ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

LIVIO C. PICCININI
SERGIO SPAGNOLO

**Una valutazione della regolarità delle soluzioni di sistemi ellittici variazionali in due variabili**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 27, nº 3 (1973), p. 417-429
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_417_0>

# UNA VALUTAZIONE DELLA REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI DI SISTEMI ELLITTICI VARIAZIONALI IN DUE VARIABILI

di LIVIO C. PICCININI e SERGIO SPAGNOLO (*)

## 1. Introduzione.

Proseguendo la ricerca iniziata in [6] limitatamente alle equazioni ellittiche su $R^2$, viene qui studiata la regolarità delle soluzioni di un sistema ellittico di tipo variazionale $E$ su un aperto di $R^2$. Se il coefficiente di ellitticità di un tale sistema viene indicato con $L$ ($L$ è definito dalla (3) e risulta $L \geq 1$) è ben noto che tutte le soluzioni $u$ di $Eu = 0$ sono localmente hölderiane con esponente di Hölder $1/2L$ (Morrey [4] e [5]).

In questa nota viene migliorata la valutazione di Morrey fino a ottenere il migliore esponente possibile, cioè $1/\sqrt{L}$; è da notare che questo esponente non dipende dal numero delle equazioni che compongono il sistema e quindi non differisce da quello già ottenuto in [6] per il caso di una sola equazione. Ricordiamo che su $R^n$ con $n \geq 3$ le soluzioni di un sistema di $n$ equazioni non sono in generale neppure limitate (De Giorgi [2]).

Passando poi al caso non omogeneo, viene qui dimostrato che ogni soluzione $u$ di $Eu = \operatorname{div} f$, con

$$r^{-2\mu} \int_{|x-x_0| \leq r} |f|^2 \, dx \leq C(f) < +\infty \qquad (\mu > 0)$$

per ogni $x_0$ ed ogni $r > 0$, è localmente hölderiana con esponente $\alpha$, dove $\alpha = \min(1/\sqrt{L}, \mu)$ se $\mu \neq 1/\sqrt{L}$, mentre $\alpha$ è un qualunque numero minore di $1/\sqrt{L}$ se $\mu = 1/\sqrt{L}$. Anche in questo caso, questa è la miglior valutazione

---

Pervenuto alla Redazione il 2 Luglio 1972.

(*) Lavoro eseguito con finanziamento del C. N. R. nell'ambito del G. N. A. F. A..

Indirizzo degli autori: Livio C. Piccinini: Scuola Normale Superiore, PISA; Sergio Spagnolo: Istituto di Matematica per Ingegneri, CAGLIARI.

possibile dell'esponente di Hölder in funzione del coefficiente di ellitticità, come mostrano gli esempi alla fine della nota.

## 2. Il caso omogeneo.

Teorema 1. *Sia $U$ un aperto limitato di $R^2$ ed $(u_1, \dots, u_N) \in [H^1_{\mathrm{loc}}(U)]^N$ una soluzione su $U$ del sistema di equazioni differenziali*

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{div}(A^{hk}(x) \nabla u_k) = 0 \qquad (h = 1, \dots, N) \tag{1}$$

*dove $A^{hk}(x)$ sono $N^2$ matrici $2 \times 2$ di funzioni misurabili verificanti per ogni $x \in U$ le condizioni seguenti:*

$$A^{hk}(x) = [A^{kh}(x)]^* \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2 \leq \sum_{h,k=1}^{N} \langle \xi_h, A^{hk}(x) \xi_k \rangle \leq L \sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2 \tag{3}$$

*per ogni $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in [R^2]^N$.*

*Allora, per ogni compatto $K$ di $U$ ed ogni $x$, $y$ in $K$, si ha*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq C(|x-y|)^{1/\sqrt{L}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{N} \int_U u_k^2 \, dx \right\}^{1/2} \qquad (h = 1, \dots, N) \tag{4}$$

*con $C$ costante dipendente solo da $L$ e* $\operatorname{dist}(K, \partial U)$.

Dimostrazione. Sia $x_0$ un punto fissato di $U$, $B(r) = \{x \in R^2 : |x - x_0| \leq r\}$, $S(r) = \{x \in R^2 : |x - x_0| = r\}$ e definiamo, per $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$,

$$g(r) = \sum_{h,k=1}^{N} \int_{B(r)} \langle \nabla u_h, A^{hk}(x) \nabla u_k \rangle \, dx. \tag{5}$$

Utilizzando la maggiorazione (che segue dalla (3))

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{B(r)} |\nabla u_k|^2 \, dx \leq g(r)$$

e la nota diseguaglianza di Caccioppoli, per un teorema di Morrey (vedi ad esempio [5], pag. 35; o anche [7], [1]), per provare l'hölderianità nella forma

(4) sarà sufficiente verificare che

$$g(r) \leq C' r^{2/\sqrt{L}} \sum_{k=1}^{N} \int_U |\nabla u_k|^2 \, dx \tag{6}$$

con $C' = C'(L, \operatorname{dist}(x_0, \partial U))$, per ogni $x_0 \in U$ ed ogni $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$.

Proveremo dunque la (6).

Per mezzo delle formule di Gauss-Green, dalle (1) si ricava, per ogni $N$-pla di costanti $(b_1, \ldots, b_N)$ cui verrà attribuito in seguito un valore opportuno (dipendente da $r$) e per quasi tutti i valori di $r$, l'eguaglianza

$$g(r) = \sum_{h,k=1}^{N} \int_{S(r)} (u_h - b_h) \langle A^{hk}(x) \nabla u_h, \underline{n} \rangle \, d\sigma \tag{7}$$

dove $\underline{n} = \underline{n}(x)$ è la normale esterna a $B(r)$ in un punto $x$ di $S(r)$, mentre $d\sigma$ è la misura 1 dimensionale su $S(r)$.

Introduciamo a questo punto le coordinate polari $(\varrho, \vartheta)$ di centro $x_0$ e poniamo

$$J(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix};$$

si ha $\underline{n} = J(\vartheta)\underline{e}_1$, con $\underline{e}_1 \equiv (1, 0)$, e $\nabla u = J(\vartheta)\overline{\nabla} u$, con $\overline{\nabla} u \equiv \left(\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}, \varrho^{-1} \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)$.

Inoltre, facendo la posizione

$$J^*(\vartheta) A^{hk} J(\vartheta) = P^{hk} \equiv [p_{ij}^{hk}]_{i,j=1,2},$$

la definizione (5) di $g(r)$ e la (7) si trasformano nelle

$$g(r) = \sum_{h,k=1}^{N} \int_{B(r)} \langle \overline{\nabla} u_h, P^{hk} \overline{\nabla} u_k \rangle \, dx \tag{8}$$

$$g(r) = \sum_{h,k=1}^{N} \int_{S(r)} (u_h - b_h) \langle P^{hk} \overline{\nabla} u_k, \underline{e}_1 \rangle \, d\sigma. \tag{9}$$

Si noti poi che in virtù di (2) e (3) si ha:

$$\begin{cases} P^{hk} = [P^{kh}]^* \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2 \leq \sum_{h,k=1}^{N} \langle \xi_h, P^{hk} \xi_k \rangle \leq L \sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2 \end{cases}$$

per ogni $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in [R^2]^N$; da cui, introducendo la matrice $2N \times 2N$

$$T = [P^{hk}]_{h,\, k=1, \dots, N},$$

risulta

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T^* \\ |\eta|^2 \leq \langle \eta, T\eta \rangle \leq L\,|\eta|^2 \quad \text{per ogni} \quad \eta \in R^{2N}. \end{array} \right. \tag{10}$$

Consideriamo ora le quattro seguenti sottomatrici $N \times N$ della matrice $T$ (ottenute prendendo alternativamente le righe pari o dispari e le colonne pari o dispari di $T$)

$$\begin{array}{ll} E = [p_{11}^{hk}] & F = [p_{12}^{hk}] \\ G = [p_{21}^{hk}] & H = [p_{22}^{hk}]. \end{array} \qquad (h, k = 1, \dots, N)$$

Tali matrici godono della proprietà che $E = E^*$, $G = F^*$, $H = H^*$; costruiamo la nuova matrice $2N \times 2N$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

per la quale si verifica facilmente che

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T} = \bar{T}^* \\ |\eta|^2 \leq \langle \eta, \bar{T}\eta \rangle \leq L\,|\eta|^2 \quad \text{per ogni} \quad \eta \in R^{2N}, \end{array} \right. \tag{11}$$

e infine introduciamo i vettori

$$\Phi \equiv (u_1 - b_1, \dots, u_N - b_N)$$

$$\Phi_\varrho \equiv \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varrho}, \dots, \frac{\partial u_N}{\partial \varrho} \right)$$

$$\Phi_\vartheta \equiv \left( \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}, \dots, \frac{\partial u_N}{\partial \vartheta} \right).$$

Utilizzando tutte queste notazioni si possono riscrivere la (8) e la (9) nella forma seguente:

$$g(r) = \int_{B(r)} [\langle \Phi_\varrho, E\,\Phi_\varrho \rangle + 2\varrho^{-1} \langle \Phi_\varrho, F\,\Phi_\vartheta \rangle + \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, H\,\Phi_\vartheta \rangle]\, dx \tag{12}$$

(13)
$$g(r) = \int_{S(r)} \langle \Phi, E\Phi_\varrho + \varrho^{-1} F \Phi_\vartheta \rangle \, d\sigma.$$

Ci proponiamo ora di maggiorare il secondo membro della (13). Ricordando che $E = E^*$, si può definire la matrice simmetrica $\sqrt{E}$ e scrivere

$$g(r) = \int_{S(r)} \langle \sqrt{E}\,\Phi, \sqrt{E}\,\Phi_\varrho + \varrho^{-1} \sqrt{E^{-1}}\, F \Phi_\vartheta \rangle \, d\sigma$$

da cui segue per la diseguaglianza di Schwarz

(14)
$$g(r) \leq \left\{ \int_{S(r)} \langle \Phi, E\Phi \rangle \, d\sigma \cdot \int_{S(r)} |\sqrt{E}\,\Phi_\varrho + \varrho^{-1} \sqrt{E^{-1}}\, F \Phi_\vartheta|^2 \, d\sigma \right\}^{1/2}.$$

Ora dalla (11) segue in particolare che

$$|\zeta|^2 \leq \langle \zeta, E\zeta \rangle \leq L |\zeta|^2 \quad \text{per ogni} \quad \forall\, \zeta \in R^N,$$

cosicché risulta

$$\int_{S(r)} \langle \Phi, E\Phi \rangle \, d\sigma \leq L \int_{S(r)} |\Phi|^2 \, d\sigma = L \left( \sum_{k=1}^{N} \int_{S(r)} |u_k - b_k|^2 \, d\sigma \right).$$

A questo punto diamo un valore alle costanti $b_1, \dots, b_N$, scegliendo (per ogni fissato valore di $r$)

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(r, \vartheta) \, d\vartheta \qquad (k = 1, \dots, N);$$

possiamo in tal modo applicare la diseguaglianza di Wirtinger [1], ottenendo la stima

(15)
$$\int_{S(r)} \langle \Phi, E\Phi \rangle \, d\sigma \leq L r^2 \cdot \int_{S(r)} \varrho^{-2} |\Phi_\vartheta|^2 \, d\sigma.$$

---

[1] Per ogni funzione $w(t)$ periodica di periodo $2\pi$ per cui sia $\int_0^{2\pi} w(t)\, dt = 0$ vale la diseguaglianza seguente $\int_0^{2\pi} w^2(t)\, dt \leq \int_0^{2\pi} [w'(t)]^2 \, dt$. Vedi [3], § 258.

Se poi osserviamo che

$$(16) \qquad |\zeta|^2 \leq \langle \zeta, (H - F^* E^{-1} F)\zeta \rangle \quad \text{per ogni } \zeta \in R^N,$$

possiamo dedurre dalla (15) la seguente maggiorazione

$$(17) \qquad \int_{S(r)} \langle \Phi, E\Phi \rangle \, d\sigma \leq L r^2 \int_{S(r)} \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, (H - F^* E^{-1} F)\Phi_\vartheta \rangle \, d\sigma.$$

Proviamo dunque la (16): innanzitutto la matrice $H - F^* E^{-1} F$ risulta essere simmetrica; inoltre se $\lambda_0$ è il minimo autovalore di tale matrice e $\zeta_0$ è un corrispondente autovettore si verifica che

$$(-E^{-1}F\zeta_0, \zeta_0)\begin{bmatrix} E & F \\ F^* & H \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -E^{-1}F\zeta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 |\zeta_0|^2,$$

da cui per la (11)

$$\lambda_0 |\zeta_0|^2 \geq |E^{-1}F\zeta_0|^2 + |\zeta_0|^2 \geq |\zeta_0|^2,$$

e quindi $\lambda_0 \geq 1$, cioè la (16).

Introducendo ora la (17) nella (14) si ricava $\left(\text{essendo } |ab|^{1/2} \leq \leq \frac{1}{2}(|a| + |b|)\right)$

$$g(r) \leq$$

$$\sqrt{L}\, r \left[ \int_{S(r)} \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, (H - F^* E^{-1} F)\Phi_\vartheta \rangle \, d\sigma \cdot \int_{S(r)} |\sqrt{E}\,\Phi_\varrho + \varrho^{-1} \sqrt{E}^{-1} F \Phi_\vartheta|^2 \, d\sigma \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{L}\, r \, \frac{1}{2} \int_{S(r)} \left[ \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, (H - F^* E^{-1} F)\Phi_\vartheta \rangle + |\sqrt{E}\,\Phi_\varrho + \varrho^{-1} \sqrt{E^{-1}} F \Phi_\vartheta|^2 \right] d\sigma =$$

$$= \frac{\sqrt{L}}{2}\, r \int_{S(r)} [\langle \Phi_\varrho, E\Phi_\varrho \rangle + 2\varrho^{-1} \langle \Phi_\varrho, F\Phi_\vartheta \rangle + \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, H\Phi_\vartheta \rangle] \, d\sigma.$$

Da qui, ricordando la (12) e osservando che $\frac{d}{dr}\int_{B(r)} \varphi \, dx = \int_{S(r)} \varphi \, d\sigma$, si ottiene $g(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2}\, r\, g'(r)$ ovvero

$$(18) \qquad \frac{d}{dr}\left[ lg\left(r^{-2/\sqrt{L}}\, g(r)\right)\right] \geq 0.$$

La (18) implica che la funzione $lg(r^{-2/\sqrt{L}}g(r))$ è crescente per $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, e quindi anche $r^{-2/\sqrt{L}}g(r)$ risulta crescente; pertanto vale la (6) con $C' = L\cdot(\operatorname{dist}(x_0, \partial U))^{-2/\sqrt{L}}$, e quindi per quanto detto all'inizio della dimostrazione la tesi del teorema è provata.

## 3. Il caso non omogeneo.

TEOREMA 2. *Sia $U$ un aperto limitato di $R^2$ e $(u_1, \dots, u_N)$ in $[H^1_{\mathrm{loc}}(U)]^N$ una soluzione su $U$ del sistema di equazioni*

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{div}(A^{hk}(x)\nabla u_k) = \operatorname{div} f_h \qquad (h = 1, \dots, N) \tag{19}$$

*dove le matrici dei coefficienti $A^{hk}(x)$ verificano le ipotesi (2) e (3) e $(f_1, \dots, f_N)$ è una $N$-pla di funzioni vettoriali appartenenti a $[L^2_{\mathrm{loc}}(U)]^N$ tali che*

$$\sum_{h=1}^{N} \int_{|x-x_0|\leq r} |f_h|^2\, dx \leq C_0^2\, r^{2\mu} \qquad (\mu > 0) \tag{20}$$

*con $C_0$ dipendente solo da $(f_1, \dots, f_N)$, per ogni $x_0$ in $U$ e $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$.*

*Allora per ogni compatto $K$ di $U$ ed ogni $x$, $y$ in $K$, si ha la maggiorazione seguente $(h = 1, \dots, N)$*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha} \left[\sum_{k=1}^{N} \int_U |u_k|^2\, dx + C_0^2\right]^{1/2} \tag{21}$$

*con $C$ costante dipendente solo da $L$, $\operatorname{dist}(K, \partial U)$ ed $\alpha$, per ogni $\alpha < \min(1/\sqrt{L}, \mu)$ ed anche per $\alpha = \min(1/\sqrt{L}, \mu)$ se $\mu \neq 1/\sqrt{L}$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione procede allo stesso modo e con le stesse notazioni di quella del teorema 1: si fissa $x_0$ in $U$, si definisce $g(r)$ con la (5) come in precedenza e si introducono le costanti $(b_1, \dots, b_N)$. Questa volta dalle equazioni (19), moltiplicando per $u_h - b_h$ e integrando su $B(r)$, si ricava in luogo della (7) la seguente espressione di $g(r)$

$$g(r) = \sum_{h,k=1}^{N} \int_{S(r)} (u_h - b_h)\langle A^{hk}\nabla u_k, \underline{n}\rangle\, d\sigma - \sum_{h=1}^{N} \int_{B(r)} (u_h - b_h) \operatorname{div} f_h\, dx =$$

$$= \sum_{h=1}^{N} \int_{S(r)} (u_h - b_h)\langle \sum_{k=1}^{N} A^{hk}\nabla u_k - f_h, \underline{n}\rangle\, d\sigma + \sum_{h=1}^{N} \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h\rangle\, dx.$$

Questa può essere messa a sua volta, ponendo $\Psi = (\langle f_1, \underline{n} \rangle, \dots, \langle f_N, \underline{n} \rangle)$, sotto la forma

$$g(r) = \int_{S(r)} [\langle \Phi, E\,\Phi_\varrho + \varrho^{-1} F \Phi_\vartheta \rangle - \langle \Phi, \Psi \rangle]\, d\sigma + \sum_{h=1}^{N} \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle\, dx$$

ovvero

$$(22)\quad g(r) = \int_{S(r)} \langle \sqrt{E}\,\Phi, \sqrt{E}\,\Phi_\varrho + \varrho^{-1} \sqrt{E^{-1}}\, F\, \Phi_\vartheta - \sqrt{E^{-1}}\, \Psi \rangle\, d\sigma + \sum_{h=1}^{N} \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle\, dx.$$

Allo scopo di maggiorare il secondo membro della (22) cominciamo con l'osservare che in virtù della (20) e della (3) si ha

$$\sum_{h=1}^{N} \left| \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle\, dx \right| \leq C_0\, r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Applicando la diseguaglianza di Schwarz al primo integrale della (22), e ponendo per semplicità

$$\beta = \langle \Psi, E^{-1} \Psi \rangle - 2 \langle \Psi, \Phi_\varrho \rangle - 2 \langle \Psi, \varrho^{-1} E^{-1} F\, \Phi_\vartheta \rangle$$

si ottiene allora

$$g(r) \leq \left| \int_{S(r)} \langle \Phi, E\Phi \rangle\, d\sigma \int_{S(r)} \{ | \sqrt{E}\, \Phi_\varrho + \varrho^{-1} \sqrt{E^{-1}}\, F\, \Phi_\vartheta |^2 + \beta \}\, d\sigma \right]^{1/2} + C_0\, r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Di qui, procedendo esattamente come nella dimostrazione del teorema 1 si giunge alla maggiorazione

$$(23)\qquad g(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2}\, r \left[ g'(r) + \int_{S(r)} \beta\, d\sigma \right] + C_0\, r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Poniamo ora

$$f(r) = g(r) + \int_{B(r)} \beta\, dx$$

e diamo una maggiorazione per l'integrale in cui compare $\beta$.

Dalla (11) si ricava con opportuni calcoli che

$$\| E^{-1} \| \leq 1, \qquad \| F \| \leq L,$$

inoltre si ha

$$\int_{B(r)} |\Psi|^2 dx \leq \sum_{h=1}^{N} \int_{B(r)} |f_h|^2 dx \leq C_0^2 r^{2\mu}$$

$$\int_{B(r)} |\Phi_\varrho|^2 dx \leq g(r), \quad \int_{B(r)} |\Phi_\vartheta|^2 \varrho^{-2} dx \leq g(r).$$

Utilizzando queste stime e la diseguaglianza di Schwarz, si ottiene allora

$$\int_{B(r)} |\beta| dx \leq C_0^2 r^{2\mu} + C_0 (1 + L) r^\mu \sqrt{g(r)}. \tag{24}$$

Dalla (23) e dalla (24) si ottiene in conclusione

$$f(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) + C_0^2 r^{2\mu} + C_1 r^\mu \sqrt{g(r)} \tag{25}$$

dove si è posto $C_1 = C_0 (2 + L)$.

A questo punto osserviamo che $f(r) \geq 0$; infatti

$$f(r) = g(r) + \int_{B(r)} \beta \, dx =$$

$$= \int_{B(r)} [\langle \Phi_\varrho, E \Phi_\varrho \rangle + 2 \langle \Phi_\varrho, F \Phi_\vartheta \rangle \varrho^{-1} + \langle \Phi_\vartheta, H \Phi_\vartheta \rangle \varrho^{-2}] dx + \int_{B(r)} \beta \, dx =$$

$$= \int_{B(r)} |\sqrt{E} \Phi_\varrho + \sqrt{E^{-1}} F \varrho^{-1} \Phi_\vartheta - \sqrt{E^{-1}} \Psi |^2 + \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, (H - F^* E^{-1} F) \Phi_\vartheta \rangle dx$$

da cui per la (16) si ha appunto $f(r) \geq 0$.

Ora notiamo che per quei valori di $r$ per cui si ha $g(r) \leq f(r)$ la (25) porta alla

$$f(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) + C_1 \sqrt{f(r)} r^\mu + C_0^2 r^{2\mu}; \tag{26}$$

quando invece si ha $g(r) \geq f(r)$ risulta per la (24)

$$g(r) - f(r) = \left| \int_{B(r)} \beta \, dx \right| \leq C_1 \sqrt{g(r)} r^\mu + C_0^2 r^{2\mu},$$

da cui, risolvendo rispetto a $\sqrt{g(r)}$, si ricava

$$\sqrt{g(r)} \leq C_2 r^{\mu} + \sqrt{f(r)}.$$

In ogni caso dunque si ottiene dalla (25) la

$$f(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) + C_1 \sqrt{f(r)}\, r^{\mu} + C_3 r^{2\mu} \tag{27}$$

con $C_3 = C_0^2 + C_1 C_2$.

Trattiamo dapprima il caso in cui si ha $\mu > \dfrac{1}{\sqrt{L}}$.

Consideriamo la funzione

$$h(r) = r^{-2/\sqrt{L}} f(r);$$

poiché risulta $h'(r) = \dfrac{2}{\sqrt{L}r} r^{-2/\sqrt{L}} \left(\dfrac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) - f(r)\right)$, la (27) diventa

$$\frac{\sqrt{L}}{2} r \cdot r^{2/\sqrt{L}} h'(r) + C_1 \sqrt{h(r)}\, r^{1/\sqrt{L}+\mu} + C_3 r^{2\mu} \geq 0.$$

Da qui, con un'ulteriore maggiorazione, segue

$$h'(r) \geq - C_4 \max\left[\sqrt{h(r)}\, r^{\mu - 1/\sqrt{L} - 1}, \; r^{2(\mu - 1/\sqrt{L}) - 1}\right], \tag{28}$$

dove $C_4$ è una costante positiva dipendente da $L$ e $C_0$.

Sia $\delta < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$; poiché ogni soluzione della disequazione (28) sull'intervallo $0 < r < \delta$ si può maggiorare con la soluzione dell'equazione corrispondente che ha lo stesso valore nel punto $r = \delta$, allo scopo di maggiorare tali soluzioni sarà sufficiente considerare l'equazione:

$$h'(r) = - C_4 \max\left[\sqrt{h(r)}\, r^{\mu - 1/\sqrt{L} - 1}, \; r^{2(\mu - 1/\sqrt{L}) - 1}\right]. \tag{29}$$

Osserviamo che $h(r)$ è una funzione decrescente ($C_4 \geq 0$) mentre $r^{\mu - 1/\sqrt{L}}$ è crescente, pertanto vi è al più un valore $r_0$ di $r$ per cui è $\sqrt{h(r_0)} = r_0^{\mu - 1/\sqrt{L}}$. Per gli eventuali $r < r_0$ risulta $\sqrt{h(r)} \geq r^{\mu - 1/\sqrt{L}}$, quindi l'equazione diventa

$$h'(r) = - C_4 \sqrt{h(r)}\, r^{\mu - 1/\sqrt{L} - 1}. \tag{30}$$

Le soluzioni di tale equazione sono in questo caso

$$h(r) = \left[\text{cost.} - \frac{C_4}{2}(\mu - 1/\sqrt{L})^{-1}\, r^{\mu - 1/\sqrt{L}}\right]^2.$$

Per $r > r_0$ si ha invece l'equazione

$$h'(r) = -\, C_4\, r^{2(\mu - 1/\sqrt{L}) - 1} \tag{31}$$

che ha soluzione

$$h(r) = \left[\text{cost} - \frac{C_4}{2}(\mu - 1/\sqrt{L})^{-1}\, r^{2(\mu - 1/\sqrt{L})}\right].$$

Poiché $h(\delta) \leq C(\delta, L)\left[C_0^2 + \sum_{h=1}^{N} \int_U u_h^2\, dx\right]$, si ha dunque per le soluzioni della (28)

$$h(r) \leq \overline{C}(\delta, L)\left[C_0^2 + \sum_{h=1}^{N} \int_U u_h^2\, dx\right]. \tag{32}$$

Nel caso in cui si ha $\mu < 1/\sqrt{L}$ la dimostrazione procede allo stesso modo pur di considerare la funzione $h(r) = r^{-2\mu} f(r)$; anche questa volta si arriva alla (32).

Se infine $\mu = 1/\sqrt{L}$ si consideri per ogni $\alpha < \mu$ la funzione $h_\alpha(r) = r^{-2\alpha} f(r)$; questa soddisfa la disequazione

$$h'_\alpha(r) \geq -\, C_5\left(\sqrt{h_\alpha(r)}\, r^{\mu - \alpha - 1} + r^{2\mu - 2\alpha - 1}\right) \quad (C_5 \geq 0)$$

da cui procedendo come sopra si ottiene la stima

$$h_\alpha(r) \leq \overline{C}(\delta, L, \alpha)\left[C_0^2 + \sum_{h=1}^{N} \int_U u_h^2\, dx\right]. \tag{33}$$

Dalla (32), (33) si ottiene in ogni caso la stima

$$f(r) \leq C_* r^{2\alpha} \qquad (0 < r < \delta < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)) \tag{34}$$

dove

$$C_* = \overline{C}_*(\delta, L, \alpha)\left[C_0^2 + \sum_{h=1}^{N} \int_U u_h^2\, dx\right],$$

per ogni $\alpha < \min(1/\sqrt{L}, \mu)$ ed anche per $\alpha = \min(1/\sqrt{L}, \mu)$ purché sia $\mu \neq 1/\sqrt{L}$.

Ricordando la definizione di $f(r)$ e la (24) si ottiene dalla (34) la seguente stima

$$g(r) \leq C_* r^{2\alpha} + C_0^2 r^{2\mu} + C_0 (1 + L) r^{\mu} \sqrt{g(r)},$$

da cui, risolvendo rispetto a $\sqrt{g(r)}$, si ricava

$$2\sqrt{g(r)} \leq C_0 (1 + L) r^{\mu} + [C_0^2 ((1 + L)^2 + 4) r^{2\mu} + 4 C_* r^{2\alpha}]^{1/2}.$$

Di qui, ricordando che $\alpha \leq \mu$, segue che

$$r^{-2\alpha} g(r) \leq C_{**} \left( C_0^2 + \sum_{h=1}^{N} \int_U u_h^2 \, dx \right)$$

da cui, per il lemma di Morrey citato in precedenza, segue la tesi.

## 4. Esempi.

Rimane ora da far vedere che le valutazioni degli esponenti di Hölder date nei teoremi 1 e 2 non possono essere migliorate; sarà sufficiente mostrarlo nel caso di una sola equazione ($N = 1$).

Consideriamo l'operatore

$$E = \sum_{i,j=1}^{2} D_i (a_{ij}(x) D_j)$$

dove

$$a_{11} = (L x_1^2 + x_2^2) |x|^{-2}, \quad a_{12} = a_{21} = (L - 1) x_1 x_2 |x|^{-2}, \quad a_{22} = (x_1^2 + L x_2^2) |x|^{-2},$$

che può essere scritto in coordinate polari

$$E = L \varrho^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \varrho^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} .$$

L'equazione

$$Eu = \frac{L\mu^2 - 1}{\mu - 1} \frac{\partial}{\partial x_1} (|x|^{\mu - 1})$$

ammette la soluzione

$$u = x_1 |x|^{-1} (|x|^{1/\sqrt{L}} + |x|^{\mu}) \equiv (\varrho^{1/\sqrt{L}} + \varrho^{\mu}) \cos \vartheta,$$

che è hölderiana esattamente di esponente $\min(1/\sqrt{L}, \mu)$.

Nel caso in cui $\mu = 1/\sqrt{L}$, infine, costruiamo un altro esempio in cui la soluzione è hölderiana solo per esponenti minori di $1/\sqrt{L}$ (supporremo $L \neq 1$):

$$Eu = \frac{2L}{1 - \sqrt{L}} \frac{\partial}{\partial x_1} ( | x |^{1/\sqrt{L} - 1} )$$

una cui soluzione è

$$u = x_1 | x |^{-1} ( | x |^{1/\sqrt{L}} lg | x | ).$$

## BIBLIOGRAFIA


[1] Campanato, S., *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni,* Ann. Sc. Norm. Pisa, 17, 175-188, (1963).

[2] De Giorgi, E., *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico,* Boll. U. M. I., 1, 135-137, (1968).

[3] Hardy-Littlewood-Polya, *Inequalities,* Cambridge Uni. Press. (1934).

[4] Morrey, C. B., *Multiple Integral Problem in the Calculus of Variations and Related Topics,* Univ. of Calif. Publications (1943).

[5] Morrey, C. B., *Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics,* Ann. Sc. Norm. Pisa, 14, 1-61 (1960).

[6] Piccinini, L. C.-Spagnolo, S., *On the Hölder Continuity of Solutions of Second Order Elliptic Equations in Two Variables,* Ann. Sc. Norm. Pisa, 26, 391-402 (1972).

[7] Stampacchia, G., *The spaces $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ and $N^{p,\lambda}$ and Interpolation,* Ann. Sc. Norm. Pisa, 10, 443-462 (1965).