écrite pour le moment de manière un peu formelle:

$$(1.5)\qquad \left|\begin{array}{l} dy(t) - \Delta y\, dt = F(y)\, dw(t) \\ y/\Sigma = 0\,, \qquad \Sigma = \partial\mathcal{O} \times]0, T[\\ y(0) = h\,, \end{array}\right.$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace. On a de manière précise le

THÈOREME 1.1. *Sous les hypothèses* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), *il existe un processus et un seul* $y(t)$ *tel que*:

$$(1.6)\qquad \left|\begin{array}{l} y \in L^2(0, T \times \Omega, dt \otimes dP, V)\,, \\ y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P, C(0, T; H)) \cap C(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P, H)) \end{array}\right.$$

(1.7) $y(t)$ *est adapté à* $\mathcal{F}^t$ (comme processus à valeurs dans H);

$$(1.8)\qquad \text{p.s. } y(t) - \int_0^t \Delta y\, ds = h + \int_0^t F(y)\, dw(s)\,, \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

2. – Démonstration du théorème 1.1.

2.1. *Etude de l'équation linéaire.*

On commence par étudier l'équation:

$$(2.1)\qquad y(t) - \int_0^t \Delta y\, ds = h + \int_0^t \alpha(s)\, dw(s)$$

où $\alpha(s)$ est un processus adapté à valeurs dans $\mathcal{L}(H, H)$ tel que:

$$|\alpha(s)|_{\mathcal{L}(H,H)} \leqslant C\,.$$

Montrons que (2.1) possède une solution et une seule vérifiant les conditions de régularité (1.6). L'unicité est immédiate. En effet, si y_1 et y_2 sont deux solutions, on a:

$$\text{p.s.} \qquad y_1(t) - y_2(t) - \int_0^t \Delta(y_1 - y_2)\, ds = 0 \qquad \forall t$$

et donc p.s. $(d/dt)(y_1 - y_2) \in L^2(V')$, d'où p.s. $y_1(t) = y_2(t)$ $\forall t$, par des calculs classiques du cas déterministe.

Pour démontrer l'existence, on note y_m la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$(2.2)\qquad \left|\begin{array}{l} dy_m(t) - \Delta_m y_m(t)\,dt = \alpha_n(t)\,dw_m(t)\,, \\ y_m(0) = \sum_{i=1}^{m} (h, h_i)\,h_i \end{array}\right.$$

où:

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i y_m^i(t)\,,$$

$$\Delta_m z = \sum_{i=1}^{m} h_i(\Delta z, h_i) \qquad \forall z = \sum_{i=1}^{m} z_i h_i\,,\ z_i \in R$$

et où la base $(h_1, \ldots, h_m \ldots)$ orthonormée de H est supposée composée d'éléments de V (ce qui est toujours possible sans perte de généralité). Enfin:

$$\alpha_m(t)z = \sum_{i=1}^{m} h_i(\alpha(t)z, h_i) \qquad \forall z = \sum_{i=1}^{m} z_i h_i\,.$$

La formule de Ito nous donne l'égalité de l'énergie:

$$(2.3)\qquad \frac{1}{2}\,|y_m(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|y_m(0)|^2 = \int_0^t (\Delta y_m, y_m)\,ds + \int_0^t (\alpha(t)^* y_m, dw_m(t)) + \\ + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \int_0^t (Qh_j, h_k)(\alpha(s)^* h_i, h_\nu)\,(\alpha(s)^* h_i, h_k)\,ds$$

d'où l'on déduit aisément les estimations à priori:

$$(2.4)\qquad E\int_0^T \|y_m(t)\|_V^2\,dt \leqslant C\,, \qquad E|y_m(t)|_H^2 \leqslant C\,.$$

On peut donc supposer, après extraction de sous suite, que l'on a:

$$\left|\begin{array}{lll} y_m \to y & \text{dans } L^2((0, T)\times\Omega,\ dt \otimes dP;\ V) & \text{faible} \\ y_m \to y & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)) & \text{faible étoile} \end{array}\right.$$

donc aussi dans $L^2(0, T\times\Omega, dt \otimes dP; H)$ ce qui implique que y est un processus adapté à $\mathcal{F}^t$. Soit $\varphi \in V$, $\varphi = h_i$, i fixé; on déduit de (2.2) que l'on a, pour $m \geqslant i$:

$$(y_m(t), \varphi) - (y_m(0), \varphi) + \int_0^t a(y_m(s), \varphi)\, ds = \int_0^t (\varphi, \alpha_m(s)\, dw_m(s))$$

où si $\varphi_1, \varphi_2 \in V$:

$$a(\varphi_1, \varphi_2) = (-\Delta\varphi_1, \varphi_2) = \sum \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\, dx .$$

En passant à la limite faible, on obtient:

$$(y_m(t), \varphi) \to (h, \varphi) + \int_0^t (\Delta y(s), \varphi)\, ds + \int_0^t (\varphi, \alpha(s)\, dw(s))$$

dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ faible $\forall t$.

Donc puisque $y_m \to y$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H))$ faible:

$$(2.5) \qquad (y(t), \varphi) = (h, \varphi) + \int_0^t (\Delta y(s), \varphi)\, ds + \int_0^t (\varphi, \alpha(s)\, dw(s)) \qquad \text{p.p.t, p.s.}\omega\ \forall \varphi .$$

En modifiant $y(t)$ sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, on définit:

$$(2.6) \qquad y \in C(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; V')) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)) \cap \cap L^2(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; V))$$

tel que:

$$(2.6)_1 \qquad y(t) = h + \int_0^t \Delta y(s)\, ds + \int_0^t \alpha(s)\, dw(s) \qquad \forall t, \text{ p.s.}\omega .$$

Notons qu'il existe un processus et un seul tel que l'on ait (2.6), $(2.6)_1$. Par ailleurs, on déduit de (2.3) que:

$$\tfrac{1}{2}|y_m(t)|^2 - \int_0^t (\Delta y_m, y_m)\, ds \to \tfrac{1}{2}|h|^2 + \int_0^t (y(s), \alpha(s)\, dw(s)) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \int_0^t \alpha(s) Q \alpha^*(s)\, ds$$

dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ faible, $\forall t$. Donc, en utilisant la semi-continuité inférieure faible de la norme, on obtient:

$$\tag{2.7} \tfrac{1}{2}E|y(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta y, y)\,ds \leqslant \tfrac{1}{2}|h|^2 + \tfrac{1}{2}E\,\mathrm{tr}\int_0^t \alpha(s)Q\alpha^*(s)\,ds\,.$$

Il nous reste à montrer que

$$y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; C(0, T; H)) \cap C\big(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)\big)\,.$$

Pour cela, on suppose maintenant que $h_1 \dots h_m \dots$ est une base orthonormée de H formée d'éléments de $D(-\Delta)$ (ceci peut toujours être supposé sans perte de généralité). On note:

$$\alpha_m(t) = \Pi_m \alpha(t)$$

où Π_m est le projecteur sur l'espace vectoriel engendré par $(h_1, \dots, h_m)$. On désigne alors par $z_m(t)$ la solution de

$$z_m(t) - h = \int_0^t \Delta z_m(s)\,ds + \int_0^t \alpha_m(s)\,dw_m(s)$$

qui est définie de manière unique comme précédemment en utilisant (2.6), $(2.6)_1$ (avec α_m au lieu de α et w_m au lieu de w). On peut alors donner un résultat de régularité supplémentaire sur la solution. Posons:

$$\xi_m(t) = \int_0^t \alpha_m(s)\,dw_m(s) = \Pi_m \int_0^t \alpha(s)\,dw_m(s)$$

Comme $t \to \int_0^t \alpha(s)\,dw_m(s) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; C(0, T; H))$, il est clair que $t \to \xi_m(t) \in$ $\in L^2\big(\Omega, \mathcal{A}, P; C\big(0, T; D(-\Delta)\big)\big)$. Mais $z_m - \xi_n = \theta_m$ est solution de:

$$\theta_m(t) - h = \int_0^t \Delta\theta_m(s)\,ds + \int_0^t \Delta\xi_m(s)\,ds\,.$$

Or, $t \to \Delta\xi_m(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; C(0, T; H))$. Mais alors p.s. ω on voit que $t \to \theta_m(t) \in C\big(0, T; D(-\Delta)\big)$, et même en utilisant la formule de représentation:

$$\theta_m(t) = G(t)h + \int_0^t G(t-\tau)\,\Delta\xi_m(\tau)\,d\tau$$

où $G(t)$ est l'opérateur de Green, on voit que

$$\theta_m(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; C(0, T; D(-\Delta))) .$$

De sorte que l'on a le résultat de régularité supplémentaire

$$z_m \in L^2\Big(\Omega, \mathcal{A}, P; C\big(0, T; D(-\Delta)\big)\Big) . \tag{2.8}$$

On va utiliser ce résultat de régularité pour établir *une égalité de l'énergie stochastique.*

Soit $\varphi \in V$; on a:

$$\big(z_m(t), \varphi\big) = (h, \varphi) + \int_0^t \big(\Delta z_m(s), \varphi\big)\, ds + \int_0^t \big(\varphi, \alpha_m(s)\, dw_m(s)\big) .$$

Il est alors possible d'appliquer la formule de Ito au processus scalaire $\big(z_m(t), \varphi\big)$ qui possède une différentielle stochastique au sens ordinaire (puisque w_n est de dimension finie).

On obtient:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\big(z_m(t), \varphi\big)^2 = \tfrac{1}{2}(h, \varphi)^2 &+ \int_0^t \big(\Delta z_m(s), \varphi\big)\big(z_m(s), \varphi\big)\, ds + \\ &+ \int_0^t \big(z_m(s), \varphi\big)\big(\varphi, \alpha_m(s)\, dw_m(s)\big) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^t \big(\alpha_m(s) Q_m \alpha_m^*(s)\varphi, \varphi\big)\, ds\end{aligned}$$

où $Q_m = \Pi_m Q \Pi_m$.

On prend $\varphi = h_i$ et on additionne pour $i = 1 \ldots N$. Pour t fixé, on voit que:

$$\sum_{i=1}^N \big(z_m(t), h_i\big)^2 \to |z_m(t)|^2 \text{ p.s.}$$

$$\int_0^t \sum_{i=1}^N \big(\Delta z_m(s), h_i\big)\big(z_m(s), h_i\big)\, ds \to \int_0^t \big(\Delta z_m(s), z_m(s)\big)\, ds \text{ p.s.},$$

ce dernier résultat étant vrai grâce à la régularité de z_m.

Mais alors, passant à la limite en N, on obtient:

$$\tag{2.9} \tfrac{1}{2}|z_m(t)|^2 = \tfrac{1}{2}|h|^2 + \int_0^t (\Delta z_m(s), z_m(s))\, ds + \\ + \int_0^t (z_m(s), \alpha_m(s)\, dw_m(s)) + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr} \alpha_m Q_m \alpha_m^*(s)\, ds\,.$$

L'égalité (2.9) est vraie $\forall t$, p.s. et grâce à la continuité des processus des membres de gauche et de droite de (2.9), p.s. $\forall t$.

On va faire maintenant tendre $m \to +\infty$.

Pour cela, soit z_m^1, z_m^2 les solutions respectives de:

$$z_m^1(t) = \int_0^t \Delta z_m^1(s)\, ds + \int_0^t \alpha(s)\big(dw_m(s) - dw(s)\big)$$

$$z_m^2(t) = \int_0^t \Delta z_m^2(s)\, ds + \int_0^t \big(\alpha_m(s) - \alpha(s)\big)\, dw_m(s)\,.$$

On voit que:

$$z_m(t) - y(t) = z_m^1(t) + z_m^2(t)\,.$$

Mais l'inégalité de l'énergie (2.7) nous donne:

$$\tfrac{1}{2}E|z_m^1(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta z_m^1, z_m^1)\, ds \leqslant \tfrac{1}{2}E \operatorname{tr}\int_0^t \alpha(s)(I - \Pi_m)Q(I - \Pi_m)\alpha^*(s)\, ds$$

$$\tfrac{1}{2}E|z_m^2(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta z_m^2, z_m^2)\, ds \leqslant \tfrac{1}{2}E \operatorname{tr}\int_0^t \big(\alpha_m(s) - \alpha(s)\big)\Pi_m(\alpha_m - \alpha)\, ds$$

et donc

$$z_m^1(t),\ z_m^2(t) \to 0 \quad \text{dans } L^2(0, T\times\Omega, dt\otimes dP; V) \text{ et } C\big(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)\big)\,.$$

Mais alors:

$$z_m - y \to 0 \quad \text{dans } L^2(0, T\times\Omega, dt\otimes dP; V) \text{ et } C\big(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)\big)$$

fortement.

On peut donc, quitte à extraire une sous-suite, passer à la limite p.s. dans (2.9). On obtient ainsi:

$$(2.10)\qquad \tfrac{1}{2}|y(t)|^2 = \tfrac{1}{2}|h| + \int_0^t (\Delta y(s), y(s))\,ds + \int_0^t (y(s), \alpha(s)\,dw(s)) + \\ + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr} \alpha(s) Q \alpha(s)^*\,ds\,, \qquad \forall t \in [0, T],\ \text{p.s.}\,.$$

Mais (2.10) montre aussitôt que $t \to |y(t)|^2$ est p.s. continue, ce qui, joint à la continuité dans V' du processus $y(t)$ (cf. $(2.6)_1$), démontre que $y(t)$ est un processus continu à valeurs dans H.

Nous allons montrer par ailleurs, que l'on a:

$$(2.11)\qquad E \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t (y(s), \alpha(s)\,dw(s)) \right|^2 \leqslant CE \int_0^T (\alpha Q \alpha^*(s), y(s))\,ds\,.$$

En effet, si $M \geqslant N+1$, on a d'après des estimations classiques sur les intégrales stochastiques en dimension finie:

$$E \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t (y(s), \alpha(s)\,d(w_M - w_N)(s)) \right|^2 \leqslant CE \int_0^T \sum_{i,j=N+1}^{M} (Qh_i, h_j)\cdot \\ \cdot (y(s), \alpha(s) h_i)(y(s), \alpha(s) h_j)\,ds \to 0 \text{ lorsque } M,\ N \to +\infty\,.$$

Comme pour tout t

$$\int_0^t (y(s), \alpha(s)\,dw_M(s)) \to \int_0^t (y(s), \alpha(s)\,dw(s)) \qquad \text{dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

on voit que

$$E \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t (y(s), \alpha(s)\,d(w_M - w)(s)) \right|^2 \to 0 \qquad \text{lorsque } M \to +\infty\,.$$

Or, on a:

$$E \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t (y(s), \alpha(s)\,dw_M(s)) \right|^2 \leqslant CE \int_0^T (Q_M \alpha^*(s) y(s), \alpha^*(s) y(s))\,ds$$

d'où, en passant à la limite, l'on déduit (2.11).

Mais (2.10) implique alors (puisque $(\Delta y, y)\leqslant 0$):

$$E \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |y(t)|^2 \leqslant C .$$

Donc, $y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; C(0, T; H))$ et nous avons déjà vu que $y \in C(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H))$.

Ceci complète l'étude de l'équation (2.1).

2.2. *Méthode itérative.*

Il s'agit d'étudier maintenant l'équation non linéaire (1.8).

On utilise pour cela une méthode itérative. Soit y_0 la solution de

$$y_0(t) - \int_0^t \Delta y_0 \, ds = h \tag{2.12}$$

et $y^{n+1}(t)$ définie à partir de $y^n(t)$ par:

$$y^{n+1}(t) - \int_0^t \Delta y^{n+1}(s)\, ds = h + \int_0^t F(y^n)\, dw(s) . \tag{2.13}$$

On a:

$$y^{n+1}(t) - y^n(t) - \int_0^t \Delta(y^{n+1} - y^n)\, ds = \int_0^t (F(y^n) - F(y^{n-1}))\, dw(s) .$$

On peut alors appliquer l'égalité de l'énergie stochastique (2.10) d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}|y^{n+1}(t) - y^n(t)|^2 = & \int_0^t (\Delta(y^{n+1} - y^n), y^{n+1} - y^n)\, ds + \\ & + \int_0^t \Big(y^{n+1} - y^n, (F(y^n) - F(y^{n+1}))\Big)\, dw + \\ & + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}(F(y^n) - F(y^{n-1}))\, Q\, (F(y^n) - F(y^{n-1}))^* \, ds . \end{aligned} \tag{2.14}$$

En prenant l'espérance mathématique, il en résulte aisément:

$$E|y^{n+1}(t) - y^n(t)|^2 \leqslant C \int_0^t |y^n(s) - y^{n-1}(s)|^2\, ds$$

soit, en itérant

$$E|y^{n+1}(t) - y^n(t)|^2 \leqslant C\,\frac{T^n}{n!}\,.$$

On déduit également de (2.15):

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |y^{n+1}(t) - y^n(t)|^2 \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t (y^{n+1} - y^n, (F(y^n) - F(y^{n-1}))\,dw\right|^2 + \\ + C\int_0^t |y^n - y^{n-1}|^2\,ds\,.$$

De manière analogue à (2.11), on obtient:

$$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |y^{n+1}(t) - y^n(t)|^2 \leqslant C\left\{E\int_0^T (Q(F(y^n) - F(y^{n-1}))^*(y^{n+1} - y^n)\,,\right. \\ \left.(F(y^n) - F(y^{n-1}))^*(y^{n+1} - y^n))\,ds + \frac{T^n}{(n-1)!}\right\} \leqslant C\left\{\frac{T^{n+1}}{n!} + \frac{T^n}{(n-1)!}\right\}.$$

On voit alors que la série $y^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (y^{n+1}(t) - y^n(t))$ converge dans H uniformément en t, pour presque tout ω.

Or, de l'égalité:

$$\tfrac{1}{2}|y^{n+1}(t)|^2 = \tfrac{1}{2}|h|^2 + \int_0^t (\Delta y^{n+1}(s), y^{n+1}(s))\,ds + \\ + \int_0^t (y^{n+1}(s), F(y^n)\,dw) + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr} F(y^n)QF(y^n)^*\,ds$$

on déduit que:

$$E\int_0^T \|y^{n+1}(s)\|_V^2\,ds \leqslant C\,;$$

donc, on a:

$$\left|\begin{array}{ll} y^{n+1} \to y & \text{dans } L^2(0, T\times\Omega, dt\otimes dP; V) \text{ faible} \\ y^{n+1} \to y & \text{dans } C(0, T; H) \text{ fort p.s.}\,. \end{array}\right.$$

On peut alors passer à la limite dans (2.13) d'où l'on déduit aisément que $y(t)$ est solution de (1.8).

Les résultats de régularité sont alors conséquence de ceux établis pour l'équation (2.1).

2.3. *Unicité.*

Soient y_1, y_2 deux solutions de (1.8). On a:

$$y_1(t) - y_2(t) - \int_0^t \Delta(y_1 - y_2)\, ds = \int_0^t (F(y_1) - F(y_2))\, dw$$

d'où:

$$\tfrac{1}{2} E|y_1(t) - y_2(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2} \int_0^t (F(y_1) - F(y_2)(Q(F(y_1) - F(y_2))^* \, ds\,.$$

En utilisant la propriété de Lipschitz de F et l'inégalité de Gronwall, on voit aisément que:

$$E|y_1(t) - y_2(t)|^2 = 0$$

et donc:

$$\text{p.s.} \quad y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t\,.$$

Le Théorème 1.1 est complètement démontré. ■

Remarque 2.1. Naturellement, l'opérateur $-\Delta$ avec une condition de Dirichlet n'est qu'un exemple. Le Théorème 1.1 s'étend sans changement au cas des équations aux dérivées partielles entrant dans le cadre de la formulation variationnelle des problèmes aux limites (Cf. Lions [1]). On peut même remplacer $-\Delta$ par un opérateur monotone (Cf. Bensoussan-Temam [1], E. Pardoux [1]). ■

Remarque 2.2. On a défini $y(t) = y_h(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$. Comme T est arbitraire, on a en fait défini $y_h(t)$ sur $0, \infty$. La trajectoire appartient à $C(0, \infty; H)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout intervalle compact. ■

Remarque 2.3. On peut également étudier les équations de Navier Stokes selon les méthodes inaugurées dans Leray [1], [2], [3], mais avec un « bruit blanc » au 2ème membre, Cf. M. Viot [1]. ■

3. – Propriétés markoviennes de la solution.

3.1. *Notations.*

Soit $y_h(t)$ la solution de (1.8) correspondant à la donnée initiale h.
On pose pour Γ borélien de H:

$$P(h, t; \Gamma) = P\big(y_h(t) \in \Gamma\big)\,. \tag{3.1}$$

Soit B l'espace de Banach des fonctionnelles sur H mesurables et bornées.
Si $f \in B$

$$\phi(t)\, f(h) = Ef\big(y_h(t)\big)\,. \tag{3.2}$$

On va démontrer que $\phi(t)$ est *un semi-groupe de Markov sur* B, plus précisément:

(3.3)
$a)$ si $f \in V$, $f \geqslant 0$, alors $\phi(t) f \geqslant 0$

$b)$ $\|\phi(t)\|_{\mathcal{L}(B;B)} \leqslant 1$

$c)$ $\phi(t) = 1$

$d)$ $\phi(0) = I$

$e)$ $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$

$f)$ $\phi(t)\colon C \to C$,

où C = espace des fonctionnelles continues et bornées sur H.

3.2. *Démonstration de* (3.3).

Les propriétés a, b, c, d, sont évidentes. Montrons d'abord la propriété f.
Soit $f \in C$. On a:

$$y_h(t) - y_h(s) - \int_0^t \Delta\big(y_h(s) - y_h(s)\big)\, ds = \int_0^t \big(F(y_h) - F(y_h)\big)\, dw + h - h'$$

et donc, utilisant l'égalité de l'énergie stochastique (cf. (2.10)), il vient:

$$\tfrac{1}{2}|y_h(t) - y_{h'}(t)|^2 = \tfrac{1}{2}|h - h'|^2 + \int_0^t \big(\Delta(y_h - y_{h'}),\, y_h - y_{h'}\big)\, ds +$$
$$+ \int_0^t \Big(y_h - y_{h'},\, \big(F(y_h) - F(y_{h'})\big)\, dw\Big) + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}\big(F(y_h) - F(y_{h'})\big)\, Q\big(F(y_h) - F(y_{h'})\big)^* ds\,.$$

Donc:

$$E|y_h(t) - y_{h'}(t)|^2 \leqslant |h - h'|^2 + E\int_0^t ds\, \mathrm{tr}\big(F(y_h) - F(y_{h'})\big)\, Q(Fy_h - Fy_{h'})^*$$

$$\leqslant |h - h'|^2 + CE\int_0^t |y_h(s) - y_{h'}(s)|^2\, ds\,.$$

Par conséquent, d'après l'inégalité de Gronwall, on obtient:

$$E|y_h(t) - y_{h'}(t)|^2 \leqslant C|h - h'|^2\,. \tag{3.4}$$

Soit donc une suite $h_n \to h$ dans H. D'après (3.4) on voit que, pour t fixé, on a:

$$y_{h_n}(t) \to y_h(t) \qquad \text{dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)\,,$$

donc:

$$P\big(|y_{h_n}(t) - y_h(t)| \geqslant \varepsilon\big) \to 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ fixé}\,.$$

Soit δ fixé, on peut trouver $\varepsilon_1(\delta)$ tel que:

$$|y_{h_n}(t) - y_h(t)| \leqslant \varepsilon_1(\delta) \Rightarrow \big|f(y_{h_n}(t)) - f(y_h(t))\big| \leqslant \delta\,.$$

Mais alors:

$$\Big|E\Big(f(y_{h_n}(t)) - f(y_h(t))\Big)\Big| \leqslant \delta + CP\big(|y_{h_n}(t) - y_h(t)| \geqslant \varepsilon_1(\delta)\big)\,.$$

On a donc:

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big|E\Big(f(y_{h_n}(t)) - f(y_h(t))\Big)\Big| \leqslant \delta$$

et comme δ est arbitraire, on a bien:

$$Ef\big(y_{h_n}(t)\big) \to Ef\big(y_h(t)\big)\,,$$

ce qui démontre bien que $\varphi(t)$ applique $C \to C$.

Reste à vérifier la propriété (3.3) e), i.e.

$$\phi(t + s) = \phi(t)\phi(s)\,. \tag{3.5}$$

Soit $f \in B$, posons: $g = \phi(s) f$. Il s'agit de montrer que l'on a:

$$\phi(t+s) f = \phi(t) g \,. \tag{3.6}$$

Il nous suffit de vérifier (3.6) *en supposant de plus* $f \in C$.

En effet, l'ensemble des f mesurables et bornées pour lesquelles (3.6) est vérifiée, est un $\mathcal{L}$-*système de fonctions*, c'est-à-dire en appelant $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions f pour lesquelles (3.6) est vérifiée, les propriétés suivantes sont vraies pour $\mathcal{H}$:

(3.7)

a) $1 \in \mathcal{H}$;

b) si f_1, $f_2 \in \mathcal{H}$ et C_1, C_2 sont des réels alors: $C_1 f_1 + C_2 f_2 \in \mathcal{H}$;

c) si $f_n \in \mathcal{H}$, $0 \leqslant f_n \downarrow f$ et est bornée, alors $f \in \mathcal{H}$.

Les assertions (3.7)-*a*) et *b*) sont évidentes. Démontrons (3.7)-*c*).
On pose:

$$g_n = \phi(s) f_n$$

soit

$$g_n(h) = E f_n(y_h(s)) \,.$$

On a donc:

$$g_n(h) \rangle \uparrow (h) = E f(y_h(s)) \,.$$

Egalement:

$$\phi(t) g_n = E g_n(y_h(t)) \uparrow E g(y_h(t)) \,,$$

$$\phi(t+s) f_n = E f_n(y_h(t+s)) \uparrow E f(y_h(t+s)) \,.$$

Mais

$$f_n \in \mathcal{H} \Rightarrow E f_n(y_h(t+s)) = E g_n(y_h(t))$$

et donc, on a:

$$E f(y_h(t+s)) = E g(y_h(t))$$

ce qui prouve bien (3.7)-*c*).

Or, (cf. Dynkin [1], p. 222) si un $\mathcal{L}$ *système de fonctions* $\mathcal{H}$ *sur un espace topologique mesurable, muni de sa σ-algèbre de Borel, contient toutes les fonctions continues et bornées, il contient toutes les fonctions mesurables et bornées.*

Il suffit donc de vérifier (3.6) pour $f \in C$.

On va démontrer (3.6) à partir d'une *approximation en dimension finie.*

Soit toujours $h_1, \ldots, h_m \ldots$ une base orthonormée de H formée d'éléments de V. On pose pour $h \in H$:

$$\bar{\omega}_m h = \sum_{i=1}^{m} (h, h_i) h_i$$

ce qui définit un opérateur $\bar{\omega}_m \in \mathcal{L}(H; V)$ (¹). On pose également

$$D_m = \bar{\omega}_m^* \Delta \bar{\omega}_m ,$$

$$F_m = \mathcal{H}_m F \Pi_m .$$

On note $y_m(t)$ la solution de l'équation

$$(3.8) \qquad \left| \begin{aligned} & dy_m(t) - \Pi_m y_m(t)\, dt = F_m(y_m)\, dw \\ & y_m(0) = \Pi_m x = x_m . \end{aligned} \right.$$

On remarquera que la solution y_m de (3.8) existe et est définie de manière unique, par exemple en appliquant dans un cadre très simplifié le résultat du Théorème 1.1. Comme visiblement $y_m(t)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $h_1, \ldots, h_m$, le processus $y_m(t)$ peut être considéré comme solution d'une équation différentielle stochastique ordinaire, à savoir:

$$dy_m - \Pi_m y_m\, dt = \Pi_m F(\Pi_m y_m)\, dw_m$$

où

$$w_m = \Pi_m w$$

et donc $y_m(t)$ est un processus de Markov. Ceci, joint au résultat d'approximation:

$$(3.9) \qquad \lim_{m\to\infty} E|y_m(t) - y(t)|^2 = 0 \qquad \forall t$$

nous permettra d'obtenir (3.6).

(¹) On écrit $\bar{\omega}_m$ et non Π_m car on considère $\bar{\omega}_m \in \mathcal{L}(H; V)$ et non $\in \mathcal{L}(H; H)$. Naturellement, $\Pi_m = i\bar{\omega}_m$, où $i =$ injection de $V \to H$.

Démontrons tout d'abord (3.9).

Posons:

$$M = L^{\infty}(0, T; L^2_{\mathcal{F}^t}(H))$$

espace des processus stochastiques $\xi(t)$ à valeurs dans H, adaptés à $\mathcal{F}^t$ et tels que:

$$\|\xi\|_M^2 = \sup_{t\in[0,T]} E|\xi(t)|_H^2 < +\infty .$$

Muni de la norme $\|\xi\|_M$, l'espace M est un espace de Banach.

On définit alors une application $z = \mathcal{S}(\xi)$ de $M \to M$, en posant:

$$\text{(3.10)} \qquad \left| \begin{array}{l} dz - \Delta z\, dt = F(\xi)\, dw \\ z(0) = h \end{array} \right.$$

dont la solution existe, est définie de manière unique dans $M \cap L^2(0, T\times\Omega, dt \otimes dP; V)$, d'après la première partie de la démonstration du Théorème 1.1. On définit de même $z_m = \mathcal{S}_m(\xi)$, application de $M \to M$, en posant:

$$\text{(3.11)} \qquad \left| \begin{array}{l} dz_m = D_m z_m\, dt - F(\xi)\, dw \\ z_m(0) = h_m . \end{array} \right.$$

Soient ξ^1, ξ^2 deux éléments de M et z_m^1, z_m^2 les solutions correspondantes de (3.11). On a:

$$d(z_m^1 - z_m^2) - D_m(z_m^1 - z_m^2)\, dt = \big(F_m(\xi^1) - F_m(\xi^2)\big)\, dw , \quad (z_m^1 - z_m^2)(0) = 0 .$$

Donc, d'après l'égalité de l'énergie stochastique, on obtient:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}|z_m^1(t) - z_m^2(t)|^2 = &\int_0^t (\Pi_m(z_m^1 - z_m^2), z_m^1 - z_m^2)\, ds + \\ &+ \int_0^t \Big(z_m^1 - z_m^2, \big(F_m(\xi^1) - F_m(\xi^2)\big)\, dw\Big) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}\big(F_m(\xi^1) - F_m(\xi^2)\big)\, Q\, \big(F_m(\xi^1) - F_m(\xi^2)\big)^* \, ds . \end{aligned}$$

Mais:

$$(D_m(z_m^1 - z_m^2), z_m^1 - z_m^2) = (\Delta(z_m^1 - z_m^2), z_m^1 - z_m^2) \leqslant 0$$

donc:

$$E\left|z_m^1(t) - z_m^2(t)\right|^2 \leqslant C\int_0^t E|\xi^1(s) - \xi^2(s)|^2\, ds\,.$$

La constante C ne dépendant pas de m, soit encore:

$$E|S_m(\xi^1)(t) - S_m(\xi^2)(t)|^2 \leqslant C\int_0^t Et\xi^1(s) - \xi^2(s)t^2\, ds\,. \tag{3.12}$$

Naturellement, on a la même estimation pour S.

Mais alors, tenant compte de

$$y_m(t) - y(t) = S_m(y_m)(t) - S(y)(t) = S_m(y_m)(t) - S_m(y)(t) + S_m(y)(t) - S(y)(t)\,,$$

$$\begin{aligned} E|y_m(t) - y(t)|^2 &\leqslant 2E|S_m(y_m)(t) - S_m(y)(t)|^2 + 2E|S_m(y)(t) - S(y)(t)|^2 \\ &\leqslant 2C\int_0^t E|y_m(s) - y(s)|^2\, ds + 2E|S_m(y)(t) - S(y)(t)|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique d'après l'inégalité de Gronwall:

$$\begin{aligned} E|y_m(t) - y(t)|^2 \leqslant\; & 2E|S_m(y)(t) - S(y)(t)|^2 + \\ & + 4C\int_0^t \exp\,[2C(t-s)]\,E|S_m(y)(s) - S(y)(s)|^2\, ds\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Donc, (3.9) sera une conséquence de:

$$\left|\begin{aligned} & E|S_m(y)(t) - S(y)(t)|^2 \underset{m\to+\infty}{\to} 0 \qquad \forall t\,, \\ & \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|S_m(y)(t)|^2 \leqslant C\,. \end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

On pose:

$$z_m(t) = S_m(y)(t)$$

donc:

$$\left|\begin{aligned} & dz_m(t) - D_m z_m\, dt = F_m(y)\, dw \\ & z_m(0) \;= h_m \end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

et, naturellement $y = S(y)$.

On a:

$$\tag{3.16} \tfrac{1}{2}E|z_m(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta z_m, z_m)\,ds = \tfrac{1}{2}|h_m|^2 + \tfrac{1}{2}E\int_0^t \operatorname{tr} F_m(y)QF_m^*(y)\,ds$$

d'où l'on déduit:

$$\tag{3.17} \left|\begin{array}{l} \sup\limits_{0\leq t\leq T} E|z_m(t)|^2 \leq C\,, \\ E\displaystyle\int_0^T \|z_m(s)\|_V^2 \leq C\,. \end{array}\right.$$

Comme au Théorème 1.1, on vérifie que:

$$\tag{3.18} \left|\begin{array}{ll} z_m \to y & \text{dans } L^2(0, T\times\Omega, dt\otimes dP; V) \text{ faible et} \\ & L^\infty(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H)) \text{ faible étoile}\,. \end{array}\right.$$

Nous allons également montrer le résultat suivant utile pour la suite:

$$\tag{3.19} E\big(z_m(t), y(t)\big) \to E|y(t)|^2 \qquad \forall t\,.$$

En effet, soit: $y_N(t) = \bar{\omega}_N y(t)$. On a d'après (3.15):

$$\big(z_m(t), y_N(t)\big) = \big(h_m, y_N(t)\big) + \Big(\bar{\omega}_m^*\int_0^t \Delta z_m(s)\,ds, y_N(t)\Big) + \Big(\int_0^t F_m(y)\,dw, y_N(t)\Big)$$

et pour $m > N$

$$= \big(h_m, y_N(t)\big) + \Big\langle\int_0^t \Delta z_m(s)\,ds, y_N(t)\Big\rangle + \Big(\int_0^t F_m(y)\,dw, y_N(t)\Big)\,.$$

Or, (3.18) implique:

$$\int_0^t \Delta z_m(s)\,ds \to \int_0^t \Delta y(s)\,ds \qquad \text{dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; V')$$

faible et donc faisant tendre $m \to +\infty$, on obtient:

$$\tag{3.20} \begin{aligned} E\big(z_n(t), y_N(t)\big) \to E\big(h, y_N(t)\big) &+ E\Big\langle\int_0^t \Delta y(s)\,ds, y_N(t)\Big\rangle + \\ &+ E\Big(\int_0^t F(y)\,dw, y_N(t)\Big) = E\big(y(t), y_N(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Mais

$$|E(z_m(t), y(t) - y_N(t))| \leqslant C(E|y(t) - y_N(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

et (3.20), (3.21) impliquent aisément (3.19).

On peut alors compléter la démonstration de (3.9). La relation (3.16) montre que l'on a:

$$\frac{1}{2}E|z_m(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta z_m, z_m)\,ds \to \frac{1}{2}|h|^2 + \frac{1}{2}E\int_0^t \operatorname{tr} F(y)QF^*(y)\,ds \tag{3.22}$$

$$= \frac{1}{2}E|y(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta y, y)\,ds\,.$$

Mais alors:

$$\frac{1}{2}E|z_m(t) - y(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta(z_m - y), z_m - y)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}E|z_m(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta z_m, z_m)\,ds + \frac{1}{2}E|y(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta y, y)\,ds -$$

$$- E(z_m(t), y(t)) + 2E\int_0^t (\Delta y, z_m)\,ds$$

$$\to 0 \quad \text{grâce à (3.22) et (3.19).}$$

On a donc bien démontré (3.9). On peut aussi en déduire le résultat complémentaire:

$$E\int_0^T \|y_m(t) - y(t)\|^2\,dt \to 0\,. \tag{3.23}$$

En effet, de la relation:

$$\frac{1}{2}E|y_m(t)|^2 - E\int_0^t (\Delta y_m, y_m)\,ds = \frac{1}{2}|h|^2 + \frac{1}{2}E\int_0^t \operatorname{tr} F_n(y_m)QF_n(y_m)^*\,ds \tag{3.24}$$

on déduit que y_m demeure dans un borné de $L^2(0, T\times\Omega, dt\otimes dP; V)$ et donc puisque:

$$y_m(t) \to y(t) \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; H) \quad \forall t,$$

on a aussi:

$$y_m \to y \qquad \text{dans } L^2(0, T\times\Omega, dt \otimes dP; V) \text{ faible}.$$

Or, (3.24) implique encore toujours grâce à (3.9):

$$\tfrac{1}{2}E|y_m(t)|^2 - E\int_0^t (\varDelta y_m, y_m)\,ds \to \tfrac{1}{2}|h|^2 + \tfrac{1}{2}E\int_0^t \operatorname{tr} F(y)QF(y)^*\,ds =$$

$$= \tfrac{1}{2}E|y(t)|^2 - E\int_0^t (\varDelta y, y)\,ds\,,$$

ce qui, en reprenant le raisonnement fait à la suite de (3.22) implique bien (3.23).

Avant de compléter la démonstration de la propriété markovienne (3.6) on peut noter que l'on a obtenu un résultat intéressant en lui-même, à savoir la convergence forte de l'approximation du type Galerkin de l'équation (1.8).

En effet, on remarque que $\varDelta_m = \bar{\omega}_m^* \varDelta$, $\Pi_m = \bar{\omega}_m^* \varDelta \bar{\omega}_m$ et donc $\varDelta_m$ et D_m coïncident sur l'espace vectoriel engendré par $(h_1, \ldots, h_m)$.

Par conséquent, si l'on pose:

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m y_m^i(t)\,h_i \tag{3.25}$$

les processus $y_m^i(t)$ sont solutions de l'équation de Ito vectorielle

$$\left|\begin{aligned} & dy_m^i(t) + \sum_{j=1}^m a(h_j, h_i)\,y_m^i(t)\,dt = \Big(h_i, F\Big(\sum_{j=1}^m h_j y_n^i(t)\Big)\,dw_n(t)\Big) \\ & y_m^i(0) = h_i = (h, h_i)\,. \end{aligned}\right. \tag{3.26}$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1 *le processus* $y_m(t)$ *défini par* (3.25) *et* (3.26) *converge vers le processus* $y(t)$ *solution de* (1.8) *au sens de* (3.9) *et* (3.23). ■

Démontrons maintenant (3.6). Posons, en notant $y_{m,h}(s) = y_m(s)$ pour expliciter la dépendance en h:

$$g_m(h) = Ef\big(y_{m,h}(s)\big)\,.$$

Puisque f est continu et borné, il est clair que (3.9) implique

$$g_m(h) \to g(h) \qquad \forall h \in H\,. \tag{3.27}$$

La propriété markovienne du processus $y_{m,h}(t)$ implique

$$Ef\big(y_{m,h}(t+s)\big) = Eg_m\big(y_{m,h}(t)\big)\,. \tag{3.28}$$

Or, si h_m est une suite quelconque telle que $h_m \to h$ dans H [1], on voit aisément que:

$$E|y_{m,h}(s) - y_h(s)|^2 \leqslant O|h_m - h|^2 + E|y_{m,h}(s) - y_h(s)|^2 \to 0$$

et donc:

$$g_m(h_m) \to g(h)\,.$$

Or, de (3.9), on déduit qu'il existe une sous-suite $y_{m',h}(t)$ telle que:

$$y_{m',h}(t) \to y_h(t) \qquad \text{p.s. dans } H$$

donc:

$$g_{m'}\big(y_{m',h}(t)\big) \to g\big(y_h(t)\big) \qquad \text{p.s.}\,.$$

D'après le théorème de Lebesgue, tenant compte de ce que g_m est uniformément bornée, on voit que le second membre de (3.28) converge vers $Eg\big(y_h(t)\big)$. On déduit aisément de (3.28) que l'on a:

$$Ef\big(y_h(t+s)\big) = Eg\big(y_h(t)\big)$$

ce qui n'est autre que (3.6).

On a ainsi démontré le

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1, *la famille* $\phi(t)$ *d'opérateurs définie par* (3.2), *où* $y_h(t)$ *est la solution de* (1.8) *correspondant à la donnée initiale* h, *est un semi-groupe de Markov qui vérifie les propriétés* (3.3). ■

[1] Naturellement h_m ne désigne pas ici la suite $\Pi_m h$.

4. – Résolution d'un problème de temps d'arrêt optimal.

4.1. *Notations. Le problème.*

On se donne deux fonctionnelles L et l vérifiant

(4.1) $L \in C$, i.e. L est une fonctionnelle continue et bornée sur H,

(4.2) l est uniformément continue sur V' et bornée.

On pose alors pour θ temps d'arrêt de $\mathcal{F}^t$, $\alpha > 0$,

$$J_h(\theta) = E\Big[\int_0^\theta \exp[-\alpha t] L(y_h(t))\,dt + l(y_h(\theta)) \exp[-\alpha\theta]\Big]. \tag{4.3}$$

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1, *ainsi que* (4.1) (4.2) *la fonctionnelle*

$$u(h) = \operatorname*{Inf}_\theta J_h(\theta)$$

appartient à C et est l'élément maximum de l'ensemble des w vérifiant:

$$\left| \begin{array}{l} w \in C, \qquad w \leqslant l \\ w \leqslant \displaystyle\int_0^t \exp[-\alpha s]\phi(s) L\,ds + \exp[-\alpha t]\phi(t) w, \qquad \forall t \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

De plus, il existe un temps d'arrêt optimal $\hat{\theta}_h$ donné par

$$\hat{\theta}_h = \operatorname*{Inf}_{t \geqslant 0} l\{t | u(y_h(t)) = l(y_h(t))\}. \tag{4.5}$$

4.2. *Démonstration du Théorème* 4.1.

C'est une adaptation de méthodes déjà employées en dimension finie (cf. A. Bensoussan - J. L. Lions [1], chap. 3, § 3, Théorème 3.13), avec quelques variantes.

Démontrons tout d'abord la propriété:

$$(4.6)\quad \left|\begin{array}{l} P\left\{\sup\limits_{s\in[\theta_1,\theta_2]}\|y_h(s)-y_h(\theta_1)\|_{V'}\geqslant\delta\right\}\leqslant\dfrac{C_T\lambda}{\delta^2} \\ \text{pour tous temps d'arrêt } 0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant T \text{ tels que } \theta_2-\theta_1\leqslant\lambda, \quad \text{p.s.P. (1)}\end{array}\right.$$

Il nous suffit évidemment de démontrer:

$$(4.7)\qquad E\sup_{\substack{s\in[\theta,\theta+\lambda]\\ \theta+\lambda\leqslant T}}\|y_h(s)-y_h(\theta)\|^2_{V'}\leqslant C_T\lambda\,.$$

Or, on a, pour $s\in[\theta,\theta+\lambda]$

$$y_h(s)-y_h(\theta)=\int_\theta^s\Delta y_h(t)\,dt+\int_\theta^s F(y_h(t))\,dw(t)\,.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|y_h(s)-y_h(\theta)\|^2_{V'}&\leqslant 2\left(\int_\theta^s\|\Delta y_h(t)\|_{V'}\,dt\right)^2+\\ &+2\left|\int_\theta^s F(y_h(t))dw(t)\right|^2_H\leqslant\\ &\leqslant 2(s-\theta)\int_\theta^s\|\Delta y_h(t)\|^2_{V'}\,dt+\\ &+2\left|\int_\theta^s F(y_h(t))dw(t)\right|^2_H\end{aligned}$$

et donc, puisque $\Delta\in\mathfrak{L}(V;V')$ on a:

$$\sup_{\theta\leqslant s\leqslant\theta+\lambda}\|y_h(s)-y_h(\theta)\|^2_{V'}\leqslant C\left\{\lambda\int_0^T\|y_h(t)\|^2_V dt+\sup_{\theta\leqslant s\leqslant\theta+\lambda}\left|\int_0^s F(y_h(t))dw(t)\right|^2_H\right\}.$$

(1) La propriété naturelle à introduire serait (par analogie avec la dimension finie):

$$P\left\{\sup_{s\in[\theta_1,\theta_2]}|y_h(s)-y_h(\theta_1)|_H\geqslant\delta\right\}\leqslant\frac{C\lambda}{\delta^2}\,.$$

Nous ignorons si cette propriété est vraie. Pour la suite (4.6) suffit, grâce à l'hypothèse (4.2), plus forte que l'hypothèse naturelle où V' serait remplacé par H.

Mais on voit aisément, comme au Théorème 1.1, que l'on a:

$$E \sup_{\theta \leqslant s \leqslant \theta+\lambda} \left| \int_\theta^s F(y_h(t))\, dw(t) \right|_H^2 \leqslant E \int_\theta^{\theta+\lambda} \operatorname{tr} FQF^* \, dt \leqslant C\lambda .$$

Comme $E\int_0^T \|y_h(t)\|_V^2 dt \leqslant C$, on a bien démontré (4.7).

On se contente maintenant d'esquisser la démonstration, en développant simplement les points où le fait que la variable soit de dimension infinie intervient explicitement.

On munit B de la topologie faible (cf. Dynkin [1]).

(4.8) $\qquad f_n \to f$ dans B faible $\Leftrightarrow f_n(h) \to f(h)$ $\forall h \in H$ et $\|f_n\|$ est bornée.

On considère le générateur infinitésimal faible de $\phi(t)$ (en fait son opposé), i.e.

(4.9) $$A = \lim_{t \downarrow 0} \text{faible} \frac{f - \varphi(t) f}{t}$$

et on note:

(4.10) $\qquad \mathfrak{D}_A =$ domaine de $A =$ ensemble des f pour lesquels la limite (4.9) existe.

On appelle *équation pénalisée* attachée au problème l'équation:

(4.11) $$\left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \in C \cap \mathfrak{D}_A , \\ A u_\varepsilon + \alpha u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon - l)^+ = L , \qquad \varepsilon > 0 . \end{array} \right.$$

Le problème (4.11) possède une solution et une seule. Tout d'abord, remarquons que si $f \in C$, alors $\phi(t) f \to f$ dans B faible, grâce à la continuité du processus $y_h(t)$. Il en résulte (cf. Dynkin [1]), que $\forall \alpha > 0$, l'équation

(4.12) $$\left| \begin{array}{l} Au + \alpha u = f , \\ u \in C \cap D_A , \end{array} \right.$$

possède une solution et une seule donnée par:

(4.13) $$u = \int_0^\infty \exp[-\alpha t] \phi(t) f \, dt .$$

Soit alors, $\varphi \in C$; on considère z solution de:

$$\text{(4.14)} \quad \left| \begin{array}{l} Az + \alpha z + \dfrac{1}{\varepsilon} z = L - \dfrac{1}{\varepsilon} (\varphi - l)^+ + \dfrac{1}{\varepsilon} \varphi \,, \\ z \in C \cap D_A \,, \end{array} \right.$$

qui possède une solution unique, d'après (4.12), (4.13) puisque $(1/\varepsilon)\varphi + L - (1/\varepsilon)(\varphi - l)^+ \in C$. On a de plus:

$$\text{(4.15)} \qquad z = \int_0^\infty \exp\left[-\left(\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\right)t\right] \phi(t) \left[L + \frac{1}{\varepsilon}\varphi - \frac{1}{\varepsilon}(\varphi - l)^+\right] dt \in C \,.$$

Par (4.15), on a défini une application $\varphi \to z = S(\varphi)$ de $C \to C$. Montrons que S est une contraction. Soient φ_1, $\varphi_2 \in C$ et z_1, z_2 les solutions correspondantes; on a:

$$\text{(4.16)} \qquad z_1 - z_2 = \int_0^\infty \exp\left[-\left(\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\right)t\right] \varphi(t) \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1 - l)^+ + \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_2 - l)^+\right] dt \,.$$

Soit X la quantité entre crochets au second membre de (4.16).
On a:

$$X = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1 - l - (\varphi_1 - l)^+) - \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_2 - l - (\varphi_2 - l)^+) = \\ = -\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1 - l)^- + \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_2 - l)^-$$

et donc:

$$\|X\|_B \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_B \,.$$

Par conséquent, d'après (4.16):

$$\|z_1 - z_2\|_B \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|_B \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\right)t\right] dt = \frac{1}{1 + \varepsilon\alpha}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_B \,.$$

Donc, l'application S possède un point fixe, ce qui prouve l'existence d'une solution de (4.11) (1). L'unicité résulte de ce que toute solution de (4.11) est point fixe de l'application S.

(1) Dans un contexte différent, ce genre de technique a été utilisé par KRYLOV [1].

On a par ailleurs *l'interprétation suivante du problème pénalisé*:

$$u_\varepsilon(h) = \operatorname*{Inf}_v J_h^\varepsilon(v) \tag{4.17}$$

où $v(t)$ est un processus scalaire adapté a $\mathcal{F}^t$ et compris entre 0 et 1, et:

$$J(v) = E\int_0^\infty dt\left[L(y_h(t)) + \frac{1}{\varepsilon}\, l(y_h(t))\, v(t)\right]\left[\exp\left[-\left(\alpha t + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t v(s)\, ds\right)\right]\right]. \tag{4.18}$$

Le résultat (4.17) (4.18) se démontre comme dans Bensoussan-Lions, (loc. cit). On montre ensuite que $u_\varepsilon \to u$ uniformément (donc $u \in C$). En effet, grâce à l'interprétation probabiliste, on a

$$u_\varepsilon \geqslant u\,. \tag{4.19}$$

Pour obtenir une estimation en sens contraire, il nous faut pour θ temps d'arrêt, estimer la quantité $J_h^\varepsilon(v_\theta) - J_h(\theta)$, (où $v_\theta(t) = 0$ si $t < \theta$ et 1 si $t \geqslant \theta$).

On voit aisément que cette différence s'écrit $I + II$ où $|I| \leqslant C\varepsilon$ et II est donné par:

$$II = E\left[\int_\theta^\infty \frac{l}{\varepsilon}\,(y_h(t)) \exp\,[-\alpha t] \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right](t-\theta)\, dt - l(y_h(\theta)) \exp\,[-\alpha\theta]\right] = \\ = EX_\varepsilon\,.$$

On écrit:

$$II = EX_\varepsilon \chi_{\theta \leqslant T/2} + EX_\varepsilon \chi_{\theta \geqslant T/2} \leqslant \\ \leqslant EX_\varepsilon \chi_{\theta < T/2} + C \exp\left[-\alpha\frac{T}{2}\right] \quad (\text{où } C \text{ ne dépend pas de } \varepsilon)\,.$$

On a ensuite si $k \geqslant 0$, $k < T/2$,

$$EX_\varepsilon \chi_{\theta < T/2} = E_\varepsilon \chi_{\theta < T/2} \cdot \\ \cdot \left[\int_\theta^{\theta+k} \frac{l}{\varepsilon} \exp\,[-\alpha t] \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(t-\theta)\right] dt - l(y_h(\theta)) \exp\,[-\alpha\theta]\right] + \\ + E\chi_{\theta < T/2}\int_{\theta+k}^{+\infty} \frac{l}{\varepsilon} \exp\,[-\alpha t] \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(t-\theta)\right] dt \leqslant II_1 + C \exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}\right]$$

et:

$$II_1 \leqslant CE\chi_{\theta<T/2} \sup_{\theta\leqslant t\leqslant\theta+k} |l(y_h(t)) - l(y_h(\theta))| + C\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}\right].$$

Si l'on pose:

$$\varrho(\delta) = \sup_{\substack{\xi,\xi'\in V' \\ \|\xi-\xi'\|\leqslant\delta}} |l(\xi) - l(\xi')|$$

on a:

$$II_1 \leqslant C\left[P\left(\sup_{\theta\leqslant t\leqslant\theta+k} \|y_h(t) - y_h(\theta)\|_{V'} \geqslant k^{\frac{1}{4}} \text{ et } \theta < \frac{T}{2}\right) + \varrho(k^{\frac{1}{4}}) + \exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}\right]\right] \leqslant$$

$$\leqslant C\left[P\left(\sup_{\substack{\theta\leqslant t\leqslant\theta+k \\ \theta+k\leqslant T}} \|y_h(t) - y_h(\theta)\|_{V'} \geqslant k^{\frac{1}{4}}\right) + \varrho(k^{\frac{1}{4}}) + \exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}\right]\right]$$

et d'après (4.7) on obtient:

$$II_1 \leqslant C_T k^{\frac{1}{4}} + C\left(\varrho(k^{\frac{1}{4}}) + \exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}\right]\right)$$

et donc, finalement on a:

$$II \leqslant C_T k^{\frac{1}{4}} + C\left(\varrho(k^{\frac{1}{4}}) + \exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}\right]\right) + C\exp\left[-\frac{\alpha T}{2}\right].$$

Faisant tendre successivement ε, puis k vers 0, puis T vers $+\infty$, on en déduit aisément la convergence uniforme de $u_\varepsilon \to u$.

On vérifie ensuite que:

$$u_\varepsilon \leqslant \int_0^t \exp[-\alpha s]\phi(s) L\, ds + \exp[-\alpha t]\phi(t) u_\varepsilon$$

de sorte que, par passage à la limite en ε, u satisfait à la deuxième inégalité (4.4). Comme on a évidemment $u \leqslant l$, on voit que u vérifie (4.4).

On montre ensuite, comme dans Bensoussan-Lions, loc. cit., que si w vérifie (4.4), alors:

$$w \leqslant J_h(\theta) \qquad \forall\theta$$

d'où résulte que: $w \leqslant u$, d'où la première partie du Théorème 4.1.

Le fait que θ_h donné par (4.5) soit contrôle optimal est montré comme dans le travail cité des A. ■

4.3. *Remarques diverses.*

REMARQUE 4.1. L'ensemble de H où $u(h) < l$ est *l'ensemble de continuation* (terminologie justifiée par (4.5)), la frontière de l'ensemble de continuation jouant le rôle *d'une surface libre.*

REMARQUE 4.2. On peut considérer également, dans un cadre analogue:

— les problèmes *d'évolution,*

— les problèmes sur un ouvert $\mathcal{O}$ de H (ce dernier aspect conduisant d'ailleurs à un grand nombre de problèmes apparemment nouveaux non encore résolus).

Quoi qu'il en soit, compte tenu de *l'équivalence* entre les problèmes analogues d'évolution et le problème de Stefan lorsque $h \in \boldsymbol{R}^n$, on est aussi conduit à l'introduction *d'un problème de Stefan en dimension infinie.*

REMARQUE 4.3. *Formellement,* u est solution d'une I.V. en dimension infinie, qui s'écrit:

$$(4.20) \qquad \left| \begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \operatorname{tr} \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} FQF^* - \left(\dfrac{\partial u}{\partial h}, \Delta h\right) + \alpha u - L = X \leqslant 0 \,, \\ u - l \leqslant 0 \,, \\ X(u - l) = 0 \,. \end{array} \right.$$

Mais la justification de cette écriture n'est pas faite et peut être, des hypothèses très fortes — par exemple sur L — sont elles alors indispensables. (Cf. pour le cas *des équations,* Daletskii [1]).

BIBLIOGRAPHIE

A. BENSOUSSAN - J.-L. LIONS:

[1] *Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles,* Dunod, Bordas Paris, 1977.

A. BENSOUSSAN - R. TEMAM:

[1] *Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires,* Israël J. of Math., 11, n. 1 (1972), pp. 95-129.

Y. Daletskii:

[1] *Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them,* R. Math. Surveys, 1968.

E. B. Dynkin:

[1] *Markov processes,* Springer Verlag, Berlin, 1965.

I. M. Gelfand - N. Y. Vilenkin:

[1] *Generalized functions.* - Vol. 4: *Applications of Harmonic Analysis,* Academic Press, N. Y., 1964.

N. V. Krylov:

[1] *On the uniqueness of the solution of Bellman's equation,* Izvestia, Akad. Nauk., **5**, n. 6 (1971), pp. 1387-1398.

J. Leray:

[1] *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique,* J.M.P.A., **12** (1933), pp. 1-82.

[2] *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois,* J.M.P.A., **13** (1934), pp. 331-418.

[3] *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace,* Acta Math., **63** (1934), pp. 193-248.

J.-L. Lions:

[1] *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites,* Springer, 111, 1961.

J.-L. Lions - G. Stampacchia:

[1] *Variational Inequalities,* C.P.A.M., **20** (1967), pp. 493-519.

E. Pardoux:

[1] Thèse, Univ. Paris Sud, Novembre 1975.

M. Viot:

[1] *Solutions faibles d'equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires,* Thèse, Paris, 1976.