ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANNA MARIA MICHELETTI

Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 26, nº 1 (1972), p. 151-169

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_1_151_0>

PERTURBAZIONE DELLO SPETTRO DELL'OPERATORE DI LAPLACE, IN RELAZIONE AD UNA VARIAZIONE DEL CAMPO

ANNA MARIA MICHELETTI

Lo spettro dell'operatore di Laplace relativo ad un aperto limitato Ω con dati di Dirichlet nulli può presentare, come è noto, autovalori multipli. È spontaneo fare la congettura che applicando ad Ω una deformazione arbitrariamente piccola si possa ottenere un nuovo aperto a cui corrisponde uno spettro con autovalori tutti semplici.

In questo lavoro si dà una risposta affermativa a questa congettura. Malgrado la sua naturalezza, non mi risulta che questo problema sia stato precedentemente trattato, eccetto alcune osservazioni, relative a particolari aperti, di LIN'CZUN·CI [1].

Nei paragrafi 1 e 2 richiamo alcuni classici risultati: in particolare un teorema di Courant [2] sulla continuità dell'n^{simo} autovalore, considerato come funzione dell'aperto e un teorema di Rellich e Nagy [3] sulla variazione dello spettro rispetto alla perturbazione analitica di una trasformazione autoaggiunta.

Il paragrafo 3 riguarda l'impostazione del problema.

La perturbazione del campo conduce a serie difficoltà, perché porta ad un mutamento degli spazi in cui si opera; è perciò opportuno introdurre una trasformazione che permetta di tenere fisso il campo perturbando invece l'operatore.

Nei successivi paragrafi indico come si può spezzare un autovalore multiplo e poi l'intera successione degli autovalori multipli.

Pervenuto alla Redazione l'11 Gennaio 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito del contratto di ricerca n. 115305905177 del C. N R. Comitato per la matematica.

§ 1. Nozioni preliminari relative all'operatore $-\Delta$.

In questo primo paragrafo fissiamo alcune notazioni e richiamiamo alcuni classici risultati riguardanti l'operatore di Laplace, di cui faremo uso in seguito.

Sia Ω un aperto limitato connesso di $\mathbb{R}^m$; indichiamo con $L_2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali a quadrato sommabile definito in Ω. Poniamo

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \qquad |u|^2 = \int_\Omega (u(x))^2\, dx.$$

Date due funzioni u e v, con derivate prime generalizzate a quadrato sommabile in Ω, poniamo

$$((u, v)) = \int_\Omega \Sigma_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \qquad \|u\|^2 = \int_\Omega \Sigma_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\,.$$

Indichiamo poi con $H_0^1(\Omega)$ la chiusura rispetto alla norma $\|\ \|$, del sottoinsieme di $L_2(\Omega)$ delle funzioni con derivate prime continue e a supporto compatto contenuto in Ω. Inoltre indichiamo con $H_0^k(\Omega)$ (k intero ≥ 1) il sottoinsieme di $H_0^1(\Omega)$ costituito dalle funzioni aventi derivate generalizzate fino all'ordine k, a quadrato sammabile, con la norma abituale.

L'operatore di Laplace, $-\Delta$ di Ω, con condizioni di annullamento alla frontiera si può introdurre, come è noto, con la seguente relazione

$$(-\Delta u, \varphi) = ((u, \varphi)) \qquad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Risulta che $-\Delta$ è autoaggiunto, con inverso compatto; il suo spettro è reale, positivo e ha $+\infty$ come unico punto di accumulazione.

Se Ω è un campo di classe $C^{1+\alpha}$, il dominio di definizione di $-\Delta$ coincide con $H_0^2(\Omega)$ in base al classico Teorema di Lichtenstein e Friedrichs.

Nel seguito dovremo introdurre diversi aperti di $\mathbb{R}^m$; pertanto è opportuno usare il simbolo di $-\Delta_\Omega$ per indicare l'operatore di Laplace sopra definito, relativo all'aperto Ω.

Per gli autovettori di $-\Delta_\Omega$ vale il seguente

TEOREMA: Supponiamo che l'aperto limitato Ω connesso sia di classe C^2. Sia λ un autovalore di $-\Delta_\Omega$ e φ un suo autovettore.

Consideriamo sulla frontiera $\partial\Omega$, la funzione $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ data dalla derivata di φ nella direzione della normale esterna ν di $\partial\Omega$. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ è continua su $\partial\Omega$ e non si può annullare su alcun sottoinsieme aperto della frontiera $\partial\Omega$.

L'affermazione riguardante la continuità di $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ è ben nota; dimostriamo l'altra affermazione.

Supponiamo, per assurdo, che la derivata $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ si annulli in tutto un insieme $U \cap \partial\Omega$, essendo U un intorno aperto di un punto $x_0 \in \partial\Omega$. Allora, la funzione che si ottiene prolungando φ con valori nulli fuori di Ω è, in virtù dell'ipotesi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$, una soluzione generalizzata dell'equazione $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$. Il classico teorema di Holmgren (cfr. [4] v. Teorema 5.3.1, pag. 125) assicura allora che φ è nulla in un intorno U' di x_0.

D'altra parte, essendo φ analitica, come è ben noto, essa risulta nulla sull'aperto connesso Ω.

Nel seguito considereremo spesso applicazioni di $\mathbb{R}^m$ in sè. Per semplicità di notazione, data un'applicazione di $\mathbb{R}^m$ in sè, conviene considerare la sua derivata prima, seconda e terza, rispettivamente come un'applicazione lineare, bilineare e trilineare definita in ciascun punto e introdurre per queste le norme consuete. Indichiamo con $C^3(\mathbb{R}^m)$ lo spazio delle applicazioni di $\mathbb{R}^m$ in sè con derivate prime, seconde, e terze in ogni punto e assumiamo come norma in $C^3(\mathbb{R}^m)$ l'espressione

$$\|f\|_{C^3} = \sup_x \max\left[\,|f(x)|,\ \|f'(x)|,\ |f''(x)|,\ |f'''(x)|\,\right].$$

Infine, dato un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^m$ di classe C^k con $k = 1, 2, 3$ indichiamo con la locuzione, « ε intorno di classe C^k di Ω » l'insieme degli Ω' trasformati di Ω mediante applicazioni del tipo $I + \psi$ di $C^k(\mathbb{R}^m)$ con $\|\psi\|_{C^k} \leq \varepsilon$. In questo modo abbiamo introdotto una topologia nell'insieme degli aperti limitati di $\mathbb{R}^m$ di classe C^k.

Indichiamo gli autovalori dell'operatore $-\Delta_\Omega$ mediante la successione non decrescente $\{\lambda_n\}_{n \in N}$, in cui ogni autovalore è ripetuto tante volte quanto la sua molteplicità. A questo punto è chiaro il significato del seguente teorema di Courant [2].

TEOREMA (1). L'n^{simo} autovalore di $-\Delta_\Omega$ è funzione continua del dominio Ω nella topologia di classe C^k $(k \geq 1)$.

---

(1) v. [2], pag. 423.

§ 2. Richiami sulla teoria delle perturbazioni analitiche.

Ricordiamo ora un Teorema dovuto a Rellich e Nagy

TEOREMA (A): Sia $\mathcal{T}_0 + \mu \mathcal{T}_1 + \mu^2 \mathcal{T}_2 + \ldots$ una serie dove i coefficienti $\mathcal{T}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sono applicazioni autoagginnte di uno spazio di Hilbert H aventi lo stesso dominio $\mathcal{D}$ della applicazione « non perturbata » autoaggiunta $\mathcal{T}_0$.

Inoltre snpponiamo che esistano i numeri reali positivi M e r tali che

$$\| \mathcal{T}_k f \|_H \leq \frac{M}{r^{k-1}} (\| f \|_H + \| \mathcal{T}_0 f \|_H)$$

per ogni f di $\mathcal{D}$ e per $k = 1, 2, \ldots$

La serie data converge, per $|\mu| < r_2$ alla somma $\mathcal{T} \mu$.

Sia λ_0 un punto isolato dello spettro $\sigma(\mathcal{T}_0)$ di $\mathcal{T}_0$ e λ_0 sia un autovalore di molteplicità m. U sia un intervallo aperto limitato tale che $\bar{U} \cap \sigma(\mathcal{T}_0) = \{\lambda_0\}$.

Allora esistono, per $|\mu|$ opportunamente piccolo, m valori reali (che possono essere non tutti distinti tra loro)

$$(\lambda_i(\mu) = \lambda_0 + \lambda_i^{(1)}(\mu) + \lambda_i^{(2)} \mu^2 + \ldots$$

e m elementi di H

$$x_i(\mu) = x_i^{(0)} + x_i^{(1)} \mu + x_i^{(2)} \mu^2 + \ldots$$

tali che $\sigma(\mathcal{T}(\mu)) \cap U$ è dato da un numero finito di autovalori, i valori distinti dei $\lambda_i(\mu)$, la molteplicità di ognuno dei quali è indicata dal numero dei valori coincidenti e gli $x_i(\mu)$ per $i = 1, \ldots, m$ costituiscono un sistema ortonormale dello spazio degli autovettori corrispondenti a questi autovalori.

Le seguenti due proposizioni sono contenute nella dimostrazione del Teorema di Rellich e Nagy; tuttavia per i nostri scopi è opportuno metterle in evidenza.

PROPOSIZIONE 1. Sia $\mathcal{T}_\mu$ un'applicazione che soddisfa le ipotesi del Teorema A, sia $\lambda \notin \sigma(\mathcal{T}_0)$ un numero reale e sia $I = [\lambda - d, \lambda + d]$ un intorno di λ tale che $\sigma(\mathcal{T}_0) \cap I = \emptyset$.

Allora per μ abbastanza piccolo, esiste una funzione $d(\mu)$ che tende a d per $\mu \to 0$, tale che l'intervallo $]\lambda - d(\mu), \lambda + d(\mu)[$ non contiene punti dello spettro di $\mathcal{T}(\mu)$.

PROPOSIZIONE 2. Se valgono le ipotesi del Teorema (A) e se le soluzioni dell'equazione secolare (2)

$$\det \{ \lambda \, \delta_{jh} - (\mathcal{T}_1 (x_j), x_h)_H \} = 0, \quad \text{dove} \quad \{x_h\}_{h=1, \dots, m}$$

è una base ortonormale dell'autospazio di λ_0, non sono tutte uguali, allora gli autovalori $\lambda_j(\mu)$ di $\mathcal{T}(\mu)$, la cui esistenza è garantita dalla tesi del Teorema (A), non sono tutti uguali per $\mu \neq 0$ e abbastanza piccolo. Se in particolare le soluzioni della nostra equazione secolare sono tutte semplici, allora gli autovalori $\lambda_j(\mu)$ di $\mathcal{T}(\mu)$ sono tutti semplici per $\mu \neq 0$ e abbastanza piccolo.

Inoltre conviene fare la seguente osservazione, che, è una ovvia conseguenza del Teorema di Rellich e Nagy:

Sia $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ un insieme finito di punti isolati dello spettro $\sigma(\mathcal{T}_0)$ di $\mathcal{T}_0$ dove i λ_i sono autovalori semplici per $i = 1, \dots, r$. Siano gli U_i intervalli aperti limitati, con chiusura disgiunta tali che $\overline{U}_i \cap \sigma(\mathcal{T}_0) = \{\lambda_i\}$.

Allora esiste $\delta > 0$ tale che per $|\mu| < \delta$, $U_i \cap \sigma(\mathcal{T}(\mu)) = \{\lambda_i(\mu)\}$, dove l'autovalore $\lambda_i(\mu)$ è semplice.

§ 3. Impostazione del problema.

Premettiamo alcuni lemmi:

LEMMA 1. Sia F un'applicazione di classe C^k con $k \geq 1$ di $\mathbb{R}^m$ in sè tale che

i) $F = I + \psi$

ii) esiste $L < 1$ tale che, per ogni ξ di $\mathbb{R}^m$, $\| \psi'(\xi) \| \leq L$.

Allora l'applicazione F è invertibile ed F^{-1}, che è ancora di classe C^k potrà essere rappresentata con $I + \chi$.

Questo enunciato si dimostra facilmente col metodo delle contrazioni

LEMMA 2. Sia Ω un aperto limitato di classe C^k con $k \geq 1$ di $\mathbb{R}^m$ e sia F un'applicazione di classe C^k che soddisfa le condizioni del lemma 1. Allora

i) l'insieme aperto $\Omega_1 = F(\Omega)$ è di classe C^k

ii) L'applicazione $u \to \gamma(u) = \widehat{u}$ di $L_2(\Omega_1)$ in $L_2(\Omega)$, così definita

$$\widehat{u}(\xi) = \sqrt{J(\xi)}\, u(F(\xi))$$

(2) Notiamo che l'equazione secolare non dipende dalla scelta della base ortonormale.

dove J è lo jacobano di F([3]), è un isomorfismo che conserva il prodotto scalare. Inoltre γ subordina un isomorfismo topologico di $H_0^l(\Omega_1)$ su $H_0^l(\Omega)$ per $l = 1, 2, \dots, k-1$.

La dimostrazione dell'affermazione i) è un'ovvia conseguenza del Teorema di composizione delle applicazioni differenziabili. Il fatto che γ conservi il prodotto scalare segue subito dalla relazione

$$\int_{\Omega_1} u(x)\, v(x)\, dx = \int_{\Omega} u(F(\xi))\, v(F(\xi))\, J(\xi)\, d\xi = \int_{\Omega} u(F(\xi)) \sqrt{J(\xi)}\, v(F(\xi)) \sqrt{J(\xi)}\, d\xi.$$

Poichè F è di classe C^k e $\sqrt{J}$ di classe C^{k-1}, dalla validità delle regole di derivazione anche per la derivazione in senso generalizzato, seguono facilmente le altre affermazioni.

LEMMA 3. Siano X e Y due spazi di Hilbert e G sia un operatore autoaggiunto in X, con dominio di definizione $\mathcal{D}$. Allora, se Γ è un isomorfismo di X in Y che conserva il prodotto scalare, la relazione

(i) $G_1 \Gamma = \Gamma G$

definisce in modo unico un operatore G_1 di Y in sè avente come dominio di definizione $\mathcal{D}_1 = \Gamma(\mathcal{D})$; G_1 è autoaggiunto e i due operatori G e G_1 sono « spettralmente equivalenti » nel senso che G e G_1, hanno lo stesso spettro e proiettori spettrali che si corrispondono secondo la legge (i), in particolare hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità.

La prima parte dell'enunciato segue subito dalla relazione (i). Il fatto che G_1 è autoaggiunto si ottiene direttamente dalla definizione di operatore autoaggiunto, tenendo presente le proprietà di Γ. Il resto si verifica facilmente.

Applicando il lemma 3, l'operatore $-\Delta_{\Omega_1}$ di $L_2(\Omega_1)$ in sè, mediante la trasformazione γ di $L_2(\Omega_1)$ in $L_2(\Omega)$, introdotta tel lemma 2, viene mutato in un operatore autoaggiunto T di $L_2(\Omega)$ in sè, avente come dominio di definizione il trasformato, mediante γ, del dominio di definizione di $-\Delta_\Omega$.

Prendiamo di classe C^3 sia l'aperto Ω che l'applicazione $F = I + \psi$ e quest'ultima sempre soddisfacente le ipotesi del lemma 1. Allora il dominio di definizione di $-\Delta_{\Omega_1}$, essendo $\Omega_1 = F\Omega$ di classe C^3, coincide con $H_0^2(\Omega_1)$. D'altra parte, per il lemma 3 $\gamma(H_0^2(\Omega_1)) = H_0^2(\Omega)$, pertanto il dominio di definizione di T coincide con $H_0^2(\Omega)$.

Procediamo ora al calcolo esplicito dell'operatore T.

Conviene osservare che, per le ipotesi su γ e per la definizione di T, vale la relazione

---

([3]) Si noti che nelle nostre ipotesi lo Jacobiano è positivo

(1) $$((u, v))_{\Omega_1} = (-\Delta_{\Omega_1}(u), v)_{\Omega_1} = (\gamma\,(-\Delta_{\Omega_1})\,u, \gamma\, v)_\Omega =$$

$$= (T\gamma\, u, \gamma\, v)_\Omega = (T\widehat{u}, \widehat{v})_\Omega .$$

D'altra parte, la forma bilineare $((\ ,\ ))_{\Omega_1}$, che esprime il prodotto scalare usuale in $H_0^1(\Omega_1)$, mediante l'applicazione γ, si muta in una forma bilineare su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ che indicheremo con $\mathcal{E}$.

Posto $\widetilde{u} = u \circ F$ e $\widehat{u} = \sqrt{J}\; u \circ F$ si ha

$$((u, v))_{\Omega_1} = \int_{\Omega_1} \Sigma_k \frac{\partial}{\partial x_k} u \frac{\partial}{\partial x_k} v\, dx =$$

$$= \int_\Omega \Sigma_k\, \Sigma_e \frac{\partial\, \widetilde{u}}{\partial\, \xi_e} \left(\delta_{ek} + \frac{\partial\, \chi_e}{\partial\, x_k}\right) \Sigma_s \frac{\partial\, \widetilde{v}}{\partial\, \xi_s} \left(\delta_{sk} + \frac{\partial \chi_s}{\partial\, x_k}\right) J\, d\xi =$$

$$= \int_\Omega \Sigma_k\, \Sigma_{e,s} \left(\sqrt{J}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi_e} \frac{\widehat{u}}{\sqrt{J}}\right) \left(\delta_{ek} + \frac{\partial \chi_e}{\partial x_k}\right) \left(\sqrt{J}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi_s} \frac{\widehat{v}}{\sqrt{J}}\right) \left(\delta_{ks} + \frac{\partial \chi_s}{\partial x_k}\right) .$$

Poniamo :

$$S_{es} = \Sigma_k \left(\delta_{ke} + \frac{\partial\, \chi_e}{\partial\, x_k}\right) \left(\delta_{sk} + \frac{\partial\, \chi_s}{\partial\, x_k}\right) .$$

Allora si ha

(2) $$((u, v)(_{\Omega_1} =$$

$$= \mathcal{E}\,(\widehat{u}, \widehat{v}) = \int_\Omega \Sigma_{e,s}\, S_{e,s} \left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial\, \xi_e} - \frac{\widehat{u}}{2} \frac{\partial}{\partial\, \xi_e} \log\, J\right) \left(\frac{\partial\, \widehat{v}}{\partial \xi_s} - \frac{\widehat{v}}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_s} \log J\right) d\xi.$$

Poniamo

(3) $$K_s = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_s} \log J$$

(4) $$\widehat{D}_s = \frac{\partial}{\partial \xi_s} + K_s$$

l'aggiunto formale di questo operatore è

(5) $$\check{D}_s = -\frac{\partial}{\partial \xi_s} + K_s .$$

Allora si ha, da (1), (2), (3), (4), (5)

$$\widehat{T\,u} = \Sigma_{e,s}\, \check{D}_s\, (S_{es}\, \widehat{D_e}\, \widehat{u}). \tag{6}$$

Per poter applicare il Teorema di Rellich e Nagy sulla perturbazione analitica è necessario introdurre un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$ in sé dipendente da un parametro ε. Sostituiamo dunque nei lemmi precedenti $\varepsilon\psi$ in luogo di ψ, essendo sempre ψ un'applicazione di classe C^3 nulla fuori di un compatto [4].

Il lemma 1 si applicherà per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon} = \dfrac{1}{\sup\limits_{\xi} \| \psi'(\xi) \|}$ e l'applicazione inversa dell'applicazione $F = I + \varepsilon\psi$ sarà del tipo $I + \varepsilon\chi$.

Indicheremo con $T(\varepsilon)$ l'operatore, definito come nel lemma 3, in corrispondenza dell'operatore $-\Delta_{\Omega_1}$ di $L_2(\Omega_1)$ in sé e dell'operatore γ introdotto nel lemma 2 dove $F = I + \varepsilon\psi$.

Anzitutto è chiaro che per ogni valore di ε con $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$, il dominio di definizione di $T(\varepsilon)$ è sempre $H_0^2(\Omega)$ e $T(\varepsilon)$ è spettralmente equivalente a $-\Delta_{\Omega_1}$ con $\Omega_1 = F(\Omega)$.

Vogliamo ora dimostrare che $T(\varepsilon)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Rellich e Nagy.

Prima osserviamo che

LEMMA 4. Le funzioni

$$S_{es} = \Sigma_k \left(\delta_{ke} + \varepsilon \frac{\partial \chi_e}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{sk} + \varepsilon \frac{\partial \chi_s}{\partial x_s}\right) \quad \text{(intese come funzioni di } \xi \text{ e di } \varepsilon)$$

$$K_e = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_e} \log J$$

sono elementi di $C^1(\Omega)$ che dipendono analiticamente da ε per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$ e inoltre

$$S_{es}^{(0)} = \delta_{es} \qquad K_e^{(0)} = 0$$

$$S_{es}^{(1)} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial \xi_s} - \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi_e} \qquad K_e^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_e}(\operatorname{div} \psi).$$

---

[4] La scelta di una condizione di questo tipo è dovuta a ragioni di comodità, in realtà la ψ potrebbe essere non nulla su tutto $\mathbb{R}^m$, ma tale che $\| \psi(\xi) \|_{C^3} \leq L$.

Dal lemma 1 con ovvi calcoli si ha che lo jacobiano J di $F = I + \varepsilon\psi$ è un polinomio in ε di grado m, i cui coefficienti sono in $C^2(\Omega)$

$$J = a_m + \varepsilon\, a_{m-1} + \dots + \varepsilon^m\, a_0$$

dove $a_m = 1$, $a_{m-1} = \operatorname{div} \psi$.

Allora J è una funzione analitica rispetto ad ε, per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$, a valori in $C^1(\Omega)$.

Poiché l'applicazione di $C^1(\Omega)$ in sé, $f \longrightarrow \frac{1}{f}$, è analitico in un opportuno intorno di ogni funzione f_0 che non si annulla su Ω, dal Teorema di composizione delle funzioni analitiche, si ha subito che $\frac{1}{J}$ è una funzione analitica rispetto ad ε per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$, a valori in $C^1(\Omega)$. Dal lemma (1) segue che

$$\text{per} \quad i \neq j \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} = \frac{A_{ij}}{J} \quad \text{e} \quad \varepsilon \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i} = \frac{A_{ii}}{J} = 1$$

dove A_{ij} è l'aggiunto dell'elemento a_{ij} di J. Da queste uguaglianze, dalle considerazioni precedenti e dal fatto che la somma e il prodotto di funzioni analitiche in uno stesso punto è ancora una funzione analitica, si ottiene facilmente l'analiticità di S_{es} e K_e. Con ovvi calcoli seguono le altre affermazioni.

Poniamo ora, con il nuovo significato attribuito ad S_{es} e a K_e

$$T(\varepsilon)\,\widehat{u} = \Sigma_{es}\, \check{D}_e\,(S_{es}\,\widehat{D}_s\,\widehat{u}). \tag{7}$$

Vediamo ora che vale il

LEMMA 5. L'operatore autoaggiunto $T(\varepsilon)$ di $L_2(\Omega)$, con dominio di definizione $H_0^2(\Omega)$, per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$, dipende analiticamente da ε come elemento di $\mathcal{L}(H_0^2(\Omega), L_2(\Omega))$.

Con facili calcoli da (7) si ha

$$T(\varepsilon)\,(\widehat{u}) = -\Sigma_{es} \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(S_{es} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_e}\right) + B\widehat{u} \tag{8}$$

dove

$$B = \Sigma_{es}\left(S_{es}\, K_e\, K_s - \frac{\partial}{\partial \xi_s}(S_{es}\, K_e)\right).$$

Dal lemma 4 segue immediatamente che B è un elemento di $C^0(\Omega)$ che dipende analiticamente da ε per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$. Allora si ha

$$T(\varepsilon)\widehat{u} = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i T_i(\widehat{u})$$

dove è:

$$(9) \qquad T_0 u = (-\Delta_\Omega)\widehat{u}, \qquad T_1\widehat{u} = \frac{1}{2}\Delta_\Omega(\operatorname{div}\psi)\widehat{u} +$$

$$+ \sum_{e,s}\frac{\partial}{\partial\xi_e}\left[\left(\frac{\partial\psi_e}{\partial\xi_s} + \frac{\partial\psi_s}{\partial\xi_e}\right)\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\xi_s}\right] \quad \text{e, in generale, per } i \geq 1$$

$$T_i\widehat{u} = -\sum_{e,s}\frac{\partial}{\partial\xi_s}\left(S_{es}^{(i)}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\xi_e}\right) + B^{(i)}\widehat{u}.$$

Da (9) si ha

$$(10) \qquad \|T_i\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|B^{(i)}\|_{C^0(\Omega)}\|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ [\Sigma_{es}\|S_{es}^{(i)}\|_{C^1(\Omega)}]\,[\|\widehat{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\widehat{u}\|_{H_0^2(\Omega)}].$$

Per l'analiticità di B e S_{es}, per $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$, esistono $L > 0$ e $r > 0$ tali che

$$(11) \qquad \|B^{(i)}\|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{L}{r^1} \qquad \|S_{es}^{(i)}\|_{C^1(\Omega)} \leq \frac{L}{r^i}\,.$$

Da (10), (11) e dalla continuità delle immersioni di $H_0^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ si ha l'esistenza di $M > 0$ e $r > 0$ tali che

$$\|T_i\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{M}{r^i}\|\widehat{u}\|_{H_0^2(\Omega)}\,.$$

Dal lemma 5 e dalla continuità di $-\Delta_\Omega : H_0^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ segue che $T(\varepsilon)$ soddisfa le ipotesi del Teorema A.

§ 4. Spezzamento di un autovalore multiplo.

Dal lemma 3 sappiamo che gli operatori $T(\varepsilon)$ e $(-\Delta_{\Omega_1})$ hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità e dal lemma 5 sappiamo che l'operatore $T(\varepsilon)$ che perturba l'operatore $-\Delta_\Omega$, soddisfa le ipotesi del teorema A.

Sia λ_0 un autovalore di $(-\Delta_\Omega)$ di molteplicità $S > 1$, vogliamo vedere quando per l'operatore $T(\varepsilon)$ e per l'autovalore λ_0 valgono le ipotesi della proposizione 2. Poiché $T(\varepsilon)$ soddisfa le ipotesi del teorema A è chiaro che basta verificare quando ha radici non tutte coincidenti l'equazione secolare della matrice quadrata di ordine S i cui elementi sono

$$\mu_{ij} = -(T_1(\omega_i), \omega_j)_{L_2(\Omega)}$$

dove $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ è un sistema ortonormale dell'autospazio di λ_0. A questo punto conviene dare a μ_{ij} una forma più esplicita.

Ricordando, dal § 3, la definizione di T_1 si ha:

$$\mu_{ij} = -(T_1(\omega_i), \omega_j)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= + \int_\Omega \Sigma_{k,e} \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_c}\right) \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_e} d\xi - \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta(\operatorname{div} \psi)) \omega_i \omega_j d\xi =$$

$$= + \int_\Omega \Sigma_{k,e} \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_e} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_k}\right) d\xi - \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta(\operatorname{div} \psi)) \omega_i \omega_j d\xi$$

calcoliamo ora μ_{ij} ricordando che, per quanto detto nel lemma 2, Ω è un aperto limitato di classe C^k con $K \geq 3$

$$\mu_{ij} = \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ek} \psi_e \nu_k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_e} + \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_e} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_k}\right) d\sigma -$$

$$- \int_\Omega \Sigma_{e,k} \psi_e \left\{\left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi_k^2} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_e} + \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial \xi_k^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_e}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial \xi_k \partial \xi_e} + \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi_k \partial \xi_e}\right)\right\} - \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta(\operatorname{div} \psi)) \omega_i \omega_j d\xi =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \Sigma_{k,e} \psi_e \nu_k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_e} + \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_e} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_k}\right) d\sigma -$$

$$- \int_\Omega \Sigma_e \psi_e \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_e} \Delta \omega_i + \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_e} \Delta \omega_j\right) d\xi - \int_\Omega \Sigma_{k,e} \psi_e \frac{\partial}{\partial \xi_e} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_k}\right) d\xi -$$

$$- \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta(\operatorname{div} \psi)) \omega_i \omega_j d\xi.$$

Con ν si indica il versore della normale esterna alla frontiera $\partial\Omega$ di Ω. Tenendo presente che $(-\Delta_\Omega)(\omega_i) = \lambda_0\,\omega_i$ e che le funzioni ω_i si annullano su $\partial\Omega$ si ha

$$\mu_{ij} = \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ke}\,\psi_e\,\nu_k \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_e} + \frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_e}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k}\right) d\sigma +$$

$$+ \lambda_0 \int_\Omega \Sigma_e\,\psi_e \left(\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_e}\,\omega_i + \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_e}\right)\omega_j\right) d\xi - \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ke}\,\psi_e\,\nu_c\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k}\,d\xi +$$

$$+ \int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\,\Sigma_k\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k}\,d\xi - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta(\operatorname{div}\psi))\,\omega_i\,\omega_j\,d\xi.$$

Indicando con ψ_ν la componente di ψ rispetto alla normale esterna di $\partial\Omega$ e ricordando che

$$\Delta(\omega_i\,\omega_j) = \omega_j\,\Delta(\omega_i) + \omega_i\,\Delta(\omega_j) + 2\Sigma_k\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k}$$

da cui

$$\Sigma_k\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k} = \frac{1}{2}\left[\Delta(\omega_i\,\omega_j) + 2\lambda_0\,\omega_i\,\omega_j\right]$$

si ottiene

$$\mu_{ij} = \int_{\partial\Omega} \left\{\Sigma_e\,\psi_e\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_e} + \frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_e}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}\right) - \psi_\nu\,\Sigma_k\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k}\right\} d\sigma -$$

$$- \lambda_0 \int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\,\omega_i\,\omega_j\,d\xi + \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta(\operatorname{div}\psi))\,\omega_i\,\omega_j\,d\xi +$$

$$+ \lambda_0 \int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\,\omega_i\,\omega_j\,d\xi - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta(\operatorname{div}\psi))\,\omega_i\,\omega_j\,d\xi.$$

Quindi

$$\mu_{ij} = \int_{\partial\Omega} \left\{\Sigma_e\,\psi_e\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_e} + \frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_e}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}\right) - \psi_\nu\,\Sigma_k\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_k}\right\} d\sigma.$$

Notiamo che l'espressione

$$\Sigma_e \left(\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_e}\right) \psi_e$$

è proporzionale alla derivata direzionale di ω_j nella direzione del vettore ψ; nel caso in cui ψ sia tangenziale alla frontiera $\partial\Omega$ poiché ω_j è nulla su $\partial\Omega$, questa espressione è nulla.

Perciò in questo caso $\mu_{ij}=0$. Nel caso generale, decomponiamo $\psi(\xi)$ nella sua componente $\alpha(\xi)\nu$ rispetto alla normale esterna nel punto ξ alla frontiera di Ω, e nella sua componente rispetto alla tangente nel punto ξ a $\partial\Omega$.

Tenendo presente che su $\partial\Omega$ $\operatorname{grad}\omega_i = \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\nu$ si ottiene

$$\mu_{ij} = +\int_{\partial\Omega}\left\{\Sigma_e\,\alpha(\xi)\,\nu_e\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_e}+\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_e}\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}\right)-\alpha(\xi)\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}\right\}d\xi =$$

$$= +\int_{\partial\Omega}\alpha(\xi)\,\frac{\varrho\omega_i}{\partial\nu}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}\,d\xi.$$

Come era da prevedersi il valore di μ_{ij} è espresso da un integrale esteso soltanto alla frontiera.

Ora occorre vedere se esistono funzioni in $C^3(\partial\Omega)$ per cui l'equazione secolare della matrice μ_{ij} ha radici non tutte coincidenti.

LEMMA 6. *Sia λ_0 autovalore dell'operatore $-\Delta_\Omega$ allora esiste un sottoinsieme non vuoto S_{λ_0} di $C^3(\partial\Omega)$ i cui elementi α godono della proprietà che l'equazione secolare della matrice*

$$\mu_{ij} = \int_{\partial\Omega}\alpha(\xi)\,\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}\,d\xi$$

ha radici non tutte coincidenti.

Si noti che l'equazione secolare della matrice (μ_{ij}) è indipendente dalla scelta del sistema ortonormale dell'autospazio di λ_0.

La dimostrazione è basata su questa ovvia osservazione: una matrice simmetrica ha antovalori tutti uguali se solo se è del tipo ϱI con ϱ costante.

Sia $\{\omega_1,\dots,\omega_s\}$ un sistema ortonormale dell'autospazio di λ_0, prendiamo α in $C^3(I)$, tale che per almeno una coppia di indici $i,j\in\{1,\dots,s\}$ con $i\neq j$ si abbia $\mu_{ij}\neq 0$.

Questo è possibile perché $\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\frac{\partial\omega_j}{\partial\nu}$ è una funzione continua su $\partial\Omega$ che non è identicamente nulla su $\partial\Omega$; infatti è il prodotto di due funzioni continue che non si annullano su alcun sottoinsieme aperto di $\partial\Omega$ in base al teorema di unicità richiamato nel § 1.

Allora, tenendo presente l'osservazione iniziale, la matrice simmetrica i cui elementi sono

$$\mu_{ij} = \int_{\partial\Omega} \alpha(\xi) \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu} \frac{\partial\omega_j}{\partial\nu} d\xi$$

ha autovalori non tutti uguali, quindi S_{λ_0} è non vuoto.

Indichiamo con ψ una funzione di $C^3(\partial\Omega)$ a valori in $\mathbb{R}^m$ tale che la componente di ψ rispetto alla normale esterna $\partial\Omega$ sia proprio α. È chiaro che si può prolungare ψ su tutto $\mathbb{R}^m$ in modo che il suo prolungamento indicato ancora con ψ sia ancora di classe $\mathcal{C}^3$ ed abbia supporto compatto.

In questo modo facciamo si che, per l'applicazione $T(\varepsilon)$ e per l'autovalore λ_0 di $-\Delta_\Omega$ valgano le ipotesi della proposizione 2. Allora si ha lo spezzamento dell'autovalore λ_0, cioè si ottiene:

TEOREMA B: Sia Ω aperto limitato di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$. Sia λ_0 un autovalore dell'operatore $-\Delta_\Omega$ di molteplicità $s > 1$ sia U un intervallo aperto limitato tale che $\overline{U} \cap \sigma(-\Delta_\Omega) = \{\lambda_0\}$.

Allora esistono, una funzione ψ di classe C^3, a supporto compatto, ed un numero positivo ε_0 tali che, posto $F(\varepsilon) = I + \varepsilon\psi$ e $F(\varepsilon)(\Omega) = \Omega_1$; per $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\sigma(-\Delta_{\Omega_1}) \cap U$ è data da un numero finito di autovalori distinti $\{\lambda_1^{\Omega_1}, \ldots, \lambda_i^{\Omega_1}\}$ dove $i > 1$ e ognuno di questi autovalori ha molteplicità $s_i \geq 1$ e minore di s; inoltre $\sum_{j=1}^{i} s_j = s$.

§ 5. Spezzamento di tutti gli autovalori.

Ora ci proponiamo di trovare un dominio Ω^*, arbitrariamente vicino al dominio Ω, tale che $-\Delta_{\Omega^*}$ abbia autovalori tutti semplici.

Il metodo consiste principalmente nell'applicare ripetutamente il procedimento introdotto nel paragrafo precedente spezzando ogni volta il più piccolo autovalore multiplo.

Cominciamo enunciando il

LEMMA 7. Sia Ω un aperto limitato di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$ e sia $\{\sigma_n\}_{n \in N^+}$ una successione di numeri reali positivi. Allora esistono

i) una successione $\{F_n\}_{n \in N^+}$ di diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^3$ di $\mathbb{R}^m$ in sé

ii) una successione $\{\Omega_n\}_{n \in N}$ di sottoinsiemi aperti limitati di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$, con $\Omega = \Omega_0$

iii) una successione non decrescente di interi positivi $\{b_n\}_{n \in N}$ che tende a $+\infty$.

vi) una successione di intervalli aperti limitati $\{U_n\}_{n \in N^+}$ con chiusure a due a due disgiunte tali che

a) $\Omega_n = F_n(\Omega_{n-1})$,

b) $\| I - F_n \|_{C^3} \leq \sigma_n$

c) $-\Delta_{\Omega_n}$ ha i primi b_n autovalori $\{\lambda_i^{\Omega_n}\}$ $i = 1, \dots, b_n$ semplici e tali che $\lambda_i^{\Omega_n} \in U_i$ per $i = 1, \dots, b_n$.

Se $-\Delta_\Omega$ non presenta autovalori multipli la tesi risulta banale; in caso contrario siano $\lambda_1^\Omega < \dots < \lambda_{b_0}^\Omega$ tutti autovalori semplici e sia $\lambda_{b_0+1}^\Omega$ il primo autovalore multiplo, di molteplicità s. Fissiamo per ogni λ_i^Ω con $i = 1, \dots, b_0$ un intervallo aperto limitato U_i contenente λ_i^Ω e un intervallo aperto limitato W contenente $\lambda_{b_0+1}^\Omega$, in modo tale che le intersezioni degli insiemi $\overline{U}_i$ e $\overline{W}$ siano a due a due disgiunte. Sia $F_1(\varepsilon)$ un diffeomorfismo di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$ in sé, che soddisfa le condizioni del Teorema B e tale che

$$\| I - F_1(\varepsilon) \|_{C^3} \leq \sigma_1 .$$

Poniamo $\Omega_1 = F_1(\varepsilon)(\Omega)$. Allora per il Teorema B, per l'osservazione e per le proposizioni (1) e (2) del § 2 si ha che, per $|\varepsilon|$ opportunamente piccolo, $\sigma(-\Delta_{\Omega_1}) \cap U_i = \{\lambda_i^{\Omega_1}\}$ per $i = 1, \dots, b_0$ e l'autovalore successivo $\lambda_{b_0+1}^{\Omega_1}$ è contenuto nell'intervallo W ed è semplice oppure di molteplicità $< s$.

Dopo di che, se Ω_1 non ha autovalori tutti semplici, si riapplica ad Ω_1 il procedimento ora indicato per Ω, tenendo presente che gli intervalli $U_1, \dots, U_{b_0}$ restano fissati come prima.

In generale, si procede per induzione.

Supponiamo che, in corrispondenza dall'intero k, si sia fissato un dominio Ω_k, un intero b_k ed una famiglia di intervalli aperti limitati con chiusure a due a due disgiunte tali che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_{b_k}$ sono semplici e contenuti nei rispettivi intervalli $U_1, \dots, U_{b_k}$ e l'autovalore λ_{b_k+1} è multiplo. Scegliamo un intervallo aperto limitato W contenente λ_{b_k+1} con chiusura disgiunta dai precedenti.

Scegliamo allora F_{k+1} tale che soddisfi le condizioni del Teorema B rispetto a λ_{b_k+1} e inoltre sia

$$\| F_{k+1} - I \| \leq \sigma_{k+1} .$$

Poniamo $\Omega_{k+1} = F_{k+1}(\Omega_k)$. Possiamo prendere F_{k+1} tale che i primi b_k autovalori di Ω_{k+1} siano ancora semplici e contenuti nei rispettivi intervalli $U_1, \dots, U_{b_k}$.

Sono possibili questi casi :

a) tutti gli autovalori di Ω_{k+1} sono semplici ; in questo caso la conclusione è banale

b) Ω_{k+1} ha ancora un autovalore multiplo ; allora il procedimento indicato viene ripetuto dopo aver scelto intervalli aperti limitati disgiunti che isolino gli eventuali autovalori semplici di indice i maggiore di b_k e minore dell'indice del primo autovalore multiplo.

Sia Ω un aperto limitato di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$ e sia $\{r^n\}_{n\in N^+}$ una successione di numeri positivi dove $0 < r < \frac{1}{7}$, possiamo cousiderare la successione di aperti limitati di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$, $\{\Omega_n\}_{n\in N}$ e la successione di applicazioni di classe C^3 di $\mathbb{R}^m$ in sè, $\{F_n\}_{n\in N^+}$ introdotte col lemma 7 in corrispondenza di Ω_0 e $\{r^n\}_{n\in N^+}$.

Se supponiamo $\mathcal{F}_n = F_n \circ \ldots \circ F_1$, i termini della successione $\{\Omega_n\}_{n\in N}$ sono le immagini di Ω mediante le applicazioni $\mathcal{F}_n$.

Per comodità di scrittura poniamo $\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_n - I$.

Dalla definizione di $\mathcal{F}_n$ si ha

$$\mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_{n-1}(x) + \mathcal{H}_n(\mathcal{F}_{n-1}(x)) \tag{12}$$

e dal lemma 7 sappiamo che

$$\| \mathcal{H}_n \|_{C^3} \leq r^n . \tag{13}$$

Vediamo ora che la successione $\{\mathcal{F}_n - I\}_{n\in N^+}$ converge in $C^3(\mathbb{R}^m)$.

Per dimostrare questo occorre evidentemente valutare per $k = 1, 2, 3$ la differenza

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} | \mathcal{F}^{(k)}_{i+p}(x) - \mathcal{F}^{(k)}_i(x) |.$$

Il passaggio essenziale è valutare questa espressione per $p = 1$. Dalla formula (12) è chiaro che si deve maggiorare

$$\sup_x | \mathcal{H}_i(\mathcal{F}_{i-1}(x))^{(k)} |.$$

Le formule di derivazione successiva di una funzione composta nel caso di applicazioni tra spazi di Banach (in particolare $\mathbb{R}^m$) danno luogo a calcoli ingombranti, tuttavia nel nostro caso basta notare che valgono le stesse maggiorazioni che si otterrebbero formalmente per funzioni reali di una sola variabile. Esattamente

$$\text{i)} \qquad \sup_x |(h(f(x)))'| \leq \sup |h'(f(x)| \cdot \sup_x |f'(x)|$$

$$\text{(14) ii)} \qquad \sup_x |(h(f(x)))''| \leq \sup_x |h''(f(x))| \cdot \sup_x |f'(x)|^2 + \\ + \sup_x |h'(f(x))| \sup_x |f''(x)|$$

$$\text{iii)} \quad \sup_x |(h(f(x)))'''| \leq \sup |h'''(f(x))| \cdot \sup_x |f'(x)|^3 +$$

$$\text{(14)} \qquad + 3 \sup_x |h''(f(x))| \sup_x |f'(x) \sup_x |f''(x)| + \\ + \sup_x |h'(f(x))| \sup_x |f'''(x)|.$$

Da (12), (13) e (14) si dimostra, per induzione, che

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} &\sup_x |\mathcal{F}_i'(x)| \leq (1+r)^i \\ &\sup_x |\mathcal{F}_i''(x)| \leq (1+3r)^i \\ &\sup_x |\mathcal{F}_i'''(x)| \leq (1+7r)^i \end{aligned}$$

Allora da (12), (13), (14) e da (15) si ottiene con una dimostrazione per induzione

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} &\sup_x |\mathcal{F}_{i+1}'(x) - \mathcal{F}_i'(x)| \leq r^{i+1}(1+r)^i \\ &\sup_x |\mathcal{F}_{i+1}''(x) - \mathcal{F}_i''(x)| \leq 2r^{i+1}(1+3r)^i \\ &\sup_x |\mathcal{F}_{i+1}'''(x) - \mathcal{F}_i'''(x)| \leq 5r^{i+1}(1+7r)^i, \end{aligned}$$

Quindi

$$\sup_x |\mathcal{F}_{i+p}'(x) - \mathcal{F}_i'(x)| \leq r^{i+p}(1+r)^{i+p-1} + \\ + \dots + r^{i+1}(1+r)^i \leq \frac{r^{i+1}(1+r)^i}{1-r(1+r)}$$

$$\sup_x \left| \mathcal{F}''_{i+p}(x) - \mathcal{F}''_i(x) \right| \leq 2r^{i+p}(1+3r)^{i+p-1} + \tag{17}$$

$$+ \ldots + 2r^{i+1}(1+3r)^i \leq \frac{2r^{i+1}(1+3r)^i}{1-r(1+3r)}$$

$$\sup_x \left| \mathcal{F}'''_{i+p}(x) - \mathcal{F}'''_i(x) \right| \leq 5r^{i+p}(1+7r)^{i+p-1} +$$

$$+ \ldots + 5r^{i+1}(1+7r)^i \leq \frac{5r^{i+1}(1+7r)^i}{1-r(1+7r)}$$

Allora si ha

LEMMA 8. Nelle ipotesi del lemma 7, con $\sigma_n = r_n$ dove $0 < r < \frac{1}{7}$, la successione $\{F_n \circ F_{n-1} \circ \circ F_1 - I\}_{n \in N^+}$ converge in $C^3(\mathbb{R}^m)$ ad un elemento che indichiamo con $\mathcal{F}^* - I$.

Ogni applicazione $\mathcal{F}^*$ così costituita soddisfa alla disuguaglianza

$$\| \mathcal{F}^* - I \|_{C^3} \leq K\mathrm{r}$$

essendo K una costante.

Vogliamo ora dimostrare che l'aperto $\Omega^* = \mathcal{F}^*(\Omega)$ ha autovalori tutti semplici.

Le applicazioni $\mathcal{F}^* \mathcal{F}_n^{-1}$ sono tali che per $n \to \infty$

$$\| \mathcal{F}^* \mathcal{F}_n^{-1} - I \|_{C^3} \to 0.$$

Allora per il lemma 1 esiste, per n opportunamente grande l'applicazione inversa di $\mathcal{F}^* \mathcal{F}_n^{-1}$, che indichiamo con $I + G_n$.

È ovvio che per $i = 1, 2, 3$ $\| G_n \|_{C^3} \to 0$ per $n \to +\infty$, e che, $I + G_n$ trasforma Ω^* in Ω_n.

Sia $\{\lambda_n^*\}_{n \in N}$ la successiva degli autovalori di $-\Delta_{\Omega^*}$ dove ogni autovalore è ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità.

Procedendo per assurdo sia λ_l^* il primo autovalore multiplo di $-\Delta_{\Omega^*}$.

Quindi $\lambda_l^* = \lambda_{l+1}^* = \ldots = \lambda_{l+m-1}^*$ dove m è la molteplicità di λ_l^*.

Dal lemma 7 per n abbastanza grande, $-\Delta_{\Omega_n}$ ha i primi $l+1$ autovalori semplici e appartenenti rispettivamente agli intervalli aperti limitati $U_1 \ldots U_{l+1}$ e mentre gli altri autovalori sono sempre a destra di U_{l+1}.

D'altra parte per il Teorema di Courant citato nel paragrafo 1, l'autovalore l^{simo} di $-\Delta_{\Omega_n}$ tende a λ_l^* per $n \to +\infty$, quindi $\lambda_l^* \in \overline{U}_l$ e l'autovalore $(l+1)^{simo}$ di $-\Delta_{\Omega_n}$ tende a λ_{l+1} per $n \to +\infty$, quindi $\lambda_{l+1}^* \in \overline{U}_{l+1}$ e questo è assurdo, poiché, per costruzione, gli U_i per $i = l, \dots, l+1$ hanno chiusure a due a due disgiunte.

Concludendo si ha:

TEOREMA C. Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^m$ di classe C^3. Allora in ogni ε intorno di classe C^3 di Ω esiste un aperto Ω^* tale che $-\Delta_{\Omega^*}$ ha autovalori tutti semplici.

Pisa, Università

BIBLIOGRAFIA

[1] LIN'CZUN-CI - *Perturbation of solutions and perturbation of eigenvalue and eigenfunctions of second-order elliptic equations when there is perturbation of the boundary.* Soviet Mathematics vol. 5, Nov. n. 3, pag. 1018.

[2] COURANT and HILBERT - *Methods of Mathematical Physics.* Vol. I, Interscience, New York

[3] SZ. NAGY - *Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert.* Commentarii Math. Helv. 19 (1946-47) pag. 347-366.

[4] L. HÖRMANDER - *Linear partial differential operators.* Springer Verlag, Berlin,

[5] AGMON - *Lectures on elliptic boundary value problem.* Van Nostrand Company. New York.