ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALDO FERRARI

Coomologia e forme differenziali sugli spazi analitici complessi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 3 (1971), p. 469-480

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_3_469_0>

COOMOLOGIA E FORME DIFFERENZIALI SUGLI SPAZI ANALITICI COMPLESSI (*)

ALDO FERRARI

Introduzione.

In [2] era stata introdotta la definizione del fascio $\widetilde{\Omega}^p(X)$ dei germi delle forme differenziali olomorfe definite su uno spazio analitico complesso ridotto X; si era dato inoltre un teorema di annullamento (rispettivamente di finitezza) dei gruppi di coomologia, a coefficienti complessi, di X nell'ipotesi che X fosse coomologicamente q_0-completo (rispettivamente q_0-convesso) e localmente contrattile ad ogni suo punto (cfr. teoremi (4.2), (4.3) in [2], nel nostro contesto si parlerà sempre di locale contrattilità nel senso della definizione (3.2) in [2]).

In un recente lavoro, Bloom ed Herrera (cfr. [5]) danno alcuni risultati sulla coomologia di uno spazio analitico complesso, alla luce dei quali, è stato possibile provare i teoremi di annullamento e di finitezza sopra citati in generale, senza cioè fare l'ipotesi aggiuntiva che gli spazi siano localmente contrattili.

Nel primo paragrafo si richiamano le varie definizioni di fasci di germi di forme differenziali olomorfe, definite su spazi analitici complessi, introdotti nella letteratura da altri autori: Grauert, Kerner, Reiffen, Rossi, Vetter; si confrontano con $\widetilde{\Omega}^p(X)$ e si prova che tali fasci coincidono nel caso di spazi che siano intersezione completa e soddisfacenti ad opportune condizioni sulla codimensione dell'insieme dei loro punti singolari (cfr. Prop. (2.1)).

Si prova inoltre che il fascio dei germi delle p-forme olomorfe « di tipo a » (cfr. def. (1.1)), quozientato per la sua torsione da esattamente il fascio $\widetilde{\Omega}^p(X)$ definito in [2].

Pervenuto alla redazione il 14 Agosto 1970.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del C. N. R.

Nel secondo paragrafo si danno i due principali risultati di questo lavoro e precisamente:

TEOREMA (1.2). Sia X uno spazio analitico complesso coomologicamente q_0-completo e sia $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.
Allora $H^q(X, \mathbb{C}) = 0$ per ogni $q > q_0 + n$.

TEOREMA (2.2). Sia X uno spazio analitico complesso coomologicamente q_0-convesso e sia $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.
Allora $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathbb{C}) < +\infty$ per ogni $q > q_0 + n$.

Ringrazio il prof. V. Villani per avermi dato utili consigli durante la redazione di questo lavoro.

§ 1. Fasci di germi di forme differenziali olomorfe sugli spazi analitici complessi.

Sia A un insieme analitico complesso immerso in un dominio G di $\mathbb{C}^n$; $\mathcal{J}$ il fascio di ideali di tutte le funzioni analitiche su G e nulle su A; $\Omega^p(G)$ il fascio dei germi delle p-forme differenziali olomorfe definite su G. Per ogni $y \in G$ diremo che il germe $\omega_y \in \Omega^p(G)_y$, appartiene a $\mathcal{K}_y^p$ quando esistono degli elementi $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_r$ appartenenti a $\mathcal{J}_y, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ appartenenti a $\Omega^p(G)_y$ e $\beta_1, \dots, \beta_r$ appartenenti a $\Omega^{p-1}(G)_y$ tali che si abbia:

$$\omega_y = \sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma + \sum_{\varrho=1}^{r} dg_\varrho \wedge \beta_\varrho$$

(per $p = 0$, $\mathcal{K}_y^0 = \mathcal{J}$).
La collezione dei $\mathcal{K}_y$, $y \in G$, da luogo ad un fascio analitico su G.

DEFINIZIONE (1.1). [4] [6] [9]. *Se $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_G/\mathcal{J} \mid A$ è il fascio strutturale di A, il fascio*

$$\Omega_a^p(A) := \Omega^p(G)/\mathcal{K}p \mid A$$

è il fascio dei germi delle p-forme differenziali olomorfe « di tipo a » definite sullo spazio analitico complesso $(A, \mathcal{O}_A)$.

Per ogni intero p, il fascio $\Omega_a^p(A)$ è analitico coerente; Grauert e Kerner hanno provato in [4] che il fascio $\Omega_a^1(A)$ è indipendente dall'immersione di A; Reiffen ha provato in [6] che tale risultato vale anche per i fasci $\Omega_a^p(A)\,(p > 1)$. Per ogni spazio analitico complesso X è possibile definire pertanto, in modo naturale, il fascio $\Omega_a^p(X)$. Se X_{sg} denota il sottoinsieme dei punti singolari di X, sussiste l'uguaglianza $\Omega_a^p(X) \mid X - X_{sg} = \Omega^p(X - X_{sg})$. Si definisce, in modo canonico, un operatore di differenziazione esterna e, per ogni $x \in X$, si ha la successione:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(X)_x \longrightarrow \Omega_a^1(X)_x \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_a^{\operatorname{emdim}_x X}(X)_x \longrightarrow 0$$

la cui esattezza è stata discussa da Reiffen in [6] [7] [8].

Richiamiamo ora la definizione di fascio dei germi di forme differenziali olomorfe introdotta da H. Rossi in [10] (per ragioni di omogeneità, le notazioni usate sono quelle di [9]).

Sia A un sottoinsieme analitico di un dominio G di $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{J}$ il fascio di ideali di A; definiamo $S(A) := \left\{(a_1, \dots, a_n, z) \in \mathbb{C}^{2n};\ z \in A,\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(z) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathcal{J}_z\right\}$ e denotiamo π la proiezione canonica $(a_1, \dots, a_n, z) \longrightarrow z$ di $S(A)$ su A. $S(A)_x := \pi^{-1}(x)$, $x \in A$, dicesi spazio tangente ad A in x; $(S(A), \pi)$ dicesi spazio tangente ad A. $(S(A), \pi)$ non dipende dall'immersione di A e pertanto, per ogni spazio analitico complesso X, può definirsi lo spazio tangente $(S(X), \pi)$; $(S(X) \mid X - X_{sg}, \pi)$ coincide inoltre col fibrato tangente definito in senso classico sulla varietà $X - X_{sg}$. Maggiori dettagli sugli spazi tangenti potranno essere trovati dal lettore in [10].

DEFINIZIONE (2.1) - [10]. *Indicato $S^p(X)$ il prodotto cartesiano di p-copie di $S(X)$, una p-forma differenziale olomorfa « di tipo g » su un aperto $U \subset X$ è una funzione olomorfa definita su $S^p(X) \mid U$, p-lineare alternante sulle fibre.*

Il fascio delle p-forme differenziali olomorfe « di tipo g » che in tal modo si definisce su X verrà denotato $\Omega_g^p(X)$.

Vale: $\Omega_g^p(X) \mid X - X_{sg} = \Omega^p(X - X_{sg})$. H. Rossi ha dato in [10] la seguente caratterizzazione del fascio $\Omega_g^1(X)$; supposto che lo spazio X sia biolomorficamente equivalente, in un intorno U di un suo punto x, ad un sottoinsieme analitico A di un dominio $G \subset \mathbb{C}^n$, definiamo per ogni $y \in G$ $\mathcal{R}'_y := \{\omega_y \in \Omega^1(G)_y$ tali che, se ω è un rappresentante di ω_y, si abbia su un opportuno intorno V di y, $\omega \mid S(A \cap V) = 0\}$.

La collezione degli $\mathcal{R}'_y$, $y \in G$, da luogo ad un sottofascio analitico coerente di $\Omega^1(G)$. Risulta $\Omega_g^1(X) \mid U = \Omega^1(G)/\mathcal{R}' \mid A$.

Dalla coerenza di $\mathcal{R}'$ si ha conseguentemente la coerenza di $\Omega_g^1(X)$. Quanto detto si estende ai fasci di p-forme « di tipo g » ($p \geq 2$).

Sia sempre G un dominio di $\mathbb{C}^n$, A un sottoinsieme analitico di G, A_{reg} l'insieme dei punti regolari di A; l'immersione naturale $i : A_{\text{reg}} \longrightarrow G$ induce per ogni aperto $U \subset G$ un omomorfismo $i_U^* : \Gamma(U, \Omega^p(G)) \longrightarrow \Gamma(U \cap A_{\text{reg}}, \Omega^p(A_{\text{reg}}))$.

Si dirà che una forma $\omega \in \Gamma(U, \Omega^p(G))$ ha restrizione nulla ad A o semplicemente è nulla su A, quando $i_U^*(\omega) = 0$.

Sia $\mathcal{H}^p(G)$ il sottofascio di $\Omega^p(G)$ dei germi delle p-forme differenziali olomorfe nulle su A.

DEFINIZIONE (3.1) - [2]. *Il fascio* $\widetilde{\Omega}^p(A) := \Omega^p(G)/\mathcal{H}^p(G)\,|A$ *è un fascio di germi di forme differenziali olomorfe definite sullo spazio analitico* $(A, \mathcal{O}_A)$.

Il fascio $\widetilde{\Omega}^p(A)$ è un fascio analitico coerente (cfr. [2]) e non dipende dall'immersione di A. Per ogni spazio analitico complesso X può pertanto definirsi il fascio $\widetilde{\Omega}^p(X)$; vale inoltre $\widetilde{\Omega}^p(X)\,|\,X - X_{sg} = \Omega^p(X - X_{sg})$.

Per ogni punto $x \in X$ si ha la successione

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}(X)_x \to \widetilde{\Omega}^1(X)_x \to \ldots \to \widetilde{\Omega}^{\dim_x X}(X)_x \to 0$$

la cui esattezza è stata discussa in [2].

Richiamiamo ora, per ragioni di completezza, due definizioni di fasci di germi di forme differenziali olomorfe; si tratta di definizioni che compaiono nella letteratura per fasci di 1-forme, ma che si estendono in modo ovvio a fasci di germi di forme di grado superiore e precisamente: se U è un aperto di uno spazio analitico complesso X, un « campo vettoriale » è una sezione olomorfa nel fibrato $(S(X)\,|\,U, \pi)$. Indicato $\sigma(X)$ il fascio dei germi dei « campi vettoriali » su X, H. Rossi ha provato in [10] che $\sigma(X)$ è un fascio analitico coerente; se $\mathcal{O}(X)$ è il fascio strutturale di X, si ha la seguente

DEFINIZIONE (4.1). *Il fascio*

$$\Omega_h^p(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\Lambda^p \sigma(X), \mathcal{O}(X))$$

è il fascio dei germi delle p-forme differenziali olomorfe « di tipo h » sullo spazio analitico $(X, \mathcal{O}(X))$.

Dalla coerenza del fascio $\sigma(X)$ segue la coerenza di $\Lambda^p(\sigma(X))$ e pertanto $\Omega_h^p(X)$ è un fascio coerente; l'omomorfismo canonico $\Omega_h^p(X)_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)_x}(\Lambda^p \sigma(X)_x, \mathcal{O}(X)_x)$ è inoltre bigettivo per ogni $x \in X$ (cfr. [13]).

Vale $\Omega_h^p(X)\,|\,X - X_{sg} = \Omega^p(X - X_{sg})$.

DEFINIZIONE (5.1) *Sia X uno spazio analitico complesso, $i : X - X_{sg} \to$ $\to X$ l'immersione naturale; il fascio $\Omega_b^p(X) := i_0(\Omega^p(X - X_{sg}))$, zero immagine diretta del fascio $\Omega^p(X - X_{sg})$ mediante la applicazione i, è il fascio dei germi delle p-forme differenziali olomorfe « di tipo b » definite su X.*

Vale $\Omega_b^p(X)\,|\,X - X_{sg} = \Omega^p(X - X_{sg})$.

Tra i fasci $\Omega_a^p(X)$, $\Omega_g^p(X)$, $\widetilde{\Omega}^p(X)$, $\Omega_h^p(X)$, $\Omega_b^p(X)$ sono definiti degli omomorfismi canonici in modo tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Omega_a^p(X) \arrow[d, "\varrho^p"'] \arrow[drr, "\varepsilon^p"] & & \\
\Omega_g^p(X) \arrow[r, "\sigma^p"] \arrow[d, "\alpha^p"'] & \Omega_h^p(X) \arrow[r, "\iota^p"] & \Omega_b^p(X) \\
\widetilde{\Omega}(X) \arrow[urr, "\beta^p"'] & &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo per ogni intero $p \geq 1$. I morfismi ϱ^p e α^p sono surgettivi. Ci proponiamo ora di approfondire lo studio dei legami esistenti tra i fasci precedentemente definiti. A tale scopo premettiamo alcuni lemmi e proposizioni.

DEFINIZIONE (6.1). *Sia X uno spazio analitico complesso (non necessariamente localmente irriducibile), $\mathcal{O}_X$ il suo fascio strutturale; $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X. Il fascio $\tau(\mathcal{F}) := \ker \langle \mathcal{F} \xrightarrow{\text{canon}} \mathcal{F}^{**} \rangle$ è il sottofascio di torsione di $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}^{**}$ indica il biduale del fascio $\mathcal{F}$; $\mathcal{F}^{**} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{O}(X)), \mathcal{O}(X))$.*

Poiché $\mathcal{O}_{X,x}$ $(x \in X)$ è un anello noetheriano ridotto e poiché $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo di tipo finito, si può concludere che la spiga $\tau(\mathcal{F})_x$ di $\tau(\mathcal{F})$ nel punto x è data dalla:
$\tau(\mathcal{F})_x = \{f \in \mathcal{F}_x$ per cui esiste $\lambda \in \mathcal{O}_{X,x}$ non zero divisore, tale che $\lambda f = 0\}$ (cfr. ad esempio [11]).

Nel caso in cui lo spazio X sia supposto localmente irriducibile, la definizione di sottofascio di torsione ora data coincide con quella usuale (cfr. ad esempio [1]).

Poiché il duale di un fascio analitico coerente è un fascio analitico coerente, il sottofascio di torsione è anch'esso coerente. Si estende la proposizione 9 § 6 in [1] mediante il seguente

LEMMA (1.1). *Sia $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente privo di torsione (cioè $\tau(\mathcal{F}) = 0$) sullo spazio analitico complesso X, allora $\mathcal{F}$ è localmente isomorfo ad un sottofascio di $\mathcal{O}_X^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x un punto di X; poiché $\mathcal{F}^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{O}(X))$ è un fascio analitico coerente, l'$\mathcal{O}_{X,x}$-modulo $\mathcal{F}_x^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}(X)_x)$ è di tipo finito. Si ha allora la successione esatta di moduli

$$\mathcal{O}^n_{X,x} \longrightarrow \mathcal{F}_x^* \longrightarrow 0.$$

La coerenza di $\mathcal{F}_x^*$ garantisce l'esistenza di un intorno U di x su cui si abbia la successione esatta di fasci

$$\mathcal{O}^n_X \longrightarrow \mathcal{F}^* \longrightarrow 0.$$

Dualizzando la precedente si ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{**} \longrightarrow (\mathcal{O}^n_X)^*;$$

dall'iniettività di $\mathcal{F} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{F}^{**}$ e dall'isomorfismo $(\mathcal{O}^n_X)^* \cong \mathcal{O}^n_X$ segue l'asserto.

LEMMA (2.1) *Sia X uno spazio analitico complesso, $\mathcal{O}_X$ il suo fascio strutturale, $\mathcal{O}^p_X$ la somma diretta di p-copie del fascio $\mathcal{O}_X$ ed $\mathcal{F}$ un sottofascio non nullo di $\mathcal{O}^p_X$; allora $\mathcal{F}$ non può essere concentrato su un sottoinsieme analitico di codimensione* ≥ 1.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata al lettore.

LEMMA (3.1). *Sia X uno spazio analitico complesso, $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X. Se $\mathcal{F}$ è concentrato su un sottoinsieme analitico Y di X con codim $Y \geq 1$, $\mathcal{F}$ è un fascio di torsione* (*cioè* $\mathcal{F} = \tau(\mathcal{F})$).

DIMOSTRAZIONE. Si consideri il fascio $\mathcal{G} := \mathcal{F}/\tau(\mathcal{F})$; $\mathcal{G}$ è un fascio coerente senza torsione, pertanto, in virtù del lemma (1.1), localmente isomorfo ad un sottofascio di $\mathcal{O}^n_X$. Per ipotesi $\mathcal{G}$ è concentrato su Y, per il lemma (2.1) $\mathcal{G} = 0$ o equivalentemente $\mathcal{F} = \tau(\mathcal{F})$.

LEMMA (4.1). *Sia X uno spazio analitico complesso; il fascio $\widetilde{\Omega}^p(X)$ è privo di torsione.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in X$ un punto di X. Se X è irriducibile in x_0 l'asserto è banale. Se X è riducibile in x_0 il germe individuato da X in x_0 si spezza in un numero finito di componenti irriducibili, siano $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_s$ tali componenti. Sia $\omega_{x_0} \in \widetilde{\Omega}^p(X)_{x_0}$; se $\omega_{x_0} \neq 0$ e se ω è un rappresentante di ω_{x_0} su un opportuno intorno di x_0, ω dovrà essere non nullo su almeno una delle componenti irriducibili di X, sia X_1. Se allora $\lambda \in \mathcal{O}_{X,x_0}$ è tale che $\lambda\omega_{x_0} = 0$ dovrà aversi λ nulla su X_1 e pertanto λ sarà zero divisore in $\mathcal{O}_{X,x_0}$.

PROPOSIZIONE (1.1): *Sia X uno spazio analitico complesso; per ogni intero $p \geq 0$ vale*

$$\widetilde{\Omega}^p(X) = \Omega_a^p(X)/\tau(\Omega_a^p(X)) = \Omega_g^p(X)/\tau(\Omega_g^p(X)).$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la prima uguaglianza; si considera la successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \pi \longrightarrow \Omega_a^p(X) \xrightarrow{\ \pi\ } \widetilde{\Omega}^p(X) \longrightarrow 0,$$

poiché $\ker \pi$ è un sottofascio di $\Omega_a^p(X)$ coerente e concentrato sul sottoinsieme analitico X_{sg} dei punti singolari di X, in virtù del lemma (3.1) $\ker \pi$ è un fascio di torsione.

Poiché $\Omega_a^p(X)/\ker \pi \cong \widetilde{\Omega}^p(X)$ e $\widetilde{\Omega}^p(X)$ è privo di torsione (cfr. lemma (4.1)) si avrà $\ker \pi = \tau(\Omega_a^p(X))$.

In particolare se $p > \dim_{\mathbb{C}} X$, $\widetilde{\Omega}^p(X)$ è il fascio nullo, pertanto $\Omega_a^p(X) = \tau(\Omega_a^p(X))$. Il fascio dei germi delle forme differenziali olomorfe «di tipo a» è un fascio di torsione al di sopra della dimensione complessa dello spazio X.

Identico ragionamento può essere fatto sostituendo al fascio $\Omega_a^p(X)$ il fascio $\Omega_g^p(X)$.

In [9] si hanno alcuni risultati sull'iniettività e bigettività del morfismo ε^1 (cfr. satz 1); con metodi che ricalcano considerazioni di Reiffen e Vetter (cfr. [9] e [14]) ci proponiamo ora di estendere tali risultati.

Ricordiamo che uno spazio analitico complesso X è intersezione completa in un suo punto x quando, supposto X biolomorficamente equivalente, in un intorno U di x, ad un sottoinsieme analitico A di un dominio $G \subset \mathbb{C}^n$, la spiga $\mathcal{J}_x$ del fascio di ideali di A è generata da $n - \dim_x X$ germi di funzioni olomorfe. Se in particolare $n - \dim_x X = 1$, X si dirà ipersuperficie in x.

PROPOSIZIONE (2.1). *Sia X uno spazio analitico complesso intersezione completa nel punto $x \in X$. Se* $\operatorname{codim}_x X_{sg} := \dim_x X - \dim_x X_{sg} \geq p + 1$ *allora*

$$\Omega_a^p(X)_x \cong \Omega_g^p(X)_x \cong \widetilde{\Omega}^p(X)_x;$$

se $\operatorname{codim}_x X_{sg} \geq p + 2$ *allora*

$$\Omega_a^p(X)_x \cong \Omega_g^p(X)_x \cong \widetilde{\Omega}^p(X)_x \cong \Omega_b^p(X)_x.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero p si hanno gli omomorfismi canonici $\Omega_a^p(X) \xrightarrow{h^p} \Omega_a^p(X)^{**}$ (dove $\Omega_a^p(X)^{**}$ indica il biduale del fascio $\Omega_a^p(X)$). Definiamo inoltre i morfismi $\pi^p : \Omega_a^p(X)^{**} \to \Omega_b^p(X)$ nel modo seguente: per ogni aperto $U \subset X$ e per ogni $\omega \in H^0(U, \Omega_a^p(X^{**}))$ si considera la restrizione ω' di ω ad $U - X_{sg}$; poiché vale $\omega' \in H^0(U - X_{sg}, \Omega_a^p(X)^{**}) = H^0(U - X_{sg}, \Omega_a^p(X))$ si pone $\pi^p(\omega) = i_0(\omega')$ (essendo $i : X - X_{sg} \to X$ l'immersione naturale); risulta $\pi^p \circ h^p = \varepsilon^p$.

Se $p = 1$ l'asserto è conseguenza immediata del satz 1 in [9] e della commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Omega_a^p(X) & \xrightarrow{\varepsilon^p} & \Omega_b^p(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_g^p(X) & \longrightarrow & \tilde{\Omega}^p(X) . \end{array}$$

Supponiamo allora che i morfismi $\varepsilon^i, 1 \leq i \leq p-1$, siano iniettivi; ne conseguirà l'iniettività dei morfismi h^i e pertanto gli $\Omega_a^i(X)$ saranno senza torsione. Poiché $\Omega_a^i(X) = \Lambda^i \Omega_a^1(X)$, si ha $\operatorname{codh} \Omega_a^p(X)_x \geq \dim_x X - p$ (cfr. [14] pag. 7 dimostrazione Satz 4).

Pertanto $\operatorname{codh} \Omega_a^p(X)_x \geq \dim_x X_{sg} + 1$ nella ipotesi in cui $\operatorname{codim}_x X_{sg} \geq p + 1$, e $\operatorname{codh} \Omega_a^p(X)_x \geq \dim_x X_{sg} + 2$ nella ipotesi in cui $\operatorname{codim}_x X_{sg} \geq p + 2$.

La tesi segue allora dal Satz I e dal corollario del Satz III in [12].

In generale non è detto che i fasci $\Omega_g^p(X)$ ed $\tilde{\Omega}^p(X)$ coincidano; ad esempio sulla ipersuperficie $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ t. c. } z_1^2 - z_2^3 = 0\}$ è immediato verificare che $\tilde{\Omega}^2(X) = 0$ e $\Omega_g^2(X) \neq 0$. (Vale $\operatorname{codim}_x X_{sg} = 1$).

Interessanti esempi possono essere trovati in [9].

§ 2) **Un teorema di annullamento** (rispettivamente di finitezza) **della coomologia degli spazi coomologicamente q-completi** (rispettivamente q-convessi).

DEFINIZIONE (1.2). *a) Uno spazio analitico complesso X è coomologicamente q_0-completo se $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni intero $q > q_0$ e per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su X.*

b) Uno spazio analitico complesso X è coomologicamente q_0-convesso se $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, F) < +\infty$ per ogni intero $q > q_0$ e per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su X.

TEOREMA (1.2). *Sia X uno spazio analitico complesso coomologicamente q_0-completo e sia $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Allora $H^q(X, \mathbb{C}) = 0$ per ogni intero $q > q_0$.*

TEOREMA (2.2). *Sia X uno spazio analitico complesso coomologicamente q_0-convesso e sia $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Allora $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathbb{C}) < +\infty$ per ogni intero $q > q_0$.*

In [2] i teoremi (1.2) e (2.2) sono stati provati nel caso in cui lo spazio X fosse supposto localmente contrattile ad ogni suo punto; usando risultati di Bloom ed Herrera [5] ci proponiamo ora di dare una dimostrazione valida anche per spazi non necessariamente localmente contrattili

A tale scopo premettiamo alcune considerazioni di natura puramente algebrica.

Sia dato il complesso doppio A di $\mathbb{C}$-moduli; A_{ij} la sua graduazione, d_1 e d_2 i suoi differenziali di gradi (1,0) e (0,1) rispettivamente. Supponiamo che $A_{pj} = 0$ per ogni $p \geq n + 1$.

Graduiamo e filtriamo A ponendo:

$$A^p = \bigoplus_{i+j=p} A_{ij} \text{ (graduazione)}; \qquad A'_p = \bigoplus_{i \geq p} A_{ij} \text{ (filtrazione)}.$$

La graduazione e la filtrazione così introdotte sono compatibili, $A'_p = 0$ per ogni $p > n$, e la graduazione è inferiore alla filtrazione essendo $A^p \cap A'_{p+k} = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Indicheremo $H(A)$ la coomologia del complesso A con la graduazione A^p e con il differenziale totale $d = d_1 + d_2$; $H(A_{p,*})$ sarà inoltre la coomologia del complesso $A_{p,*}$ con il differenziale d_2; sussiste il seguente

LEMMA (1.2). *Dato il complesso doppio A_{pj} con $A_{pj} = 0$ per $p \geq n + 1$ (n fissato), se i gruppi di coomologia $H^m(A_{p,*})$ sono spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{C}$ per ogni $m > q_0$ e per ogni $p \geq 0$, allora $\dim_{\mathbb{C}} H^m(A) < +\infty$ per ogni $m > q_0 + n$.*

Se $H^m(A_{p,*}) = 0$ per ogni $m > q_0$ e per ogni $p \geq 0$, allora $H^m(A) = 0$ per ogni $m > q_0 + n$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la successione spettrale associata al complesso A con la graduazione A^p e la filtrazione A'_p. Per ogni $q > q_0$ risulta

$$\dim_{\mathbb{C}} E_2^{p,q} < +\infty .$$

Infatti (usando le notazioni di [3] pag. 87) $E_2^{p,q} = {}'H^p({}''H^q(A))$ e $\dim_{\mathbb{C}} {}''H^q(A) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(A_{p,*}) < +\infty$ per ogni $q > q_0$ per ipotesi. Per il teorema di Leray

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker \langle E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1} \rangle}{\mathrm{Im}\ \langle E_r^{p-r,\, q+r-1} \longrightarrow E_r^{p,q} \rangle} = H(E_r),$$

pertanto $\dim_{\mathbb{C}} E_r^{p,q} < +\infty$ per ogni $r \geq 2$ e $q > q_0$. Si conclude allora che $\dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q} < +\infty$ per ogni $q > q_0$.

Se ora $\{\Sigma_p\}$ è la filtrazione della coomologia di A definita da

$$\Sigma_p = Z_\infty^p / B_\infty^p = \frac{Z(A) \cap A_p'}{B(A) \cap A_p'} = \frac{\text{cicli di } A \text{ in } A_p'}{\text{bordi di } A \text{ in } A_p'}$$

vale

$$E_\infty^{p,q} = H^{p+q}(A) \cap \Sigma_p / H^{p+q}(A) \cap \Sigma_{p+1}.$$

Poiché $A_p' = 0$ per ogni $p > n$ anche $\Sigma_p = 0$ per ogni $p > n$ e conseguentemente

$$E_\infty^{n,q} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_n / H^{q+n}(A) \cap \Sigma_{n+1} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_n.$$

Se $q > q_0$ vale allora

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{q+n}(A) \cap \Sigma_n < +\infty \quad (*,*)$$

$$E_\infty^{n-1,\, q+1} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_{n-1} / H^{q+n}(A) \cap \Sigma_n,$$

dalla $(*,*)$ e dalla $\dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{n-1,\, q+1} < +\infty$ segue che $\dim_{\mathbb{C}} H^{q+n}(A) \cap \Sigma_{n-1} < +\infty$.

Procedendo analogamente si perviene alla conclusione che $\dim_{\mathbb{C}} H^{q+n}(A) \cap \Sigma_1 < +\infty$; pertanto dalla

$$E_\infty^{0,\, q+n} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_0 / H^{q+n}(A) \cap \Sigma_1 = H^{q+n}(A) / H^{q+n}(A) \cap \Sigma_1$$

e dalla $\dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{0,\, q+n} < +\infty$ segue allora $\dim_{\mathbb{C}} H^{q+n}(A) < +\infty$ per ogni $q > q_0$ o equivalentemente $\dim_{\mathbb{C}} H^m(A) < +\infty$ per ogni $m > q_0 + n$. Se ora all'ipotesi $\dim_{\mathbb{C}} H^m(A_{p,*}) < +\infty$ sostituiamo l'ipotesi $H^m(A_{p,*}) = 0$ per ogni $m > q_0$ si avrà $E_\infty^{p,q} = 0$ per $q > q_0$ e conseguentemente

$$0 = E_\infty^{n,q} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_n;$$

$0 = E_\infty^{n-1,\, q+1} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_{n-1}$ e così proseguendo si ottiene $0 = E_\infty^{0,\, q+n} = H^{q+n}(A) \cap \Sigma_0 = H^{q+n}(A)$ per ogni $q > q_0$ o equivalentemente $H^m(A) = 0$ per ogni $m > q_0 + n$. L'asserto è così provato.

DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI (1.1) e (2.1). Si consideri la successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^0(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \widetilde{\Omega}^{\dim X}(X) \longrightarrow 0.$$

Per ogni p può considerarsi la risoluzione canonica fiacca $\mathcal{C}^*(X, \widetilde{\Omega}^p(X))$ del fascio $\widetilde{\Omega}^p(X)$; applicando poi al tutto il funtore Γ (sezioni globali) si ottiene il complesso doppio $\Gamma\,\mathcal{C}^*(X, \widetilde{\Omega}^*(X))$. Si definisce coomologia di De Rham $H^*_{DR}(X, \mathbb{C})$ dello spazio X a coefficienti complessi, la coomologia del complesso doppio $\Gamma\,\mathcal{C}^*(X, \widetilde{\Omega}^*)\,X))$ con la graduazione ed il differenziale totale definiti in modo ovvio:

$$H^*_{DR}(X, \mathbb{C}) = H^*(\Gamma\,\mathcal{C}^*(X, \widetilde{\Omega}^*(X))).$$

Bloom ed Herrera (1) hanno provato (cfr. theorem 3.11 [5]) che sussiste la seguente:

$$H^*_{DR}(X, \mathbb{C}) = H^*(X, \mathbb{C}) \oplus A^*(\mathbb{C}) \quad (*)$$

dove $H^*(X, \mathbb{C})$ è la usuale coomologia di X a coefficienti complessi.

Tenendo ora presente che il fascio $\widetilde{\Omega}^p(X)$ è nullo al di sopra della dimensione complessa di X, si vede che il complesso doppio $\Gamma\,\mathcal{C}^*(X, \widetilde{\Omega}^*(X))$ soddisfa alle ipotesi cui soddisfaceva il complesso A del lemma (1.2); pertanto: $\dim_{\mathbb{C}} H^q_{DR}(X, \mathbb{C}) < +\infty$ per $q > q_0 + n$ nel caso in cui X sia coomologicamente q_0-convesso, $H^q_{DR}(X, \mathbb{C}) = 0$ per $q > q_0 + n$ nel caso in cui X sia coomologicamente q_0-completo.

La $(*)$ permette allora di ottenere i risultati cercati.

Università di Genova

(*) In realtà il teorema 3.11 in [5] è stato provato nel caso analitico complesso usando il fascio delle forme differenziali « di tipo a » $\Omega^*_a(X)$ (cfr. def. (1.1) § 1); ma nulla cambia se in tale dimostrazione si sostituisce al fascio $\Omega^*_a(X)$ il fascio $\widetilde{\Omega}^*(X)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A.: *Théoremès de dépendence algébrique sur les espaces complexes pseudoconcaves* Bull. Soc. math. France 91, 1963, (1.38).

[2] FERRARI A.: *Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces.* Ann. Scuola Normale Sup. Pisa vol. XXIV Fasc. 1, 65.77 (1970).

[3] GODEMENT R.: *Théorie des faisceaux.* Hermann Paris.

[4] GRAUERT H. KERNER H.: *Deformationen von Singularitäten komplexer Räume.* Math. Ann. 153, 236-260 (1964).

[5] HERRERA M. BLOOM T.: *De Rham cohomology of an analytic space.* Inv. Math. 7, 275-296 (1969).

[6] REIFFEN H. J.: *Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen.* Math. Zeitschr. 101, 269-284 (1967).

[7] REIFFEN H. J.: *Analytische Kegelmengen.* Math. Zeitschr. 104, 50-58 (1968).

[8] REIFFEN H. J.: *Kontrahierbare eindimensionale Hyperflächen.* Nachr. der Akademie der Wiss. in Göttingen. Nr. 3 Jahrgang 1968.

[9] REIFFEN H. J. VETTER U.: *Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen.* Math. Ann. 167, 338-350. (1966).

[10] ROSSI H.: *Vector fields on analytic spaces.* Ann. of Math. 78, No. 3, 455-467 (1963).

[11] SCHEJA G.: *Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren.* Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Fribourg. Heft 2 - Wintersemester 1969-70.

[12] SCHEJA G.: *Riemansche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen.* Math. Ann. 144, 345-360 (1961).

[13] SERRE J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math. 61, 197-278 (1955).

[14] VETTER Ü.: *Aussere Potenzen von Differentialmoduln reduzierter vollständiger Durchschnitte.* Manuscripta math. 2, 67-75 (1970).