Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giulio Mattei

Sulla propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un fluido comprimibile conduttore del calore in presenza di effetto hall

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 3 (1970), p. 555-570

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_3_555_0>

SULLA PROPAGAZIONE DI ONDE MAGNETOFLUIDODINAMICHE IN UN FLUIDO COMPRIMIBILE CONDUTTORE DEL CALORE IN PRESENZA DI EFFETTO HALL

GIULIO MATTEI (*)

SUNTO - Si studia, nello schema del continuo, la propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un fluido comprimibile conduttore del calore in presenza di corrente Hall, tenendo anche conto degli effetti dovuti alla viscosità e alla conducibilità elettrica finita.

Nell'ambito delle equazioni linearizzate vengono esaminate dapprima le perturbazioni piane; successivamente l'indagine è estesa alle perturbazioni cilindriche e, in particolare, alle oscillazioni torsionali.

SUMMARY - In this paper we discuss wave propagation in a compressible, viscous, heat-conducting fluid of finite electrical conductivity, taking account of the Hall effect. The fluid is considered as a continuous medium.

Using linearized equations we first consider the propagation of plane waves; the discussion is then extended to cylindrical waves and, in particular, to torsional oscillations.

1. Introduzione.

Nella grande maggioranza dei numerosissimi lavori dedicati allo studio della propagazione di onde magnetofluidodinamiche (MFD) in un fluido comprimibile, il fluido è considerato non conduttore del calore. L'influenza della conducibilità termica sulla propagazione di onde MFD piane è stata tut-

---

Pervenuto alla Redazione il 21 Aprile 1970.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del CNR (anno 1970) presso l'Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini» della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.

tavia esaminata da SHIH I PAI [1] Cap. X e da W. F. HUGHES e F. J. YOUNG [2] Cap. VIII (cfr. anche la Bibliografia ivi indicata). In [1] e [2] la pressione termodinamica, la densità e la temperatura del fluido si considerano, come comunemente vien fatto (cfr. per es. A. M. PRATELLI [3], [4], [5]), legate dalla legge dei gas perfetti; si tiene poi conto della viscosità e della conducibilità elettrica finita, trascurando invece, come è consueto in questo tipo di ricerche, le forze di massa di origine non elettromagnetica.

Nei lavori suddetti peraltro si fa l'ipotesi che la corrente Hall sia trascurabile.

Poichè in alcune circostanze tale ipotesi cessa di essere fisicamente accurata (cfr. al riguardo per es. [6] e la Bibliografia ivi indicata), è sembrato di un qualche interesse riprendere l'indagine svolta in [1] e [2] rinunciando all'ipotesi in questione.

Lo scopo del presente lavoro è perciò anzitutto quello di esaminare l'influenza dell'effetto Hall sulla propagazione di onde MFD piane nel fluido sopra descritto (1). Tale esame è svolto al N. 3 nel caso di propagazione in direzione generica, dopo aver dato, al N. 2, le equazioni delle perturbazioni (2); il caso in cui il campo magnetico è ortogonale alla direzione di propagazione è esaminato al N. 3.1 e quello in cui è parallelo al N. 3.2. Inoltre l'indagine è estesa, al N. 4, alle perturbazioni cilindriche (in particolare alle oscillazioni torsionali), esaminando anche il caso in cui la corrente Hall è trascurabile, dato che questo tipo di perturbazioni non è stato considerato in [1] e [2].

2. Le equazioni delle perturbazioni.

Il sistema (non lineare) delle equazioni MFD nello schema del continuo descriventi in presenza di effetto Hall il fluido di cui alla Introduzione può ricavarsi per es. da G. SUTTON e A. SHERMAN [9] Sect. 8.4.

Da esso, supponendo che il mezzo (omogeneo) nello stato imperturbato sia in quiete e soggetto ad un campo magnetico uniforme di induzione $\mathbf{B}_0$,

---

(1) Per il fluido incomprimibile l'influenza della corrente Hall sulla propagazione di onde MFD è stata esaminata in [6] (cfr. anche la Bibliografia ivi indicata); per il fluido comprimibile in condizioni adiabatiche cfr. W. R. SEARS, E. L. RESLER JR. [7] Parte III, T. TANIUTI [8] n. V.

(2) Come in [1] e [2] anche qui le onde sono intese come piccole perturbazioni nell'ambito delle equazioni MFD linearizzate.

si deducono le seguenti equazioni (linearizzate) delle perturbazioni

$$(2.1)\qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\, p_* + \frac{\lambda+\eta}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \frac{\eta}{\varrho_0}\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{b})\wedge\mathbf{B}_0$$

$$(2.2)\qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}_0) + \beta\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{B}_0\wedge\mathrm{rot}\,\mathbf{b}) + \chi\nabla^2\mathbf{b}$$

$$(2.3)\qquad \frac{\partial \varrho_*}{\partial t} = -\varrho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

$$(2.4)\qquad \frac{p_*}{p_0} = \frac{T_*}{T_0} + \frac{\varrho_*}{\varrho_0}$$

$$(2.5)\qquad \varrho_0 c_p\frac{\partial T_*}{\partial t} = \frac{\partial p_*}{\partial t} + k_T\nabla^2 T_*\,.$$

Nelle (2.1)-(2.5) p_0, ϱ_0 e T_0 indicano i valori (costanti rispetto al punto e rispetto al tempo) della pressione, della densità e della temperatura nello stato imperturbato, $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}/\mu$, p_*, ϱ_* e T_* le perturbazioni nel campo di velocità, nel campo magnetico, nella pressione, nella densità e nella temperatura; λ il coefficiente di viscosità di compressione, η quello di scorrimento (3), c_p il calore specifico a pressione costante, k_T il coefficiente di conducibilità termica e si è posto

$$(2.6)\qquad \chi = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$$

$$(2.7)\qquad \beta = \frac{c^2\beta_H}{4\pi\mu}$$

dove σ indica la conducibilità elettrica e β_H il coefficiente di Hall.

Si adottano anche qui le consuete ipotesi MFD. (Rispetto a [9] si sono qui fatti ovvi cambiamenti di notazioni e di sistema di unità di misura).

---

(3) Nel presente lavoro, a differenza di [1], non si fa uso della relazione di Stokes fra λ ed η. Le conclusioni cui si giunge sussistono, in particolare, per quei fluidi per cui sia lecito adottare la suddetta relazione (per una discussione sulla validità di essa si può per es. vedere J. SERRIN [10] Sect. 62).

Le equazioni soprascritte traducono nell'approssimazione lineare rispettivamente: la (2.1) l'equazione di moto, la (2.2) l'equazione dell'induzione magnetica, la (2.3) l'equazione di continuità di massa, la (2.4) l'equazione di stato e la (2.5) infine l'equazione del calore.

Dalla (2.5) possiamo eliminare T_* tramite la (2.4). Tenendo conto delle ben note relazioni $R = c_p - c_v$, $\gamma = c_p / c_v$ e introducendo l'ordinaria velocità del suono $a_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \varrho_0}$, otteniamo infatti

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varrho_*}{\partial t} + \frac{k_T a_0^2}{c_p} \nabla^2 \left(\frac{p_*}{p_0} - \frac{\varrho_*}{\varrho_0} \right). \tag{2.8}$$

Si è così condotti a un sistema lineare determinato di otto equazioni differenziali scalari alle derivate parziali (tre dalla (2.1), tre dalla (2.2), la (2.3) e la (2.8)) in otto funzioni incognite scalari (le tre componenti di $\mathbf{v}$, le tre componenti di $\mathbf{b}$, p_* e ϱ_*). T_* è poi fornita dalla (2.4) una volta note p_* e ϱ_*.

3. Perturbazioni piane.

Senza pregiudizio per la generalità possiamo assumere come terna di riferimento una terna di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, di versori $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, ed $\mathbf{i}_3$, con l'asse x parallelo alla direzione di propagazione e tale da avere

$$\mathbf{B}_0 = B_{0x} \mathbf{i}_1 + B_{0y} \mathbf{i}_2 .$$

Proiettando la (2.2) su $\mathbf{i}_1$ e tenendo conto della solenoidalità di $\mathbf{b}$ si deduce subito: $b_x = \text{cost} = 0$.

Da (2.1) si deducono poi le equazioni scalari

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_*}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{B_{0y}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_y}{\partial x} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_y}{\partial x} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\eta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_z}{\partial x}, \tag{3.3}$$

mentre da (2.2), proiettando su $\mathbf{i}_2$ ed $\mathbf{i}_3$, otteniamo le

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_y}{\partial x} - B_{0y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta B_{0x}\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \chi\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial x} - \beta B_{0x}\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} + \chi\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}\,. \tag{3.5}$$

Da (2.3) e (2.8) abbiamo poi

$$\frac{\partial \varrho_*}{\partial t} = -\varrho_0\frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = a_0^2\frac{\partial \varrho_*}{\partial t} + \frac{k_T\, a_0^2}{c_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{p_*}{p_0} - \frac{\varrho_*}{\varrho_0}\right). \tag{3.7}$$

Osserviamo intanto che nelle equazioni scritte si manifesta un effetto di accoppiamento dovuto alla corrente Hall.

Richiedendo al sistema (3.1)-(3.7) soluzioni che rappresentano onde piane propagantesi lungo l'asse x (e quindi la dipendenza spazio temporale di tutte le perturbazioni è del tipo $e^{i(\omega t - kx)}$), otteniamo il seguente sistema algebrico lineare omogeneo nelle ampiezze (costanti), indicate con un soprasegno:

$$i\omega\,\bar{v}_x - \frac{ik}{\varrho_0}\,\bar{p}_* + \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0}\,k^2\,\bar{v}_x - \frac{ik\;B_{0y}}{4\pi\mu\varrho_0}\,\bar{b}_y = 0 \tag{3.8}$$

$$i\omega\,\bar{v}_y + \frac{\eta}{\varrho_0}\,k^2\,\bar{v}_y + \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\,ik\,\bar{b}_y = 0 \tag{3.9}$$

$$i\omega\,\bar{v}_z + \frac{\eta}{\varrho_0}\,k^2\,\bar{v}_z + \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\,ik\,\bar{b}_z = 0 \tag{3.10}$$

$$i\omega\,\bar{b}_y + B_{0x}\;ik\,\bar{v}_y - B_{0y}\;ik\,\bar{v}_x + \beta B_{0x}\;k^2\,\bar{b}_z + \chi k^2\,\bar{b}_y = 0 \tag{3.11}$$

$$i\omega\,\bar{b}_z + B_{0x}\;ik\,\bar{v}_z - \beta B_{0x}\;k^2\,\bar{b}_y + \chi k^2\,\bar{b}_z = 0 \tag{3.12}$$

$$\omega\,\bar{\varrho}_* - \varrho_0\;k\,\bar{v}_x = 0 \tag{3.13}$$

$$i\omega\,(\bar{p}_* - a_0^2\,\bar{\varrho}_*) + \frac{k_T\,a_0^2}{c_p}\left(\frac{\bar{p}_*}{p_0} - \frac{\bar{\varrho}_*}{\varrho_0}\right)k^2 = 0. \tag{3.14}$$

Detto D il determinante del sistema lineare omogeneo (3.8)-(3.14) l'equazione di dispersione risulta a conti fatti la seguente

$$D \equiv - i \frac{a_0^2}{c_p} \frac{1}{\omega} D_0 \delta + \tau = 0 \tag{3.15}$$

dove

$$D_0 = k_T \left[\frac{1}{\varrho_0} + \frac{i\omega}{\varrho_0 p_0} (\lambda + 2\eta) \right] k^4 -$$

$$- \left[\frac{\omega^2 k_T}{p_0} - i\omega c_p + \frac{\omega^2 c_p}{a_0^2 \varrho_0} (\lambda + 2\eta) \right] k^2 - \frac{i\omega^3 c_p}{a_0^2},$$

$$\delta = \left[\left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 \right) (i\omega + \chi k^2) + A_x^2 k^2 \right]^2 + \beta^2 B_{0x}^2 k^4 \left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 \right)^2,$$

$$\tau = A_y^2 k^2 \left(i\omega + \frac{k_T a_0^2}{c_p p_0} k^2 \right) \left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 \right) \cdot$$

$$\cdot \left[A_x^2 k^2 + \left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 \right) (i\omega + \chi k^2) \right],$$

con

$$A_x^2 = \frac{B_{0x}^2}{4\pi \mu \varrho_0}, \quad A_y^2 = \frac{B_{0y}^2}{4\pi \mu \varrho_0}$$

($A_x^2 + A_y^2 = A^2$, quadrato della velocita di Alfvén).

Osserviamo che $D_0 = 0$ è l'equazione di dispersione caratterizzante la propagazione di onde acustiche longitudinali in un mezzo viscoso e conduttore del calore (cfr. [2] pag. 310); se si trascurano la viscosità e la conduzione del calore da essa discende per la velocità di fase u

$$u \equiv \frac{\omega}{k} = \pm a_0,$$

caratterizzante l'ordinaria onda acustica.

In assenza di corrente Hall ($\beta = 0$) la (3.15) si spezza nella

$$D_T \equiv \frac{\eta}{\varrho_0} \chi k^4 + \left[A_x^2 + i \left(\frac{\eta}{\varrho_0} + \chi \right) \omega \right] k^2 - \omega^2 = 0 \tag{3.16}$$

e nella

$$D_0 D_T - A_y^2 k^2 \left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 \right) \left(\frac{\omega^2 c_p}{a_0^2} - \frac{i\omega k_T k^2}{p_0} \right) = 0. \tag{3.17}$$

Considerando ω prefissata reale (cioè perturbazioni di prefissata frequenza), la (3.16) descrive due modi di propagazione di onde trasversali [4], non influenzate dalla comprimibilità del mezzo, nei quali la diffusività magnetica (χ) e la viscosità di scorrimento del fluido introducono smorzamento e dispersione. Per $\eta = 0$ e $\chi = 0$ la (3.16) fornisce

$$\omega^2 = A_x^2\, k^2,$$

cioè ritroviamo, come è naturale, l'onda di Alfvén pura.

La (3.17) è l'equazione di dispersione caratteristica delle onde MFD longitudinali in assenza di effetto Hall (cfr. [2] pp. 309-10) e discende dalle (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) e (3.7); si noti la presenza in essa di D_0 e di D_T del cui significato si è detto sopra. La (3.17) è un'equazione di quarto grado completa in k^2 e quindi rappresenta, in generale, quattro possibili modi di propagazione che risultano dall'accoppiamento di onde di Alfvén, onde acustiche, diffusione viscosa e conduzione del calore.

La (3.15) mette perciò in rilievo che la presenza della corrente Hall ha l'effetto di accoppiare le onde MFD trasversali a quelle longitudinali.

Passiamo ora ad esaminare due casi particolari di interesse.

3.1. *Campo magnetico ortogonale alla direzione di propagazione* ($B_{0x} = 0$).

Nel caso presente scompare l'influenza della corrente Hall, come si deduce dalle (3.4) e (3.5), e perciò, per questo caso, sussistono inalterati i risultati di [1] e [2] ricavati, come si è detto, nella ipotesi di assenza di detta corrente.

3.2. *Campo magnetico parallelo alla direzione di propagazione* ($B_{0y} = 0$).

Scegliamo $\mathbf{i}_1$ in modo da avere $\mathbf{B}_0 = B_0\,\mathbf{i}_1$ ($B_0 = |\mathbf{B}_0|$). La (3.15), essendo ora $\tau = 0$, si spezza nella

$$D_0 = 0, \tag{3.2·1}$$

equazione di dispersione puramente gasdinamica caratterizzante, come si è visto, la propagazione di onde acustiche longitudinali in un fluido viscoso

---

(4) La (3.16) discende direttamente dalle (3.3) e (3.5) le quali, in assenza di corrente Hall ($\beta = 0$), sono disaccoppiate dalle altre equazioni; in esse compaiono solo le perturbazioni v_z e b_z, componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ lungo una direzione ortogonale a quella di propagazione, onde il nome di onde trasversali.

e conduttore del calore, e nella

$$\left[\left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0}\, k^2\right)(i\omega + \chi\, k^2) + A^2\, k^2\right]^2 + \beta_*^2\, k^4 \left(i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0}\, k^2\right)^2 = 0 \tag{3.2-2}$$

dove si è posto

$$\beta_* = \beta\, B_0 . \tag{3.2-3}$$

La (3.2-2) non è influenzata nè dalla comprimibilità del mezzo, nè dalla conduzione del calore (5); essa coincide con l'equazione di dispersione caratterizzante la propagazione nella direzione del campo magnetico di onde MFD piane nel fluido incomprimibile, cfr. [6] Eq. (6.1-18). Possiamo di conseguenza trarre la conclusione che i risultati trovati in [6] ai n.i 6.2 e 7, relativi alla propagazione di onde di Alfvén modificate dalla corrente Hall nel fluido incomprimibile, sussistono anche per il fluido comprimibile conduttore del calore preso in esame nel presente lavoro.

Notiamo come la presenza di una componente non nulla del campo magnetico ortogonalmente alla direzione di propagazione delle perturbazioni ($B_{0y} \neq 0$) produce un accoppiamento fra le onde puramente gasdinamiche caratterizzate dalla (3.2-1) e quelle MFD caratterizzate dalla (3.2-2).

Osserviamo infine che, nel caso presente ($B_{0y} = 0$), le equazioni (3.1), (3.6) e (3.7) sono disaccoppiate dalle altre: esse contengono solo grandezze gasdinamiche (p_*, ϱ_* e v_x) e conducono alla (3.2-1). Le rimanenti equazioni (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), contenenti sia grandezze gasdinamiche (v_y e v_z) che magnetiche (b_y e b_z), conducono alla (3.2-2).

4. Perturbazioni cilindriche.

Come in [6] (Parte II), dove lo studio di questo tipo di perturbazioni è svolto per il fluido incomprimibile, anche qui supponiamo che nello stato imperturbato il fluido sia in quiete e soggetto ad un campo magnetico uniforme di induzione $\mathbf{B}_0$. Introduciamo una terna $\mathcal{T}$ di coordinate cilindriche ortogonali r, φ, z di corrispondenti versori $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ con $\mathbf{e}_z$ parallelo e concorde a $\mathbf{B}_0$; supponiamo inoltre le perturbazioni dotate di simmetria cilindrica rispetto all'asse z.

Indichiamo nel seguito con v_r, v_φ, v_z, e con b_r, b_φ, b_z le compo-

---

(5) Per $\chi = 0$, $\eta = 0$, $\beta = 0$ la (3.2-2) ridà la $\omega^2 = A^2 k^2$ caratterizzante l'onda di Alfvén pura.

nenti fisiche relative alla terna $\mathcal{T}$ dei due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ (proiezioni di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ secondo $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ ed $\mathbf{e}_z$ rispettivamente).

Proiettando la (2.1) su $\mathcal{T}$ abbiamo

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p_*}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] - \tag{4.1}$$

$$-\frac{\eta}{\varrho_0}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) + \frac{B_0}{4\pi\mu\,\varrho_0}\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\eta}{\varrho_0}\left\{\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\varphi)\right]\right\} + \frac{B_0}{4\pi\,\mu\varrho_0}\frac{\partial b_\varphi}{\partial z} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p_*}{\partial z} + \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] - \tag{4.3}$$

$$-\frac{\eta}{\varrho_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right].$$

La (2.2) proiettata su $\mathcal{T}$ dà

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_r}{\partial z} + \beta_*\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial z^2} - \chi\left(\frac{\partial^2 b_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{\partial^2 b_r}{\partial z^2}\right) \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \beta_*\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r}\right) + \chi\left\{\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,b_\varphi)\right]\right\} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = -\frac{B_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) - \beta_*\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,b_\varphi)\right] - \chi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r}\right)\right] \tag{4.6}$$

dove β_* è data dalla (3.2-3).

Da (2.3) discende

$$\frac{\partial \varrho_*}{\partial t} = -\varrho_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \tag{4.7}$$

e da (2.8) infine

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = a_0^2\frac{\partial \varrho_*}{\partial t} + \frac{k_T\,a_0^2}{cp}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_*}{p_0} - \frac{\varrho_*}{\varrho_0}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{p_*}{p_0} - \frac{\varrho_*}{\varrho_0}\right)\right\}. \tag{4.8}$$

Le (4.1)-(4.8) costituiscono un sistema determinato lineare di otto equazioni differenziali scalari alle derivate parziali nelle otto funzioni incognite v_r, v_φ, v_z, b_r, b_φ, b_z, p_* e ϱ_*.

Dato che in [1] e [2] non vengono considerate le perturbazioni cilindriche, ma solo quelle piane, appare opportuno esaminare qui dapprima il

4.1. *Caso in cui la corrente Hall possa essere trascurata* ($\beta = 0$).

In tal caso v_φ e b_φ compaiono solo nelle equazioni (4.2) e (4.5) dalle quali sono assenti le altre perturbazioni, il che indica che le oscillazioni torsionali sono ora completamente disaccoppiate da quelle nei piani meridiani. Ciò accade, oltre che per il fluido in esame, anche per quello incomprimibile, cfr. [6] n. 9, e per quello comprimibile in condizioni adiabatiche, come è facile vedere; per di più le equazioni differenziali (4.2) e (4.5) che descrivono le oscillazioni torsionali valgono inalterate per tutti e tre i tipi di fluido.

Il sistema di equazioni differenziali (4.2) e (4.5) ammette, fornendo la equazione di dispersione (4.1-2), la seguente soluzione, regolare sull'asse, corrispondente alla propagazione di onde cilindriche lungo l'asse z, :

$$(4.1\text{-}1) \qquad \begin{cases} v_\varphi = \overline{v}_\varphi \, J_1(\gamma\, r)\, e^{i(\omega t - kz)} \\ b_\varphi = \overline{b}_\varphi \, J_1(\gamma\, r)\, e^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

dove $\overline{v}_\varphi$ e $\overline{b}_\varphi$ sono delle costanti, J_1 la funzione di Bessel di prima specie di ordine uno e γ una costante reale non nulla. La equazione di dispersione corrispondente è

$$(4.1\text{-}2) \qquad A^2 k^2 + \left[i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0}(\gamma^2 + k^2)\right][i\omega + \chi(\gamma^2 + k^2)] = 0$$

che per $\eta = 0$, $\chi = 0$ si riduce alla

$$(4.1\text{-}2)' \qquad \omega^2 - A^2 k^2 = 0.$$

La (4.1-2) posto

$$w = i\omega$$

si può mettere nella forma

$$(4.1\text{-}2)'' \qquad w^2 + \left(\chi + \frac{\eta}{\varrho_0}\right)(k^2 + \gamma^2)\, w + A^2 k^2 + \chi \frac{\eta}{\varrho_0}(k^2 + \gamma^2)^2 = 0.$$

La (4.1-2)'', per ogni prefissato valore reale di k, non ammette mai per w nè radici reali positive, nè radici complesse a parte reale positiva. Si può perciò concludere che le oscillazioni torsionali di prefissata lunghezza d'onda sono sempre stabili.

Passiamo ora allo studio delle oscillazioni nei piani meridiani. Il sistema di equazioni differenziali che caratterizza questo tipo di oscillazioni è costituito dalle (4.1), (4.3), (4.4) e (4.6) con $\beta_* = 0$, (4.7) e (4.8). Tale sistema ammette, fornendo la equazione di dispersione (4. 1-10), la seguente soluzione, regolare sull'asse, corrispondente alla propagazione di onde cilindriche lungo l'asse z

$$
(4.1\text{-}3) \qquad \begin{cases} v_r = \overline{v}_r \, J_1(\gamma r) \, e^{i(\omega t - kz)} \\ v_z = \overline{v}_z \, J_0(\gamma r) \, e^{i(\omega t - kz)} \\ b_r = \overline{b}_r \, J_1(\gamma r) \, e^{i(\omega t - kz)} \\ b_z = \overline{b}_z \, J_0(\gamma r) \, e^{i(\omega t - kz)} \\ \varrho_* = \overline{\varrho}_* \, J_0(\gamma r) \, e^{i(\omega t - kz)} \\ p_* = \overline{p}_* \, J_0(\gamma r) \, e^{i(\omega t - kz)} \end{cases}
$$

dove i simboli hanno significato analogo a quelli della (4.1-1). La costante γ potrà poi determinarsi con le condizioni al contorno (cfr. [6] n. 9).

Il sistema algebrico lineare omogeneo corrispondente alla soluzione (4.1-3) è

$$
(4.1\text{-}4) \qquad i\omega \, \overline{v}_r - \frac{\gamma}{\varrho_0} \overline{p}_* + \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} \gamma (\gamma \overline{v}_r - ik \overline{v}_z) + \frac{\eta}{\varrho_0} (ik\gamma \, \overline{v}_z + k^2 \overline{v}_r) - \\ - \frac{B_0}{4\pi\mu \, \varrho_0} (\gamma \, \overline{b}_z - ik \overline{b}_r) = 0
$$

$$
(4.1\text{-}5) \qquad i\omega \, \overline{v}_z - \frac{\overline{p}_*}{\varrho_0} ik + ik \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} (\gamma \, \overline{v}_r - ik \overline{v}_z) + \frac{\eta}{\varrho_0} (-\gamma ik \, \overline{v}_r + \gamma^2 \overline{v}_z) = 0
$$

$$
(4.1\text{-}6) \qquad i\omega \, \overline{b}_r + B_0 \, ik \, \overline{v}_r + \chi \, (i\gamma k \, \overline{b}_z + k^2 \, \overline{b}_r) = 0
$$

$$
(4.1\text{-}7) \qquad i\omega \, \overline{b}_z + \gamma B_0 \, \overline{v}_r + \chi \, (-\gamma ik \, \overline{b}_r + \gamma^2 \, \overline{b}_z) = 0
$$

$$
(4.1\text{-}8) \qquad i\omega \, \overline{\varrho}_* + \varrho_0 (\gamma \, \overline{v}_r - ik \, \overline{v}_z) = 0
$$

$$
(4.1\text{-}9) \qquad i\omega \, \overline{p}_* - a_0^2 \, i\omega \, \overline{\varrho}_* + \frac{k_T \, a_0^2}{c_p} (\gamma^2 + k^2) \left(\frac{\overline{p}_*}{p_0} - \frac{\overline{\varrho}_*}{\varrho_0} \right) = 0.
$$

Questo sistema conduce a conti fatti alla seguente equazione di dispersione :

$$[-\omega + i\chi(\gamma^2 + k^2)]\,\omega\,F_0(\omega, k) + iA^2 M(\gamma^2 + k^2) = 0 \tag{4.1-10}$$

dove

$$M = \left[i\omega^2 + \frac{k_T a_0^2}{c_p p_0}\,\omega\,(\gamma^2 + k^2)\right]\left[i\omega + \frac{\lambda + \eta}{\varrho_0}\,k^2 + \frac{\eta}{\varrho_0}\,(\gamma^2 + k^2)\right] +$$

$$+ a_0^2\,\omega\,k^2 - \frac{ik_T a_0^2}{\varrho_0 c_p}(\gamma^2 + k^2)\,k^2$$

e $F_0(\omega, k)$ eguagliata a zero fornisce l'equazione di dispersione, puramente gasdinamica, caratterizzante le oscillazioni cilindriche nei piani meridiani in un fluido viscoso conduttore del calore in assenza di campo magnetico. L'espressione esplicita di $F_0(\omega, k)$ si ricava imponendo l'annullamento del determinante del sistema: (4.1-4) con $B_0 = 0$, (4.1-5), (4.1-8), (4.1-9); essa risulta

$$F_0(\omega, k) = c_1 k^6 + c_2 k^4 + c_3 k^2 + c_4\,, \tag{4.1-11}$$

dove le espressioni di c_1, c_2, c_3 e c_4, funzioni di ω, facilmente calcolabili, non si riportano qui per brevità. La (4.1-11) indica che, per ogni prefissato valore reale della frequenza ci sono, in generale, tre modi di propagazione. Nel caso non dissipativo risulta $F_0(\omega, k) = i\omega\,[-\omega^2 + a_0^2(\gamma^2 + k^2)]$ e quindi l'equazione di dispersione diventa

$$\omega^2 - a_0^2(\gamma^2 + k^2) = 0. \tag{4.1-12}$$

Notiamo che con la posizione

$$\bar{k}^2 = k^2 + \gamma^2$$

la equazione di dispersione (4.1-12) assume la stessa forma di quella delle onde acustiche piane, con $\bar{k}$ al posto di k. Per ogni prefissato valore reale di k, la (4.1-12) fornisce per ω due valori reali ed opposti e quindi la velocità di fase $u = \omega/k$ risulta sempre reale (onde stabili). Se invece si prefissa un valore reale di ω, la (4.1-12) indica che, solo se $\omega^2 > \omega_c^2$, con

$$\omega_c^2 = a_0^2\,\gamma^2 \tag{4.1-13}$$

si hanno per k due valori reali ed opposti corrispondenti ad un effettivo modo di propagazione, mentre per $\omega^2 < \omega_c^2$ si hanno per k due valori immaginari puri (opposti) e perciò non si ha più un effettivo modo di propagazione. C'è quindi una frequenza critica il cui valore, precisato dalla (4.1-13), dipende dalle condizioni al contorno. Per esempio, se queste richiedono l'annullamento di v_r su una superficie cilindrica di raggio R con generatrici parallele all'asse z, abbiamo

$$\gamma^2 = \frac{\alpha_i^2}{R^2} \quad (i = 1,2,3, \ldots) \tag{4.1-14}$$

con α_i i-mo zero di J_1.

Osserviamo che, mentre per il fluido incomprimibile le oscillazioni torsionali e quelle nei piani meridiani danno origine alla stessa equazione di dispersione (cfr. [6] pag. 20), ciò non accade più per il fluido comprimibile, sia se conduttore del calore, sia se in condizioni adiabatiche, come indicano le (4.1-2) e (4.1-10).

Passiamo infine ad esaminare il

4.2. *Caso di corrente Hall non trascurabile* ($\beta \neq 0$).

Notiamo anzitutto che la corrente Hall manifesta un effetto di accoppiamento fra le oscillazioni torsionali e quelle nei piani meridiani, come indicano le equazioni (4.4), (4-5) e (4.6).

Procedendo poi come al n. 4.1, si riscontra che il sistema (4.1) (4.8), anche in presenza di detta corrente, ammette la soluzione (4.1-1)-(4.1-3). Nel caso generale, a causa dell'effetto di accoppiamento di cui sopra, la equazione di dispersione risulta algebricamente assai complicata e, non offrendo particolarità di rilievo, non si riporta qui per brevità. Nel caso in cui siano trascurabili gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità, alla conducibilità elettrica finita e alla conduzione del calore ($\lambda = 0, \eta = 0, \chi = 0, k_T = 0$) essa assume la forma seguente:

$$\omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \tag{4.2-1}$$

con

$$a_1 = -[A^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)(A^2 + a_0^2 + \beta_*^2 k^2)]$$

$$a_2 = k^2 (\gamma^2 + k^2)[A^4 + \beta_*^2 a_0^2 (\gamma^2 + k^2) + 2a_0^2 A^2]$$

$$a_3 = - A^4 a_0^2 k^4 (\gamma^2 + k^2).$$

La (4.2-1) indica che, per ogni prefissato valore reale del numero d'onda, ci sono, in generale, tre modi di propagazione. Nessuno di questi tre modi ha carattere diffusivo in quanto la (4.2-1) non ammette mai per ω radici immaginarie pure, come si deduce considerando la (4.2-1) come un'equazione cubica in ω^2 e tenendo presente che è sempre $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ ed $a_3 < 0$.

Alla (4.2-1) si può dare la forma

$$(4.2\text{-}2) \qquad [\omega^2 - A^2 k^2]\{\omega^4 - \omega^2 (a_0^2 + A^2)(\gamma^2 + k^2) + A^2 a_0^2 k^2 (\gamma^2 + k^2)\} + \\ + \beta_*^2 k^2 \omega^2 (\gamma^2 + k^2)(a_0^2 (\gamma^2 + k^2) - \omega^2) = 0.$$

Il termine fra parentesi quadre eguagliato a zero è l'equazione di dispersione caratterizzante le oscillazioni torsionali nel caso di assenza di effetto Hall e di dissipazione (cfr. (4.1.-2)'); quello fra parentesi graffe eguagliato a zero dà invece, per il medesimo caso, l'equazione di dispersione caratterizzante le oscillazioni nei piani meridiani (quest'ultima discende da (4.1-10) ponendovi $\lambda = 0, \eta = 0, \chi = 0$ e $k_T = 0$).

La (4.2-2) mette ancora in evidenza l'effetto di accoppiamento della corrente Hall sui suddetti due tipi di oscillazioni.

5. Conclusioni.

Perturbazioni piane.

1) Nel caso di propagazione in direzione generica si é determinata e discussa l'equazione di dispersione, (3.15), la quale, fra l'altro, mette in rilievo un effetto di accoppiamento dovuto alla corrente Hall fra le onde MFD trasversali e quelle longitudinali.

2) Nel caso di propagazione in direzione ortogonale al campo magnetico scompare l'influenza della corrente Hall e perciò, per questo caso, sussistono inalterati i risultati di [1] e [2] ricavati nell'ipotesi di assenza di detta corrente.

3) Nel caso di propagazione nella direzione del campo magnetico l'equazione di dispersione si spezza in due: la prima, puramente gasdinamica, descrive la propagazione di onde acustiche longitudinali in un fluido viscoso e conduttore del calore; la seconda, MFD, descrive onde di Alfvèn modificate dalla corrente Hall. Questa seconda equazione coincide con quella relativa al fluido incomprimibile stabilita in un precedente lavoro [6]: per conseguenza si trasportano qui risultati trovati in detto lavoro.

Perturbazioni cilindriche.

(a) *Assenza di effetto Hall*

1) Le oscillazioni torsionali sono disaccoppiate da quelle nei piani meridiani e vengono descritte dalle stesse equazioni differenziali nei tre casi: fluido incomprimibile, fluido comprimibile in condizioni adiabatiche, fluido comprimibile conduttore del calore.

2) Si stabiliscono le soluzioni (4.1-1)-(4.1-3) con le relative equazioni di dispersione (4.1-2) e (4.1-10). Da esse discende, fra l'altro, che le oscillazioni torsionali di prefissata lunghezza d'onda sono sempre stabili e che, mentre nel caso del fluido incomprimibile le oscillazioni torsionali e quelle nei piani meridiani danno origine alla stessa equazione di dispersione, ciò non accade più per il fluido comprimibile sia se conduttore del calore sia se in condizioni adiabatiche.

3) Nel caso puramente gasdinamico non dissipativo infine si mette in evidenza, per le onde di prefissata frequenza, un effetto di soglia, con frequenza critica indicata dalla (4.1-13).

(b) *Presenza di effetto Hall.*

4) La corrente Hall manifesta un effetto di accoppiamento fra le oscillazioni torsionali e quelle nei piani meridiani.

5) Anche in presenza di detta corrente sussistono le soluzioni (4.1-1)-(4.1-3).

6) Nel caso non dissipativo si trova che le perturbazioni di prefissata lunghezza d'onda non sono mai diffusive.

Università di Pisa

Appendice.

Nel presente lavoro, come ordinariamente vien fatto in magnetogasdinamica (cfr. Introduzione), si è assunta quale equazione di stato quella del gas perfetto. In effetti di tale assunzione si può fare a meno ritenendo un'equazione di stato di forma generale e procedendo, nello stabilire le equazioni delle perturbazioni, in modo analogo a quanto fatto nel n. 2 del successivo mio lavoro: « Sulla instabilità gravitazionale di un fluido comprimibile conduttore del calore », in corso di stampa sul Bollettino U. M. I..

BIBLIOGRAFIA

[1] SHIH I PAI, *Magnetogasdynamics and Plasma dynamics*, Wien, Springer-Verlag, 1962.

[2] W. F. HUGHES, F. J. YOUNG, *The electromagnetodynamics of fluids*, J. Wiley, New York, 1966.

[3] A. M. PRATELLI, *Analogia tra viscosità magnetica e conducibilità termica nelle piccole perturbazioni di fluidi comprimibili*, Nota I, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. A 97, 1963, 3-22.

[4] A. M. PRATELLI, Nota II, ibidem, 139-154.

[5] A. M. PRATELLI, *Sulla influenza delle varie viscosità nella propagazione di piccole perturbazioni in magnetofluidodinamica*, ib., 699-715.

[6] G. MATTEI, *Sulla influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un fluido incomprimibile*, Annali di Matematica pura ed applicata, 84, 1970, 1-32.

[7] W. R. SEARS, E. L. RESLER JR, *Magneto-aerodynamic flow past bodies*, Advances in Applied Mechanics, 8, 1964, 1-68.

[8] T. TANIUTI, *The effect of finite conductivity on the propagation of hydromagnetic slow waves*, J. Math. Anal. Appl. 6, 1963, 377-386.

[9] G. SUTTON, A. SHERMAN, *Engineering magnetohydrodynamics*, Mc Graw-Hill, New York, 1965.

[10] J. SERRIN, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, Hand. der Phys., VIII/1, 1959.