ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

RAY REDHEFFER

**Abschätzung nach unten für Lösungen nichtlinearer Differentialungleichungen**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 27, nº 3 (1973), p. 441-456

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_441_0>

# ABSCHÄTZUNG NACH UNTEN FÜR LÖSUNGEN NICHTLINEARER DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN

RAY REDHEFFER (1)

## 1. Fragestellung.

Es sei $B$ ein Bereich im reellen Euklidischen Raum $E_n$, mit Punkten $x \in B$ und mit Rand $\partial B$. Es sei $u = u(x)$ eine positive Funktion der Klasse $D^2(B)$, die einer passenden partiellen Differentialungleichung in $B$ genügt. Sind $P$ und $Q$ zwei Punkte aus $B$, so lässt sich bekanntlich $u(Q)$ oft nach unten durch $u(P)$ abschätzen. Diese Abschätzung hängt sowohl von der Geometrie von $P$, $Q$ und $B$ als auch von der Differentialungleichung ab. Es ist die Absicht der vorliegenden Arbeit, diese Abhängigkeit zu untersuchen.

Um das Problem genauer anzudeuten, sei $x = X(s)$ eine glatte Kurve, die $P$ und $Q$ verbindet; sei nämlich $0 \leq s \leq s_1$,

$$X(0) = P, \quad X(s_1) = Q, \quad |X'(s)| = 1.$$

Die geometrische Beschreibung der Lage von $P, Q, X$ und $B$ werde durch die Funktion $\varrho(s)$ festgelegt, wobei $\varrho(s)$ den Abstand von $X(s)$ zu $\partial B$ bedeute:

$$\varrho(s) = \inf_{x \in \partial B} |X(s) - x|. \tag{1a}$$

Es gibt verschiedene zusätzliche Bedingungen, aus denen man schliessen kann, dass $u$ einer lokalen Harnack'schen Ungleichung genügt [1], [3], [4], [5], [7], [8], [10]. Wenn das der Fall ist, lässt sich der gegebene Anfangswert $u(P)$ ohne weiteres in eine untere Schranke auf einer Kugel umwandeln. Dasselbe gilt auch, wenn $u$ eine bekannte untere Schranke auf eine passende Fläche besitzt, und dabei darf diese Fläche sogar ein Teil vom Rand $\partial B$ sein [7].

---

Pervenuto alla Redazione il 10 Gennaio 1972.
(1) Supported in part by NSF Grant GP-28240.

Wir setzen daher

$$M(s) = \inf u(x) \text{ für } |X(s) - x| < \frac{1}{2}\varrho(s) \tag{1b}$$

und versuchen, $M(s)$ durch $M(0)$ abzuschätzen. Die Funktionen $\varrho(s)$ und $M(s)$ sollen stets die hier angegebene Bedeutung haben.

## 2. Die Differentialungleichung.

Um die Differentialungleichung einzuführen setzen wir

$$u' = \text{Vektor}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad u'' = \text{Matrix}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Ferner ist $a = a(x, p)$ eine reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix-funktion, die auch manchmal als eine Vektorfunktion der Dimension $n^2$ aufgefasst wird. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $u, v$ derselben Dimension wird als $uv$ geschrieben, und insbesondere gilt nach der oben gemachten Bemerkung

$$au'' = \Sigma a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ist $\xi$ ein $n$-Vektor, so ist $\xi a \xi$ eine quadratische Form, insbesondere hat man also

$$c' ac' = \Sigma a_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_j}$$

für $c = c(x) \in D^1(B)$. Bei $c(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ ist $c'(x) = x$, und daher definieren wir

$$x' = \text{Einheitsmatrix}, \quad ax' = \text{Spur } a.$$

Die zugrundgelegte Differentialungleichung lautet in dieser Schreibweise

$$a(x, u')u'' \leq \varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u'|, \quad u \geq 0 \tag{2a}$$

mit

$$a(x, p) \geq 0, \quad pa(x, p)p \geq |p|^2, \quad x' a(x, p) \leq \varepsilon_0. \tag{2b}$$

Dabei sind $\varepsilon_k$ konstant, $\varepsilon_0 \geq 1, \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0$, und es ist $p = u'(x)$. Die zweite Bedingung (2b) stammt aus der frühen Arbeit von Bernstein und ist neuerdings von Serrin gründlich untersucht worden [9]. Sie ist wesentlich allgemeiner als die gleichmässige Elliptizität, $\xi a(x,p)\,\xi \geq |\xi|^2$.

## 3. Ergebnisse.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

und werden beweisen :

Satz 1. *Es seien $\varrho$ und $M$ durch* (1) *erklärt, und sei $u$ eine Lösung von* (2). *Dann ist*

$$M(s) \geq M(0)\, e^{-\varepsilon_0 E(s) - \varepsilon L(s)}, \quad 0 \leq s \leq s_1,$$

*mit*

$$E(s) = \int_0^s \frac{2 + \varrho'(s)}{\varrho(s)}\, ds, \quad L(s) = \int_0^s [2 + \varrho'(s)]\, ds.$$

Offenbar ist $|\varrho(s) - \varrho(t)| \leq |s - t|$, daher ist $\varrho$ absolut stetig, und es gilt $|\varrho'(s)| \leq 1$ in den Punkten $s$, wo $\varrho'(s)$ existiert. Daraus folgt

$$\int_0^s \frac{ds}{\varrho(s)} \leq E(s) \leq 3 \int_0^s \frac{ds}{\varrho(s)}, \quad \int_0^s ds \leq L(s) \leq 3 \int_0^s ds.$$

Durch $E(s)$ wird die « Enge » und durch $L(s)$ wird die « Länge » des Weges gekennzeichnet, der $P$ mit $Q$ verbindet. Merkwürding ist die Tatsache, dass $\varepsilon_0$ nur mit $E$ und $\varepsilon$ nur mit $L$ in Satz 1 verbunden ist.

Die Ungleichung $\Delta u \leq \varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u_1|$ im Gebiet $|x_2| < \varrho_0$ für $n = 2$ führt zum Ergebnis, dass Satz 1 bezüglich der Koeffizienten $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ scharf ist. Das heist, $\varepsilon L(s)$ lässt sich nicht durch $(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) L(s)$ ersetzen, wenn $\alpha$ und $\beta$ absolute Konstanten sind mit $\alpha < 1/2$ oder $\beta < 1/2$. Eine entsprechende Schärfe bezüglich $\varepsilon_0$ folgt aus (12) in Zusammenhang mit [2].

Manchmal besteht (2) nicht im ganzen Gebiet $B$, sondern nur in den Punkten $x \in B$, wo die Bedingungen

$$|u(x)| < M_1, \quad |u'(x)| < M_2 \tag{3}$$

für gewisse positive Konstanten $M_1$ und $M_2$ gelten. Wir behaupten folgenden

ZUSATZ 1. *Es gelte die Voraussetzung* (2) *bei Satz* 1 *nur unter den zusätzlichen Bedingungen* (3). *Sei* $M_0$ *durch*

$$M_0 = \min\left(M(0), M_1, M_2 \frac{\varrho(0)}{2\varepsilon_0 + 2\varepsilon\varrho(0)}\right)$$

*definiert. Dann ist die Behauptung von Satz* 1 *immer noch gültig, mit* $M_0$ *statt* $M(0)$.

Es wird sich herausstellen, dass der Beweis einen allgemeineren und schärferen Satz liefert, der jetzt erläutert wird. Statt (2) sei

$$a(x, u')\, u'' \leq e_1^2\, u + e_2 \,|\, u' \,|\,, \quad u \geq 0 \tag{4a}$$

$$a(x, p) \geq 0, \quad pa(x, p)\, p \geq |\, p\,|^2, \quad x'\, a(x, p) \leq e_0 \tag{4b}$$

wobei $e_k = e_k(x)$ positive Funktionen von $x$ sind. Es seien $\varepsilon_k = \varepsilon_k(s), k = 0, 1, 2,$ durch

$$\varepsilon_k(s) = \sup e_k(x) \text{ für } |\, X(s) - x \,| < \varrho(s) \tag{4c}$$

erklärt, weiter sei zur Abkürzung

$$\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{2}$$

gesetzt.

Dann gilt folgender

SATZ 2. *Es seien* $\varrho$ *und* $M$ *durch* (1) *erklärt, weiter sei* $M_0$ *irgendeine Zahl, für die* $M_0 \leq M(0)$. *Ist* $u$ *eine Lösung von* (4), *dann gilt*

$$M(s) \geq M_0\, e^{-m_0(s)}\, e^{-m(s)}, \; 0 \leq s \leq s_1,$$

*wobei*

$$m_0(s) = \int_0^s \frac{2 + \varrho'(s)}{\varrho(s)}\, \varepsilon_0(s)\, ds,$$

$$m(s) = \int_0^s [2 + \varrho'(s)]\, \varepsilon(s)\, ds.$$

Die Einführung von $M_0$ statt $M(0)$ ist nützlich, weil sie eine einfache Formulierung des folgenden Zasatzes erlaubt.

ZUSATZ 2. *Die Bedingungen* (4) *bei Satz* 2 *werden nur in den Punkten* $x \in B$ *benutzt, für die gilt:*

$$| X(s) - x | < \varrho (s), \quad u (x) < M_0 \, e^{-m_0 (s)} \, e^{-m (s)} ,$$

$$| u' (x) | < 2M_0 \, e^{-m_0 (s)} \, e^{-m (s)} \left( \frac{\varepsilon_0 (s)}{\varrho (s)} + \varepsilon (s) \right).$$

## 4. Beweis von Satz 1.

Die Wahl $e_k (x) = \varepsilon_k$ in Satz 2 ergibt Satz 1. Aus $| \varrho' (s) | \leq 1$ folgt weiter

$$\int_0^s \frac{\varepsilon_0 (s)}{\varrho (s)} \, ds \leq m_0 (s) \leq 3 \int_0^s \frac{\varepsilon_0 (s)}{\varrho (s)} \, ds, \tag{5a}$$

$$\int_0^s \varepsilon (s) \, ds \leq m (s) \leq 3 \int_0^s \varepsilon (s) \, ds. \tag{5b}$$

Um den Zusatz zu beweisen, sei $T$ durch

$$T\Phi (s) = \Phi (s) \exp \left\{ - \int_0^s \Phi (s) \, ds \right\}, \qquad 0 \leq s \leq s_1$$

erklärt, wobei $\Phi (s)$ absolut stetig ist. Die Bedingungen von Zusatz 2 lassen sich wegen (5) durch die schwächere Bedingungen

$$x \in B, u (x) < M_0, \quad | u' (x) | < 2M_0 \left\{ T \frac{\varepsilon_0 (s)}{\varrho (s)} + T\varepsilon (s) \right\} \tag{6}$$

ersetzen. Ist nun $\Phi > 0$, $\Phi' \leq \Phi^2$, dann ist $T\Phi (s)$ eine nichtwachsende Funktion von $s$, nnd daher ist insbesondere $T\Phi (s) \leq \Phi (0)$. Bei $\Phi (s) = \varepsilon_0 / \varrho (s)$, mit $\varepsilon_0 \geq 1$ konstant, gilt

$$| \Phi' | \leq \frac{\varepsilon_0}{\varrho^2 (s)} = \frac{\Phi^2}{\varepsilon_0} \leq \Phi^2 .$$

Somit lässt sich (6) bei konstantem $\varepsilon_0$ und $\varepsilon$ durch die Bedingung

$$x \in B, \quad u (x) < M_0 , \quad | u' (x) | < 2M_0 \left( \frac{\varepsilon_0}{\varrho (0)} + \varepsilon \right)$$

ersetzen, und daraus folgt Zusatz 1.

## 5. Zwei Lemmata.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir im folgenden voraus, dass $\varepsilon_1 > 0$ ist.

LEMMA 1. *Es sei $\mu(t)$ eine Funktion für die*

$$\mu'' + (\varepsilon_0 - 1)\frac{\mu'}{t} + \varepsilon_2 \mu' \geq \varepsilon_1^2 \mu, \quad \mu' \leq 0, \quad \mu \geq 0$$

*in $0 < r_0 \leq t \leq r_1$ gilt. Es sei $u(x)$ für $r_0 \leq |x| \leq r_1$ stetig und es gelte* (2) *in den Punkten $x$, für die*

$$r_0 < |x| < r_1, \quad u(x) < \mu(|x|), \quad |u'(x)| = -\mu'(|x|).$$

*Es sei weiter $u(x) \geq \mu(|x|)$ für $|x| = r_0$ und für $|x| = r_1$. Dann ist*

$$u(x) \geq \mu(|x|), \; r_0 \leq |x| \leq r_1 .$$

Zum Beweis setzen wir $c = c(x) = |x|$. Wenn die Behauptung falsch ist, dann hat die Funktion $u(x) - \mu(c)$ ein Minimum im Ringgebiet $r_0 < |x| < r_1$. In dem Punkt $x$, in dem das Minimum angenommen wird, gilt $0 \leq u \leq \mu(c)$, $u' = \mu'(c)\, c'$ und auch

$$au'' \geq \mu'(c)\, ac'' + \mu''(c)\, c'\, ac',$$

wobei $a = a(x, u') = a(x, \mu'(c)\, c')$. Offenbar ist

$$ac'' = \frac{x'\, a}{|x|} - \frac{xax}{|x|^3},$$

und daher wegen (2*b*)

$$au'' \geq \mu'(c)\left(\frac{\varepsilon_0}{|x|} - \frac{1}{|x|}\right) + \mu''(c).$$

Andererseits ist in $x$

$$\varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u'| < \varepsilon_1^2 \mu(c) - \varepsilon_2 \mu'(c).$$

Die Ungleichung für $\mu$ führt zu einem Widerspruch an der Stelle $t = c = |x|$.

LEMMA 2. *Die Ungleichung von Lemma 1 besitzt eine Lösung $\mu$, für die gilt*

$$\mu(r_0) = 1, \quad \mu(2r_0) = 0, \quad \mu'(r_0) > -\frac{\varepsilon_0}{r_0} - 2\varepsilon.$$

Es stellt sich heraus, dass die Lösung $\mu(t)$ von

$$\mu'' + \frac{\varepsilon_0 - 1}{r_0}\mu' + \varepsilon_2\,\mu' = \varepsilon_1^2\,\mu, \quad \mu(r_0) = 1, \quad \mu(2r_0) = 0$$

die Bedingung $\mu'(t) < 0$ erfüllt. Diese Funktion $\mu$ genügt daher der Ungleichung von Lemma 1. Mit

$$2p = \frac{\varepsilon_0 - 1}{r_0} + \varepsilon_2, \quad q^2 = p^2 + \varepsilon_1^2, \quad q > 0$$

ist ferner

$$\mu'(r_0) = -p - q\,\frac{e^{2r_0 q} + 1}{e^{2r_0 q} - 1}.$$

Aus der Ungleichung

$$t\,\frac{e^t + 1}{e^t - 1} \leq t + 2$$

mit $t = 2r_0\,q$ folgt dann

$$\mu'(r_0) \geq -p - q - \frac{1}{r_0} > -2p - \varepsilon_1 - \frac{1}{r_0},$$

was zu beweisen war.

## 6. Beweis von Satz 2.

Wir setzen zunächst voraus, dass $u$ im abgeschlossenen Bereich $\overline{B}$ stetig ist und verwenden Lemma 1 mit $\mu$ aus Lemma 2 im Ringgebiet

$$\frac{1}{2}\,\varrho(s) < |X(s) - x| < \varrho(s).$$

Bei festem $s$ denken wir uns den Nullpunkt so gewählt, dass $X(s) = 0$ ist. Aus Lemma 1 und aus der Konvexität der Funktion $\mu$ folgt dann

$$u(x) \geq M(s)\,\mu(|x|) \geq M(s)\,[1 + \mu'(r_0)\,(|x| - r_0)]$$

für $r_0 < |x| < r_1$. Daraus erhält man für kleines $\Delta s > 0$

$$M(s + \Delta s) \geq M(s)\left[1 + \mu'(r_0)\left(\Delta s + \frac{1}{2}\,\Delta\varrho\right)\right],$$

wobei $\Delta\varrho = \varrho(s + \Delta s) - \varrho(s)$ bedeute. Aus der Abschätzung für $\mu'(r_0)$ in Lemma 2 schliessen wir auf

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{ds} \geq -\left[2\frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} + 2\varepsilon(s)\right]\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d\varrho}{ds}\right). \tag{7}$$

Die Behauptung folgt durch Integration, und zwar mit $M_0 = M(0)$.

Jetzt wenden wir uns dem Zusatz 2 zu. Da $|\mu'(t)| \leq |\mu'(r_0)|$ für $r_0 < t$, zeigt Lemma 1, dass die Gleichung (4) beim Beweis von (7) nur in den Punkten $x$ benutzt wird, wo

$$\frac{1}{2}\varrho(s) < |X(s) - x| < \varrho(s)$$

und

$$u(x) \leq M(s), \quad |u'(x)| \leq 2M(s)\left(\frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} + \varepsilon(s)\right) \tag{8}$$

gilt. (Dabei ist wieder die Abschätzung für $\mu'(r_0)$ aus Lemma 2 verwendet worden). Sei nun

$$N(s) = M_0\, e^{-m_0(s)}\, e^{-m(s)},$$

wobei $m$ und $m_0$ dieselben Funktionen sind, die in Satz 2 auftreten. Ist $M(s) \leq N(s)$ im Punkt $s$, dann sind die Bedingungen (8) mit denen von Zusatz 2 verträglich, und wir können wieder die Gültigkeit von (7) an der Stelle $s$ behaupten. Das zeigt, dass

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{ds} \geq \frac{1}{N}\frac{dN}{ds}$$

in den Punkten $s$ gilt, wo $M(s) \leq N(s)$ ist. Daraus folgt wieder $M(s) \geq N(s), 0 \leq s \leq s_1$, wovon man sich durch eine leichte Überlegung überzeugen kann.

Wir müssen uns ist. noch von der Voraussetzung lösen, dass $u$ in $\overline{B}$ stetig Das geschieht wie folgt: Man ersetzt $\varrho(s)$ durch $\theta\varrho(s)$, mit $0 < \theta < 1$. Aus $\theta \to 1$ — in der entsprechenden unteren Schranke $N(\theta, s)$ folgt dann die gewünschte Behauptung. Durch dieselbe Methode kann man $\varrho(s)$ durch eine glatte Approximation $\varrho(s, \theta)$ ersetzen. Daher ist die Tatsache, dass $\varrho(s)$ nicht überall differenzierbar, sondern nur absolut stetig ist, nicht in den obigen Beweisen betont worden.

## 7. Beispiele.

Bisher war vorausgesetzt, dass $\varrho(s)$ stets den Abstand von $X(s)$ zu $\partial B$ bedeutet. Vom Beweis her sieht man leicht, dass $\varrho(s)$ in Satz 2 eine beliebige absolut stetige Funktion sein kann, wenn nur

(9) $$\varrho(s) > 0, \quad 2 + \varrho'(s) \geq 0 \qquad (0 \leq s \leq s_1).$$

Die Behauptung von Satz 1 lässt sich in der Form

(10) $$M(s) \geq M(0) \left[\frac{\varrho(s)}{\varrho(0)} e^{2h}\right]^{-\varepsilon_0} \left[\frac{e^{\varrho(s)}}{e^{\varrho(0)}} e^{2s}\right]^{-\varepsilon}$$

umschreiben, wobei

$$h(s) = \int_0^s \frac{ds}{\varrho(s)}.$$

Das folgt auch für beliebes $\varrho(s)$ unter der zusätzlichen Bedingung (9), die nach wie vor unentbehrlich ist.

Wir setzen nun

$$\varrho(s) = \varrho_0 + (\varrho_1 - \varrho_0)\frac{s}{s_1}, \qquad 0 \leq s \leq s_1,$$

wobei $\varrho_0$, $\varrho_1$ und $s_1$ positive Konstanten sind. Es sei ferner

$$\lambda = \varrho_1 - \varrho_0 + 2s_1 \geq 0.$$

Dann ist nach (10)

(11) $$M(s_1) \geq M(0)\, A(\varrho_0, \varrho_1)^{-\varepsilon_0 \lambda} e^{-\varepsilon\lambda}$$

mit

$$A(\varrho_0, \varrho_1) = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right)^{1/(\varrho_0 - \varrho_1)} \qquad (\varrho_0 \neq \varrho_1)$$

$$A(\varrho_0, \varrho_0) = e^{1/\varrho_0} \qquad (\varrho_0 = \varrho_1).$$

Falls die Kurve $x = X(s)$ eine Strecke ist, dann kann dieses Ergebnis in jedem konvexen Bereich $B$ benutzt werden, der die Kugel $|x - X(0)| < \varrho_0$, $|x - X(s_1)| < \varrho_1$ enthält. Mit $s_1 \to 0+$ erhält man

(12) $$\frac{M_1}{M_0} \geq \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{-\varepsilon_0} \left(\frac{e^{\varrho_1}}{e^{\varrho_0}}\right)^{-\varepsilon}, \qquad \varrho_1 \geq \varrho_0,$$

wobei

$$M_k = \sup u(x) \quad \text{für} \quad |x - X(0)| < \frac{1}{2}\varrho_k \qquad (k = 0, 1)$$

und (4) für $|x - X(0)| < \varrho_1$ gilt. Wählt man $\varrho_1 = \varrho(0)$, dann sieht man, dass kein Verlust an Allgemeinheit dadurch aufgetreten ist, dass man $M(0)$

anstatt $M_0$ als Anfangswert in den Sätzen 1, 2 verwendet hat. Das Ergebnis (12) ist ziemlich scharf [2].

Bemerkenswert ist auch der Fall

$$M(s_1) \geq M(0) \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{-3\varepsilon_0} e^{-3_1 s} \qquad (\varrho_0 + s_1 = \varrho_1). \tag{13}$$

Dieser Fall entsteht, wenn die Kurve $x = X(s)$ eine Strecke ist und die Kugel $|X(0) - x| < \varrho_0$ in der Kugel $|X(s_1) - x| < \varrho_1$ liegt und diese berührt.

Als weiteres Beispiel sei $x_0 \in \partial B$, $|y_0| = 1$, $r_0 > 0$ und $0 < \theta < \pi/2$. Wir setzen $x_r = x_0 + r y_0$ und nehmen an, dass die Menge

$$\{x \mid |x - x_r| < r \sin \theta\}, \qquad 0 < r \leq r_0$$

in $B$ enthalten ist. ($x_0$ ist also die Spitze eines teilweise in $B$ liegenden Kegels mit dem Öffnungswinkel $2\theta$). Es sei nun

$$M[r] = \inf u(x) \quad \text{für} \quad |x - x_r| < \frac{1}{2} r \sin \theta.$$

Setzt man in (11)

$$s_1 = r_0 - r, \qquad \varrho_0 = r_0 \sin \theta, \qquad \varrho_1 = r \sin \theta, \tag{14}$$

dann folgt aus (2)

$$\liminf_{r \to 0+} r^{(1 - 2\csc\theta)\varepsilon_0} M[r] > 0,$$

wenn nur $u(P) > 0$ in einem Punkt $P \in B$ gilt. Vertauscht man in (14) $\varrho_0$ und $\varrho_1$, so gilt

$$\limsup_{r \to 0+} r^{(1 + 2\csc\theta)\varepsilon_0} M[r] < \infty.$$

Es sei nun $\varrho(s)$ die in (11) auftretende Funktion, $0 \leq s \leq s_1$. Wir setzen weiter

$$\varrho(s) = \varrho_1 + (\varrho_0 - \varrho_1) \frac{s}{2 s_1}, \qquad s_1 \leq s \leq 2 s_1.$$

Wendet man (11) zweimal an, wobei einmal $\varrho_0$ und $\varrho_1$ vertauscht werden, dann ergibt sich

$$M(2 s_1) \geq M(0)\, A(\varrho_0, \varrho_1)^{-4\varepsilon_0 s_1} e^{-4\varepsilon s_1}, \tag{15}$$

wenn nur $2s_1 \geq |\varrho_0 - \varrho_1|$ ist. Da $A(\varrho_0, \varrho_1) = A(\varrho_1, \varrho_0)$ ist, ändert sich (15) bei Vertauschung von $\varrho_1$ und $\varrho_0$ nicht. Eine ähnliche Symmetrieeigenschaft ist auch in der allgemeinen Formel (10) erkennbar.

Der Fall $\varrho_1 << \varrho_0$ in (15) entspricht ungefähr einem Loch, durch das die Kurve $x = X(s)$ läuft. Bei linearem $X(s)$ ist ein Loch genauer dadurch gekennzeichnet, dass

$$\varrho(s) = [\varrho_1^2 + (s_1 - s)^2]^{1/2}, \qquad 0 \leq s \leq 2s_1 .$$

Bei diesem $\varrho$ gilt nach (10)

$$M(2s_1) \geq M(0) \left[\frac{s_1 + (\varrho_1^2 + s_1^2)^{1/2}}{\varrho_1}\right]^{-4s_0} e^{-4\varepsilon s_1} .$$

## 8. Drei Anwendungen.

Der folgende Satz verschärft den Teil von Satz 2 in [2], der sich auf den Fall $n \geq 2$ bezieht.

Korollar 1. *Es gelte* (2) *in* $|x| < 1$, *und es sei* $u(x) \geq 1$ *in einer in* $|x| < 1$ *liegenden Kugel vom Radius* $\varrho_0$. *Dann ist*

$$u(x) > \left(\frac{\varrho_0}{2}\right)^{3s_0} e^{-5\varepsilon} (1 - |x|), \qquad |x| < 1.$$

Zum Beweis nehmen wir an, dass $u(x) \geq 1$ in einer Kugel $|x - x_0| < \varrho_0$, die $|x| = 1$ berührt. (Dies ist offenbar der schlimmste Fall). Aus (13) mit

$$\varrho(s) = \varrho_0 + s, \quad 0 \leq s \leq 1 - \varrho_0$$

folgt

$$u(x) \geq \varrho_0^{3s_0} e^{-3\varepsilon(1-\varrho_0)}, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

Für $1/2 < |x| < 1$ ergibt [2] Lemma 3 den zusätzlichen Faktor

$$2^{-s_0} e^{-(s_0+2\varepsilon)} (1 - |x|),$$

und daraus folgt Korollar 1.

Für das nächste Ergebnis benötigen wir eine zweiseitige Ungleichung

$$(16) \qquad - b(x) |u'| \leq a(x, u') u'' \leq \varepsilon_1^2 |u| + \varepsilon_2 |u'|.$$

Dabei sollen die Bedingungen (2b) immer noch gelten, und $b(x)$ soll eine beliebige in $|x| < 1$ stetige Funktion sein.

KOROLLAR 2. (Nach Serrin). *Sei $u$ eine positive Lösung von* (16) *für* $|x| < 1$, $n = 2$. *Dann ist*

$$u(x) \geq e^{-9\varepsilon_0} e^{-3\varepsilon} u(0), \qquad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Zum Beweis sei $u(0) = 1$ und $\theta < 1$. Wegen des Maximumprinzips gibt es eine glatte Kurve $K$, die von $x = 0$ bis zum Rand $|x| = \theta$ verläuft, derart, dass $u(x) > \theta$ auf $K$ ist [7]. Das folgende sollte eigentlich zunächst für $\theta < 1$ ausgeführt werden, und dann erst sollte man in der so gefundenen Schranke $\theta = 1$ setzen. Aus Stetigkeitsgründen jedoch läuft das auf dasselbe hinaus, wenn man gleich am Anfang mit $\theta = 1$ arbeitet. Der Einfachheit halber setzen wir also $u \geq 1$ auf einer glatten Kurve $K$ voraus, die $x = 0$ mit $x = 1$ verbindet.

Ist $K$ durch $x = X(s)$, $0 \leq s \leq s_1$, gegeben, dann sei $K_t$ die Kurve $x = X(s)$, $0 \leq s \leq t$. Der Radius des Spann. kreises dieser Kurve ist bei $t = s_1$ mindestens $1/2$. Von $t = 0$ ausgehend, sei $t_0$ der erste Punkt, für den $R_t = 1/2$. So erhält man einen Kreis $C: |x - x_0| = 1/2$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $|x_0| \leq 1/2$

(2) $u(x) \geq 1$ auf einer glatten Kurve $K$, die $C$ als Spannkreis besitzt.

Nun brauchen wir den folgenden Hilfsatz:

LEMMA 3. *Es sei $u$ eine Lösung von* (2) *für* $|x| < r_0 \leq 1$, $n = 2$, *und* $|x| = r_0$ *sei der Spannkreis einer glatten Kurve $K$, auf der* $u(x) \geq 1$. *Dann ist*

$$u(x) \geq \frac{3}{8} e^{-5\varepsilon_0} e^{-5\varepsilon r_0/2}, \qquad |x| \leq \frac{1}{4} r_0.$$

Das Ergebnis ist im Beweis von Lemma 6 in [2] enthalten.

Die Wahl $\varrho_0 = r_0/2$, $\varrho_1 = 1$, $s_1 = |x_0| \leq r_0$ bei (11) ergibt folgendes: Es sei $u$ eine Lösung von (2) für $|x| < 1$, und es gelte $u(x) \geq 1$ für $|x - x_0| \leq \leq r_0/4$, wobei $|x_0| \leq r_0 \leq 1/2$. Dann ist für $|x| < 1/2$

$$u(x) \geq \left(\frac{r_0}{2}\right)^{\varepsilon_0 (2+3r_0)/(2-r_0)} e^{-\varepsilon(2+3r_0)/2}. \tag{17}$$

Korollar 1 erhält man nun folgendermassen: Man setzt $r_0 = 1/2$ und bildet das Produkt der Schranke aus Lemma 3 mit der Schranke (17). Das ergibt nämlich

$$u(x) \geq \frac{3}{8} e^{-5\varepsilon_0} e^{-3\varepsilon} 4^{-7\varepsilon_0/3}, \qquad |x| \leq 1/2.$$

Die Wahl $|x| \leq r_0/4$ in Lemma 3, anstatt z.B. $|x| \leq r_0/2$, ist dadurch motiviert, dass durch $|x| \leq r_0/4$ der Koeffizient von $-\varepsilon$ möglichst klein gemacht wird.

Das Problem der Bestimmung der Konstanten im Satz von Serrin ist auch von Protter und Weinberger in Angriff genommen worden [6]. Ihr Ergebnis liefert das folgende: Es sei $n = 2$,

$$\text{(17a)} \qquad u \geq 0, \qquad a(x)u'' = b(x)u + a(x)u', \qquad |x| < 1,$$

wobei $\xi a(x)\xi \geq |\xi|^2$ ist und entsprechend (2b)

$$\text{(17b)} \qquad a(x) \geq 0, \quad \|a(x)\| \leq \varepsilon_0, \quad 0 \leq b(x) \leq \varepsilon_1^2, \quad |c(x)| \leq \varepsilon_2$$

gilt. Dann ist

$$u(x) \geq e^{-7\alpha/12}(e^{\alpha/51} - 1)\,u(0), \qquad |u| \leq 1/2,$$

mit

$$\text{(18)} \qquad \alpha = [165{,}888\,(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_2^2) + 288\,\varepsilon_1^2]^{1/2}.$$

Aus Korollar 1 dagegen folgt für das Problem (17)

$$u(x) \geq e^{-\beta} u(0), \qquad \beta = 9\sqrt{2}\,\varepsilon_0 + \frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2.$$

Eine etwas schwächere Form von Korollar 1 lässt sich ohne Benutzung des Spannkreises beweisen. Wir wollen kurz andeuten, wie das geht. Wie in [6] und [7] sei $u(x) \geq 1$ auf einer Kurve, die (0,0) mit (0,1) verbindet. Weiter sei [6]

$$c^+(x) = \frac{3}{4} - x_1 - 3\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$c^-(x) = \frac{3}{4} + x_1 - 3\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$M = \{x \mid c^+(x) > 0, \quad c^-(x) > 0\}.$$

Bei $c = c^+$ oder $c^-$ gilt für $x \in M$

$$c \leq \frac{7}{4}, \qquad |c'| \geq 1, \qquad c'' \geq -6x'.$$

Wir setzen $\beta = 6\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ und ersetzen (2$a$) durch die schwächere Ungleichung

$$a(x, u')\, u'' \leq \varepsilon_1 \beta u + \varepsilon_2 |u'|. \tag{19}$$

Bei $v = e^{\beta c} - 1$, $\lambda = \beta e^{\beta c}$ gilt

$$av'' \geq \lambda(\beta |c'| - 6\varepsilon_0), \quad \varepsilon_1 \beta v + \varepsilon_2 |v'| < \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 |c'|),$$

und daher genügt $v$ der umgekehrten Ungleichung (19) und zwar mit $>$ anstatt $\geq$. Nach der Methode von Serrin [6], [7] schliessen wir auf

$$u(x) \geq \frac{e^{\beta c} - 1}{e^{7\beta/4} - 1} \geq \frac{4}{7}\, c e^{\beta(c - 7/4)}, \qquad x \in M.$$

Daraus folgt

$$u(x) \geq \frac{4}{7}\left(\frac{2}{3} - 3r^2\right) e^{-(13/12 + 3r^2)\beta} \tag{20}$$

im Kreis $x_1^2 + (x_2 - 1/2)^2 = r^2$.

Jetzt wird (2$a$) statt (19) benutzt. Aus (11) mit $\varrho_0 = 2r$, $\varrho_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 1/2$ folgt

$$u(x) \geq M_r (2r)^{2\varepsilon_0(1-r)/(1-2r)}\, e^{-2\varepsilon(1-r)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

wobei $M_r$ durch (20) gegeben ist. Die Wahl $r = 1/6$ macht den Koeffizienten von $\varepsilon$ zum Minimum und ergibt

$$u(x) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{5\varepsilon_0/2} e^{-7\varepsilon_0}\, e^{-4\varepsilon}, \qquad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Das ist nur wenig schwächer als Korollar 1.

Zum Schluss betrachten wir einen Fall, bei dem das Maximumprinzip nicht gilt. Es sei

$$-\delta_1^2 |u| - \delta_2 |u'| \leq a(x, u')\, u'' \leq \varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u'|. \tag{21}$$

Dabei seien die $\delta_k \geq 0$ konstant und es sollen immer noch die Bedingungen (2$b$) gelten. Wir setzen

$$\delta = \frac{1}{2\delta_2} \log\left[1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1}\right],$$

falls dieser Ausdruck $< 1/4$ ist, sonst $\delta = 1/4$. Bei $\delta_2 = 0$ ist $4\delta = \min(1, 1/\delta_1)$.

KOROLLAR 3. *Es sei u eine positive Lösung von* (21) *für* $|x| < 1$, $n = 2$. *Dann ist*

$$u(x) \geq \frac{1}{3} e^{-5\varepsilon_0} e^{-3\varepsilon} \delta^{3\varepsilon_0} u(0), \qquad |x| \leq 1/2.$$

Wir wollen den Beweis nur andeuten. Sei $r_0 = 2\delta$. Aus Satz 1 in [2] folgt $u(x) \geq u(0)/2$ auf einer glatten Kurve $K$, die den Nullpunkt mit dem Kreis $|x| = 2r_0$ verbindet. Wir wenden zuerst Lemma 3 und danach (11) an. Daraus ergibt sich

$$u(x) \geq \frac{3}{16} e^{-5\varepsilon_0} e^{-\varepsilon(1+4r_0)} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{\varepsilon_0(2+3r_0)/(2-r_0)}$$

für $|x| \leq 1/2$. Diese Ungleichung ist schärfer als das gewünschte Ergebnis.

*z. Z. Universität Karlsruhe*

## LITERATURVERZEICHNIS

[1] BONY, J. M. *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateur elliptiques dégénérés.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19, 1 (1969), 277-304.

[2] DELL, R., REDHEFFER, R. *Sharp Lower Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Inequalities.* Math. Z. 127, 199-216 (1972).

[3] HABETHA, K. *Uber eine Integraldarstellung und das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip bei elliptischen Differentialgleichungen.* Math. Annalen 165, 91-110 (1966).

[4] LADYZHENSKAYA, O. A., URAL'TSEVA, N. N. *Local estimates for gradients of solutions of nonuniformly elliptic and parabolic equations.* Comm. Pure Appl. Math., XXII, 677-703 (1970).

[5] MOSER, J. *On Harnack's theorem for elliptic differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. 14, 577-591 (1961).

[6] PROTTER, M. WEINBERGER, H., *Maximum principles in differential equations.* Prentice, Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1967).

[7] SERRIN, J. *On the Harnack inequality for linear elliptic equations.* Jour. d'Anal. Math. 4 292-308 (1956).

[8] SERRIN, J. *A Harnack inequality for nonlinear equations.* Bull. Amer. Math. Soc., 69, 481-486 (1963).

[9] SERRIN, J. *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables.* Phil. Trans. Roy. Soc. London 264, 413-496 (1969).

[10] TRUDINGER, NEIL, S. *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.* Comm. on Pure and Applied Math. XX, 721-747 (1967).