ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

M. A. KNUS
M. OJANGUREN

Sur le polynôme caractéristique et les automorphismes des algèbres d'Azumaya

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 26, nº 1 (1972), p. 225-231
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_1_225_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE EL LES AUTOMORPHISMES DES ALGEBRES D'AZUMAYA

par M. A. KNUS et M. OJANGUREN

1. Introduction.

Soit R un anneau commutatif avec 1. Sauf mention explicite du contraire, tous les produits tensoriels seront pris sur R. Rappelons qu'on désigne par Pic (R) le groupe des classes d'isomorphie de R-modules projectifs de rang un, le produit étant induit par le produit tensoriel.

Soit A une R-algèbre d'Azumaya, c'est-à-dire une algèbre centrale séparable sur R (Auslander-Goldman [1], Bass [2]). A tout automorphisme α de A correspond une classe $(I_\alpha) \in \operatorname{Pic}(R)$ où I_α est le module projectif de rang un défini par $I_\alpha = \{x \in A \mid ax = x\alpha(a),\ a \in A\}$. Si α est intérieur, I_α est libre. Soit $O(A)$ le groupe des automorphismes de A modulo les automorphismes intérieurs. La suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow O(a) \xrightarrow{\ f\ } \operatorname{Pic}(R) \xrightarrow{\ g\ } J(A) \longrightarrow 0,$$

où $J(A)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie (P) de A modules à gauche telles que $P \cong A \otimes I$, $(I) \in \operatorname{Pic}(R)$, $f(\alpha) = (I_\alpha)$ et $g(I) = (A \otimes I)$, est exacte (Rosenberg et Zelinsky [8]). En particulier, pour tout R-module projectif I de rang un, il existe un automorphisme α de A tel que $(I) = (I_\alpha)$ si et seulement si $A \cong A \otimes I$ comme A-modules à gauche et un automorphisme α est intérieur si et seulement si I_α est libre.

L'exactitude de la suite de Rosenberg et Zelinsky peut être considérée comme une généralisation du théorème de Skolem Noether. En effet, si R

Pervenuto alla Redazione l'11 Gennaio 1971.

est un anneau local ou un corps, $\mathrm{Pic}(R) = (1)$ et tout automorphisme de A est intérieur. Ce dernier résultat est faux en général. On sait toutefois qu'une certaine puissance de α est intérieure (Bass [3] p. 108). Soit r^2 le rang (supposé constant) du R-module A. Dans ce travail, nous montrons que pour tout automorphisme α de A, la r-ième puissance α^r est intérieure. Ceci a été démontré par Rosenberg et Zelinsky pour l'algèbre des endomorphismes d'un module projectif de rang r sur un anneau de Dedekind ou d'un module libre de rang r sur un anneau intègre ([8]). Notre résultat est le meilleur possible ([7]). En effet, soit r un entier plus grand que 1 et soit R un anneau commutatif tel qu'il existe un module projectif I de rang un dont la classe (I) est d'ordre r dans $\mathrm{Pic}(R)$. Le module $P = R \oplus I \oplus \ldots \oplus \overset{r-1}{\bigotimes} I$ est projectif de rang r et $P \otimes I \cong P$. Par conséquent les $\mathrm{End}_R(P)$-modules $\mathrm{End}_R(P)$ et $\mathrm{End}_R(P) \otimes I$ sont isomorphes. L'algèbre $\mathrm{End}_R(P)$ est une algèbre d'Azumaya de rang r^2. D'après la suite exacte de Rosenberg et Zelinsky, elle possède un automorphisme α dont la classe dans $O(A)$ est d'ordre r. Un résultat de Claborn ([9]) montre qu'on peut même prendre pour R un anneau de Dedekind ; en ce cas, on peut prendre $P = rI$ et $\mathrm{End}_R(P)$ est isomorphe à l'algèbre de matrices $M_r(R)$.

La démonstration de notre résultat repose sur l'existence d'une norme réduite, existence mentionnée par Grothendieck ([6]). Dans la première partie de ce travail, nous avons cru utile de donner en détail une construction du polynôme caractéristique pour les algèbres d'Azumaya.

Nous supposerons toujours que les modules projectifs de type fini sur R ont rang constant. Dans le cas général, on pourra décomposer R en un produit d'anneaux sur lesquels le module en question est de rang constant.

2. Le polynôme caractéristique.

2.1. *Définition du déterminant.*

Soit R un anneau commutatif et soit P un R-module projectif de rang r. Le déterminant est l'application

$$\det_R : \mathrm{End}_R(P) \longrightarrow R$$

définie par $f \longmapsto \Lambda^r(f)$ où $f \in \mathrm{End}_R(P)$ et Λ^r est la r-ième puissance extérieure.

Il est évident que le déterminant commute avec l'extension des scalaires.

Proposition 1. Soit P un R-module projectif de rang r. Pour toute R-algèbre commutative S et tout élément $f \in \mathrm{End}_R(P)$, l'isomorphisme canonique $\mathrm{End}_S(P \otimes S) \cong \mathrm{End}_R(P) \otimes S$ induit l'égalité $\det_S(f \otimes 1_S) = \det_R(f) \otimes 1_S$. En particulier, le déterminant commute avec la localisation.

PROPOSITION 2. Soient P et Q deux R-modules projectifs de rang r et soit $\alpha : \mathrm{End}_R(P) \to \mathrm{End}_R(Q)$ un isomorphisme de R-algèbres. Pour tout $f \in \mathrm{End}_R(P)$, on a $\det_R(f) = \det_R(\alpha f)$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1, on peut supposer que R est un anneau local. Les deux algèbres d'endomorphismes s'identifient à l'anneau de matrices $M_r(R)$ et α à un automorphisme de cet anneau. Puisque R est local, α est intérieur (voir l'introduction). La proposition est alors évidente, puisque le déterminant est multiplicatif.

Soit A une R-algèbre. Nous appelerons *algèbre neutralisante pour A*, un triple (S, P, σ) où S est une R-algèbre commutative fidèlement plate, P un S-module projectif de rang fini et σ un isomorphisme de S-algèbres $\sigma : A \otimes S \cong \mathrm{End}_S(P)$.

Supposons que l'algèbre A possède une algèbre neutralisante (S, P, σ). Pour tout $a \in A$, l'élément $\det_S(a) = \det_S(\sigma(a \otimes 1_S))$ de S est appelé déterminant de a.

PROPOSITION 3. Pour tout $a \in A$, $\det_S(a)$ appartient à R et est indépendant du choix de l'algèbre neutralisante (S, P, σ).

DÉMONSTRATION. Soit (T, Q, τ) une autre algèbre neutralisante pour A. Les isomorphismes σ et τ induisent des isomorphismes de $S \otimes T$-algèbres $A \otimes S \otimes T \cong \mathrm{End}_{S \otimes T}(P \otimes T)$ et $S \otimes A \otimes T \cong \mathrm{End}_{S \otimes T}(S \otimes Q)$. A l'aide de l'isomorphisme canonique $A \otimes S \otimes T \cong S \otimes A \otimes T$, on construit un isomorphisme de $S \otimes T$-algèbres $\mathrm{End}_{S \otimes P}(P \otimes T) = \mathrm{End}_{S \otimes T}(S \otimes Q)$. Il suit alors des propositions 1 et 2 que $\det_S(a) \otimes 1_T = 1_S \otimes \det_T(a)$. Pour voir que $\det_S(a)$ appartient à R, il suffit d'avoir $T = S$ dans cette égalité et d'appliquer le lemme suivant:

LEMME DE DESCENTE FIDÈLEMENT PLATE ([4], [5]). Si S est une R-algèbre commutative fidèlement plate, la suite de R-modules

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varepsilon} S \xrightarrow{d} S \otimes S$$

où ε est l'unité et $d(x) = x \otimes 1 - 1 \otimes x$, est exacte.

Démonstration du lemme. S est fidèlement plate ; il suffit donc de démontrer que la suite

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} S \otimes S \xrightarrow{d \otimes 1} S \otimes S \otimes S$$

obtenue par tensorisation est exacte. Soit $s : S \otimes S \otimes S \longrightarrow S \otimes S$ l'application définie par $s(a \otimes b \otimes c) = a \otimes bc$. Soit $\Sigma a_i \otimes b_i$ un élément du noyau de $d \otimes 1$. On a donc $\Sigma a_i \otimes 1 \otimes b_i = \Sigma 1 \otimes a_i \otimes b_i$. On en déduit que $\Sigma a_i \otimes b_i = s(\Sigma a_i \otimes 1 \otimes b_i) = s(\Sigma 1 \otimes a_i \otimes b_i) = \Sigma 1 \otimes a_i b_i = \varepsilon \otimes 1 (\Sigma a_i b_i)$. L'injectivité de ε se démontre de façon analogue.

L'égalité $\det_S(a) = \det_T(a)$ suit finalement de l'injectivité de l'unité $\varepsilon : R \longrightarrow S$. En effet, on a $1_S \otimes \det_S(a) = 1_S \otimes \det_T(a)$ puisque $\det_S(a) \in R$.

On notera dorénavant $\det_R(a)$ ou $\det(a)$ le déterminant de a.

2.2. *Le polynôme caractéristique.*

Soit A une R-algèbre et soit (S, P, σ) une algèbre neutralisante pour A. Soit $R[t]$ l'anneau de polynômes en une variable t sur R. Pour tout $a \in A$, l'élément $p(a, t) = \det_{R[t]}(a - t1)$ appartient à $R[t]$ et est indépendant de l'algèbre neutralisante choisie, d'après la proposition 3. On appelle $p(a, t)$ le *polynôme caractéristique* de a. Le coefficient du terme de deuxième plus haut degré est la *trace réduite* $Tr(a)$ de a et le terme constant la *norme réduite* $n(a)$ de a. La norme réduite est simplement le déterminant de a.

Théorème 1 (Cayley-Hamilton). Tout élément a de A annule son polynôme caractéristique.

Démonstration. Puisque l'application composée $A \longrightarrow A \otimes S \xrightarrow{\sigma}$ $\longrightarrow \operatorname{End}_S(P)$ est injective il suffit de démontrer l'assertion pour tout élément de $\operatorname{End}_S(P)$. Par localisation, on se ramène au cas bien connu d'une algèbre de matrices.

3. Construction du polynôme caractéristique d'une algèbre d'Azumaya.

3.1. *Cas noethérien.*

Soit A une algèbre d'Azumaya sur un anneau noethérien R. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, il existe une $R_{\mathfrak{p}}$-algèbre neutralisante $(S(\mathfrak{p}), P(\mathfrak{p}), \sigma(\mathfrak{p}))$ pour $A_{\mathfrak{p}}$. Il est même possible de choisir une algèbre $S(\mathfrak{p})$ qui est un $R_{\mathfrak{p}}$-module libre de type fini (Auslander Goldman, [1], p. 384). L'isomorphisme $\sigma(\mathfrak{p}): A_{\mathfrak{p}} \otimes S(\mathfrak{p}) \cong \mathrm{End}_{S(\mathfrak{p})}(P(\mathfrak{p})$ peut être étendu à un voisinage ouvert $u_f = \mathrm{Spec}\,(R_f)$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}\,(R)$. (Voir Bourbaki [3] pour la topologie de $\mathrm{Spec}\,(R)$). En effet, puisque l'algèbre $S(\mathfrak{p})$ est un $R_{\mathfrak{p}}$-module libre de type fini, elle peut être étendue au moyen d'une table de multiplication définie à l'aide d'une base, dans un voisinage u_f de $\mathfrak{p}$. Soit $S(f)$ la R_f-algèbre ainsi définie. Le $S(\mathfrak{p})$-module $P(\mathfrak{p})$ est le conoyau d'un endomorphisme idempotent Φ d'un certain $S(\mathfrak{p})$-module libre de type fini. On peut donc étendre Φ à un voisinage $u_g \subset u_f$ de $\mathfrak{p}$. De cette façon on obtient une extension $P(g)$ de $P(\mathfrak{p})$. Par un procédé analogue, l'isomorphisme $\sigma(\mathfrak{p})$ s'étend à un isomorphisme $\sigma(h): A_h \otimes S(h) \cong \mathrm{End}_{S(h)}(P(h))$ défini dans un voisinage $u_h \subset u_g$ de $\mathfrak{p}$. Pour tout point $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}\,(R)$, il existe ainsi un voisinage ouvert u_h dans lequel A possède une algèbre neutralisante $(S(h), P(h), \sigma(h))$. Puisque $\mathrm{Spec}\,(R)$ est quasi-compact ([3] p. 128), il existe un recouvrement fini $(u_{h_1}, \ldots, u_{h_k})$ par de tels voisinages. Soit $P_i = P_i(a, t)$ le polynôme caractéristique de $a \in A$ défini dans R_{h_i} à l'aide de $(S(h_i), \sigma(h_i))$. Il suit des propositions 1 et 2 que l'image canonique de P_i dans $R_{h_i h_j}$ coïncide avec l'image canonique de P_j. Il existe donc $Q_i \in R[t]$ et $m, n \in N$ tels que $P_i = \dfrac{Q_i}{h_i^n}$ dans $R_{h_i}[t]$ et $(h_i h_j)^m h_j^n Q_i = (h_i h_j)^m h_i^n Q_j$, pour $i, j = 1, \ldots k$. Puisque les éléments h_i, $i = 1, \ldots k$ engendrent l'idéal (1), il existe des éléments $\lambda_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$ tels que $\sum_{i=1} \lambda_i h_i^{m+n} = 1$. On vérifie que le polynôme $p(a, t)$ défini par $p(a, t) = \sum_{i=1} \lambda_i h_i^{m+n} Q_i$ est tel que $\dfrac{p}{1} = P_i$ pour $i = 1, \ldots k$. C'est le polynôme cherché.

3.2. *Cas général.*

Soit A une R-algèbre d'Azumaya. Le module A est projectif de type fini. On peut donc le représenter comme conoyau d'un endomorphisme idempotent Φ d'un module libre R^m. Soit (f_{ij}) la matrice de Φ par rapport à la base canonique de R^m et soit R_0 l'anneau engendré par les éléments f_{ij} de R. L'application Φ induit par restriction un R_0-endomorphisme idempotent $\Phi_0: R_0^m \to R_0^m$. Le conoyau de Φ_0 est un R_0-module projectif de type fini A_0 contenu dans A et tel que $A_0 \otimes_{R_0} R = A$. Soit $(e_1, \ldots e_r)$ un système de générateurs du R-module A contenus dans A_0. On a $e_i \cdot e_j = \sum c_{ijk} e_k$ dans A pour des éléments c_{ijk} de R. Si $R_0' = R_0[c_{ijk}]$, $A_0' = A_0 \otimes_{R_0} R_0'$ est une R_0'-algèbre $\subset A$. Soit A^0 l'algèbre opposée de A. Puisque A est une algèbre d'Azumaya, l'homomorphisme $\alpha: A \otimes A^0 \to \mathrm{End}_R(A)$ défini par $a \otimes b^0 \to$ $\to (x \to a\,x\,b)$ est un isomorphisme. Soient $f_1, \ldots f_q$ des éléments de $A \otimes A_0$ dont les images par α engendrent $\mathrm{End}_{R_0'}(A_0')$. On peut écrire $f_i = \sum d_{ijk}\, e_j \otimes e_k^0$,

$i = 1, \dots, q$. Soit $R_0^* = R_0[d_{ijk}]$. L'algèbre $A_0^* \otimes_{R_0'} R_0^*$ est une algèbre d'Azumaya sur R_0^*, car, par construction, l'application restreinte à $A_0^* \otimes (A_0^*)^0$ est un isomorphisme et le R_0^*-module A_0^* est fidèlement projectif. Soit $a = \Sigma a_i e_i$ un élément de A. Posons $R^* = R_0^*[a_i]$ et $A^* = A_0^* \otimes_{R_0^*} R^*$. L'élément a appartient à A^*. qui est une algèbre d'Azumaya sur l'anneau noethérien R^*. D'après 3.1, on peut donc définir le polynôme caractéristique $p^*(a, t)$ de a dans A^*. L'image de $p^*(a, t) \in R^*[t]$ dans $R[t]$ définira le polynôme caractéristique $p(a, t)$ de a si nous montrons que la construction de $p(a, t)$ est indépendante du choix de l'anneau noethérien $R^* \subset R$ et de la R^*-algèbre d'Azumaya $A^* \subset A$ telle que $A^* \otimes_{R^*} R = A$.

Lemme. Le polynôme caractéristique $p(a, t)$ de a est indépendant du couple (R^*, A^*) choisi.

Démonstration. Soit (R^{**}, A^{**}) un couple ayant les mêmes propriétés que (R^*, A^*). Il existe un anneau noethérien T contenant R^* et R^{**} tel que $A^* \otimes_{R^*} T = A^{**} \otimes_{R^{**}} T = \bar{A}$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de T, soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap R^*$ et soit S une algèbre neutralisante pour $A_{\mathfrak{q}}^*$. L'algèbre $S \otimes T_{\mathfrak{p}}$ est une algèbre neutralisante pour $\bar{A}_{\mathfrak{p}}$. D'après la proposition 3, le polynôme caractéristique dans A^* coïncide avec le polynôme caractéristique dans A ; c'est aussi vrai pour A^{**}.

Le polynôme unitaire ainsi construit est appelé *polynôme caractéristique* de a. Le coefficient du terme de deuxième plus haut degré est la *trace réduite* $Tr(a)$ de a et le terme constant est la *norme réduite* $n(a)$ de a.

Par construction, le polynôme caractéristique commute avec la localisation. Le résultat suivant est donc une conséquence du théorème 1.

Théorème 2. Tout élément d'une algèbre d'Azumaya vérifie son polynôme caractéristique.

Remarque. Soit r^2 le rang du R-module A. Si $a \in A$ appartient à R, alors la norme réduite $n(a)$ de a est égale à a^r.

4. Un théorème sur les automorphismes des algèbres d'Azumaya.

Théorème 3. Soit A une R-algèbre d'Azumaya et soit r^2 le rang du R-module A. Pour tout automorphisme α de A, α^r est intérieur.

Démonstration. Utilisant les constructions décrites dans 3.2., on se ramène au cas d'un anneau R noethérien. Soit (I_α) l'image de l'automorphisme α dans Pic (R) (voir l'introduction). Puisque R est noethérien, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de R tel que $(\mathfrak{a}) = (I_a)$ dans Pic (R) ([3] p. 151). Il faut donc démontrer que l'idéal $\mathfrak{a}^r$ est principal. Identifions $A \otimes \mathfrak{a}$ avec $A\mathfrak{a} \subset A$. Puisqu'il existe un isomorphisme de A-modules à gauche $f: A \cong A\,\mathfrak{a}$, on peut écrire $Af(1) = A\mathfrak{a}$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ est libre ; soit $x(\mathfrak{p}) \in R_\mathfrak{p}$ un générateur de $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. Il suit de l'égalité $A_\mathfrak{p} f(1) = A_\mathfrak{p}\, x(\mathfrak{p})$ que $R_\mathfrak{p}\, n(f(1)) = R_\mathfrak{p}\, n(x(\mathfrak{p})) = R_\mathfrak{p}\, x(\mathfrak{p})^r = (\mathfrak{a}^r)_\mathfrak{p}$. Puisque la norme commute avec la localisation, il faut que $\mathfrak{a}^r = Rn(f(1))$.

Forschungsinstitut für Mathematik,
ETH, Zürich

RÉFÉRENCES

[1] M. Auslander et O. Goldman, *The Brauer Group of a Commutative Ring.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 97 (1960), 367-409.

[2] H. Bass, *Lectures on Topics in Algebraic K-Theory.* Tata Notes No. 41, Bombay, 1967.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative,* Chap. 1-2, Paris, Hermann, 1961.

[4] S. U. Chase et A. Rosenberg, *Amitsur Cohomology and the Brauer Group.* Memoirs of the Am. Math. Soc. No. 52, Providence, 1965.

[5] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I: Généralités,* Descente par morphismes fidèlement plats. Séminaire Bourbaki Exposé 190 (1959-60).

[6] A. Grothendieck, *Le Groupe de Brauer I.* Séminaire Bourbaki Exposé 290 (1965).

[7] M. A. Knus, *Algèbres d'Azumaya et modules projectifs,* Comm. Math. Helv. 45 (1970), 372-383.

[8] A. Rosenberg et D. Zelinsky, *Automorphisms of Separable Algebras,* Pac. Math. J. vol. 11 (1961), 1107-1117,

[9] L. Claborn, *Specified Relations in the Ideal Group,* Mich. Math. J. 15 (1968) 249-255.