Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

P. Bolley
J. Camus

Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 1, nº 3-4 (1974), p. 261-299
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1974_4_1_3-4_261_0>

Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.

P. BOLLEY - J. CAMUS (*)

Introduction

On se propose d'étudier la coïncidence entre prolongement « fort » et prolongement « faible » pour une classe d'opérateurs elliptiques à l'intérieur d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, dégénérés au bord de cet ouvert, le bord étant caractéristique. Cette étude permet de résoudre les problèmes d'existence de traces et de formule de Green pour les éléments du domaine du prolongement « faible » de ces opérateurs.

Soit L un opérateur différentiel linéaire sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre m à coefficients « suffisamment réguliers » et soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Selon K. O. Friedrichs [8], on considère les deux extensions fermées de L suivantes: L_W, prolongement « faible » de L, ou encore, « opérateur maximal » dans $L^2(\Omega)$ associé à L, défini par:

$$\begin{cases} D(L_W) = D(L;\,\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\, Lu \in L^2(\Omega)\} \\ L_W u \quad = Lu \ \text{ pour } \ u \in D(L;\,\Omega); \end{cases}$$

et L_S, prolongement « fort » de L, défini par:

$$\begin{cases} D(L_S) = \{u \in D(L;\,\Omega);\ \exists (u_n)_{n\in\mathbf{N}},\ u_n \in C^\infty(\overline{\Omega}), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} + \|Lu_n - Lu\|_{L^2(\Omega)}\right) = 0\} \\ L_S u = Lu \ \text{ pour } \ u \in D(L_S)\,. \end{cases}$$

On vérifie facilement que les opérateurs L_W et L_S sont fermés et que L_W est une extension fermée de L_S.

(*) U. E. R. de Mathématiques et Informatique, Université de Rennes, 35031 Rennes - Cedex.

Pervenuto alla Redazione il 18 Luglio 1973.

Le problème général est de savoir à quelles conditions (sur l'opérateur L et sur l'ouvert Ω) on a l'identité $L_S \equiv L_W$ i.e. à quelles conditions

$$(*) \qquad C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } D(L;\Omega),$$

$D(L;\Omega)$ étant muni de la norme du graphe.

Ce problème intervient dans de nombreuses questions, en particulier, en ce qui concerne les problèmes aux limites attachés à L (voir par exemple: [12] et [9]).

Plusieurs auteurs ont résolu la validité de (*) pour diverses classes d'opérateurs différentiels (voir par exemple: [8], [10], [11], [12], [1] et la bibliographie de ce dernier).

Dans [1], C. Baiocchi traite le problème $L_S \equiv L_W$ à l'aide d'une variante du « lemme de Friedrichs ». Il obtient ainsi un résultat général qui redonne comme cas particuliers presque tous les résultats obtenus jusqu'alors et avec quelques précisions supplémentaires concernant la régularité de l'ouvert Ω et des coefficients de l'opérateur L.

Dans cet article, on « résoud » le problème $L_S \equiv L_W$ pour une classe d' opérateurs elliptiques et dégénérés (cf. [2], [14], [15], [6]):

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} P^{m-h}(x;D_x)\{\varphi(x)^{k-h}u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers $\geqslant 1$, où $P^{m-h}(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre $\leqslant m-h$, où $P^{m-h}(x;D_x)$ est un opérateur d'ordre m elliptique dans $\bar{\Omega}$, et où φ est une fonction de classe C^∞, équivalente à la distance au bord $\partial\Omega$ de Ω. Ce sont des opérateurs d'ordre m, elliptiques à l'intérieur et dont la dégénérescence au bord est d'ordre k.

La méthode utilisée est une méthode de transposition comme dans [12] associée à deux théorèmes de régularité analogues au théorème de régularité à l'intérieur pour un opérateur elliptique. Ces théorèmes sont démontrés au chapitre I (théorèmes 1.1 et 1.2).

Au chapitre II, on énonce les résultats obtenus concernant la validité de (*) (proposition 2.1 et théorème 2.2). Dans le cas où $k \geqslant m$, on en déduit que $C_0^\infty(\Omega)$ (espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω) est dense dans $D(L;\Omega)$ (théorème 2.1).

De la densité des fonctions régulières dans le domaine maximal $D(L;\Omega)$ associé à L, on déduit, par des méthodes classiques (cf. [12]), l'existence de traces pour les éléments de $D(L;\Omega)$; c'est l'objet du chapitre III.

Au chapitre IV, on donne quelques applications simples des résultats obtenus aux chapitres II et III. En particulier, on obtient de nouveaux théorèmes de traces concernant les opérateurs elliptiques (cf. théorème 4.4).

Enfin, au chapitre V, on résoud le problème de la formule de Green posé par M. M. Baouendi-Goulaouic pour l'opérateur étudié par eux dans [2]. L'intérêt de ce cas particulier provient du fait que la propriété (*) n'est pas vraie pour cet opérateur et cependant il existe une formule de Green pour les éléments du domaine maximal; en particulier, cela permet d'interpréter le problème de [2] comme un « vrai » problème aux limites.

Le plan est le suivant:

I. – Deux théorèmes de régularité.

Ce chapitre a pour but d'établir les deux théorèmes de régularité locale à partir desquels on résoudra au chapitre II le problème de densité des fonctions régulières dans le domaine maximal des opérateurs considérés.

Tout d'abord, on rappelle et on complète des résultats relatifs aux espaces de Sobolev avec poids W_k^m donnés dans [6] et à une classe d'opérateurs différentiels elliptiques et dégénérés à une variable donnés dans [5].

I.1. *Une inégalité du type « compacité » pour les espaces de Sobolev avec poids W_k^m.*

Soit n un entier $\geqslant 1$. Le point générique de $\mathbb{R}^n$ sera noté $x = (x', t)$ avec $x' = (x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. On notera $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n ; t > 0\}.$$

Etant donnés deux entiers k et $m \geqslant 0$, on définit les espaces de Sobolev avec poids suivants:

$$W_k^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n) ; t^k u \in H^m(\mathbb{R}^n)\},$$

où d'une manière générale, $H^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$.

L'espace $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert pour la norme:

$$u \mapsto \|u\|_{W_k^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\|u\|^2_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)} + \|t^k u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 1.1. *Pour tout entier h tel que $0 \leqslant h \leqslant k$, l'application*

$$u \mapsto t^{k-h} u$$

est linéaire continue de $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{m-k}(\mathbb{R}^n)$.

DÉMONSTRATION (cf. [6]). Il est facile de voir que l'injection de $W_k^m(\mathbb{R}^n)$ dans $W_{k-1}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas compacte. Cependant, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 1.2. *Pour k entier $\geqslant 1$, on a: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que, pour $h = 1, \ldots, k$ et pour tout $u \in W_k^m(\mathbb{R}^n)$, on ait:*

$$\|t^{k-h} u\|_{H^{m-h}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \|t^k u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \|u\|_{H^{m-k}(\mathbb{R}^n)}.$$

DÉMONSTRATION:

1-*ère étape*: démonstration de la proposition 1.2 pour $n=1$. Il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ telle que pour tout $u\in W_k^m(\mathbb{R})$, on ait:

$$\|t^{k-1}u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R})}\leqslant \varepsilon\|t^k u\|_{H^m(\mathbb{R})}+C_\varepsilon\|t^{k-2}u\|_{H^{m-2}(\mathbb{R})}, \tag{1.1}$$

et comme $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ (*) est dense dans $W_k^m(\mathbb{R})$, (cf. [5]), il suffit de prouver cette inégalité pour $u\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

Désignons par Fu la transformée de Fourier de u:

$$Fu(\tau)=\int_{\mathbb{R}}\exp[-it\tau]u(t)\,dt\,.$$

Soit $u\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|^2)^{m-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}Fu\cdot\overline{\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}Fu}\,d\tau=-\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{d\tau}\left\{(1+|\tau|^2)^{m-1}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}Fu\right\}\cdot$$
$$\cdot\overline{\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}Fu}\,d\tau=-\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|^2)^{m-1}\frac{d^k}{d\tau^k}Fu\cdot\overline{\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}Fu}\,d\tau-2(m-1)\int_{\mathbb{R}}\tau(1+|\tau|^2)^{m-2}\cdot$$
$$\cdot\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}Fu\cdot\overline{\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}Fu}\,d\tau\,.$$

Par suite,

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|^2)^{m-1}\left|\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}Fu\right|^2d\tau\leqslant\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|^2)^{m/2}\left|\frac{d^k}{d\tau^k}Fu\right|(1+|\tau|^2)^{(m-2)/2}\left|\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}Fu\right|\cdot$$
$$\cdot d\tau+2|m-1|\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau|^2)^{(m-1)/2}\left|\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}Fu\right|(1+|\tau|^2)^{(m-2)/2}\left|\frac{d^{k-2}}{d\tau^{k-2}}Fu\right|d\tau\,,$$

utilisant l'inégalité classique $ab\leqslant\varepsilon a^2+c_\varepsilon b^2$, on obtient l'inégalité (1.1).

2-*ème étape*: démonstration de la proposition 1.2 pour $n\geqslant1$. Il suffit d'établir que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ telle que pour tout $u\in W_k^m(\mathbb{R}^n)$, on ait:

$$\|t^{k-1}u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\varepsilon\|t^k u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}+C_\varepsilon\|t^{k-2}u\|_{H^{m-2}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

(*) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, on note $\mathfrak{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ de Ω dans $\mathbb{C}$ à support compact dans Ω et $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.

et, puisque $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $W_k^m(\mathbf{R}^n)$, on peut se limiter aux fonctions $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Désignons par $\mathcal{F}u$ la transformée de Fourier de u sur $\mathbf{R}^n$:

$$\mathcal{F}u(\xi', \tau) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp[-i\langle x', \xi'\rangle - it\tau] u(x', t)\, dx\,.$$

Pour tout $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, la fonction $Fv(\tau)$ définie sur $\mathbf{R}$ par $Fv(\tau) = \mathcal{F}u(\xi', \tau(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}})$ est la transformée de Fourier sur $\mathbf{R}$ d'une fonction v appartenant à $W_k^m(\mathbf{R})$. Appliquons l'inégalité (1.1) à cette fonction v, il vient:

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^{m-1}(1+|\xi'|^2)^{k-1}\left|\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\mathcal{F}u\Big(\xi', \tau(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\right|^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^{m}(1+|\xi'|^2)^{k}\left|\frac{d^{k}}{d\tau^{k}}\mathcal{F}u\Big(\xi', \tau(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\right|^2 d\tau +$$

$$+ C_\varepsilon \int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^{m-k}\left|\mathcal{F}u\Big(\xi', \tau(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\right|^2 d\tau\,.$$

On fait le changement de variable $t = \tau(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}$, on divise par $(1+|\xi'|^2)^{k-m-\frac{1}{2}}$, on intègre par rapport à ξ' sur $\mathbf{R}^{n-1}$ et finalement, on obtient (1.2).

L'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ étant dense dans $W_k^m(\mathbf{R}^n)$, il en résulte que l'espace dual $[W_k^m(\mathbf{R}^n)]'$ est un espace de distributions. Plus précisément, $[W_k^m(\mathbf{R}^n)]'$ s'identifie à l'espace des distributions T de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ de la forme: $T = \sum_{j=0}^{k} t^j g_j$ où g_j, pour $j = 0, \ldots, k$, appartient à $H^{-m+k-j}(\mathbf{R}^n)$. De plus, la norme d'espace dual sur $[W_k^m(\mathbf{R}^n)]'$ est équivalente à la norme:

$$T \mapsto \|T\|_{[W_k^m(\mathbf{R}^n)]'} = \operatorname*{Inf}_{\substack{T=\sum_{j=0}^{k} t^j g_j \\ g_j \in H^{-m+k-j}(\mathbf{R}^n)}} \left\{\sum_{j=0}^{k} \|g_j\|_{H^{-m+k-j}(\mathbf{R}^n)}\right\},$$

I.2. *Un lemme de dérivées intermédiaires.*

Etant donnés deux nombres réels s et r, on désigne par $H^{s,r}(\mathbf{R}^n)$ l'espace:

$$H^{s,r}(\mathbf{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)\ (*);\ (1+|\xi'|^2+\tau^2)^{s/2}(1+|\xi'|^2)^{r/2}\mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R}^n)\}$$

(*) On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^n$ (cf. [13]).

muni de la norme:

$$u \mapsto \|u\|_{H^{s,r}(\mathbf{R}^n)} = \|(1+|\xi'|^2+\tau^2)^{s/2}(1+|\xi'|^2)^{r/2}\mathcal{F}u\| \, L^2(\mathbf{R}^n)\,.$$

Pour k entier $\geqslant 0$, on désigne par $W_k(s, r; \mathbf{R}^n)$ l'espace:

$$W_k(s, r; \mathbf{R}^n) = \{u \in H^{s,r-k}(\mathbf{R}^n);\ t^k u \in H^{s,r}(\mathbf{R}^n)\}$$

muni de la norme:

$$u \mapsto \|u\|_{W_k(s,r;\mathbf{R}^n)} = \left(\|u\|^2_{H^{s,r-k}(\mathbf{R}^n)} + \|t^k u\|_{H^{s,r}(\mathbf{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors:

LEMME 1.2. *Si u appartient à $W_k(s, r; \mathbf{R}^n)$, alors, pour $h = 0, \ldots, k$, on a: $t^{k-h}u \in H^{s,r-h}(\mathbf{R}^n)$ et l'application: $u \mapsto t^{k-h}u$: $W_k(s, r; \mathbf{R}^n) \mapsto H^{s,r-h}(\mathbf{R}^n)$ est linéaire continue.*

REMARQUE 1.2. Par transformation de Fourier, ce résultat peut être considéré comme un lemme de dérivées intermédiaires dans des espaces avec poids.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.2:

1-*ère étape*: en dimension $n = 1$, le lemme 1.2 exprime que si $v \in H^s(\mathbf{R})$ et si $t^k v \in H^s(\mathbf{R})$, alors pour $h = 0, \ldots, k$, $t^{k-h}v \in H^s(\mathbf{R})$ et il existe une constante $C > 0$, indépendante de v et h telle que:

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^s \left|\frac{d^{k-h}}{d\tau^{k-h}} Fu\right|^2 d\tau \leqslant C\left\{\int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^s \left|\frac{d^k}{d\tau^k} Fu\right|^2 d\tau + \right. \left. + (1+|\tau|^2)^s |Fu|^2 d\tau\right\} \tag{1.3}$$

ce résultat est immédiat.

2-*ème étape*: soit $u \in W_k(s, r; \mathbf{R}^n)$ et pour presque tout $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, définissons l'élément v par sa transformée de Fourier Fv par: $Fv(\tau) = \mathcal{F}u\left(\xi', (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\tau\right)$. Ainsi, $v \in H^s(\mathbf{R})$ et $t^k v \in H^s(\mathbf{R})$; appliquons l'inégalité (1.3) à v:

$$\int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^s (1+|\xi'|^2)^{k-h} \left|\frac{d^{k-h}}{d\tau^{k-h}} \mathcal{F}u\left(\xi', (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\tau\right)\right|^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^s (1+|\xi'|^2)^k \left|\frac{d^k \mathcal{F}u}{d\tau^k}\left(\xi', (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\tau\right)\right|^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbf{R}} (1+|\tau|^2)^s \left|\mathcal{F}u\left(\xi', (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\tau\right)\right|^2 d\tau\right\}.$$

On fait le changement de variable $y = (1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}\tau$ et on multiplie l'inégalité obtenue par $(1 + |\xi'|^2)^{r+s-k+\frac{1}{2}}$, on obtient:

$$\int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + |\tau|^2)^s (1 + |\xi'|^2)^{r-h} \left| \frac{d^{k-h}}{d\tau^{k-h}} \mathcal{F}u(\xi', \tau) \right|^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + \tau^2)^s (1 + |\xi'|^2)^r \left| \frac{d^k}{d\tau^k} \mathcal{F}u(\xi', \tau) \right|^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi'|^2 + \tau^2)^s (1 + |\xi'|^2)^{r-k} |\mathcal{F}u(\xi', \tau)|^2 \, d\tau \right\}.$$

On intègre cette inégalité par rapport à ξ' sur $\mathbf{R}^{n-1}$ et finalement, on obtient le résultat du lemme 1.2.

I.3. *Quelques propriétés d'une classe d'opérateurs différentiels elliptiques et dégénérés.*

On va rappeler et compléter les résultats de régularité pour la classe d'opérateurs différentiels à une variable étudiée dans [5].

Soit $L(t; D_t)$ l'opérateur différentiel ordinaire défini sur $\mathbf{R}$ par:

$$Lu(t) \equiv L(t; D_t)u(t) \equiv \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(m,k)} P^{m-h}(D_t)\{t^{k-h}u(t)\}$$

où $D_t = (1/i)(d/dt)$, et où m et k sont deux entiers $\geqslant 1$ et où:

(i) $P^{m-h}(D_t)$, pour $0 \leqslant h \leqslant \mathrm{Min}(m, k)$, est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre $\leqslant m - h$, à coefficients constants complexes:

$$P^{m-h}(D_t) = \sum_{j=0}^{m-h} P_j^{m-h} D_t^j, \qquad P_j^{m-h} \in \mathbf{C};$$

(ii) $P^m(\tau)$ est un polynôme de degré m ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}$.

Cette classe d'opérateurs différentiels a été étudiée dans [5] et [7], nous citons maintenant les résultats dont nous avons besoin par la suite.

Désignons par $\phi(\varrho) = 0$ l'équation déterminante associée à l'opérateur L:

$$\phi(\varrho) \equiv \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(m,k)} P_{m-h}^{m-h} i^{k-h} \varrho(\varrho - 1) \dots (\varrho - k + h + 1).$$

On a alors:

PROPOSITION 1.3. *Soient p et q deux entiers avec $q \geqslant 0$ tels que l'équation $\phi(\varrho)=0$ n'ait pas de racine dans la bande:*

$$-(p+q)-m+k-\tfrac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant -p-m+k-\tfrac{1}{2}.$$

Si u appartient à $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ et si Lu appartient à $H^{p+q}(\mathbb{R})$, alors u appartient à $W_k^{m+p+q}(\mathbb{R})$.

Cette proposition a été démontrée pour $p \geqslant 0$ dans [5] lorsque $k \leqslant m$ et dans [7] lorsque $k > m$. Les démonstrations données sont valables pour p entier quelconque.

Par transposition, on déduit de la proposition 1.3, la:

PROPOSITION 1.4. *Soient p et q deux entiers avec $q \geqslant 0$ tels que l'équation $\phi(\varrho)=0$ n'ait pas de racine dans la bande:*

$$-(p+q)-\tfrac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant -p-\tfrac{1}{2}.$$

Si u appartient à $H^p(\mathbb{R})$ et si Lu appartient à $[W_k^{m-p-q}(\mathbb{R})]'$, alors u appartient à $H^{p+q}(\mathbb{R})$.

Pour tout entier p, désignons par $H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+)$ l'espace des distributions $T \in H^p(\mathbb{R})$ à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Notons d'autre part, $\operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{T \in H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+),\ LT=0\}$. Il résulte du théorème 2.1 de [5] et [7], que:

PROPOSITION 1.5. *Soit p un entier tel que l'équation $\phi(\varrho)=0$ n'ait pas de racine située sur la droite $\operatorname{Re}\varrho=-p-\frac{1}{2}$ et tel que $\operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+)=\{0\}$, alors l'opérateur $L(t; D_t)$ est un isomorphisme de $H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+)$ sur un sous-espace fermé de $[W_k^{m-p}(\mathbb{R})]'$.*

Il sera utile d'analyser la condition $\operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+)=\{0\}$. Signalons que cette situation a toujours lieu dès que l'équation $\phi(\varrho)=0$ n'admet pas de racine dans le demi-espace $\operatorname{Re}\varrho \leqslant -p-\frac{1}{2}$. Dans le cas général, cette condition, $\operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+)=\{0\}$, implique des conditions algébriques sur l'opérateur L et, dans certains cas, ces conditions algébriques sont aussi suffisantes. Plus précisément, pour trouver les conditions algébriques que cette condition implique à l'opérateur L, on utilise la proposition suivante (cf. [5]).

PROPOSITION 1.6. *Soit $u \neq 0$ appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $Lu=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

(ii) *la transformée de Fourier Fu de u est holomorphe dans un voisinage de $\operatorname{Im}\tau \leqslant 0$.*

Cette proposition permet de ramener l'étude de $\operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+)$ à une étude d'holomorphie des transformées de Fourier des distributions $T \in H^p(\mathbb{R})$ vérifiant $LT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ au voisinage des zéros de $P^m(\tau)$ situés dans $\operatorname{Im} \tau < 0$.

Ainsi, lorsque $m = 2$ et $k = 1$, on obtient (cf. [5], chapitre III):

$$\text{si } \operatorname{Re}(ip_1^1) > -p - \tfrac{1}{2}, \text{ alors: } \operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}.$$

$$\text{si } \operatorname{Re}(ip_1^1) < -p - \tfrac{1}{2}, \text{ alors: } \operatorname{Ker} L \cap H_0^p(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$$

si et seulement si il n'existe pas d'entier $n \geqslant 0$ tel que: $P^1(\tau_-) = i\, n p_2^2\, (\tau_+ - \tau_-)$, où τ_+ et τ_- sont les racines de $P^2(\tau) = 0$ supposées vérifiées $\operatorname{Im} \tau_+ > 0$ et $\operatorname{Im} \tau_- < 0$.

I.4 *Les théorèmes de régularité.*

a) Notations et hypothèses.

Soit $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x; D_x)$ l'opérateur défini sur $\mathbb{R}^n$ par:

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \mathcal{L}(x; D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} \mathcal{T}^{m-h}(x; D_x)\{t^{k-h}u(x)\},$$

où

$$D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1'}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}'}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

où k et m sont deux entiers $\geqslant 1$ et où:

(i) $\mathcal{T}^{m-h}(x; D_x)$, pour $h = 0, \ldots, \operatorname{Min}(m, k)$, est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^n$, d'ordre inférieur ou égal à $m - h$:

$$\mathcal{T}^{m-h}(x; D_x) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m-h} p_\alpha^{m-h}(x) D_x^\alpha;$$

(ii) $\mathcal{T}^m(0; D_x)$ est un opérateur à coefficients constants elliptique.

Désignons, pour tout nombre réel $r > 0$, par $B(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$.

Lorsque $k \geqslant m$, on va établir le:

Théorème 1.1. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que: si* $u \in L^2(B(0,1))$ *et* $\mathcal{L}u \in L^2(B(0,1))$, *alors: pour toute fonction* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \phi \subset B(0, \varepsilon_0)$, *on a:* $\phi u \in W_k^m(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque $1 \leqslant k < m$, il est nécessaire d'imposer des conditions à l'opérateur $\mathfrak{L}$ pour espérer un résultat voisin de celui du théorème 1.1.

A cet effet, introduisons l'opérateur $\mathfrak{L}^0 \equiv \mathfrak{L}^0(x; D_x)$ défini par:

$$\mathfrak{L}^0 u(x) \equiv \mathfrak{L}^0(x; D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{k} \mathcal{P}_{m-h}^{m-h}(x; D_x)\{t^{k-h}u(x)\},$$

où

$$\mathcal{P}_{m-h}^{m-h}(x; D_x) \equiv \sum_{|\alpha|=m-h} p_\alpha^{m-h}(x) D_x^\alpha$$

est la partie principale de l'opérateur $\mathcal{P}^{m-h}(x; D_x)$. Pour tout vecteur $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, notons $(\xi', D_t) = (\xi_1', \dots, \xi_{n-1}', D_t)$ et $\mathfrak{L}^0(x; \xi', D_t) \equiv \mathfrak{L}^0(x; (\xi', D_t))$. Enfin, on notera $\phi(\varrho)$ le polynôme:

$$\phi(\varrho) \equiv \sum_{h=0}^{k} p_{(0,\dots,0,m-h)}^{m-h}(0)\, i^{k-h} \varrho(\varrho-1) \dots (\varrho-k+h+1).$$

Ainsi, pour $1 \leqslant k < m$, on va établir le:

THÉORÈME 1.2. *On suppose que l'équation* $\phi(\varrho) = 0$ *n'admet pas de racine dans la bande*: $-m+k-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant -\frac{1}{2}$ *et que l'espace* $\operatorname{Ker}\mathfrak{L}^0(0; \omega', D_t) \cap \cap H_0^0(\overline{\mathbf{R}}_+)$ *est réduit à* $\{0\}$ *pour tout vecteur* $\omega' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|\omega'| = 1$. *Alors*:

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*: *si* $u \in L^2(B(0,1))$ *avec* $\operatorname{supp} u \subset B(0,1) \cap \overline{\mathbf{R}}_+^n$ *et si* $\mathfrak{L}u \in L^2(B(0,1))$, *alors*: *pour toute fonction* $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset B(0, \varepsilon_0)$, *on a*: $\phi u \in W_k^m(\mathbf{R}^n)$.

b) *Démonstration du théorème* 1.1:

On va d'abord établir un lemme valable aussi bien pour $k \geqslant m$ que pour $1 \leqslant k < m$.

LEMME 1.3. *Soit* l *un entier* $\geqslant 0$. *Il existe une constante* $\varepsilon_l > 0$ *telle que*:
Si $u \in W_k^l(\mathbf{R}^n)$ *avec* $\operatorname{supp} u \subset B(0, \varepsilon_l)$, *si* $\partial u/\partial x_i' \in H^{-k+l}(\mathbf{R}^n)$ *et si* $\partial \mathfrak{L}u/\partial x_i' \in \in H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)$ *alors*: $\partial u/\partial x_i' \in W_k^l(\mathbf{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. On a:

$$\mathcal{P}^m(x; D_x)\{t^k u\} = \mathfrak{L}u - \sum_{h=1}^{\operatorname{Min}(m,k)} \mathcal{P}^{m-h}(x; D_x)\{t^{k-h}u\}$$

et, d'après les hypothèses faites, cela implique que $\mathcal{T}^m(x; D_x)\{t^k u\} \in H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)$. L'opérateur $\mathcal{T}^m(0, D_x)$ étant elliptique, il existe donc une constante $\varepsilon_l > 0$ (cf. [12], théorème 3.1, chapitre II) telle que:

Si $u \in W_k^l(\mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0, \varepsilon_l)$ on ait:

$$\|t^k u\|_{H^l(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\ (*) \cdot \{\|\mathcal{T}^m(x; D_x)\{t^k u\}\|_{H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)} + \|t^k u\|_{H^{l-1}(\mathbf{R}^n)}\}\,.$$

Or,

$$\|\mathcal{T}^m(x; D_x)\{t^k u\}\|_{H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|\mathcal{L}u\|_{H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)} + C \sum_{h=1}^{\operatorname{Min}(m,k)} \|t^{k-h} u\|_{H^{l-h}(\mathbf{R}^n)}\,.$$

Utilisant la proposition 1.1, il vient: pour tout $u \in W_k^l(\mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0, \varepsilon_l)$, on a:

$$\|t^k u\|_{H^l(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\{\|\mathcal{L}u\|_{H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)} + \|u\|_{H^{l-k}(\mathbf{R}^n)} + \|t^k u\|_{H^{l-1}(\mathbf{R}^n)}\}\,. \tag{1.4}$$

Pour $h \neq 0$, posons:

$$\varrho_{ih} u(x) = \frac{u(x'_1, \ldots, x'_i + h, \ldots, x'_{n-1}, t) - u(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, t)}{h}\,.$$

Si h est assez petit, on a: $\operatorname{supp}(\varrho_{ih} u) \subset B(0, \varepsilon_l)$ et on peut donc appliquer l'inégalité (1.4) à $\varrho_{ih} u$:

$$\|t^k \varrho_{ih} u\|_{H^l(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\{\|\mathcal{L}(\varrho_{ih} u)\|_{H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)} + \|\varrho_{ih} u\|_{H^{l-k}(\mathbf{R}^n)} + \|t^k \varrho_{ih} u\|_{H^{l-1}(\mathbf{R}^n)}\}\,. \tag{1.5}$$

Posons: $\tau_{ih} u(x) = u(x'_1, \ldots, x'_i + h, \ldots, x'_{n-1}, t)$; on vérifie que:

$$\mathcal{L}(x; D_x)\{\varrho_{ih} u\} - \varrho_{ih}(\mathcal{L}(x; D_x) u) = \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} \sum_{|\alpha| \leqslant m-h} [\varrho_{ih} p_\alpha^{m-h}(x)] D_x^\alpha \{\tau_{ih} t^{k-h} u\}$$

et donc

$$\|\mathcal{L}(x; D_x)\{\varrho_{ih} u\} - \varrho_{ih}(\mathcal{L}(x; D_x) u)\|_{H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W_k(\mathbf{R}^n)}\,.$$

Puisque, par hypothèse, $\partial u / \partial x'_i \in H^{l-k}(\mathbf{R}^n)$ et $\partial \mathcal{L}u / \partial x'_i \in H^{-m+l}(\mathbf{R}^n)$, il en résulte que $\varrho_{ih} u$ demeure dans un borné de $W_k^l(\mathbf{R}^n)$ lorsque h varie; ceci implique que $\partial u / \partial x'_i \in W_k^l(\mathbf{R}^n)$, ce qu'il fallait démontrer.

(*) On désigne ici et dans la suite par C une constante positive pouvant changer d'une inégalité à l'autre mais indépendante des fonctions considérées.

On démontre maintenant le théorème 1.1. On fait l'hypothèse de récurrence suivante:

(H_l) Il existe $\varepsilon_l > 0$ tel que: si $u \in L^2(B(0,1))$ et $\mathcal{L}u \in L^2(B(0,1))$, alors:

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \phi \subset B(0, \varepsilon_l)$, on a: $D_x^\alpha \phi u \in W_k^l(\mathbb{R}^n)$

pour $|\alpha| \leqslant m - l$.

L'hypothèse (H_0) *est vraie*: soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \phi \subset B(0, \varepsilon_0)$ où ε_0 est un nombre inférieur à 1 satisfaisant aux conditions du lemme 1.3 pour $l = 0$. On a évidemment $\phi u \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$. Raisonnons alors par récurrence sur $|\alpha|$ et supposons que $D_{x'}^\alpha (\phi u) \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r$ avec $r < m$ et montrons que $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r + 1$.

Soit donc α tel que $|\alpha| \leqslant r$. On a:

$$(1.6) \qquad D_{x'}^\alpha \mathcal{L}(\phi u) = \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} \sum_{|\beta| \leqslant m-h} \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D_{x'}^\gamma [p_\beta^{m-h}(x)] \cdot D^\beta \{t^{k-h} D_{x'}^{\alpha-\gamma} \phi u\} =$$

$$= \mathcal{L}(D_{x'}^\alpha \phi u) + \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} \sum_{|\beta| \leqslant m-h} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \alpha \\ \gamma \neq 0}} D_{x'}^\gamma [p_\beta^{m-h}(x)] \cdot D^\beta \{t^{k-h} D_{x'}^{\alpha-\gamma} \phi u\} .$$

Par ailleurs, on a aussi:

$$(1.7) \qquad \mathcal{L}(\phi u) = \phi \mathcal{L} u + \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} [\mathcal{T}^{m-h}(x; D_x), \phi]\{t^{k-h} \psi u\}$$

où ψ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \psi \subset B(0, \varepsilon_0)$, telle que $\psi\phi = \phi$, et où $[,]$ est la notation classique du commutateur de deux opérateurs.

D'après l'hypothèse de résurrence, on a: $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$; $(\partial/\partial x_i') D_{x'}^\alpha \phi u \in H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ puisque $k \geqslant m$; $(\partial/\partial x_i') \mathcal{L}(D_{x'}^\alpha \phi u) \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ puisque si $v \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$, alors $t^{k-h} v \in H^{-h}(\mathbb{R}^n)$ pour $h = 0, \ldots, k$.

Appliquons le lemme 1.3 avec $l = 0$, il vient: $(\partial/\partial x_i') D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$; ceci est valable pour $i = 1, \ldots, n-1$. Par suite, $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r + 1$. La récurrence est donc vraie, ce qui prouve que (H_0) est vraie.

Si $l < m$, *l'hypothèse* (H_l) *implique l'hypothèse* (H_{l+1}): soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \phi \subset B(0, \varepsilon)$ où $\varepsilon \in]0, \varepsilon_l]$ sera choisi convenablement.

On montre tout d'abord que si ε est assez petit, alors $\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on remarque que:

$$(1.8) \qquad \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} p_{(0,\ldots,0,m-h)}^{m-h}(x) D_t^{m-h}\{t^{k-h} \phi u\} \in H^{-m+l+1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1})) .$$

En effet:

pour $l + 1 \leqslant h \leqslant m$; on a: $t^k \phi u \in H^{0,m}(\mathbb{R}^n)$ d'après (H_0) et $\phi u \in H^{0,m-k}(\mathbb{R}^n)$ puisque $k \geqslant m$, donc, d'après le lemme 1.2, $t^{k-h} \phi u \in H^{0,m-h}(\mathbb{R}^n)$. Par suite, pour $|\alpha|+j\leqslant m-h$, on a: $D_t^j D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{-j}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Mais $j\leqslant m-$ $-h\leqslant m-l-1$, il en résulte que:

$$D_t^j D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{-m+l+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

pour $|\alpha|+j\leqslant m-h$.

pour $0\leqslant h\leqslant l$; on a: pour $|\alpha|\leqslant m-l$, $D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{l-h}(\mathbb{R}^n)$ d'après (H_l) et donc pour $|\alpha|+j\leqslant m-h$ avec $|\alpha|\leqslant m-l$ on a: $D_t^j D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in$ $\in H^{l-h-j}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ et si de plus $j\leqslant m-h-1$, on obtient:

$$D_t^j D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{-m+l+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

pour $|\alpha|+j\leqslant m-h$ avec $|\alpha|\leqslant m-l$ et $j\leqslant m-h-1$.
Et si $|\alpha|=m-l+q$ avec $1\leqslant q\leqslant l-h$, on a: $D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{l-h-q}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, donc pour $|\alpha|+j\leqslant m-h$ on a: $D_t^j D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{l-h-q-j}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ et puisque $l\leqslant m-1$, on obtient:

$$D_t^j D_{x'}^\alpha\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{-m+l+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

pour $|\alpha|+j\leqslant m-h$ et $|\alpha|>m-l$.

L'assertion (1.8) est alors une conséquence de (1.7).

Ecrivant $p^{m-h}_{(0,\ldots,0,m-h)}(x)=p^{m-h}_{(0,\ldots,m-h)m-h}(x',0)+tq^{m-h}(x)$ où $q^{m-h}(x)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il résulte de (1.8) et des calculs précédents que:

$$\sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} p^{m-h}_{(0,\ldots,0,m-h)}(x',0)D_t^{m-h}\{t^{k-h}\phi u\}\in H^{-m+l+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\,. \tag{1.9}$$

L'équation déterminante associée à (1.9) est

$$\phi(x';\varrho)\equiv\sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} p^{m-h}_{(0,\ldots,0,m-h)}(x',0)i^{k-h}\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-k+h+1)=0$$

et, puisque

$$\phi u\in W_k^l(R;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\cap L^2(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\;,$$

il en résulte que:

$$\sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} p^{m-h}_{(0,\ldots,0,m-h)}(x',0)D_t^{m-h}\{t^{k-h}\phi u\}+\lambda\{t^{k-m}\phi u\}\in H^{-m+l+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \tag{1.10}$$

pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$.

Or, on peut trouver $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que l'équation $\phi(x'; \varrho) + i^{k-m}\lambda\varrho(\varrho-1)\ldots$ $\ldots(\varrho-k+m+1) = 0$ n'admette pas de racine dans la bande: $-l+k-\frac{3}{2}\leqslant$ $\leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant -l+k-\frac{1}{2}$ pour $|x'|\leqslant\varepsilon_l$. Ainsi, de (1.10), on déduit (cf.: proposition 1.3) que, pour ε assez petit, soit $\varepsilon = \varepsilon_{l+1}$, $\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1}))$.

Revenant à l'équation $\mathcal{L}(\phi u) \in H^{-m+l+1}(\mathbf{R}^n)$, on obtient que:

$$\mathcal{T}^m(x; D_x)\{t^k\phi u\} \in H^{-m+l+1}(\mathbf{R}^n)$$

et puisque $\mathcal{T}^m(0; D_x)$ est elliptique, il en résulte que $t^k\phi u \in H^{l+1}(\mathbf{R}^n)$, i.e.: $\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$.

Ainsi, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{supp}\phi \subset B(0, \varepsilon_{l+1})$, on a: $\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$. Montrons maintenant par récurrence sur $|\alpha|$ que $D_{x'}^{\alpha}\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant$ $\leqslant m-l-1$. Ceci est vrai pour $|\alpha| = 0$. Supposons donc que $D_{x'}^{\alpha}\phi u \in$ $\in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r$ avec $r < m-l-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a: $D_{x'}^{\alpha}\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$; $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^{\alpha}\phi u \in H^{-k+l+1}(\mathbf{R}^n)$ puisque $k \geqslant m$; $(\partial/\partial x_i')\mathcal{L}(D_{x'}^{\alpha}\phi u) \in H^{-m+l+1}(\mathbf{R}^n)$, d'après (1.6) et (1.7).

Appliquons le lemme 1.3 avec $l+1$, il vient: $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^{\alpha}\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$; ceci est valable pour $i = 1, \ldots, n-1$. Par suite, $D_{x'}^{\alpha}\phi u \in W_k^{l+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r+1$. La récurrence est donc vraie, ce qui prouve que (H_{l+1}) est vraie.

Finalement, (H_m) est vraie, i.e.: le théorème 1.1 est démontré.

c) Démonstration du théorème 1.2. On commence par établir un lemme général:

LEMME 1.4. *On suppose que l'équation* $\phi(\varrho) = 0$ *n'admet pas de racine sur la droite* $\operatorname{Re}\varrho = -p-\frac{1}{2}$, *$p$ étant un entier fixé. On suppose de plus que l'espace* $\operatorname{Ker}\mathcal{L}^0\,(0; \omega', D_t) \cap H_0^p(\overline{\mathbf{R}}_+)$ *est réduit à* $\{0\}$ *pour tout vecteur* $\omega' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|\omega'| = 1$. *Alors*:

Il existe $\varepsilon_p > 0$ *tel que: si* $u \in H^p(\mathbf{R}^n)$ *avec* $\operatorname{supp} u \subset B(0, \varepsilon_p) \cap \overline{\mathbf{R}_+^n}$ *et si* $\partial/\partial x_i'\,\mathcal{L}u \in [W_k^{m-p}(\mathbf{R}^n)]'$, *alors*: $\partial u/\partial x_i' \in H^p(\mathbf{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $\omega' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|\omega'| = 1$, l'opérateur $\mathcal{L}^0(0; \omega', D_t)$ satisfait aux hypothèses de la proposition 1.5. Utilisant les méthodes de [6], on démontre alors qu'il existe une constante $\varepsilon_p > 0$ telle que:

Si $u \in H^p(\mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0, \varepsilon_p) \cap \overline{\mathbf{R}_+^n}$ on ait:

$$\|u\|_{H^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\{\|\mathcal{L}u\|_{[W_k^{m-p}(\mathbf{R}^n)]'} + \|u\|_{H^{p-1}(\mathbf{R}^n)}\}\,. \tag{1.11}$$

Conservant les notations introduites pour le lemme 1.3, on applique l'inégalité (1.11) à $\varrho_{ih}u$:

$$\|\varrho_{ih}u\|_{H^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\{\|\mathcal{L}(\varrho_{ih}u)\|_{[W_k^{m-p}(\mathbf{R}^n)]'} + \|\varrho_{ih}u\|_{H^{p-1}(\mathbf{R}^n)}\}\,.$$

Comme au lemme 1.3, on vérifie que:

$$\|\mathcal{L}(\varrho_{ih}u) - \varrho_{ih}(\mathcal{L}u)\|_{[W_k^{m-p}(\mathbb{R}^n)]'} \leqslant C\|u\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$$

et, puisque $(\partial/\partial x_i')\mathcal{L}u \in [W_k^{m-p}(\mathbb{R}^n)]'$, il en résulte que $\varrho_{ih}u$ demeure dans un borné de $H^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h varie; ceci implique que $(\partial u/\partial x_i') \in H^p(\mathbb{R}^n)$, ce qu'il fallait démontrer.

On démontre maintenant le théorème 1.2. On fait l'hypothèse de récurrence suivante:

(K_p) Il existe $\varepsilon_p > 0$ tel que: si $u \in L^2(B(0,1))$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,1) \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$ et $\mathcal{L}u \in L^2(B(0,1))$ alors: pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,\varepsilon_p)$, on a: $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m-p-1$ et $D_{x'}^\alpha \phi u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m-k-p$.

L'hypothèse (K_0) *est vraie*: soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,\varepsilon_0)$ où ε_0 est un nombre inférieur à 1 satisfaisant aux conditions du lemme 1.4 pour $p=0$. On a évidemment $\phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$. Raisonnons alors par récurrence sur $|\alpha|$ et supposons que $D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r$ avec $r < m-k$ et montrons que $D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r+1$. Soit donc α tel quel $|\alpha| \leqslant r$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a:
$D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} D_{x'}^\alpha \phi u \subset B(0,\varepsilon_0) \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$ et $(\partial/\partial x_i')\mathcal{L}(D_{x'}^\alpha \phi u) \in [W_k^m(\mathbb{R}^n)]'$ d'après (1.6) et (1.7).

Appliquons le lemme 1.4 avec $p=0$, il vient: $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$; ceci est valable pour $i = 1, \ldots, n-1$. Par suite, $D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r+1$. La récurrence est donc vraie. On a ainsi montré que $D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m$.

Revenant à l'équation $\mathcal{L}(\phi u) \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^n)$, on obtient que:

$$\mathcal{T}^m(x; D_x)\{t^k \phi u\} \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^n)$$

et, puisque $\mathcal{T}^m(0; D_x)$ est elliptique, il en résulte (pourvu que ε_0 soit assez petit) que $t^k\phi u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ i.e.: $\phi u \in W_k^1(\mathbb{R}^n)$.

Raisonnons alors par récurrence sur $|\alpha|$ et supposons que $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^1(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r$ avec $r < m-1$ et montrons que $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^1(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r+1$.

Soit α tel que $|\alpha| \leqslant r$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a: $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^1(\mathbb{R}^n)$; $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^\alpha \phi u \in H^{1-k}(\mathbb{R}^n)$ puisque $D_{x'}^\alpha \phi u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m$; $(\partial/\partial x_i')\mathcal{L}(D_{x'}^\alpha \phi u) \in H^{-m+1}(\mathbb{R}^n)$ d'après (1.6) et (1.7).

Appliquons le lemme 1.3 (pourvu que ε_0 soit assez petit), il vient: $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^1(\mathbb{R}^n)$; ceci est valable pour $i = 1, \ldots, n-1$. Par suite, $D_{x'}^\alpha \phi u \in W_k^1(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r+1$. La récurrence est donc vraie, ce qui prouve que (K_0) est vraie.

Si $p < m - k$, *l'hypothèse* (K_p) *implique l'hypothèse* (K^{p+1}). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset B(0, \varepsilon)$ où $\varepsilon \in]0, \varepsilon_p]$ sera choisi convenablement.

On montre tout d'abord que si ε est assez petit, alors $\phi u \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on remarque que:

$$(1.12) \qquad \sum_{h=0}^{k} p^{m-h}_{(0,\dots,0,m-h)}(x) D_t^{m-h}\{t^{k-h}\phi u\} \in \left[W_k^{m-p-1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\right]' .$$

En effet:

— pour $0 \leqslant j \leqslant p$, on a: $t^k \phi u \in H^{j,m-j}(\mathbb{R}^n)$ d'après (K_j) et $\phi u \in H^{j,m-j-k}(\mathbb{R}^n)$, donc, d'après le lemme 1.2, $t^{k-h}\phi u \in H^{j,m-j-h}(\mathbb{R}^n)$. Par suite, pour $|\alpha| + j \leqslant m - h$, on a: $D_t^j D_{x'}^\alpha \{t^{k-h}\phi u\} \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Mais puisque $p < m - k$, on a:

$$L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \subset [W_k^{m-p-1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))]' = \sum_{h=0}^{k} t^{k-h} H^{-m+p+1+h}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1})) ;$$

il en résulte que:

$$D_t^j D_{x'}^\alpha \{t^{k-h}\phi u\} \in [W_k^{m-p-1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))]'$$

pour $|\alpha| + j \leqslant m - h$.

— pour $p < j < k - h + p$, on écrit:

$$D_t^j\{t^{k-h}\phi u\} = D_t^j\{t^{k-h-j+p}\phi u \cdot t^{j-p}\} =$$
$$= \sum_{q=0}^{j-p} \binom{j}{q} (-i)^q (j-p)\dots(j-p-q+1)\, t^{j-p-q} \cdot D_t^{j-q}\{t^{k-h-j+p}\phi u\} .$$

Or, d'après (K_p) et le lemme 1.2, on a: $t^{k-h-j+p}\phi u \in H^{p,m-j-h}(\mathbb{R}^n)$. Par suite, pour $|\alpha| + j \leqslant m - h$, on a: $D_{x'}^\alpha, D_t^{j-q}\{t^{k-h-j+p}\phi u\} \in H^{p-j+q}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Mais, puisque $p < m - k$, on a $H^{p-j+q}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \subset H^{-m+2p+k+q-j+1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$; il en résulte que:

$$D_t^j D_{x'}^\alpha \{t^{k-h}\phi u\} \in [W_k^{m-p-1}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))]'$$

pour $|\alpha| + j \leqslant m - h$.

— pour $k - h + p \leqslant j \leqslant m - h - 1$, on écrit:

$$D_t^j\{t^{k-h}\phi u\} = \sum_{q=0}^{k-h} \binom{j}{q} (-i)^q (k-h)\dots(k-h-q+1)\, t^{k-h-q} \cdot D_t^{j-q}\{\phi u\} .$$

Or, d'après (K_p), $\phi u \in H^{p,m-p-k}(\mathbf{R}^n)$. Par suite, pour $|\alpha| + j \leqslant m - h$, on a: $D_t^{j-q} D_{x'}^{\alpha} \{\phi u\} \in H^{p-j+q}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1}))$. Mais, puisque $j \leqslant m - h - 1$, on a: $H^{p-j+q}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1})) \subset H^{-m+p+1+h+q}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1}))$; il en résulte que:

$$D_t^j D_{x'}^{\alpha} \{t^{k-h} \phi u\} \in [W_k^{m-p-1}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1}))]'$$

pour $|\alpha| + j \leqslant m - h$.

L'assertion (1.12) est alors une conséquence de (1.7).

Ecrivant $p_{(0,\dots,0,m-h)}^{m-h}(x) = P_{(0,\dots,0,m-h)m-h}^{m-h}(x', 0) + t q^{m-h}(x)$, il résulte de (1.12) et des calculs précédents que:

$$\sum_{h=0}^{k} p_{(0,\dots,0,m-h)}^{m-h}(x', 0) D_t^{m-h} \{t^{k-h} \phi u\} \in [W_k^{m-p-1}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1}))]' . \tag{1.13}$$

L'équation déterminante associée à (1.13) est $\phi(x', \varrho) = 0$. D'après l'hypothèse faite dans le théorème 1.2, il existe $\varepsilon_{p+1} > 0$ tel que si $|x'| < \varepsilon_{p+1}$, l'équation $\phi(x', \varrho) = 0$ n'admette pas de racine dans la bande $-p - \frac{3}{2} \leqslant \operatorname{Re} \varrho \leqslant -p - \frac{1}{2}$. Ainsi, de (1.13), on déduit (cf.: proposition 1.4) que, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{p+1}$ et ε_{p+1} assez petit, $\phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^{n-1}))$.

Par ailleurs, d'après (K_p), on a: $(\partial/\partial x_i')\phi u \in H^p(\mathbf{R}^n)$, pour $i = 1, \dots, n-1$ puisque $p < m - k$; il en résulte que $\phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$.

Ainsi, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} \phi \subset B(0, \varepsilon_{p+1})$, on a: $\phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$. Montrons maintenant par récurrence sur $|\alpha|$ que $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m - k - p - 1$. Ceci est vrai pour $|\alpha| = 0$. Supposons donc que $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r$ avec $r < m - k - p - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a: $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} D_{x'}^{\alpha} \phi u \subset B(0, \varepsilon_{p+1}) \cap \overline{\mathbf{R}_+^n}$ et $(\partial/\partial x_i') \mathcal{L}(D_{x'}^{\alpha} \phi u) \in [W_k^{m-p-1}(\mathbf{R}^n)]'$ d'après (1.6) et (1.7).

Appliquons le lemme 1.4 avec p en $p+1$, il vient: $(\partial/\partial x_i') D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$; ceci est valable pour $i = 1, \dots, n-1$. Par suite, $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r + 1$. La récurrence est donc vraie. On a ainsi montré que $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m - p - k - 1$.

Revenant à l'équation $\mathcal{L}(\phi u) \in H^{-m+p+2}(\mathbf{R}^n)$, on obtient que:

$$\mathcal{T}^m(x; D_x)\{t^k \phi u\} \in H^{-m+p+2}(\mathbf{R}^n)$$

et il en résulte que $t^k \phi u \in H^{p+2}(\mathbf{R}^n)$ (pourvu que ε_{p+1} soit assez petit) i.e.: $\phi u \in W_k^{p+2}(\mathbf{R}^n)$.

Raisonnons alors par récurrence sur $|\alpha|$ et supposons que $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in W_k^{p+2}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r$ avec $r < m - p - 2$ et montrons que $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in W_k^{p+2}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r + 1$.

Soit α tel que $|\alpha| \leqslant r$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a: $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in W_k^{p+2}(\mathbf{R}^n)$; $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+2-k}(\mathbf{R}^n)$ puisque $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in H^{p+1}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant m-p-k-1$; $(\partial/\partial x_i')\mathfrak{L}(D_{x'}^{\alpha} \phi u) \in H^{-m+p+2}(\mathbf{R}^n)$ d'après (1.6) et (1.7).

Appliquons le lemme 1.3 (pourvu que ε_{p+1} soit assez petit), il vient: $(\partial/\partial x_i')D_{x'}^{\alpha} \phi u \in W_k^{p+2}(\mathbf{R}^n)$; ceci est valable pour $i = 1, \ldots, n-1$. Par suite, $D_{x'}^{\alpha} \phi u \in W_k^{p+2}(\mathbf{R}^n)$ pour $|\alpha| \leqslant r+1$. La récurrence est donc vraie, ce qui prouve que (K_{p+1}) est vraie.

Finalement, (K_{m-k}) est vraie.

Pour achever la démonstration du théorème 1.2, on remarque que (K_{m-k}) implique (H_{m-k+1}). Montrons maintenant que, si $m-k+1 \leqslant l < m$, l'hypothèse (H_l) implique l'hypothèse (H_{l+1}): la démonstration est identique à celle faite pour le théorème 1.1 en remarquant que (K_{m-k}) est vraie.

Finalement, (H_m) est vraie i.e.: le théorème 1.2 est démontré.

II. – Théorèmes de densité pour les domaines d'opérateurs différentiels maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.

II.1. *Notations et hypothèses.*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière Γ. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^∞ et vérifiant:

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \varphi(x) > 0\}\,, \\ \Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \varphi(x) = 0\}\,, \\ \operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0 \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } \Gamma, \end{cases}$$

où $\operatorname{grad} \varphi(x)$ est le vecteur gradient associé à φ:

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)\right):$$

Soit $L \equiv L(x; D_x)$ l'opérateur différentiel défini sur Ω par:

$$Lu(x) \equiv L(x; D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,k)} P^{m-h}(x; D_x)\{\varphi(x)^{k-h} u(x)\}\,,$$

où m et k sont deux entiers $\geqslant 1$ et où:

(i) $P^{m-h}(x; D_x)$, pour $h = 0, \ldots, \operatorname{Min}(m, k)$, est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables dans $\bar{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à $m-h$:

$$P^{m-h}(x; D_x) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m-h} P_\alpha^{m-h}(x) D_x^\alpha$$

où

$$D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right);$$

(ii) $P^m(x; D_x)$ est un opérateur d'ordre m elliptique dans $\bar{\Omega}$ i.e. pour tout x appartenant à $\bar{\Omega}$ et pour tout vecteur ξ de $\mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, $P^m(x; \xi) \neq 0$.

On désigne par $D(L; \Omega)$ le domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L, i.e.

$$D(L; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega); Lu \in L^2(\Omega)\}.$$

L'espace $D(L; \Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme:

$$u \mapsto \|u\|_{D(L;\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

II.2. *Enoncé des résultats.*

Lorsque $k \geqslant m$, on va établir que:

THÉORÈME 2.1. *Si $k \geqslant m$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans le domaine maximal $D(L; \Omega)$ associé à l'opérateur L.*

Lorsque $1 \leqslant k < m$, il y a lieu d'imposer des conditions supplémentaires à l'opérateur L. Introduisons les conditions (H_1) et (H_2) suivantes:
(H_1) Pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x; \varrho) = 0$ avec

$$\phi(x; \varrho) \equiv \sum_{h=0}^{k} P_{m-h}^{m-h}(x; \operatorname{grad}\varphi(x))\, i^{k-h} \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-k+h+1)$$

n'admet pas de racine ϱ dans la bande: $-m+k-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant -\frac{1}{2}$, où $P_{m-h}^{m-h}(x; \xi) = \sum_{|\alpha|=m-h} P_\alpha^{m-h}(x)\xi^\alpha$ est la partie principale de l'opérateur $P^{m-h}(x; D_x)$.

Afin de définir la condition (H_2), désignons par L^* l'opérateur adjoint formel de l'opérateur L; c'est un opérateur du même type que l'opérateur L:

$$L^* u(x) \equiv L^*(x; D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{k} P^{*m-h}(x; D_x)\{\varphi(x)^{k-h} u(x)\}.$$

La condition (H_2) s'exprime alors:
(H_2) Pour tout x appartenant à Γ et pour tout $\xi \neq 0$ appartenant à T_x,

espace cotangent en x à Γ, l'équation:

$$\begin{cases} \sum_{h=0}^{k} P_{m-h}^{*m-h}(x;\ \xi + \operatorname{grad}\varphi(x) D_t)\{t^{k-h} v(t)\} = 0 \\ \operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \end{cases}$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

On peut alors énoncer le:

THÉORÈME 2.2. *Si* $1 \leqslant k < m$ *et si l'opérateur* L *satisfait aux conditions* (H_1) *et* (H_2) *alors: l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans le domaine maximal* $D(L;\ \Omega)$ *associé à l'opérateur* L.

Utilisant les résultats de I.3, on déduit:

COROLLAIRE 2.1. *Si* $1 \leqslant k < m$ *et si l'équation* $\phi(x;\ \varrho) = 0$ *n'admet pas de racine dans le demi-espace* $\operatorname{Re}\varrho \geqslant -m + k - \frac{1}{2}$ *alors: l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans le domaine maximal* $D(L;\ \Omega)$ *associé à l'opérateur* L.

D'une manière générale, la condition (H_2) implique des conditions algébriques sur l'opérateur L et, dans certains cas, ces conditions algébriques sont aussi suffisantes. Ainsi, lorsque $m = 2$ et $k = 1$ et si l'on suppose de plus que l'opérateur $P^2(x;\ D_x)$ est proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$, on peut interpréter la condition (H_2) par une condition algébrique équivalente.

Posons, pour x appartenant à Γ, $\varrho(x) = iP_1^1(x;\ \operatorname{grad}\varphi(x))/P_2^2(x;\ \operatorname{grad}\varphi(x))$ et définissons, pour x appartenant à Γ, la condition $C(x)$ suivante:

$C(x)$: pour tout ξ appartenant à T_x, espace cotangent en x à Γ, il n'existe pas d'entier $n \geqslant 1$ tel que:

$$P_1^1(x;\ \xi + \tau_+(x;\ \xi)\operatorname{grad}\varphi(x)) = in\ (\tau_+(x;\ \xi) - \tau_-(x;\ \xi))P_2^2(x;\ \operatorname{grad}\varphi(x))$$

où $\tau_+(x;\ \xi)$ et $\tau_-(x;\ \xi)$ sont les racines à partie imaginaire positive et négative de l'équation $P_2^2(x;\ \xi + \tau\operatorname{grad}\varphi(x)) = 0$.

On a alors:

COROLLAIRE 2.2. *Si* $m = 2$ *et* $k = 1$ *et si de plus l'opérateur* $P^2(x;\ D_x)$ *est proprement elliptique dans* $\overline{\Omega}$, *alors*:

(i) *si* $\operatorname{Re}\varrho(x) < -\frac{3}{2}$ *pour tout* x *appartenant à* Γ: *l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $D(L;\ \Omega)$;

(ii) *si, pour tout* x *appartenant à* Γ, $\operatorname{Re}\varrho(x) > -\frac{1}{2}$ *et si la condition* $C(x)$ *est vérifiee: l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $D(L;\ \Omega)$.

REMARQUE 2.1. Il est facile de vérifier, en dimension $n = 1$, que la condition (H_1) est nécessaire pour espérer un résultat analogue à celui du théorème 2.2.

II.3 *Démonstration des théorèmes* 2.1 *et* 2.2.

Le principe de démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2 est la méthode de dualité de [12] qui ramène le problème de densité des fonctions régulières dans le domaine maximal à un problème de régularité.

Le théorème 2.1 résulte en fait de la proposition suivante:

PROPOSITION 2.1. *Si $k \geqslant m$, l'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans le domaine maximal $D(L;\,\Omega)$ associé à l'opérateur L.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \mapsto M(u)$ une forme linéaire continue sur $D(L;\,\Omega)$ nulle sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, i.e.:

$$\forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})\,, \qquad M(u) = 0\,. \tag{2.1}$$

Par ailleurs, il existe f et g dans $L^2(\Omega)$ telles que:

$$\forall u \in D(L;\,\Omega)\,, \qquad M(u) = (f,\,u)_{L^2(\Omega)} + (g,\,Lu)_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.2}$$

La condition (2.1) est alors équivalente à:

$$L^*\tilde{g} = -\tilde{f} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\,, \tag{2.3}$$

ou $\tilde{g}$ (resp. $\tilde{f}$) est le prolongement par 0 de g (resp. de f) dans $\mathbf{R}^n - \bar{\Omega}$. (on suppose évidemment que les coefficients de l'opérateur L sont prolongés à $\mathbf{R}^n$)

L'opérateur L étant elliptique dans Ω, on en déduit que $g \in H^m_{\text{loc}}(\Omega)$. D'autre part, d'après (2.3) et le théorème 1.1, on déduit que $g \in W^m_k(\Omega)$ (*). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans l'espace $W^m_k(\Omega)$, il en résulte que $M(u) = 0$ pour tout u appartenant à $D(L;\,\Omega)$. Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. On raisonne encore par dualité. Soit $u \mapsto M(u)$ une forme linéaire continue sur $D(L;\,\Omega)$ nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e.:

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \qquad M(u) = 0\,. \tag{2.4}$$

Par ailleurs, il existe f et g dans $L^2(\Omega)$ telles que:

$$\forall u \in D(L;\,\Omega)\,, \qquad M(u) = (f,\,u)_{L^2(\Omega)} + (g,\,Lu)_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.5}$$

(*) Pour les propriétés des espaces de Sobolev avec poids $W^m_k(\Omega)$, on renvoie à [6] et [7].

La condition (2.4) est équivalente à:

$$L^* g = -f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.6}$$

Ainsi g appartient à $D(L^*; \Omega)$. L'opérateur L^* étant du même type que l'opérateur L, il résulte de la proposition 2.1 que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $D(L^*; \Omega)$. Par ailleurs, puisque $k \geqslant m$, on a:

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad (Lu, v)_{L^2(\Omega)} = (u, L^* v)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Par suite, on a: pour tout u appartenant à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $M(u) = 0$; $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ étant dense dans $D(L; \Omega)$ (proposition 2.1), il en résulte que $M \equiv 0$. Le théorème 2.1 est ainsi démontré.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2. La démonstration est analogue à celle de la proposition 2.1 en remarquant toutefois que l'on déduit de (2.3) et du théorème 1.2 que $g \in \overset{\circ}{W}{}^m_k(\Omega) = \{u \in H_0^{m-k}(\Omega);\ \varphi^k u \in H^m(\Omega)\}$. On termine alors comme dans la proposition 2.1.

III. – Théorème de traces pour les domaines d'opérateurs différentiels maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.

Des théorèmes de densité obtenus au chapitre II et à l'aide d'une formule de Green pour les fonctions régulières, on va déduire l'existence de traces pour les éléments du domaine maximal associé aux opérateurs considérés. La méthode utilisée est une méthode globale comme dans [12].

III.1 *La formule de Green.*

Soit $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x; D_x)$ un opérateur défini sur $\mathbf{R}^n$ par:

$$\mathcal{L}u(x) \equiv \mathcal{L}(x; D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{h=0}^{k} \mathcal{T}^{m-h}(x; D_x)\{t^{k-h} u(x)\}$$

où k et m sont deux entiers $\geqslant 1$ avec $1 \leqslant k < m$ et où les opérateurs $\mathcal{T}^{m-h}(x; D_x)$ satisfont aux conditions du paragraphe I.4.

On notera $\mathcal{L}^*$ l'opérateur adjoint formel de l'opérateur $\mathcal{L}$ i.e.: l'opérateur défini par:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathcal{L}u \cdot \bar{v}\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} u \cdot \overline{\mathcal{L}^* v}\, dx$$

pour tout u et v dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

On notera aussi $\phi(x'; \varrho)$ le polynôme

$$\phi(x'; \varrho) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^{m-h}_{(0,m-h)}(x', 0) i^{k-h} \varrho(\varrho - 1) \dots (\varrho - k + h + 1) .$$

Soit maintenant $\{\mathcal{B}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ un système d'opérateurs de la forme:

$$\mathcal{B}_q u(x) \equiv \mathcal{B}_q(x; D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m_q} b^q_\alpha(x') D^\alpha_x u(x) ,$$

où $b^q_\alpha(x')$ appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ et où m_q est un entier satisfaisant à $0 \leqslant m_q \leqslant m - k - 1$. On suppose que le système $\{\mathcal{B}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ forme un système de Dirichlet d'ordre $m - k$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$. On a alors le résultat suivant:

PROPOSITION 3.1. *Il existe un système d'opérateurs $\{\mathcal{C}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ de la forme:*

$$\mathcal{C}_q u(x) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m-k-1-m_q} C^q_\alpha(x') D^\alpha_x u(x)$$

où les fonctions $C^q_\alpha(x')$ appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ avec

$$C^q_{(0,\dots,0,m-k-1-m_q)}(x') = i\{b^q_{(0,\dots,0,m_q)}(x')\}^{-1} \overline{\phi(x'; -1 - m_q)}$$

pour tout x' dans la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, de telle sorte que l'on ait la formule de Green suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}u \cdot \bar{v}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{u \cdot \mathcal{L}^* v}\, dx = \sum_{q=0}^{m-k-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{B}_q u(x', 0) \cdot \overline{\mathcal{C}_q v(x', 0)}\, dx'$$

pour tout u et v appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$. De plus, un tel système $\{\mathcal{C}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ est unique.

DÉMONSTRATION. Pour u et v dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, on obtient par intégration par parties la formule:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \mathcal{L}u \cdot \bar{v}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n_+} u \cdot \overline{\mathcal{L}^* v}\, dx = \sum_{q=0}^{m-k-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D^q_t u(x', 0) \cdot \overline{Q_q v(x', 0)}\, dx' \tag{3.1}$$

où Q_q est l'opérateur défini par:

$$Q_q v \equiv \sum_{h=0}^{k} \sum_{\substack{|\alpha| + j \leqslant m-h \\ j \geqslant k-h+1+q}} i^{k-h+1} \binom{q + k - h}{k - h} (k - h)!\, D_t^{j-q-k+h-1} D^\alpha_{x'} \{\overline{P^{m-h}_{(\alpha,j)}} v\} .$$

Le coefficient de $D_t^{m-k-1-q}$ dans l'opérateur Q_q est donc égal à $\overline{i\phi(x'; -1-q)}$.

Par ailleurs, le système $\{\mathcal{B}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ étant un système de Dirichlet d'ordre $m-k$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, on peut écrire (cf.: lemme 2.1, chap. II, [12]):

$$D_t^q = \sum_{s=0}^{q} \Lambda_{qs} F_s\,, \qquad q = 0, \ldots, m-k-1\,,$$

où Λ_{qq} est une fonction indéfiniment dérivable et non nulle dans la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$ et les Λ_{qs}, pour $0 \leqslant s < q$, sont des opérateurs différentiels dans $\mathbb{R}^{n-1}$ d'ordre $\leqslant q-s$ et à coefficients de classe C^∞, et où F_s, pour $s = 0, \ldots, m-k-1$, désigne celui des opérateurs $\mathcal{B}_q$ d'ordre s.

Désignons par Λ_{qs}^* l'opérateur adjoint formel de Λ_{qs} i.e.: l'opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^{n-1}$ défini par:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Lambda_{qs} u \cdot \bar{v}\, dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u \cdot \overline{\Lambda_{qs}^* v}\, dx'$$

pour tout u et v dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$.

La formule (3.1) s'exprime alors:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathfrak{L} u \cdot \bar{v}\, dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \cdot \overline{\mathfrak{L}^* v}\, dx = \sum_{s=0}^{m-k-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_s u(x', 0) \cdot \overline{\sum_{q=s}^{m-k-1} \Lambda_{qs}^* Q_q v(x', 0)}\, dx' \tag{3.2}$$

pour tout u et v dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Le coefficient de $D_t^{m-k-1-s}$ dans l'opérateur $\sum_{q=s}^{m-k-1} \Lambda_{qs}^* Q_q$ est égal à $i\overline{\Lambda_{ss}} \cdot \overline{\phi(x'; -1-s)}$. Notant $\mathcal{C}_q$ l'opérateur $\sum_{q=s}^{m-k-1} \Lambda_{qs}^* Q_q$ pour lequel $F_s = \mathcal{B}_q$, la formule (3.2) est la formule de Green cherchée.

L'unicité du système $\{\mathcal{C}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ est immédiate.

On peut maintenant énoncer le théorème de la formule de Green qui nous sera utile pour la suite. On se place dans les conditions du paragraphe II.1.

THÉORÈME 3.1. *Soit L un opérateur du type indiqué au paragraphe* II.1 *pour lequel $1 \leqslant k < m$. On suppose que l'équation*

$$\phi(x; \varrho) \equiv \sum_{h=0}^{k} P_{m-h}^{m-h}(x; \operatorname{grad} \varphi(x))\, i^{k-h} \varrho(\varrho-1) \ldots (\varrho - k + h + 1) = 0$$

n'admet pas de racines dans l'ensemble $\{-m+k, \ldots, -1\}$.

Soit $\{B_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *un système d'opérateurs frontière sur* Γ *à coefficients indéfiniment dérivables sur* Γ, *avec ordre de* $B_q = m_q$. *On suppose que ce système* $\{B_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *est un système de Dirichlet d'ordre* $m-k$ *sur* Γ.

Dans ces conditions, il existe un système d'opérateurs frontière $\{C_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *unique ayant les propriétés*:

(i) *les coefficients de* C_q *sont dans* $C^\infty(\Gamma)$ *et l'ordre de* C_q *est égal à* $m-k-1-m_q$;

(ii) *le système* $\{C_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *est un système de Dirichlet d'ordre* $m-k$ *sur* Γ, *de telle sorte que l'on ait la formule de Green suivante*:

$$\int_\Omega Lu\cdot\bar{v}\,dx - \int_\Omega u\cdot\overline{L^*v}\,dx = \sum_{q=0}^{m-k-1}\int_\Gamma B_q u\cdot\overline{C_q v}\,d\Gamma,$$

pour tout u *et* v *dans* $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ (L^* *désigne l'opérateur adjoint formel de l'opérateur* L).

DÉMONSTRATION. Par « cartes locales » et « partition de l'unité », on se ramène à la situation de la proposition 3.1.

III.2 *Le théorème de traces.*

Dans ce paragraphe, on utilise les notations du chapitre II.

THÉORÈME 3.2. *Soit* L *un opérateur pour lequel* $1 \leqslant k < m$ *vérifiant les conditions* (H_1) *et* (H_2).

Soit $\{B_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *un système d'opérateurs frontière sur* Γ *à coefficients indéfiniment dérivables sur* Γ *avec ordre de* $B_q = m_q$. *On suppose que ce système* $\{\mathcal{B}_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *est un système de Dirichlet d'ordre* $m-k$ *sur* Γ.

Dans ces conditions, l'application: $u \mapsto (B_q u)_{0\leqslant q\leqslant m-k-1}$: $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to \mathcal{D}(\Gamma)^{m-k}$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue encore notée* $u \mapsto (B_q u)_{0\leqslant q\leqslant m-k-1}$ *de* $D(L;\Omega)$ *dans* $\prod_{q=0}^{m-k-1} H^{-m_q-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *De plus, pour* $u \in D(L;\Omega)$ *et* $v \in W_k^m(\Omega)$, *on a la « formule de Green »*:

$$\int_\Omega Lu\cdot\bar{v}\,dx - \int_\Omega u\cdot\overline{L^*v}\,dx = \sum_{q=0}^{m-k-1}\langle B_q u, \overline{C_q v}\rangle_{H^{-m_q-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{m_q+\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

(*Les opérateurs* C_q *étant les opérateurs introduits au théorème* 3.1).

DÉMONSTRATION. Il est clair que l'hypothèse (H_1) implique l'hypothèse du théorème 3.1. Puisque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $D(L;\Omega)$ (théorème 2.2), il suffit de prouver que l'application: $u \mapsto (B_q u)_{0\leqslant q\leqslant m-k-1}$: $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to \mathcal{D}(\Gamma)^{m-k}$ est continue de $D(L;\Omega)$ dans $\prod_{q=0}^{m-k-1} H^{-m_q-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Utilisant le lemme 2.1, chapitre II de [12] et la proposition 1.10, chapitre I de [6], on déduit qu'il existe un relévement linéaire continu R: $\prod_{q=0}^{m-k-1} H^{m_q+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $W_k^m(\Omega)$ tel que:

$$C_q R(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-k-1}) = \varphi_q,\ q = 0, \dots, m-k-1\ ,$$

pour tout $(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-k-1}) \in \prod_{q=0}^{m-k-1} H^{m_q+\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Appliquons le théorème 3.1 à $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ et $v = R(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-k-1})$. On obtient:

$$\sum_{q=0}^{m-k-1} \langle B_q u, \bar{\varphi}_q \rangle_{H^{-m_q-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{m_q+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Omega Lu \cdot \overline{R(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-k-1})}\, dx - \\ - \int_\Omega u \cdot \overline{L^* R(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-k-1})}\, dx\,.$$

On en déduit:

$$\|(B_q u)_{0 \leq q \leq m-k-1}\|_{\prod_{q=0}^{m-k-1} H^{-m_q-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \cdot \|u\|_{D(L;\Omega)}\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

IV. – Quelques applications.

De [6] et des théorèmes de densité et de traces établis aux chapitres II et III, on va déduire quelques propriétés de régularité. On montre ensuite comment cette étude permet d'obtenir de nouveaux résultats pour les opérateurs elliptiques.

IV.1 *Une application aux problèmes aux limites.*

Soit $L \equiv L(x; D_x)$ un opérateur du type indiqué au chapitre II:

$$Lu(x) \equiv L(x; D_x)\}u(x) \equiv \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(m,k)} P^{m-h}(x; D_x)\{\varphi(x)^{k-h}u(x)\}\,,$$

$P^m(x; D_x)$ étant un opérateur proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$.

On déduit alors de [6], (chapitre II) et du théorème de densité (thèorème 2.1) que:

THÉORÈME 4.1. *Si $k \geqslant m$ et si l'opérateur L satisfait aux conditions suivantes:*

(i) *pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x;\varrho)=0$ avec*

$$\phi(x;\varrho)\equiv\sum_{h=0}^{m}P_{m-h}^{m-h}(x;\operatorname{grad}\varphi(x))\,i^{k-h}\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-k+h+1)$$

n'admet pas de racine ϱ sur la droite $\operatorname{Re}\varrho=-m+k-\frac{1}{2}$;

(ii) *pour tout x appartenant à Γ, le nombre de racines ϱ de l'équation $\phi(x;\varrho)=0$ vérifiant $\operatorname{Re}\varrho>-m+k-\frac{1}{2}$ est égal à $m/2$;*

(iii) *pour tout x appartenant à Γ et pour tout $\xi\neq 0$ appartenant à T_x, espace cotangent en x à Γ, le problème:*

$$\sum_{h=0}^{m}P_{m-h}^{m-h}(x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)D_t)\{t^{k-h}v(t)\}=0$$

n'admet que la solution $v=0$ dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$,
alors, le domaine maximal $D(L;\Omega)$ associé à L coincide avec l'espace $L^2(\Omega)\cap W_k^m(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

DÉMONSTRATION. Les conditions (i), (ii) et (iii) impliquent (cf.: [6]) l'estimation a priori:

$$\|u\|_{W_k^m(\Omega)}\leqslant C\{\|Lu\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{W_k^{m-1}(\Omega)}\}$$

pour tout u dans $W_k^m(\Omega)$. L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ étant dense dans $D(L;\Omega)$ d'après le théorème 2.1, on en déduit que $D(L;\Omega)\subset W_k^m(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ avec injection continue. L'inclusion inverse étant évidente, le théorème 4.1 est établi.

Etude d'un exemple. Considérons les opérateurs L introduits dans [16]:

$$Lu(x)\equiv\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1\\|\beta|\leqslant 1}}D_x^\beta\big(a_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)^kD_x^\alpha u(x)\big) \tag{4.1}$$

où les coefficients $\alpha_{\alpha\beta}$ sont indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$, et où k est un entier $\geqslant 2$. On suppose que L est coercif sur l'espace

$$V_k(\Omega)=\{u\in\mathcal{D}'(\Omega);\ \varphi^{k/2}D_x^\alpha u\in L^2(\Omega),\ |\alpha|\leqslant 1\}$$

muni de la norme canonique; autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout u appartenant à $V_k(\Omega)$, on ait:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1\\|\beta|\leqslant 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)^k D_x^\alpha u(x)\cdot \overline{D_x^\beta u(x)}\, dx\right) \geqslant C\cdot \sum_{|\beta|\leqslant 1} \|\varphi^{k/2} D_x^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} (*) .$$

Dans [6], chapitre IV, est montré que de tels opérateurs réalisent un isomorphisme de $W_k^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ et satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 4.1, on a donc: $D(L; \Omega) = L^2(\Omega) \cap W_k^2(\Omega)$. On peut exprimer ce résultat sous la forme suivante:

Proposition 4.1. *Soit L l'opérateur défini par* (4.1). *On a: si $u \in L^2(\Omega)$ et si $Lu \in L^2(\Omega)$, alors: $u \in W_k^2(\Omega)$.*

Dans le cas des opérateurs L pour lesquels $1 \leqslant k < m$, on a un résultat analogue à celui du théorème 4.1. Plus précisément, on a:

Théorème 4.2. *Si $1 \leqslant k < m$ et si l'opérateur L satisfait aux conditions suivantes:*

(i) *pour tout x appartenant à Γ, l'équation $\phi(x; \varrho) = 0$ avec*

$$\phi(x; \varrho) \equiv \sum_{h=0}^{k} P_{m-h}^{m-h}(x; \operatorname{grad}\varphi(x))\, i^{k-h} \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-k+h+1)$$

n'admet pas de racine dans la bande: $-m+k-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\varrho \leqslant -\frac{1}{2}$;

(ii) *pour tout x appartenant à Γ, le nombre de racines ϱ de l'équation*

$\phi(x; \varrho) = 0$ vérifiant $\operatorname{Re}\varrho > -m+k-\frac{1}{2}$ est égal à $m/2$;

(iii) *pour tout x appartenant à Γ et pour tout $\xi \neq 0$ appartenant à T_x, espace cotangent en x à Γ, le problème:*

$$\sum_{h=0}^{k} P_{m-h}^{m-h}(x; \xi + \operatorname{grad}\varphi(x) D_t)\{t^{k-h} v(t)\} = 0$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^m(\mathbb{R}_+)$,

alors, le domaine maximal $D(L; \Omega)$ associé à L coïncide avec l'espace $W_k^m(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

(*) Cette condition est équivalente (modulo l'opérateur $\varphi^{k/2} D_0$, où $D_0 =$ identité) à deux conditions algébriques portant sur l'opérateur L (cf. [4]).

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle du théorème 4.1 en remarquant toutefois que les conditions (H_1) et (H_2) du chapitre II sont impliquées par les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 4.2.

Etude d'un exemple. Dans le cas où $m=2$ et $k=1$, le théorème 4.2 peut s'exprimer sous la forme suivante (grâce au corollaire 2.2 et au théorème 3.2 du chapitre III de [6]).

PROPOSITION 4.2. *Si* $m=2$ *et* $k=1$ *et si l'opérateur* L *vérifie la condition suivante: pour tout* x *appartenant à* Γ, *la condition* $C(x)$ *est vérifiée et* $\operatorname{Re}\varrho(x) > -\frac{1}{2}$; *alors, on a: si* $u\in L^2(\Omega)$ *et si* $Lu \in L^2(\Omega)$, *alors* $u \in W_1^2(\Omega)$.
(Pour la définition de $\varrho(x)$ et de $C(x)$, voir chapitre II).

IV.2 *Un résultat de régularité.*

THÉORÈME 4.3. *Soit* L *un opérateur du type indiqué au paragraphe* II.1 *pour lequel* $1 \leqslant k < m$. *On suppose que l'opérateur* L *satisfait aux conditions* (H_1) *et* (H_2). *On suppose de plus que*:

Pour tout x *appartenant à* Γ *et pour tout* $\xi \neq 0$ *appartenant à* T_x, *espace cotangent en* x *à* Γ, *l'équation*:

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{h=0}^{k} P_{m-h}^{m-h}(x;\, \xi + \operatorname{grad}\varphi(x) D_t)\{t^{k-h} v(t)\} = 0 \\ \operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbf{R}}_+\end{array}\right.$$

n'admet que la solution $v=0$ *dans* $L^2(\mathbf{R})$.

Soit $\{B_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *un système d'opérateurs frontière sur* Γ *à coefficients indéfiniment dérivables sur* Γ, *avec ordre de* $B_q = m_q$. *On suppose que ce système* $\{B_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ *est un système de Dirichlet d'ordre* $m-k$ *sur* Γ.

Dans ces conditions, on a:

$$\{u \in D(L;\,\Omega);\, B_q u = 0 \ \textit{dans}\ H^{-m_q-\frac{1}{2}}(\Gamma),\ q=0, \dots, m-k-1\} = \overset{\circ}{W}{}_k^m(\Omega)$$

où

$$\overset{\circ}{W}{}_k^m(\Omega) = \{u \in H_0^{m-k}(\Omega);\, \varphi^k u \in H^m(\Omega)\}\,.$$

DÉMONSTRATION. D'après la formule de Green obtenue au théorème 3.2, on obtient que si $u \in D(L;\,\Omega)$ avec $B_q u = 0$ pour $q=0, \dots, m-k-1$ et si $v \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, on a:

$$\int_\Omega Lu \cdot \bar{v}\, dx = \int_\Omega u \cdot \overline{L^* v}\, dx\,.$$

On en déduit que: $L\tilde{u} = L\tilde{u}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (où $\sim$ désigne le prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$). Les hypothèses du théorème 1.2 sont satisfaites, on en conclut que $\tilde{u} \in W_k^m(\mathbb{R}^n)$, i.e.: $u \in \mathring{W}_k^m(\Omega)$.

Etude d'un exemple. Dans le cas où $m = 2$ et $k = 1$, le théorème 4.3 peut s'exprimer sous la forme suivante (voir corollaire 2.1, I.3 et chapitre III de [6]).

PROPOSITION 4.3. *Si $m = 2$ et $k = 1$ et si l'opérateur L vérifie la condition suivante: pour tout x appartenant à Γ, la condition $K(x)$ est vérifiée et* $\operatorname{Re} \varrho(x) < -\frac{3}{2}$; *alors on a: si $u \in D(L; \Omega)$ et si $\gamma_0 u = 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors*

$$u \in \mathring{W}_1^2(\Omega).$$

(γ_0 est le prolongement par continuité de l'application $u \mapsto u|_\Gamma$; et la condition $K(x)$ est la condition suivante (cf.: I.3):

$K(x)$: Pour tout ξ appartenant à T_x, espace cotangent en x à Γ, il n'existe pas d'entier $n \geq 0$ tel que:

$$P_1^1(x; \xi + \tau_-(x; \xi) \operatorname{grad} \varphi(x)) = in \left(\tau_+(x; \xi) - \tau_-(x; \xi)\right) P_2^2(x; \operatorname{grad} \varphi(x))$$

où $\tau_+(x; \xi)$ et $\tau_-(x; \xi)$ sont les racines à partie imaginaire positive et négative de l'équation $P_2^2(x; \xi + \tau \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0$.

IV.3 *Applications aux opérateurs elliptiques.*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ comme en II.1.

Soit $A \equiv A(x; D_x)$ un opérateur aux dérivées partielles d'ordre m, proprement elliptique sur $\bar{\Omega}$, à coefficients indéfiniment différentiables sur Ψ.

Soit k un entier ≥ 0 et posons:

$$D_k(A; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega); Au \in W_k^0(\Omega)\} = \{u \in L^2(\Omega); \varphi^k Au \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme du graphe. Evidemment, $D_0(A; \Omega) = D(A; \Omega)$ est le domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur A.

On va établir le résultat suivant:

THÉORÈME. *Soit A un opérateur differentiel proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$, d'ordre m et à coefficients indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$. On a:*

(i) *si $k \geq m$: l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans l'espace $D_k(A; \Omega)$;*

(ii) *si $0 \leq k < m$: l'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans l'espace $D_k(A; \Omega)$; de plus, si $\{B_q\}_{q=0}^{m-k-1}$ est un système d'opérateurs frontière sur Γ à coefficients indéfini-*

ment dérivables sur Γ, avec ordre de $B_q = m_q$, de sorte qu'il forme un système de Dirichlet d'ordre $m-k$ sur Γ, on a: l'application $u \mapsto (B_q u)_{0\leqslant q\leqslant m-k-1}$: $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to \mathcal{D}(\Gamma)^{m-k}$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue encore notée

$$u \mapsto (B_q u)_{0\leqslant q\leqslant m-k-1} \text{ de } D_k(A;\Omega) \text{ dans } \prod_{q=0}^{m-k-1} H^{-m_q-\frac12}(\Gamma)\,;$$

on a aussi:

$$\{u\in D_k(A;\Omega);\, B_q u = 0 \text{ dans } H^{-m_q-\frac12}(\Gamma),\ q=0,\dots,m-k-1\} = \mathring{W}^m_k(\Omega)\,.$$

DÉMONSTRATION. Notons L l'opérateur $L = \varphi^k A$. Cet opérateur répond aux conditions des chapitres II, III et IV: (i) est une conséquence du théorème 2.1; (ii) est une conséquence des théorèmes 2.2 et 3.2, et l'égalité:

$$\{u\in D_k(A;\Omega);\, B_q u = 0 \text{ dans } H^{-m_q-\frac12}(\Gamma),\ q=0,\dots,m-k-1] = \mathring{W}^m_k(\Omega)$$

s'établit comme dans la démonstration du théorème 4.3 en remarquant que si u appartient à $D(L;\Omega)$ et vérifie $L\tilde{u} = \widetilde{Lu}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (où $\sim$ désigne le prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$) alors u appartient à $\mathring{W}^m_k(\Omega)$: ceci se déduit facilement de la régularité à l'intérieur des opérateurs elliptiques. (Signalons que pour $1\leqslant k\leqslant m/2$, l'égalité précédente résulte directement du théorème 4.3).

Lorsque $k=0$, les résultats du théorème 4.4 sont bien connus cf.: par exemple [12].

V. – Etude d'un cas particulier.

On a remarqué au chapitre III que l'existence de traces pour les éléments du domaine maximal $D(L;\Omega)$ résultait facilement d'une formule de Green pour les fonctions régulières et de la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $D(L;\Omega)$. Cependant, dans certains cas, bien que l'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ne soit pas dense dans $D(L;\Omega)$, on peut encore définir des traces (dans un sens à préciser) pour les éléments de $D(L;\Omega)$ et une formule de Green. Nous allons préciser cela dans le cas particulier de l'opérateur introduit dans [2].

V.1 *Notations et hypothèses.*

Soit l'opérateur $L \equiv L(x;D_x)$ défini par:

$$Lu(x) \equiv L(x;D_x)\{u(x)\} \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1\\|\beta|\leqslant 1}} D^\beta_x\big(a_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)D^\alpha_x u(x)\big)$$

où les coefficients $\alpha_{\alpha\beta}$ sont indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$, où $D_x = \big((1/i)(\partial/\partial x_1), \dots, (1/i)(\partial/\partial x_n)\big)$ et $D_x^0 =$ identité, et où l'ouvert Ω et la fonction $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfait aux conditions du paragraphe II.1.

On suppose que la forme intégro-différentielle

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1\\ |\beta|\leqslant 1}} a_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)\, D_x^\alpha u(x)\cdot \overline{D_x^\beta v(x)}\, dx$$

est coercive sur l'espace

$$V_1(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \varphi^{\frac{1}{2}} D_x^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leqslant 1\}$$

muni de la norme canonique; autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u appartenant à $V_1(\Omega)$ on ait:

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant C \cdot \|u\|^2_{V_1(\Omega)}\ (*)\,.$$

Moyennant cette hypothèse, MM. Baouendi-Goulaouic ont établi que:

(5.1) L'opérateur L réalise un isomorphisme algébrique et topologique de $W_1^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, où $W_1^2(\Omega)$ est l'espace: $W_1^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ \varphi u \in H^2(\Omega)\}$ muni de la norme naturelle.

Remarquons tout de suite, que l'opérateur L^*, adjoint formel de l'opérateur L, satisfait aux mêmes propriétés que l'opérateur L, en particulier, il possède aussi la propriété (5.1).

L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ n'est pas dense dans le domaine maximal $D(L; \Omega)$ associé à l'opérateur L. En effet, sinon d'après (5.1), on déduirait que $D(L; \Omega) = W_1^2(\Omega)$; mais alors, tout élément de $D(L; \Omega)$ admettrait une trace γ_0 au sens de $H^1(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas pour les fonctions $u(x) = \log \varphi(x) \cdot v(x)$, où $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. (Remarquer que l'opérateur L vérifie la condition (H_2) du chapitre II, mais ne vérifie pas la condition (H_1) de ce chapitre II).

On va établir un théorème de trace et une formule de Green pour les éléments de $D(L; \Omega)$.

(*) Cette condition est équivalente (modulo l'opérateur $\varphi^{\frac{1}{2}} D_x^0$) à deux conditions algébriques portant sur l'opérateur L (cf. [4]).

V.2. *Formule de Green et théorème de trace.*

On notera $\partial/\partial\nu_L$ l'opérateur défini par:

$$\frac{\partial}{\partial\nu_L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\vec{n}, \vec{x}_j)\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \ (*) \tag{5.2}$$

où x appartient à Γ, où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure en x à Γ, et où l'on a noté $a_{ij}(x)$ la fonction $\alpha_{\alpha\beta}(x)$ pour laquelle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ avec $\alpha_l = \delta_{il}$ et $\beta_l = \delta_{jl}$ pour $l = 1, \ldots, n$.

THÉORÈME 5.1. *Si u appartient à $D(L; \Omega)$, alors $\partial u/\partial\nu_L$ a un sens dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$; l'application: $u \mapsto \partial u/\partial\nu_L$: $D(L; \Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ étant linéaire continue de telle sorte que l'on ait la formule de Green suivante*:

$$(Lu, v)_{L^2(\Omega)} - (u, L^*v)_{L^2(\Omega)} = -\left\langle \frac{\partial u}{\partial\nu_L}, \overline{\gamma_0 v}\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{5.3}$$

pour tout $u \in D(L; \Omega)$ et tout $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ($\gamma_0 v$ désigne la restriction de v à Γ).

DÉMONSTRATION. Elle sera faite en trois étapes:

1 *ère étape*: choix d'un espace $W(\Omega)$ pour lequel (5.3) a lieu (ce qui suppose que $\partial/\partial\nu_L$ est défini sur cet espace). On choisit l'espace suivant:

$$W(\Omega) = W_1^1(\Omega) \cap D(L; \Omega)$$

où $W_1^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \varphi u \in H^1(\Omega)\}$.

Il est facile de vérifier que si u appartient à $W(\Omega)$, alors: $\gamma_0(\varphi(\partial u/\partial x_i)$ a un sens dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et donc $\partial u/\partial\nu_L$ a un sens et appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour établir la formule (5.3), on se ramène par « cartes locales » au demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ (remarquer que si u appartient à $W(\Omega)$, alors ψu appartient aussi à $W(\Omega)$ quelle que soit la fonction ψ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$).

2-*ème étape*: l'espace $W(\Omega)$ est dense dans $D(L; \Omega)$. Soit $u \mapsto M(u)$ une forme linéaire continue sur $D(L; \Omega)$, nulle sur $W(\Omega)$ i.e.:

$$\forall u \in W(\Omega), \quad M(u) = 0. \tag{5.4}$$

(*) $\partial u/\partial\nu_L$ est une extension en dimension $n > 1$ de la trace $(tu)'(0)$ considérée par MM. Baouendi-Goulaouic pour l'opérateur $-(d/dt)t(d/dt) + 1$.

Par ailleurs, il existe f et g dans $L^2(\Omega)$ telles que:

$$\forall u \in D(L;\,\Omega)\,, \qquad M(u) = (f,\, u)_{L^2(\Omega)} + (g,\, Lu)_{L^2(\Omega)}\,. \tag{5.5}$$

1) *On utilise* (5.4) *pour u appartenant à* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$: on obtient facilement que, dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, on a: $L^*\tilde{g} = -\tilde{f}$, où $\tilde{g}$ (resp. $\tilde{f}$) est le prolongement par zéro de g (resp. de f) dans $\mathbf{R}^n - \overline{\Omega}$ (on suppose évidemment les coefficients $a_{\alpha\beta}$ prolongés à $\mathbf{R}^n$ de sorte que l'opérateur $\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^\beta(a_{\alpha\beta}(x) D_x^\alpha)$ soit elliptique dans $\mathbf{R}^n$.

Mais l'opérateur L^* s'écrit sous la forme: $L^*u = P^2(x;\, D_x)\{\varphi u\} + P^1(x;\, D_x)\{u\}$ où $P^2(x;\, D_x)$ est un opérateur d'ordre 2 elliptique dans $\mathbf{R}^n$ et $P^1(x;\, D_x)$ un opérateur d'ordre 1. Par suite, $P^2(x;\, D_x)\{\varphi\tilde{g}\}$ appartient à $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$. La régularité locale des opérateurs elliptiques implique que $\varphi\tilde{g}$ appartient à $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Par restriction à Ω, il vient: $g \in W_1^1(\Omega)$.

Ainsi, g appartient à $W_1^1(\Omega)$ et de plus, on a: $L^*g = -f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; donc, g appartient à $W^*(\Omega) = W_1^1(\Omega) \cap D(L^*;\, \Omega)$ et $\partial g/\partial\nu_{L^*}$ a un sens dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On écrit alors la formule de Green (5.3) pour g et pour l'opérateur L^*:

$$(\widetilde{L^*g},\, \phi)_{L^2(\mathbf{R}^n)} - (\tilde{g},\, L\phi)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = -\left\langle \frac{\partial g}{\partial\nu_{L^*}},\, \overline{\gamma_0\phi} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

pour tout ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Mais $\widetilde{L^*g} = -\tilde{f}$, on en déduit que $\partial g/\partial\nu L^* = 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Finalement, g vérifie:

$$\left|\begin{array}{l} g \in W_1^1(\Omega)\,, \\ L^*g = -f \in L^2(\Omega)\,, \\ \dfrac{\partial g}{\partial\nu_{L^*}} = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,. \end{array}\right.$$

2) *On prouve que g appartient à* $W_1^2(\Omega)$: pour cela, il suffit de prouver (d'après 5.1)), que le problème:

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_1^1(\Omega)\,, \\ L^*u = 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu_{L}{}^*} = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,, \end{array}\right.$$

n'admet que la solution $u = 0$. Or, une telle solution u appartient à $W^*(\Omega)$

et appliquant la formule de Green (5.3) pour u et l'opérateur L^*, il vient:

$$(u, Lv)_{L^2(\Omega)} = 0$$

pour tout v appartenant à $W_1^2(\Omega)$. D'après (5.1), cela implique $u = 0$.

3) *On prouve que g appartient à* $\mathring{W}_1^2(\Omega)$: Il faut montrer que $\gamma_0 g = 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Pour cela, on remarque que si ψ appartient à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, la fonction $u_\psi(x) = \operatorname{Log}\varphi(x)$. $\psi(x)$ appartient à $W(\Omega)$ et de plus:

$$\frac{\partial u_\psi}{\partial \nu_L} = -\gamma_0 \left\{ \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varphi_i \varphi_j}{\|\operatorname{grad}\varphi\|} \right\} \cdot \gamma_0 \psi$$

où $\varphi_l = (1/i)(\partial\varphi/\partial x_l)$ pour $l = 1, \dots, n$ et $\|\operatorname{grad}\varphi\| = \left(\sum_{l=1}^{n} \varphi_l^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

On applique la formule de Green (5.3) à de telles fonctions u_ψ et à g (qui appartient à $W_1^2(\Omega)$).

$$(Lu, g)_{L^2(\Omega)} - (u_\psi, L^* g)_{L^2(\Omega)} = -\left\langle \frac{\partial u_\psi}{\partial \nu_L}, \overline{\gamma_0 g} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Or, $L^* g = -f$, par suite, d'après (5.4), il vient:

$$\left\langle \frac{\partial u_\psi}{\partial \nu_L}, \overline{\gamma_0 g} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0 .$$

Mais, lorsque ψ parcourt $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\partial u_\psi / \partial \nu_\psi$ parcourt $\mathcal{D}(\Gamma)$, il en résulte que $\gamma_0 g = 0$.

4) *La forme M est identiquement nulle*: comme g appartient à $\mathring{W}_1^2(\Omega)$ et que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathring{W}_1^2(\Omega)$, on en déduit que pour u appartenant à $D(L; \Omega)$, on a:

$$(Lu, g)_{L^2(\Omega)} = (u, L^* g)_{L^2(\Omega)} .$$

Tenant compte du fait que $L^* g = -f$, on en déduit que pour u appartenant à $D(L; \Omega)$, $M(u) = 0$, i.e.: $M \equiv 0$.

3-ème étape: L'application $u \to \partial u / \partial \nu_L$: $W(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ se prolonge par continuité à $D(L; \Omega)$ et on a la formule de Green (5.3).

Soit $\phi \mapsto R\phi$ un relèvement linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $W_1^2(\Omega)$ (cf.: [6]) et pour u appartenant à $W(\Omega)$ écrivons la formule de Green (5.3):

$$(Lu, R\phi)_{L^2(\Omega)} - (u, L^* R\phi)_{L^2(\Omega)} = -\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu_\Gamma}, \bar{\phi} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Par suite, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $u \in W(\Omega)$, on ait:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leqslant C\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $W(\Omega)$ étant dense dans $D(L; \Omega)$, on a le résultat cherché et le théorème 5.1 est démontré.

V.3 *Applications aux problèmes aux limites.*

On va établir, à l'aide des méthodes de MM. Baouendi-Geymonat [3], le résultat suivant:

THÉORÈME 5.2. *L'application* $\{L; \partial/\partial\nu_L\}$: $D(L; \Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION:

1) *Introduction d'un «potentiel»*: Soit $\phi \to R\phi$ un relèvement linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $W^2_1(\Omega)$; posons: $K\phi = L^* R\phi$.

L'application: $(u, \phi) \mapsto L^* u + K\phi$: $\mathring{W}^2_1(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^2(\Omega)$ est un isomorphisme. En effet:

Injectivité: $L^*(u + R\phi) = 0$ implique $u + R\phi = 0$ d'après (5.1), $\gamma_0(u + R\phi) = \phi = 0$; il en résulte que $u = 0$.

Surjectivité: D'après (5.1), étant donné f appartenant à $L^2(\Omega)$, il existe v dans $W^2_1(\Omega)$ tel que $L^* v = f$. Il suffit ensuite de prendre $\phi = \gamma_0 v$ et $u = v - R\gamma_0 v$.

2) *Transposition*: Transposant l'isomorphisme précédent, on obtient que l'application: $u \mapsto (Lu, K^* u)$: $L^2(\Omega) \to [\mathring{W}^2_1(\Omega)]' \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un isomorphisme.

3) *Interprétation de l'opérateur* K^*: On revient à la formule de Green (5.3) appliquée à u appartenant à $D(L; \Omega)$ et à $v = R\phi$. Il en résulte que pour u appartenant à $D(L; \Omega)$, on a: $K^* u = R^* Lu + \partial u/\partial\nu_L$.

4) *Démonstration du théorème* 5.2:

Injectivité: cela résulte de 2) et 3).

Surjectivité: soient f et g dans $L^2(\Omega)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ respectivement. D'après 2), il existe u_1 et u_2 dans $L^2(\Omega)$ telles que:

$$\begin{cases} Lu_1 = f \\ K^* u_1 = g \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Lu_2 = 0 \\ K^* u_2 = R^* f. \end{cases}$$

D'après 3), on en déduit que la fonction $u = u_1 + u_2$ satisfait à:

$$Lu = f \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu_L} = g\,.$$

REMARQUE 5.1. Le théorème 5.2 permet de résoudre le « problème de Neumann » non homogène:

$$(5.6) \qquad \begin{cases} Lu = f \in L^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} = g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u \in L^2(\Omega)\,. \end{cases}$$

REMARQUE 5.2. Il résulte du théorème 5.2 que la solution du problème variationnel associé à l'opérateur L:

$$\begin{cases} Lu = f \in L^2(\Omega) \\ u \in V_1(\Omega) \end{cases}$$

est en fait la solution du problème aux limites (5.6) avec condition frontière homogène.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BAIOCCHI, *Definition d'opérateurs maximaux: applications*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **2** (1969), pp. 481-520.

[2] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*. Arch. Rat. Méc. Anal., **34**, n. 5 (1969), pp. 361-379.

[3] M. S. BAOUENDI - G. GEYMONAT, *Résultats de dualitè dans les problémes aux limites linéaires elliptiques*, Journal of Differential Equations (1971).

[4] P. BOERO - R. PAVEC, *Coercivité des formes sesquilinéaires intégro-differentielles dans des espaces de Sobolev avec poids*, C.R.A.S. Paris, t. 270 (1970), pp. 1416-1419.

[5] P. BOLEY - J. CAMUS, *Sur une classe d'opèrateurs elliptiques et dégénérés à une variable*, A paraitre au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Sur une classe d'opèrateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables*, A paraître Mémoires de la Société Mathématique de France.

[7] P. BOLLEY - J. CAMUS, Publications des séminaires de Mathématiques, Université de Rennes, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, 1971-1972.

[8] K. O. FRIEDRICHS, *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **55** (1944), pp. 132-151.

[9] G. GRUBB, *A characterization of the non local boundary value problems associated with an elliptic operator*, July 1966, Department of Math., Stanford University.

[10] L. HORMANDER, *Definition of maximal differential operators*, Ark. for Mat., **3** (1958), pp. 501-504.

[11] L. HORMANDER, *Weak and strong extensions of differential operators*, C.P.A. M., **14** (1961), pp. 371-379.

[12] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volumes 1 et 2, Dunod, Paris, 1968.

[13] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[14] N. SHIMAKURA, *Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré*, Journal of Mathematics of Kyoto-University, **9**, n. 2 (1969).

[15] M. I. VISIK - V. V. GRUSIN, *Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain*, Math. U.S.S.R. Sbornik, **9**, n. 4 (1969).

[16] C. ZUILY, *Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du 2-ème ordre*, Thèse de 3ème cycle, Paris, 1969.