Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

G. Dinca

Opérateurs monotones dans la théorie de plasticité

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 3 (1970), p. 357-399

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_3_357_0>

OPÉRATEURS MONOTONES DANS LA THÉORIE DE PLASTICITÉ

G. DINCA

1. Résultats préliminaires.

Soient X et Y deux espaces de Banach réflexifs et réels, et soient X^* et Y^* leurs duals. Pour chaque $x \in X$, $x^* \in X^*$, notons

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle = \langle x, x^* \rangle .$$

Soit P un opérateur non-linéaire de X à Y.

DÉFINITION 1. [28] On dit que l'opérateur P est différentiable au sens de Gâteaux sur X s'il existe un opérateur (VP) de X à l'ensemble des opérateurs homogènes définis sur X et aux valeurs dans Y et tel que

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} = (VP)(x) \cdot h \,;\, x, h \in X \tag{1,1}$$

S'il existe un opérateur (DP) de X à l'ensemble des opérateurs linéaires définis sur X et aux valeurs dans Y, et tel que

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} = (DP)(x) \cdot h \,;\, x, h \in X \tag{1,2}$$

on dit que P possède une différentielle au sens de Gâteaux linéaire sur X; s'il existe un opérateur P' de X à l'ensemble des opérateurs linéaires et continus définis sur X et aux valeurs dans Y et tel que

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} = P'(x) \cdot h \,;\, x, h \in X \tag{1,3}$$

Pervenuto alla Redazione il 17 Ott. 1969 ed in forma definitiva il 9 Dic. 1969.

on dit que l'opérateur P est dérivable au sens de Gâteaux sur X. Si $Y = R$ nous obtenons les définitions correspondantes pour des fonctionnelles non-linéaires.

Si dans la définition (1,1) on a $x \in \omega, \omega \subset X$, alors on dit que l'opérateur P est différentiable, ou dérivable respectivement sur ω.

Théorème 1. (formule de Lagrange) ([16], [28]) Si la différentielle au sens de Gâteaux de la fonctionnelle f existe en chaque point d'un ensemble convexe $\omega \subset X$, alors, pour chaque $x, x + h \in \omega$, on a

$$(1,4) \qquad f(x+h) - f(x) = (Vf)(x + \tau h)\cdot h, \quad 0 < \tau < 1$$

Théorème 2. [28] Soit $P: X \to Y$. Si le différentielle au sens de Gâteaux de l'opérateur P existe en chaque point d'un ensemble convexe $\omega \subset X$, alors, pour chaque $x, x + h \in \omega$, $e \in Y^*$, $\| e \| = 1$, on a

$$(1,5) \qquad \langle P(x+h) - P(x), e \rangle = \langle (VP)(x + \tau h)\cdot h, e \rangle.$$

Théorème 3. ([16], [28]) Soit $P: X \to Y$. Si P est différentiable au sens de Gâteaux dans $x_0 \in X$, alors

$$(1,6) \qquad \lim_{t \to 0} \| P(x_0 + th) - P(x_0) \| = 0, \quad h \in X.$$

Définition 2. ([19], [28]) Supposons que la fonctionnelle f soit dérivable au sens de Gâteaux sur $\omega \subset X$.

On appelle gradient de la fonctionnelle f sur ω, l'opérateur $P: X \to X^*$ et tel que

$$(1,7) \qquad \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \langle P(x), h \rangle, x \in \omega, h \in X.$$

Définition 3. [28] Soit $P: X \to X^*$. on dit que l'opérateur P est potentiel sur $\omega \subset X$, s'il existe une fonctionnelle f telle que

$$(\text{grad } f)(x) = P(x), \quad x \in \omega.$$

Le théorème suivant donne une condition necessaire et suffisante de potentialité pour les opérateurs définis sur X et aux valeurs dans X^*, qui possèdent une différentielle linéaire au sens de Gâteaux.

Théorème 4. [28] Soit $P: X \to X^*$. Supposons que:

1) P possède une différentielle linéaire au sens de Gâteaux en chaque point de la boule $D: \| x - x_0 \| < r$;

2) en chaque point $x \in D$, la fonctionnelle $\langle (DP)(x) \cdot h_1 , h_2 \rangle$ est continue par rapport à x.

Dans ces hypothèses, une condition necessaire et suffisante pour que l'opérateur P soit potentiel dans la boule D est l'égalité

$$(9.1) \qquad \langle (DP)(x) \cdot h_1 , h_2 \rangle = \langle (DP)(x) \cdot h_2 , h_1 \rangle$$

pour $x \in D, h_1 , h_2 \in X$.

REMARQUE. La condition 2) peut être remplacée par la condition plus faible que $\langle (DP)(x) \cdot h_1 , h_2 \rangle$ soit continue par rapport à x en chaque hyperplan bidimensionnel qui contient x.

Si les hypothèses du théorème 4 sont satisfaites, alors, la fonctionnelle qui a l'opérateur P comme gradient a la forme [28]

$$(1,10) \qquad f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \langle P(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \, dt$$

l'integrale ayant un sens en vertu du théorème 3.

Le théorème 4 reste velable si la boule D est remplacée par une ensemble simplement conexe ([28] p. 183).

DÉFINITION 4. [1] Un opérateur $T : X \rightarrow X^*$ est monotone d'après Minty-Browder sur la variété linéaire $\mathcal{D}(T) \subset X$ si pour chaque $u, v \in \mathcal{D}(T)$ on a

$$(1,11) \qquad \langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq 0.$$

Si dans (1,11) l'égalité a lieu seulement pour $u = v$, T est strictement monotone sur $\mathcal{D}(T)$.

Voici un problème : soit Ω un borné dont la frontière S satisfait aux conditions necessaires pour établir les formules de Green et les théorèmes d'immersion de Sobolev ([26], [22]).

Supposons que l'on desire resoudre l'équation

$$(1,12) \qquad Pu = f$$

où P est un opérateur différentiel non-linéaire et f est une fonction définie sur Ω, avec les conditions aux limites linéaires et homogènes

$$(1,13) \qquad \Gamma_i u = 0 \quad i = 1, \dots , s.$$

La fonction f sera considerée comme appartenant à un espace de Hilbert $H(\Omega)$ réel.

Le reponse est donné par le théorème suivant: [14].

Théorème 5. Soit $M \subseteq H(\Omega)$ l'ensemble des points de $H(\Omega)$ avec la propriété $P(M) \subseteq H(\Omega)$, et soit $M^0 \subseteq M$ l'ensemble des points de M satisfaisant aux conditions aux limites (1,13). Supposons que:

1⁰) M^0, M sont linéaires et M^0 est dense dans $H(\Omega)$;

2⁰) l'opérateur P possède une différentielle au sens de Gâteaux $(DP)(u) \cdot h$ pour chaque $u, h \in M$, linéaire par rapport à h et continue par rapport à u en chaque hyperplan bidimensionel qui contient u;

3⁰) $P(0) = 0$;

4⁰) Pour chaque $u \in M, h_1, h_2 \in M^0$, nous avons

$$\langle (DP)(u) \cdot h_1, h_2 \rangle = \langle (DP)(u) \cdot h_2, h_1 \rangle; \tag{1,15}$$

5⁰) pour chaque $u \in M, h \in M^0, h \neq 0$, on a

$$\langle (DP)(u) \cdot h, h \rangle > 0; \tag{1,16}$$

Dans ces conditions

a) si une solution $u_0 \in M^0$ de l'équation (1,12) existe, cette solution est unique et réalise sur M^0 le minimum de la fonctionnelle

$$F(u) = \Phi(u) - \langle f, u \rangle, \tag{1,17}$$

où

$$\Phi(u) = \int_0^1 \langle P(tu), u \rangle \, dt. \tag{1,18}$$

b) Réciproquement, l'élément de l'ensemble M^0 qui réalise le minimum de la fonctionnelle (1.17) sur M^0 satisfait l'équation (1,12).

Remarque 1. La condition $P(0) = 0$ peut être toujours considérée comme satisfaite, car si $P(0) = w, w \neq 0$, alors, l'opérateur $P_w u = Pu - w$ satisfait à la condition 3⁰.

Il satisfait à toutes les autres conditions du théorème si P les vérifie. Donc, l'équation (1,12) peut etre remplacée par l'équation équivalente

$$P_w u = f - w.$$

REMARQUE 2. Une conséquence de la condition 5^0 est que l'opérateur P est strictement monotone au sens de Minty-Browder.

En effet, ([19], p. 302, [32]) nous avons

$$Pu - Pu_0 = \int_0^1 (DP)(u_0 + t(u - u_0)) \cdot (u - u_0)\, dt \tag{1,20}$$

et, tenant compte de la condition 5^0 on obtient

$$\langle Pu - Pu_0, u - u_0 \rangle > 0, \tag{1,20}$$

c'est-à-dire P est strictement monotone au sens de Minty-Browder.

Il résulte alors, que si l'équation (12,1) a une solution dans M^0, cette solution est unique. En effet, s'il existait deux solutions différentes u_1, u_2 de l'équation (1,12) et qui se trouvent dans M^0, alors, compte tenu de

$$Pu_1 = Pu_2 = f$$

on aurait

$$\langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle = 0.$$

Mais d'autre part on a

$$\langle Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 \rangle > 0$$

car $u_1 \neq u_2$ et P est strictement monotone sur M^0. Nous avons obtenu une contradiction.

REMARQUE 3. Le théorème 5 généralise un théorème variationnel connu pour les opérateurs linéaires et positifs sur les espaces de Hilbert. Supposons, en effet, que P est linéaire. Alors ([16], p. 141)

$$(DP)(u) \cdot h = Ph, u, h \in M$$

et le théorème 5 devient.

THÉORÈME 5'. Soit $H(\Omega)$ un espace de Hilbert réel et soit P un opérateur linéaire, $P: M \to H(\Omega)$, $M \subseteq H(\Omega)$.

Soit M^0 l'ensemble des points de M satisfaisant aux conditions aux limites (1,13). Supposons que

1) M^0, M sont linéaires, M^0 est dense dans $H(\Omega)$;

2) pour chaque $h_1, h_2 \in M^0$ on a

$$\langle Ph_1, h_2 \rangle = \langle Ph_2, h_1 \rangle \tag{1,21}$$

3) pour chaque $h \in M^0$, $h \neq 0$, on a

$$\langle Ph, h \rangle > 0. \tag{1,22}$$

Alors

a) si une solution $u_0 \in M^0$ de l'équation (1,12) existe, cette solution est unique et réalise sur M^0 le minimum de la fonctionnelle

$$F(u) = \Phi(u) - \langle f, u \rangle, \tag{1,23}$$

où

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \langle Pu, u \rangle. \tag{1,24}$$

b) reciproquement, l'élément de M^0 qui réalise sur M^0 le minimum de la fonctionnelle (1,23), satisfait à l'équation (1,12).

Faisons une remarque sur la démonstration directe, connue pour le théorème 5′ (voir [18], p. 12). La première partie du théorème 5′ admet la démonstration suivante: si $u_0 \in M^0$ et $Pu_0 = f$, alors

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle Pu, u \rangle - \langle f, u \rangle = \frac{1}{2} \langle Pu, u \rangle - \langle Pu_0, u \rangle$$

$$= \frac{1}{2} [\langle Pu, u \rangle - \langle Pu_0, u \rangle - \langle Pu, u_0 \rangle]$$

ainsi donc

$$F(u) = \frac{1}{2} [\langle Pu - Pu_0, u - u_0 \rangle - \langle Pu_0, u_0 \rangle]. \tag{1,25}$$

Tenant compte que pour chaque $u \neq u_0$ on a

$$\langle Pu - Pu_0, u - u_0 \rangle = \langle P(u - u_0), u - u_0 \rangle > 0$$

il résulte que le minimum de $F(u)$ se réalise pour $u = u_0$ et il égale $-\frac{1}{2} \langle Pu_0, u_0 \rangle$. La formule (1,25) une fois obtenue, la conclusion que u_0 réalise le minimum de la fonctionnelle (1,23) est une simple conséquence du fait que P est strictement monotone sur M^0. Mais pour obtenir (1,25) on a utilisé la symetrie de l'opérateur P. Nous ne connaissons pas d'exemple d'opérateur non-linéaire, monotone et symétrique. Si un tel exemple serait donné, la remarque antérieure permetrait de donner pour lui un théorème analogue au théorème 5′ connu pour les opérateurs linéaires et positifs, qui sont des cas particulièrs des opérateurs monotones d'après Minty-Browder.

REMARQUE 4. La forme de le fonctionnelle (1,18) et l'idée de la démonstration du théorème 5 (voir [14]) sont inspirées par la demonstration du théorème de potentialité 4 (voir [28], p. 80) Remarquons enfin que le théorème 5 réclame soit l'existence dans M^0 de la solution de l'équation (1,12) et alors il affirme que cette solution realise le minimum de la fonctionnelle (1,17) sur M^0; soit que s'il existe $u_0 \in M^0$ réalisant le minimum de la fonctionnelle (1,17) sur M^0, alors u_0 est une solution de l'équation (1,12). Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour avoir la deuxième alternative, c'est-à-dire pour avoir un minimum sur M^0 de la fonctionnelle (1,17).

THÉORÈME 6. [14] Si dans le théorème 5 la condition 5^0 est remplacée par la condition plus forte

$$\langle (DP)(u)\cdot h, h \rangle \geq \gamma^2 \| h \|^2, \qquad u \in M, \; h \in M^0, \; \gamma = cte. \tag{1,26}$$

alors :

a) la fonctionnelle (1,17) est inférieurement bornée sur M^0;

b) F est strictement convexe sur M^0, c'est-à-dire

$$F(u) + F(v) - 2F\left(\frac{u+v}{2}\right) > 0; \qquad u, v \in M^0, \; u \neq v; \tag{1,27}$$

c) chaque suite minimisante de la fonctionnelle $F(u)$ a une limite dans $H(\Omega)$.

DÉFINITION 5. On apelle solution généralisée de l'équation (1,12) avec les conditions aux limites (1,13) toute limite d'une suite minimisante de $F(u)$.

THÉORÈME 7. [14]. La solution généralisée de l'équation (1,12) avec les conditions aux limites (1,13) est unique. Supposons qu'il existe $u_0 \in M$ de sorte que pour chaque $u \in M$, $h \in M^0$, non seulement la condition (1,26) est satisfaite mais aussi que l'on ait

$$\langle (DP)(u)\cdot h, h \rangle \geq \gamma_1^2 \langle (DP)(u_0)\cdot h, h \rangle. \tag{1,28}$$

Désignons par H_0 l'espace énérgétique de l'opérateur $(DP)(u_0)$ (voir [19], p. 316). On obtient alors le

THÉORÈME 8. ([19], p. 316). La solution généralisée de l'équation (1,12) appartient non seulement à $H(\Omega)$, mais également à H_0.

2. La fonctionnelle de la théorie de Hencky-Nadai.

Sur le domaine Ω et sur sa frontière S nous faisons les memes hypothèses comme dans le premier châpitre.

Le problème mathématique de la théorie des petites déformations élastico-plastiques (la théorie de Hencky-Nadai) est le suivant: trouver les fonctions $u_i(\mathbf{x})$ de classe $C^{(2)}$ dans $\Omega + S$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ et $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ de classe $C^{(1)}$ dans $\Omega + S$ satisfaisant au système et aux conditions aux limites suivantes ([12], [15]):

$$(2,1) \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{x} \in \Omega + S;$$

$$(2,2) \qquad \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} = 2\dfrac{\tau_0}{\gamma_0}\bar{\varepsilon}_{ij}, & i, j = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{x} \in \Omega + S \\ \sigma = 3k\varepsilon, & 3k = 3\lambda + 2\mu, \qquad \mathbf{x} \in \Omega + S \end{cases}$$

$$(2,3) \qquad \frac{\varrho\sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$(2,4) \qquad \sigma_{ij} n_j = p_i \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{x} \in S_1.$$

$$(2,5) \qquad u_i = u_i^0 \qquad i = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{x} \in S_2; \; S_1 + S_2 = S.$$

Du point de vue mécanique, les u_i sont les compusantes du vecteur déplacement en $\mathbf{x}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ sont les composantes du tenseur déformation, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ sont les composantes du tenseur des contraintes. Par $\bar{\sigma}_{ij}$ et $\bar{\varepsilon}_{ij}$ on a noté les composantes du déviateur du tenseur des contraintes et du tenseur de la déformation respectivement [29]:

$$(2,6) \qquad \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}; \qquad \sigma = \dfrac{\sigma_{ll}}{3}; \\ \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}; \qquad \varepsilon = \dfrac{\varepsilon_{ll}}{3}; \end{cases}$$

Tant comme dans (6,2) on utilise systématiquement la covention de sommation par rapport aux indices muets.

Dans (2,2), les grandeurs τ_0 et γ_0 sont données par [29]

$$\tau_0^2 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3}\bar{S}_{II}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{4}{3} \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{4}{3} \bar{E}_{II}$$

et sont reliées par la relation ([29], [15])

(2,7) $$\tau_0 = g(\gamma_0^2)\,\gamma_0 \,.$$

Pour la fonction g on va formuler les conditions suivantes [15]

a) $g(\xi)$ est de clase $C^{(2)}$.

b) (2,8) $$g(\xi) \geq c_1 > 0, \quad \xi \geq 0, \quad c_1 = cte.$$

c) (2,9) $$g(\xi) + 2\xi\, g'(\xi) \geq c_2 > 0, \quad \xi \geq 0 \quad c_2 = \text{const.}$$

La condition (2,9) est entièrement naturelle en exprimant le fait bien connu dans la théorie de la plasticité que τ_0 est une fonction croissante de γ_0, de sorte que

(2,10) $$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} = g(\gamma_0^2) + 2\gamma_0^2\, g'(\gamma_0^2) \geq 0 \,.$$

D'après (2,9), $g(\xi)$ satisfait une condition plus forte que (2.10).

La condition (2,8) est également une condition naturelle; en effet on sait que l'on a

(2,11) $$G_s(\gamma_0) = g(\gamma_0^2) \geq 0.$$

Soit maintenant $\mathbf{u}$ la fonction vectorielle définie sur $\Omega + S$ comme il suit:

(2,12) $$\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

les u_i étant les composantes du vecteur déplacement en $\mathbf{x}$.

Compte tenu de (1,2), (2,2), (2,7), les équations (2,3) peuvent être écrites sous la forme

(2,13) $$\mathbf{Pu} = \mathbf{f}$$

où

(2,14) $$\mathbf{Pu} = \begin{pmatrix} P_1\,\mathbf{u} \\ P_2\,\mathbf{u} \\ P_3\,\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix};$$

$$(2,15) \qquad P_i\,\mathbf{u} = -\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + (3k - 2g(\Gamma(\mathbf{u})))\,\varepsilon(\mathbf{u})\,\delta_{ij}\right]$$

et où nous avons noté par $\Gamma(\mathbf{u})$ la forme quadratique non-négative

$$(2,16) \qquad \Gamma(\mathbf{u}) = \gamma_0^2 = \frac{4}{3}\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})$$

et par $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — le vecteur des for forces extérieures au point $\mathbf{x}$.

Les conditions aux limites (2,4), (2,5) s'ecrivent:

$$(2.17) \qquad [2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + (3k - 2g(\Gamma(\mathbf{u})))\,\varepsilon(\mathbf{u})\,\delta_{ij}]\,n_j = p_i\,, \quad \mathbf{x} \in S_1 \quad i,j = 1, 2, 3$$

et respectivement

$$(2,18) \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \qquad \mathbf{x} \in S_2\,.$$

Considerons le premier problème fondamental pour l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai, c'est-a-dire l'équation (2,13) avec les conditions aux limites

$$(2,19) \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in S = S_1 + S_2\,.$$

(La terminologie est celle du problème analogue de la théorie d'élasticité).

Soit $\mathbf{L}_2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions vectorielles dont les composantes sont des fonctions de carré sommable sur Ω, avec le produit scalaire

$$(2.20) \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega u_i\, v_i\, d\Omega.$$

Désignons par $\Phi^{(2)}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions dont les composantes sont continues avec leurs dérivées de deuxième ordre sur $\Omega + S$, et satisfont aux conditions (2,19). Il est connu que $\Phi^{(2)}(\Omega)$ est un sous-espace de $\mathbf{L}_2(\Omega)$, dense dans $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (cf. [18], p. 186).

THÉORÈME 9. En choisissant $H(\Omega) = \mathbf{L}_2(\Omega)$, $M^0 = M = \Phi^{(2)}(\Omega)$, l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai satisfait aux conditions du théorème 5, la condition 5^0 étant remplacée par (1,26).

DÉMONSTRATION. Nous allons demontrer que sont verifiées les hypothèses du théorème 5.

a) La condition 2⁰. Par définition.

$$(1,21) \qquad (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} = \begin{pmatrix} (DP_1)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} \\ (DP_2)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} \\ (DP_3)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} \end{pmatrix}$$

où

$$(DP_i)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} = \lim_{t\to 0}\frac{P_i(\mathbf{u}+t\mathbf{h}) - P_i(\mathbf{u})}{t}.$$

Pour $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ les calculs donnent

$$(2,22) \quad (DP_i)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} = -\frac{\partial}{\partial x_j}[4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 3k\,\varepsilon(\mathbf{h})\,\delta_{ij}]$$

où, nous avons désigné par $\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})$ la forme bilinéaire engendrée par la forme quadratique $\Gamma(\mathbf{u})$.

Il résulte évidement de (2,1) et (2,6) que $\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})$ et $\varepsilon(\mathbf{h})$ sont linéaires par rapport à $\mathbf{h}$; compte tenu des conditions de régularité imposées par la définition de $\Phi^{(2)}(\Omega)$, il s'ensuit que la condition 2⁰ du théorème 5 est satisfaite.

b) La condition 3⁰. Pour chaque $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{g} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, nous avons

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle = \int_\Omega g_i\,(DP_i)(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}\,d\Omega.$$

Compte tenu de (2,22) et en appliquant la formule de Green, il résulte

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle = \int_\Omega [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 3k\,\varepsilon(\mathbf{h})\,\delta_{ij}]\,g_{i,j}\,d\Omega$$

$$= \int_\Omega [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 3k\,\varepsilon(\mathbf{h})\,\delta_{ij}]\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{g})\,d\Omega$$

ce qui s'écrit encore

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{g}\rangle = \int_\Omega [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u},\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{g}) + 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})\,\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{g})$$
$$+ 9k\,\varepsilon(\mathbf{h})\,\varepsilon(\mathbf{g})]\,d\Omega = \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{g}, \mathbf{h}\rangle$$

c) La condition (1,26) du théorème 6.

Il résulte de (2,23) que pour chaque $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ on a

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \int_{\Omega} [4g'(\Gamma(\mathbf{u}))\, \Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{h})\, \overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\, \overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + \tag{2,24}$$

$$+ 2g(\Gamma(\mathbf{u}))\, \overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})\, \overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 9k\, \varepsilon^2(\mathbf{h})]\, d\Omega.$$

Considérons le problème au limites (2,19) pour l'opérateur de la théorie d'élasticité linéaire et isotrope relativement au même domaine Ω :

$$\mathbf{E}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} E_1 \mathbf{u} \\ E_2 \mathbf{u} \\ E_3 \mathbf{u} \end{pmatrix}; \quad E_i \mathbf{u} = -\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2,25}$$

avec la loi de comportement de Hooke

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_{ij} = 2G\, \overline{\varepsilon}_{ij} \\ \sigma = 3k\, \varepsilon, \end{cases} \tag{2,26}$$

qui s'obtient évidement de la théorie de Hencky et Nadai en remplacant le module plastique $g(\gamma_0^2)$ par le module elastique G.

En faisant cette particularisation dans (2,24) et en tenant compte de la linéairité de $\mathbf{E}$, on obtient

$$\langle (D\,\mathbf{E})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{E}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \frac{3}{2} \int_{\Omega} [G\Gamma(\mathbf{h}) + 6k\, \varepsilon^2(\mathbf{h})]\, d\Omega \tag{2,27}$$

$$= \int_{\Omega} [2G\, \overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h})\, \overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{h}) + 9k\, \varepsilon^2(\mathbf{h})]\, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{h})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{h})\, d\Omega.$$

Utilisant le fait que dans la théorie de l'élasticité linéaire (cf. [27])

$$\sigma_{ij}(\mathbf{h})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{h}) \geq \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h}), \quad \mu_0 > 0$$

et aussi les inégalités de Friedrichs [18] et de Korn [18], on montre que pour chaque $\mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ on a [18]

$$\langle \mathbf{E}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \geq a^2 \| \mathbf{h} \|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}. \tag{2,28}$$

(Les inégalités de Friedrichs et Korn seront explicitement écrites ultérieurement, quand elles seront effectivement utilisées).

S'il est possible de montrer que pour chaque couple $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ on a

$$\langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle - \langle \mathbf{E}\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle \geq 0, \quad \mathbf{u}, \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \tag{2,29}$$

alors de (2,28) il résulte que l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai satisfait également la condition (1,26).

Une tentative de démontrer la théorème sur cette voie a été faite par Langenbach [15]. Mais, nous demontrerons qu'il n'est pas possible d'obtenir le résultat d'après cette idée pour toutes les cas.

En effet, de (2,24) et (2,27) il résulte

$$\langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle - \langle \mathbf{E}\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle = \tag{2,30}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\Omega} [(g(\Gamma(\mathbf{u})) - G)\,\Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})]\, d\Omega.$$

Considérerons le cas d'un matériau écrouisable dont la courbe caractéristique $\tau_0 \backsim \gamma_0$ n'a pas des points de rebroussement.

Dans ces conditions, Budiansky [2] a démontré (voir aussi [29] p. 73) que l'on a

$$G \geq \frac{\tau_0}{\gamma_0} \geq \frac{d\tau_0}{d\gamma_0}. \tag{2,31}$$

Il s'ensuit qu'il est impossible d'admettre $g'(\xi) \geq 0$, parce qu'alors, de

$$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} = 2g'(\gamma_0^2)\,\gamma_0^2 + g(\gamma_0^2) = 2g'(\gamma_0^2)\,\gamma_0^2 + \frac{\tau_0}{\gamma_0} \geq 0,$$

il s'ensuivrait

$$\frac{d\tau_0}{d\gamma_0} - \frac{\tau_0}{\gamma_0} \geq 0, \tag{2,32}$$

ce qui contredit (2,31).

Pour un tel matériau il faut donc supposer $g'(\xi) \leq 0$ et alors, compte tenu de (2,31) il résulte de (2,30)

$$\langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle - \langle \mathbf{E}\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle \leq 0. \tag{2,33}$$

Par conséquent, le fait que pour l'opérateur de la théorie d'élasticité l'inégalité (2,28) est connue ne peut pas être utilisé de la manière exposée pour tirer la conclusion que l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai satisfait la condition (1,26).

Par contre, le résultat est vrai, mais doit être démontrer sous une forme différente.

Soient g'^{+} et g'^{-} le partie positive et la partie négative respectivement de la fonction g',

$$g'^{+} = \begin{cases} g' & g' \geq 0 \\ 0 & g' < 0, \end{cases} \qquad g'^{-} = \begin{cases} 0 & g' \geq 0 \\ -g' & g' < 0. \end{cases}$$

La fonction g' peut être représentée sous la forme

$$g' = g'^{+} - g'^{-}.$$

De (2,24) il s'ensuit

$$\text{(2,34)} \qquad \langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \geq \frac{3}{2}\int_{\Omega} [g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})]\,d\Omega$$

$$\geq \frac{3}{2}\int_{\Omega} [g(\Gamma(\mathbf{u})) - 2g'^{-}(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u})]\,\Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega$$

où, nous avons compté aussi de l'inégalité de Cauchy

$$\text{(2,35)} \qquad \Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \leq \Gamma(\mathbf{u})\,\Gamma(\mathbf{h}).$$

Si $g' \geq 0$, alors on a $g'^{-} = 0$ et de (2,34) et (2,8) il résulte

$$\text{(2,36)} \qquad \langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \geq \frac{3}{2}\int_{\Omega} g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega \geq \frac{3}{2}\,c_1\int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega.$$

Si $g' < 0$, alors $g'^{-} = -g'$ et de (2,34) et (2,9) il s'ensuit

$$\text{(2,37)} \qquad \langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \geq$$

$$\geq \frac{3}{2}\int_{\Omega} [g(\Gamma(\mathbf{u})) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{u})]\,\Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega \geq \frac{3}{2}\,c_2\int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega.$$

De (2,36) et (2,37) on tire donc

$$\langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle \geq \frac{3}{2} c \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{h})\, d\Omega, \quad c = \min(c_1, c_2). \tag{2,38}$$

Nous nous proposons de démontrer l'inégalité

$$\int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{h})\, d\Omega \geq \alpha \, \| \mathbf{h} \|^2_{L_2(\Omega)}, \ \ \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \ \ \alpha = \text{const.} \tag{2,39}$$

D'après l'inégalité de Friedrichs [18], pour $\mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} h^2_{i,j}\, d\Omega \geq \frac{1}{K} \| \mathbf{h} \|_{L_2(\Omega)} \tag{2,40}$$

K étant une constante positive qui depend seulement de domaine Ω. Avec les notations

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(h_{i,j} + h_{j,i}) \\ \omega_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(h_{i,j} - h_{j,i}) \\ \varepsilon(\mathbf{h}) = \frac{\varepsilon_{ll}(\mathbf{h})}{3} \end{cases} \tag{2,41}$$

on a [30]

$$\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^2_{ij}(\mathbf{h}) - \sum_{i,j=1}^{3} \omega^2_{ij}(\mathbf{h}) - 9\varepsilon^2(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{3} (h_{i,j}\, h_{j,i} - h_{i,i}\, h_{j,j}) = \tag{2,42}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} [(h_i\, h_{j,i})_{,j} - (h_i\, h_{j,j})_{,i}].$$

Utilisant la formule de Green et tenant compte que $\mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^2_{ij}(\mathbf{h})\, d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \omega^2_{ij}(\mathbf{h})\, d\Omega - 9 \int_{\Omega} \varepsilon^2(\mathbf{h})\, d\Omega = 0. \tag{2,43}$$

Il s'ensuit

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \omega^2_{ij}(\mathbf{h})\, d\Omega \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^2_{ij}(\mathbf{h})\, d\Omega. \tag{2,44}$$

Remarque. Dans [30] Friedrichs a démontré l'inégalité plus forte

$$(2,45)\qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega \leq \beta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega, \quad \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega), \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Pour ce qui suit, l'égalité (43,2) sera suffisante.

Compte tenu de (1,6) on tire de (2,43)

$$(2,46)\qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}^2(\mathbf{h}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega - 6 \int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{h})\, d\Omega.$$

Maintenant, les relations (2,6), (2,40), (2,41), (2,46) donnent successivement:

$$\|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq K \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\, d\Omega = K \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h}) + \omega_{ij}^2(\mathbf{h}))\, d\Omega$$

$$= 2K \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega - 3K \int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{h})\, d\Omega$$

$$\leq 2K \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega = \frac{3K}{2} \int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\, d\Omega,$$

ou bien encore

$$(2,47)\qquad \frac{3K}{2} \int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\, d\Omega = 2K \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega \geq K \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\, d\Omega \geq \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)},$$

de sorte que de (2,38) et (2,47) on déduit

$$(2,48)\qquad \langle (D\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \geq \frac{c}{K} \|\mathbf{h}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

L'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai satisfait donc aussi la condition (1,26)

Les raisonnements précedents montrent que pour le problème de Dirichlet de la théorie de Hencky-Nadai, l'inégalité (2,47) a la même rôle que l'inégalité de Korn [30]

$$(2,49)\qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} h_{i,j}^2\, d\Omega \leq c \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{h})\, d\Omega, \quad \mathbf{h} \in \Phi^{(2)}(\Omega),$$

pour le problème analogue de la théorie de l'élasticité linéaire : tant comme à l'aide de l'inégalité de Korn on demontre que l'opérateur de la théorie d'élasticité est défini positif sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, à l'aide de l'inégalité (2,47) on demontre un fait analogue pour la différentielle de Gâteaux de l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai.

Utilisant les théorèmes 5, 6, 7, 8, 9 nous pouvons énoncer maintenant le

THÉORÈME 10. Si la fonction g du matériau satisfait aux conditions (2,8), (2,9), alors

a) l'opérateur de la théorie da Hencky-Nadai est strictement monotone d'après Minty et Browder sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, de sorte que, si une solution de l'équation (2,13) existe dans $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$, cette solution est unique.

b) si $\mathbf{u}_0 \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ est une solution de l'équation (2,13), $\mathbf{u}_0$ réalise sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ le minimum de la fonctionnelle

$$F(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) - \langle f, \mathbf{u} \rangle, \tag{2,50}$$

où

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle \mathbf{P}(t\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \, dt = \frac{3}{4} \int_\Omega d\Omega \int_0^{\Gamma(\mathbf{u})} g(\xi)\, d\xi + \frac{9k}{2} \int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{u})\, d\Omega, \tag{2,51}$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \int_\Omega F_i u_i \, d\Omega; \tag{2,52}$$

c) reciproquement, l'élément de $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ qui réalise sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ le minimum de la fonctionnelle (50,2), satisfait l'équation (2,13);

d) la fonctionnelle (2,50) (qui sera dénomée la fonctionnelle de la théorie de Hencky-Nadai) est inférieurement bornée sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$;

e) la fonctionnelle de la théorie de Hencky-Nadai est strictement convexe sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$;

f) chaque suite minimisante de la fonctionnelle de la théorie de Hencky-Nadai possède une limite dans $\mathbf{L}_2(\Omega)$; (Evidement, cette limite est simplement la solution généralisée du premier problème fondamental de la théorie de Hencky-Nadai).

g) la solution généralisèe du problème (2,13), (2,19) est unique.

En ce qui concerne la formule (2,51), nous avons en effet :

$$\langle \mathbf{P}(t\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = \int_\Omega u_i P_i(t\mathbf{u})\, d\Omega = -\int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(t\mathbf{u})\, d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}(t\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega$$

d'où, compte tenu de (2,2), (2,6), (2,7), il s'ensuit

$$\langle \mathbf{P}(t\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = \int_\Omega [2g(\Gamma(t\mathbf{u}))\,\overline{\varepsilon}_{ij}(t\mathbf{u}) + 3k\,\varepsilon(t\mathbf{u})\,\delta_{ij}]\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\,d\Omega$$

$$= t\int_\Omega [2g(t^2\Gamma(\mathbf{u}))\,\overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})\,\overline{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + 9k\,\varepsilon^2(\mathbf{u})]\,d\Omega,$$

et alors

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_0^1 dt \int_\Omega \left[\frac{3}{2}\,g(t^2\Gamma(\mathbf{u}))\,t\,\Gamma(\mathbf{u}) + 9kt\,\varepsilon^2(\mathbf{u})\right] d\Omega.$$

En posant dans cette dernière formule $t^2\Gamma(\mathbf{u}) = \xi$, on tire (2,51).

Si dans la théorie de Hencky-Nadai la loi de compressibilité élastique du volume est remplacée par l'hypothèse de l'incompressibilité, alors de (1,24) il vient

$$(2{,}53)\qquad \langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \frac{3}{2}\int_\Omega [g(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma(\mathbf{h}) + 2g'(\Gamma(\mathbf{u}))\,\Gamma^2(\mathbf{u}, \mathbf{h})]\,d\Omega$$

$$\geq \frac{3}{2}\,c\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega.$$

Compte tenu de $\Gamma(\mathbf{o}) = \Gamma(\mathbf{o}, \mathbf{h}) = 0$, de (2,24) on trouve

$$(2{,}54)\qquad \langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{o})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \frac{3}{2}\,g(o)\int_\Omega \Gamma(\mathbf{h})\,d\Omega.$$

Par simple comparaison de ces relations on déduit

$$(2{,}55)\qquad \langle (D\,\mathbf{P})(\mathbf{u})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \geq \frac{c}{g(o)}\langle D\,\mathbf{P})(\mathbf{o})\cdot\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle.$$

Compte tenu de (2,55) et du théorème 8, on a le

Théorème 11. Si la fonction g du matériau satisfait aux conditions (2,8), (2,9) et le matériau est supposé incompressible, la solution généralisée du problème de Dirichlet avec des données nulles aux limites pour l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai, appartient à l'espace énergétique de l'opérateur $(D\,\mathbf{P})(\mathbf{o})$.

3. Extension de la fonctionnelle de la théorie de Hencky-Nadai.

Considérons le problème de l'existence d'une solution généralisée du problème de minimum pour des fonctionnelles ayant la forme

$$F(u) = F_1(u) + F_2(u), \tag{3,1}$$

où

$$F_1(u) = \int_\Omega d\Omega \int_0^{\tau(u)} g(\xi)\, d\xi - \langle f, u \rangle = \Phi(u) - \langle f, u \rangle, \tag{3,2}$$

$$F_2(u) = \int_\Omega \tau_1(u)\, d\Omega, \tag{3,3}$$

et où l'on se sert des hypothèses suivantes, qui donneront un sens précis aux relations (3,1), (3,2), (3,3):

1) $\tau(u)$, $\tau_1(u)$ sont des formes quadratique non-négative relativement à la fonction u (scalaire ou vectorielle) et à ses dérivées jusqu'a l'ordre l y compris;

2) la fonction g vérifie les conditions

$$g(\xi) \geq a, \ \xi \geq 0, \tag{3,4}$$

$$g(\xi) + 2\xi g'(\xi) \geq a_1, \quad \xi \geq 0, \tag{3,5}$$

a et a_1 étant des constantes positives;

3) il existe quatre constantes positives α_0, α_1, A_0, A_1 telles que

$$\alpha_0 + \alpha_1 \xi^{p/2-1} \leq g(\xi) \leq A_0 + A_1 \xi^{p/2-1}; \quad p \geq 2. \tag{3,6}$$

4) il existe quadre constantes positives β_0, β_1, B_0, B_1, telles que

$$\beta_0 + \beta_1 \xi^{p/2-2} \leq g'(\xi) \leq B_0 + B_1 \xi^{p/2-2}; \quad p \geq 2. \tag{3,7}$$

5) pour chaque $\xi \geq 0$, $g(\xi)$ possède des dérivées continues jusqu'au deuxiéme ordre y compris.

Selon l'usage courant dans la théorie des méthodes variationnelles, nous allons chercher le minimum de la fonctionnelle (3,1) sur une ensemble de fonctions d'une classe convenable, et satisfaisant à des conditions aux limites que nous supposerons linéaires et homogènes. Désignons cet ensemble de fonctions par $\Phi(\Omega)$.

6) on suppose que $\Phi(\Omega)$ est un sous-espacede l'espace de Sobolev $W_p^{(l)}(\Omega)$ ([26]), $p > 1$.

Soit $\underline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ la fermeture de $\Phi(\Omega)$ dans la norme de $W_p^{(l)}(\Omega)$. Soit que sur $\Phi(\Omega)$ la norme de $W_p^{(l)}(\Omega)$ est équivalente à

$$\left\{\int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p}$$

qui sera prise comme norme sur $\Phi(\Omega)$.

La fermeture de $\Phi(\Omega)$ par rapport à cette norme sera notée $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$. On aura donc

$$\| u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} = \left\{\int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p}. \tag{3,8}$$

7) $f \in \overline{W}_p^{(l)*}(\Omega)$ le dual de $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

8) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour chaque $u \in \overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega [\tau_1(u)]^{p/2}\, d\Omega \leq \alpha \int_\Omega [\tau(u)]^{p/2}\, d\Omega. \tag{3,9}$$

Les hypothèses concernant la fonction $g(\xi)$ et la norme de $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ ont été formulées par Mikhline ([19] p. 324) dans l'étude du problème du minimum pour les fonctionnelles qui ont la forme de F_1. ([19] p. 324).

Dans ce qui suit nous n'allons pas utiliser toutes les hypothèses 1 — 8; mais celles qui ne sont pas ici utilisées, ont déjà été mises en oeuvre pour obtenir des résultats qui interviennent dans nos raisonnements.

En ce qui concerne les hypothèses 6) et 8) le dernièr théorème du ce châpitre explique leur origine.

Dans les théorèmes qui suivent, nous démontrons l'existence et l'unicité d'un point de minimum absolu de la fonctionnelle (3,1) sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

THÉORÈME 12. Dans l'espace $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ la boule est faiblement compacte. Pous la démonstration nous utilisons le

LEMME 1. Soit Y un espace de Banach réfléxif et soit V un sous-espace de Y, dense dans X. Soit que sur V la norme de X est équivalente à une autre norme notée $\| \; \|_V$, c'est-a-dire telle que.

$$k_1 \| u \|_V \leq \| u \|_X \leq k_2 \| u \|_V, \; k_1 > 0 \;\; k_2 > 0. \tag{3,10}$$

Alors, la fermeture de V dans la norme $\| \ \|_V$ est un espace de Banach avec la boule faiblement compacte.

DÉMONSTRATION. Soit $\widetilde{V}$ la fermeture de V dans la norme $\| \ \|_V$ et définissons l'application $f: \widetilde{V} \longrightarrow X$ comme il suit: si $u \in V$, alors $f(u) = u$. Par contre, si u est un point limite de $\widetilde{V}$, c'est-a-dire s'il existe $u_n \in V$ de sorte que $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$, alors $\| u_n - u_m \|_V \longrightarrow 0$ pour $n, m \longrightarrow \infty$; de (3,10) on tire $\| u_n - u_m \|_X \longrightarrow 0$ $n, m \longrightarrow \infty$ et u_n a alors une limite dans X, soit u_0. On pose alors $f(u) = u_0$.

La correspondence est bien définie. En effet, si l'on considère une autre suite $u'_n \in V$, telle que $\| u'_n - u \| \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, alors, d'après le raisonement antérieur, u'_n possède une limite dans X, soit u'_0. Démontrons que $u'_0 = u_0$.

Puisque l'on a

$$\| u_n - u'_n \|_X \leq k_2 \| u_n - u'_n \|_V,$$

en faisant $n \longrightarrow \infty$ et en tenant compte de ce que par rapport à $\| \ \|_V$, les u_n et les u'_n ont la même limite, il résulte que u_n et u'_n ont la même limite dans X également.

Mettons en évidence quelques propriétés de la fonction f.

a) L'application f est linéaire, ce qui est évident.

b) L'application f est injective.

Supposons le contraire: $u_1 \neq u_2$, $u_1, u_2 \in \widetilde{V}$ mais $f(u_1 - u_2) = O_X$ et démontrons qu'il s'ensuivrait $u = u_1 - u_2 = 0_{\widetilde{V}}$.

En effet, il existe $u_n \in V$, $\| u_n - u \|_V \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ et d'ici, d'après un raisonnement dejà fait, il résulte que u_n a une limite dans X et, d'après la définition de l'application f, cette limite est $f(u) = 0_X$. On a donc, $\| u_n \|_X \longrightarrow 0$. De la premiére partie de l'inégalité (3,10) il résulte $\| u_n \|_V \longrightarrow 0$ de sorte que $u_n \longrightarrow 0_{\widetilde{V}}$. D'autre partie, $u_n \longrightarrow u$ dans $\widetilde{V}$, et alors $u = 0_{\widetilde{V}}$.

c) L'application f est surjective. Soit $u_0 \in X$. Il existe $u \in \widetilde{V}$ de sorte que $f(u) = u_0$. En effet, V étant dense dans X, il existe $u_n \in V$ ainsi que $\| u_n - u_0 \|_X \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, d'où, $\| u_n - u_m \|_X \longrightarrow 0$ $n, m \longrightarrow \infty$. De (3,10) il résulte $\| u_n - u_m \|_V \longrightarrow 0$, pour $n, m \longrightarrow \infty$ et u_n a donc une limite dans $\widetilde{V}$, soit u. D'après la définition de l'application f, il s'ensuit $f(u) = u_0$.

Les inégalités (3,10) sont valables non seulement sur V, mais, dans un certain sens, sur $\widetilde{V}$: si $u \in \widetilde{V}$ et $f(u) = u_0 \in X$, nous avons

$$k_1 \| u \|_V \leq \| f(u) \|_X \leq k_2 \| u \|_V. \tag{3,11}$$

En effet, soit la suite $u_n \in V$ telle que $\| u_n - u \|_V \to 0$, $n \to \infty$. Nous avons

$$k_1 \| u_n \|_V \leq \| u_n \|_X \leq k_2 \| x_n \|_V .$$

Passant à limite dans cette rélation, on en tire (3,11).
Montrons maintenant que pour chaque $x \in X$, on a

$$\frac{1}{k_2} \| x \|_X \leq \| f^{-1}(x) \|_{\tilde{V}} \leq \frac{1}{k_1} \| x \|_X . \tag{3,12}$$

Soit en effet $x_n \in V$ de sorte que $\| x_n - x \|_X \to 0$, $n \to \infty$. Des raisonnements déjà faits montrent que x_n a une limite dans $\tilde{V}$, et que cette limite est $f^{-1}(x)$.

De (3,10) il s'ensuit

$$\frac{1}{k_2} \| x_n \|_X \leq \| x_n \|_V \leq \frac{1}{k_1} \| x_n \|_X$$

d'où, en faisant $n \to \infty$, il résulte (3,12).

Pour les espaces $\tilde{V}^*$ et X^* ont peut établir des résultats analogues à déjà établis.

Soit l'application F définie de X^* à $\tilde{V}^*$ come il suit: $x^* \in X^* \xrightarrow{F} v^*$, où v^* est définie par

$$v^*(u) = x^*(f(u)) \tag{3,12$'$}$$

pour chaque $u \in \tilde{V}$.

Montrons que $v^* \in \tilde{V}^*$. La linéairité de v^* est évidente. Pour dèmontrer que v^* est bornée, on tient compte de (3,11). Nous avons

$$| v^*(u) | = | x^*(f(u)) | \leq \| x^* \| \, \| f(u) \|_X \leq k_2 \| x^* \| \, \| u \|_{\tilde{V}} ,$$

de sorte que v^* est bornée et

$$\| v^* \| \leq k_2 \| x^* \| . \tag{3,13}$$

Évidement l'application F est linéaire.

L'application F est injective. Supposons le fait contraire, donc que $x^* \neq y^*$, $x^*, y^* \in X^*$, mais $F(x^* - y^*) = 0_{\tilde{V}^*}$.

Cela signifie que

$$[F(x^* - y^*)](u) = 0$$

pour chaque $u \in \widetilde{V}$, c'est à dire que

$$(x^* - y^*)(f(u)) = 0$$

pour chaque $u \in \widetilde{V}$.

Puisque f applique $\widetilde{V}$ sur X, il en résulte

$$(x^* - y^*)(x) = 0$$

pour chaque $x \in X$, donc $x^* = y^*$, ce qui contredit l'Hypothèse.

L'application F est surjective.

Soit $v_0^* \in \widetilde{V}^*$. Il existe $x_0^* \in X^*$ tel que

$$F(x_0^*) = v_0^*.$$

La fonctionnelle x_0^* avec cette propriété est définie par

$$x_0^*(x) = v_0^*(f^{-1}(x)).$$

Cette fonctionnelle est linéaire et bornée sur X, car, d'après (3,12)

$$|x_0^*(x)| = |v_0^*(f^{-1}(x))| \leq \|v_0^*\| \, \|f^{-1}(x)\|_V \leq \|v_0^*\| \frac{1}{k_1} \|x\|_X$$

d'où

$$\|x_0^*\| \leq \frac{1}{k_1} \|v_0^*\|. \tag{3,14}$$

On voit facilement que $F(x_0^*) = v_0^*$; en effet :

$$[F(x_0^*)](u) = x_0^*(f(u)) = v_0^*(f^{-1}(f(u))) = v_0^*(u)$$

pour chaque $u \in \widetilde{V}$.

Démontrons maintenant que dans $\widetilde{V}$ la boule est faiblement compacte.

Soit u_n une suite bornée de $\widetilde{V}$: $\|u_n\|_V \leq M$, $n \in N$.

Nous allons montrer qu'elle contient une sous-suite faiblement convergente. De (3,11) il résulte que la suite $f(u_n)$ est bornée par rapport à norme de X. Dans l'espace X qui est reflexive la boule est faiblement compacte.

(Le théorème de Gantmaher-Nikaido-Eberlein [10], [23], [31]). Par conséquent, $f(u_n)$ contient une sous-suite faiblement convergente dans X, que nous notons également par $f(u_n)$, et dont la limite faible appartient à X, parce que X étant reflexif, il est faiblement complet. Cette limite, appartenant à X, peut être ecrite comme $f(u_0)$ où $u_0 \in \widetilde{V}$.

Pour chaque $x^* \in X^*$ on a donc

$$x^* [f(u_n - u_0)] \longrightarrow 0, \ n \longrightarrow \infty.$$

Si l'on tient compte de (3,12) ceci entraîne

$$[F(x^*)](u_n - u_0) \longrightarrow 0, \ n \longrightarrow \infty,$$

et puisque F applique X^* sur $\widetilde{V}^*$, cette dernière relation montre que la suite u_n est faiblement convergente vers u_0 dans $\widetilde{V}$.

DÉMONSTRATION du thèorème 12.

On sait que $W_p^{(l)}$ est reflexif ([22], p. 64); $\underline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ est donc reflexif, en etant un sous-espace fermé d'un espace de Banach reflexif ([7]) (fermeture de $\Phi(\Omega)$ dans la norme de $W_p^{(l)}(\Omega)$). Pour arriver à la conclusion que $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ est reflexif, il suffit d'appliquer le lemme 1, en choissisant

$$X = \underline{W}_p^{(l)}(\Omega),$$

$$V = \Phi(\Omega),$$

$$\| u \|_V = \left\{ \int_\Omega [\tau(u)]^{p/2} \, d\Omega \right\}^{1/p}, \ u \in V.$$

THÉORÈME 13. La fonctionnelle (3,1) est continue sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Pour F_1, le résultat est connu ([19], p. 326). En ce qui concerne la démonstration pour la continuité de F_2, nous utiliserons la technique de Mikhline ([19], p. 326) tenant en plus compte de (3,9).

Il est suffisant de montrer que

$$\int_\Omega | \tau_1(u_n) - \tau_1(u) | \, p\Omega \longrightarrow 0, \ \| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Mais

$$\tau_1(u_n) - \tau_1(u) = \tau_1(u_n - u, u_n + u)$$

où, l'on a désigné par $\tau_1(u, v)$ la forme bilinéaire engendrée par la forme quadratique $\tau_1(u)$.

D'après l'négalité de Cauchy, on trouve

$$|\tau_1(u_n) - \tau_1(u)| = |\tau_1(u_n - u, u_n + u)| \leq [\tau_1(u_n - u)]^{1/2} [\tau_1(u_n + u)]^{1/2},$$

et alors

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\, d\Omega \leq \int_\Omega [\tau_1(u_n - u)]^{1/2} [\tau_1(u_n + u)]^{1/2} .\, 1\, d\Omega.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec le coefficients p, p, r et tel que $\frac{2}{p} + \frac{1}{r} = 1$, il s'ensuit

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\, d\Omega \leq \left\{ \int_\Omega [\tau_1(u_n - u)]^{p/2}\, d\Omega \right\}^{1/p} \left\{ \int_\Omega [\tau_1(u_n + u)]^{p/2}\, d\Omega \right\}^{1/p} .$$

$$\left\{ \int_\Omega d\Omega \right\}^{1/r} \leq k^{2/p} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/r} \| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \| u_n + u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} .$$

(Pour obtenir la dernière inégalité, nous avons tenu compte aussi de (3,9)).

Puisque $\| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0$ implique le fait que la suite $\| u_n + u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$ est bornée, la dernière inégalitéde demontre le théorème.

Théorème 14. Pour chaque $u \in \overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, nous avons

$$\left| \int_\Omega [\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}]\, d\Omega \right| \to 0, \quad \| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0. \tag{3,17}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\int_\Omega | \tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2} |\, d\Omega \to 0; \ \| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \to 0. \tag{3,18}$$

Nous avons ([19], p. 327)

$$\frac{\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}}{\tau_1(u_n) - \tau_1(u)} = \frac{p}{2} [\theta_n \tau_1(u_n) + (1 - \theta_n) \tau_1(u)]^{p/2 - 1}, \ 0 < \theta_n < 1. \tag{3,19}$$

Soient b, a, k trois nombres non-négatifs. On a alors

$$(a+b)^k \leq 2^k \max(a^k, b^k) \leq 2^k (a^k + b^k).$$

Tenant compte de cette inégalité, il résulte

$$[\theta_n \tau_1(u_n) + (1-\theta_n)\tau_1(u)]^{p/2-1} \leq 2^{p/2-1}(\tau_1(u_n)^{p/2-1} + \tau_1(u)^{p/2-1}). \tag{3,20}$$

De (3,19) et (3,20), nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}|\, d\Omega &\leq \\ &\leq 2^{p/2-2} p \int_\Omega |\tau_1(u_n) - \tau_1(u)|\,(\tau_1(u_n)^{p/2-1} + \tau_1(u)^{p/2-1})\, d\Omega \\ &\leq 2^{p/2-2} p \int_\Omega [\tau_1(u_n - u)]^{1/2} [\tau_1(u_n + u)]^{1/2} (\tau_1(u_n)^{p/2-1} + \tau_1(u)^{p/2-1})\, d\Omega.\end{aligned} \tag{3,21}$$

En appliquant à cette dernière intégrale l'inégalité de Hölder avec les coefficients p, p, r $\left(\dfrac{2}{p} + \dfrac{1}{r} = 1\right)$ on a, compte tenu aussi de (3,9):

$$\int_\Omega |\tau_1(u_n)^{p/2} - \tau_1(u)^{p/2}|\, d\Omega \leq \tag{3,22}$$

$$\leq 2^{p/2-2} \cdot k^{\frac{2}{p}} \cdot p \,\| u_n - u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \| u_n + u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \left[\tau_1(u_n)^{\frac{p-2}{2}} + \tau_1(u)^{\frac{p-2}{2}} \right]^r d\Omega \right\}^{1/r}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\tau_1(u_n)^{\frac{p-2}{2}} + \tau_1(u)^{\frac{p-2}{2}}\right]^r d\Omega &\leq 2^r \int_\Omega \left[\left(\tau_1(u_n)^{\frac{p-2}{2}}\right)^r + \left(\tau_1(u)^{\frac{p-2}{2}}\right)^r\right] d\Omega \\ &\leq 2^r \cdot k \left(\| u_n \|^p_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} + \| u \|^p_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \right).\end{aligned} \tag{3,23}$$

De (3,22) et (3,23) tenant compte de ce que $\| u_n + u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$ et $\| u_n \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}$ sont bornées, il s'ensuit (3,18), et donc (3,17).

THÉORÈME 15. La fonctionnelle F est strictement convexe sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. La fonctionnelle F_1 possède bien cette propriété ([19], p. 328). Nous allons montrer que F_2 est convexe sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ — ce qui suffit pour conclure que $F_1 + F_2$ est strictement convexe sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Donnons d'abord quelques résultats intermédiaires:

1) F_2 est dérivable au sans de Gâteaux sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, donc il existe $F_2' : \overline{W}_p^{(l)}(\Omega) \to \overline{W}_p^{(l)*}(\Omega)$ de sorte que

$$(3{,}24) \qquad \langle F_2'(u), h \rangle = \langle (\operatorname{grad} F_2)(u), h \rangle = \lim_{t\to 0} \frac{F_2(u+th) - F_2(u)}{t}.$$

En effet

$$(3{,}25) \qquad \lim_{t\to 0} \frac{F_2(u+th) - F_2(u)}{t} = 2\int_\Omega \tau_1(u, h)\, d\Omega.$$

La linéairité du deuxième membre par rapport à h est évidente. Nous allons montrer que ce deuxième membre est borné par rapport à h. En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy et l'inégalité de Hölder avec les coefficients p, p, r $\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{r} = 1\right)$ on a

$$\left|\int_\Omega \tau_1(u, h)\, d\Omega\right| \leq \int_\Omega |\tau_1(u, h)|\, d\Omega \leq \int_\Omega [\tau_1(u)]^{1/2} [\tau_1(h)]^{1/2} \cdot 1\, d\Omega$$

$$\leq \left\{\int_\Omega \tau_1(u)^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p} \left\{\int_\Omega \tau_1(h)^{p/2}\, d\Omega\right\}^{1/p} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/r}.$$

Compte tenu de (3,9), il résulte

$$\left|\int_\Omega \tau_1(u, h)\, d\Omega\right| \leq k^{2/p} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/r} \| u \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \| h \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)}.$$

2) L'opérateur $P = F_2' = \operatorname{grad} F_2$ est dérivable au sens de Gâteaux sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ et l'on a

$$(3{,}26) \qquad \langle P'(u)\cdot h, g \rangle = \langle P'(u)\cdot g, h \rangle, \quad u, h, g \in \overline{W}_p^{(l)}(\Omega),$$

$$(3{,}27) \qquad \langle P'(u)\cdot h, h \rangle \geq 0, \qquad u, h \in \overline{W}_p^{(l)}(\Omega).$$

En effet, compte tenu de (3,25), il résulte

$$(3{,}28) \qquad \langle \lim_{t\to 0} \frac{P(u+tg) - P(u)}{t}, h \rangle = 2\int_\Omega \tau_1(g, h)\, d\Omega.$$

D'après un raisonnements déjà fait, on a

$$\left| \int_{\Omega} \tau_1 (g, h)\, d\Omega \right| \leq k^{2/p} (\mathrm{mes}\ \Omega)^{1/r} \| g \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)} \| h \|_{\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)},$$

le deuxième membre de (3,28) est donc une forme bilinéaire, bornée sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$; par conséquant, P est dérivable au sens de Gâteaux sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ et l'on trouve

$$\langle P'(u)\cdot g, h \rangle = \langle F_2''(u)\cdot g, h \rangle = 2 \int_{\Omega} \tau_1 (g, h)\, d\Omega = \langle P'(u)\cdot h, g \rangle. \tag{3,29}$$

Da (3,29) on a alors

$$\langle P'(u)\cdot h, h \rangle = \langle F_2''(u)\cdot h, h \rangle = 2 \int_{\Omega} \tau_1 (h)\, d\Omega \geq 0. \tag{3,30}$$

Le fait que F_2 est convex résulte maintenant si l'on tient compte de théorème suivant de Mikhline-Langenbach ([19] p. 310).

Théorème 16. Suppossons que les domaines de définition de la fonctionnelle Φ et de son gradient P ($\mathcal{D}(\Phi)$ e $\mathcal{D}(P)$ respectivement) sont linéaires et denses dans l'espace de Banach $\mathcal{B}$. Si $P = \mathrm{grad}\, \Phi$ est derivable au sens de Gâteaux, sa dérivée est positive pour chaque $u \in \mathcal{D}(P)$, et si $\mathcal{D}(P'(u)) \supseteq \mathcal{D}(P)$ pour chaque $u \in \mathcal{D}(P)$, alors Φ est strictement convexe sur $\mathcal{D}(P)$ ($\mathcal{D}(P) \subseteq \mathcal{D}(\Phi)$).

Si en plus, Φ est aussi continue, alors Φ est convexe sur $\mathcal{D}(\Phi)$.

Si Φ est continue et si

$$\langle P'(u)\cdot h, h \rangle = \langle \Phi''(u)\cdot h, h \rangle \geq \gamma^2 \| h \|^2, \quad \gamma = cte.$$

alors Φ est strictement convexe sur $\mathcal{D}(P)$.

Remarque. L'analyse de la demonstration de ce théorème montre que l'existence de la différentielle linéaire au sens de Gâteaux est suffisante. Encore, si la condition $\langle P'(u)\cdot h, h \rangle > 0$, $h \neq 0$ est remplacée par la condition plus faible $\langle P'(u)\cdot h, h \rangle \geq 0$, $h \in \mathcal{D}(P)$, alors Φ est seulement convexe sur $\mathcal{D}(P)$.

Tenant compte des résultats intermédiaires obtenus et de la première partie du théorème 16, où nous prenons

$$\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(P'(u)) = \mathcal{D}(F_2) = \overline{W}_p^{(l)}(\Omega),$$

il résulte que F_2 est convexe sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

On peut demontrer que F_2 est convexe sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ aussi d'une autre manière, plus simple que celle nécessaire pour obtenir le théorème 16. Pour cela il suffit de tenir compte de la première partie du

THÉORÈME 16. Supposons que la fonctionnelle Φ a sur l'espace de Banach reflexif $\mathcal{B}$, des dérivées au sens de Gâteaux du premier et du second ordre, et supposons que

$$\langle \Phi''(u)\cdot h, h \rangle \geq 0, \qquad u, h \in \mathcal{B}. \tag{3,31}$$

Alors,

a) Φ est convexe sur $\mathcal{B}$;

b) Φ est faiblement inférieurement semicontinue su $\mathcal{B}$.

REMARQUE. Le point *b*) du théorème est un résultat de Rathe [24]. Un résultat réciproque, dans un certain sens à celui donner par le point *a*) du théorème appartient à Minty [21]) le fait que le gradient d'une fonctionnelle convexe est monotone au sens de Minty-Browder).

DEMONSTRATION. La condition (3,31) a comme conséquence ([28], p. 103)

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) - \Phi'(u_0)\cdot(u - u_0) \geq 0, \qquad u, u_0 \in \mathcal{B}. \tag{3,23}$$

Fn effet, en utilisant les théorèmes 1 et 2, nous avons [28]

$$\begin{aligned}
\Phi(u) - \Phi(u_0) &= \Phi'(u_0 + \tau(u - u_0))\cdot(u - u_0) \\
&= \Phi'(u_0)\cdot(u - u_0) + \langle \Phi'(u_0 + \tau(u - u_0)) - \Phi'(u_0), u - u_0 \rangle \\
&= \Phi'(u_0)\cdot(u - u_0) + \tau \langle \Phi''(u_0 + \tau'\tau(u - u_0))\cdot(u - u_0), u - u_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte de (3,31) il en résulte (3,32). Compte tenu de (3,32), on trouve

$$\begin{aligned}
\Phi(u) + \Phi(u_0) - 2\Phi\left(\frac{u + u_0}{2}\right) &= \left[\Phi(u) - \Phi\left(\frac{u + u_0}{2}\right)\right] + \left[\Phi(u_0) - \Phi\left(\frac{u + u_0}{2}\right)\right] \\
&\geq \Phi'\left(\frac{u + u_0}{2}\right)\cdot\frac{u - u_0}{2} + \Phi'\left(\frac{u + u_0}{2}\right)\cdot\frac{u_0 - u}{2} = 0,
\end{aligned}$$

de sorte que Φ est convexe sur $\mathcal{B}$.

Évidement, si dans (3,31) l'inégalité est stricte pour $h \neq 0$, alors dans (3,32) l'inégalité est stricte, et le raisonnement déjà fait montre que Φ est strictement convexe sur $\mathcal{B}$.

b) Soit $\{u_n\}$ une suite de $\mathcal{B}$ faiblement convergente vers u_0. De (3,32) il résulte

$$\Phi(u_n) - \Phi(u_0) \geq \Phi'(u_0) \cdot (u_n - u_0)$$

d'où, immédiatement,

$$\varliminf_{n \to \infty} \Phi(u_n) - \Phi(u_0) \geq 0$$

et alors Φ est faiblement inférieurement semicontinue sur $\mathcal{B}$.

THÉORÈME 17. La fonctionnelle (3,1) est faiblement inférieurement semicontinue sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Pour F_1 le résultat est connu ([19], p. 331). Pour le démontrer pour F_2, il suffit de tenir compte que F_2 est deux fois dérivable au sens de Gâteaux sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, de ce que nous avons l'inégalité (3,30) et nous pouvons donc appliquer le résultat du point *b*) du théorème 16.

REMARQUE. On peut démontrer de la même manière que F_1 est faiblement inférieurement semicontinue sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$; en effet, F_1 a un gradient dont la dérivée au sens de Gâteaux est positive sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$ ([19], p. 330). Dans [19] Mikhline a obtenu ce résultat d'une manière plus compliquée en utilisant une théorème de Kazimirov (voir [19], p. 305).

THÉORÈME 18. La fonctionnelle (3,1) est croissante sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que

$$F(u) \geq F_1(u)$$

et que ([19], p. 330)

$$\lim_{\|u\| \to \infty} F_1(u) = \infty.$$

Rappelons encore le théorème suivant (voir [19], p. 330).

THÉORÈME 19. Soit X un espace de Banach dont la boule est faiblement compacte. Toute fonctionnelle F, croissante, strictement convexe, inférieurement semicontinue au sens faible sur X est inférieurement bornée sur X et sa limite inférieure est réalisée dans un point unique. Chaque suite minimisante converge au sens faible vers ce point. Les théorèmes 12, 15, 17, 18, 19 permettent d'enoncer

THÉORÈME 20. Dans les hypothèses (1)-8), la fonctionnelle (3,1) a un minimum absolu sur $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$, qui est atteint dans un point unique, soit

u_0. Chaque suite minimisante est convergent au sens faible vers u_0 dans $\overline{W}_p^{(l)}(\Omega)$.

Pour $p = 2$, les résultats du théorème précédent peuvent être complétés comme il résulte de

THÉORÈME 21. Soit u_0 le point de minimum absolu de la fonctionnelle (3.1) sur $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, et soit u_n une suite minimisante.

Alors, u_n converge vers u_0 dans la norme de $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$. Si f est l'application d'immersion de $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ dans $\underline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ obtenue d'après le lemme 1, alors les dérivées d'ordre l de $f(u_n)$ convergent vers les dérivées correspondantes de $f(u_0)$ dans la norme de $L_2(\Omega)$.

DEMONSTRATION. Nous commençons en remarquant que de (3,1) il résulte

$$F(u) + F(v) - 2F\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left[\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] + \\ + \left[F_2(u) + F_2(v) - 2F_2\left(\frac{u+v}{2}\right)\right].$$

Mais l'on a

$$\Phi(u) + \Phi(v) - 2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left[\Phi(u) - \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] - \left[\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) - \Phi(v)\right] =$$

$$= \int_0^1 \langle \Phi'\left(v + \frac{u-v}{2} + t\frac{u-v}{2}\right) - \Phi'\left(v + t\frac{u-v}{2}\right), \frac{u-v}{2} \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \langle \Phi''\left(v + (t+\tau)\frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2} \rangle \, dt \, d\tau$$

D'une manière analogue, compte tenu de (3,30), il résulte

$$F_2(u) + F_2(v) - 2F_2\left(\frac{u+v}{2}\right) = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle F_2''\left(v + (t+\tau)\frac{u-v}{2}\right) \cdot \frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right\rangle dt \, d\tau = \\ = 2\int \tau_1\left(\frac{u-v}{2}\right) d\Omega.$$

Dans ([19], p. 330) Mikhline montre que pour chaque $u, h \in \overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ on a

$$\langle \Phi''(u) \cdot h, h \rangle \geq \gamma^2 \| h \|^2_{\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)};$$

Si nous posons

$$\varrho(u, v) = \left[F(u) + F(v) - 2F\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]^{1/2}$$

nous avons alors

$$\varrho(u, v) \geq \frac{\gamma}{2} \| u - v \|_{\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)} .$$

Soit u_n une suite minimisante pour la fonctionnelle (3,1). Nous avons alors

$$\varrho(u_m, u_n) \leq [F(u_m) + F(u_n) - 2d]^{1/2},$$

car

$$F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) \geq \inf F(u) = d.$$

Pour m et n convenablement choisis, on aura

$$F(u_n) < d + \varepsilon, \quad F(u_m) < d + \varepsilon$$

de sorte qu'il résulte

$$\varrho(u_m, u_n) < \sqrt{2\varepsilon},$$

et alors

$$\lim_{m, n \to \infty} \varrho(u_m, u_n) = 0.$$

Tenant compte de ce que

$$\varrho(u_m, u_n) \geq \frac{\gamma}{2} \| u_m - u_n \|_{W_2^{(l)}(\Omega)},$$

on voit que

$$\| u_m - u_n \|_{W_2^{(l)}(\Omega)} \to 0, \quad m, n \to \infty,$$

et donc la suite minimisante u_n converge dans $\overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ vers une limite soit elle u_0. Cette limite ne depend pas de la suite choisie; en effet ([14]) si v_n est un autre suite minimisante, alors

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$$

est également une suite minimisante; elle possède donc une limite et u_n et v_n étant des sous-suites, elles doivent avoir la même limite.

Puisque u_n converge vers u_0 dans $W_2^{(l)}(\Omega)$, compte tenu de (3,11) où l'on pose $\widetilde{V} = \overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ et $X = \overline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, il résulte que $f(u_n)$ possède $f(u_0)$ comme limite dans $\underline{W}_2^{(l)}(\Omega)$ (donc dans $W_2^{(l)}(\Omega)$). Mais on sait que si $f(u_n)$ converge vers $f(u_0)$ dans $\underline{W}_2^{(l)}(\Omega)$, alors les dérivées d'ordre l de $f(u_n)$ convergent dans $L_2(\Omega)$ vers les dérivées d'ordre l de $f(u_0)$. (ceci est un résultat intermédiaire obtenu dans la démonstrartion de la complétude de l'espace $W_p^{(l)}(\Omega)$: voir Sobolev ([26], p. 76). Si l'on a en plus $l = 1$ alors le théorème d'immersion de Rellich ([22], p. 17) montre que l'application identique de $W_2^{(1)}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ est complètement continue, et donc, si $f(u_n) \longrightarrow f(u_0)$ dans $W_2^{(1)}(\Omega)$, il en résulte $f(u_n) \longrightarrow f(u_0)$ dans $L_2(\Omega)$.

Le théorème suivant explique l'origine des hypothèses 6) et 8) formulées au commencement du châpitre et montre qu'elles son entièrement naturelles.

THÉORÈME 22. Supposons que la fonction g du matériau de la théorie de Hencky et Nadai satisfait aux hypothèses 2, 3, 4, 5 formulées au commencement du châpitre.

Si

a) à la place de $W_p^{(l)}(\Omega)$ nous prenons $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ (l'espace des fonctions vectorielles dont les composantes appartiennent à l'espace de Sobolev $W_2^{(1)}(\Omega)$);

b) à la place de $\Phi(\Omega)$ nous prenons $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions vectorielles dont les composantes sont continues avec leurs dérivées du deuxième ordre dans $\Omega + S$ et qui sont nulles sur S);

c) nous choisissons

$$\tau(u) = \Gamma(\mathbf{u}) = \frac{4}{3} \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u})$$

$$\tau_1(u) = \frac{9k}{2} \varepsilon^2(\mathbf{u})$$

alors les hypothèses 6) et 8) sont elles aussi vérifiés pour chaque $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. L'hypothèse 6). Démontrons donc que sur $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$ la norme de $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ est équivalente à la norme

$$\| \mathbf{u} \|_{\overline{\mathbf{W}}_2^{(1)}(\Omega)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u})\, d\Omega \right\}^{1/2}.$$

Soit $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}(\Omega)$. Nous avons ([26], p. 67)

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i^2\, d\Omega + \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} (\operatorname{grad} u_i)^2\, d\Omega.$$

Utilisant l'inégalité de Friedrichs et en tenant compte de (2,41), (2,43) et

(2,6), on obtient

$$\| \mathbf{u} \|^2_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} \leq (K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u^2_{i,j}\, d\Omega = (K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon^2_{ij}(\mathbf{u}) + \omega^2_{ij}(\mathbf{u}))\, d\Omega =$$

$$= (K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (2\overline{\varepsilon}^2_{ij}(\mathbf{u}) - 3\varepsilon^2(\mathbf{u}))\, d\Omega \leq 2(K+1) \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega =$$

$$= \frac{3}{2}(K+1) \| \mathbf{u} \|^2_{\overline{\mathbf{W}}_2^{(1)}(\Omega)}.$$

D'autre part on a

$$\| \mathbf{u} \|^2_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i^2\, d\Omega + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u^2_{i,j}\, d\Omega \geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u^2_{i,j}\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\varepsilon^2_{ij}(\mathbf{u}) + \omega^2_{ij}(\mathbf{u}))\, d\Omega \geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\overline{\varepsilon}^2_{ij}(\mathbf{u}) + 3\varepsilon^2(\mathbf{u}))\, d\Omega \geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega = \frac{3}{4} \| \mathbf{u} \|^2_{\overline{\mathbf{W}}_2^{(1)}(\Omega)}.$$

L'hypothèse 8). En effet, de l'identité utilisée déjà

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega - 9 \int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{u})\, d\Omega = 0,$$

il s'ensuit que l'on a

$$\int_\Omega \varepsilon^2(\mathbf{u})\, d\Omega = \frac{1}{6} \left[\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \omega^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega \right] \leq \frac{1}{6} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\varepsilon}^2_{ij}(\mathbf{u})\, d\Omega$$

et alors l'hypothèse 8) est vérifiée pour $\alpha = \frac{9k}{16}$.

4. Méthode de Ritz pour les fonctionnelles de la théorie de Hencky-Nadai.

Commençons par formuler deux problèmes connus :

a) Le problème de la torsion élastico-plastique ([14], [19]). Soit Ω une domaine simplement conexe du plan, de frontière S suffisement régulière.

L'équation et le problème aux limites de la torsion élastico-plastique pour le domaine Ω sont alors

$$Pu = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{g}\,(T\,(u))\,\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{g}\,(T\,(u))\,\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \omega \tag{4,1}$$

$$u\,|_S = 0 \tag{4,2}$$

où u est le potentiel des contraintes; $T\,(u) = (\operatorname{grad} u)^2$; $\bar{g}$ est une fonction du matériau écrouissable; ω est l'angle de torsion par rapport à l'unité de longueur.

Si $\bar{g}$ satisfait les condition (2,8) et (2,9), l'opérateur P considéré comme appliquant $\Phi^{(2)}\,(\Omega)$ dans $L_2\,(\Omega)$ satisfait aux conditions du théorème 5, la condition 5^0 de ce théorème étant remplacée par (1,26).

Resoudre (4,1), (4,2) revient alors à trouver le minimum de la fonctionnelle

$$F\,(u) = \int_0^1 \langle\, P\,(tu),\, u \,\rangle\; dt - \langle\, \omega, u \,\rangle$$

sur $\Phi^{(2)}\,(\Omega)$.

Les calculs conduisent à l'expression [19]

$$F\,(u) = \int_\Omega dx\; dy \int_0^{\tau(u)} \frac{1}{2}\,\bar{g}\,(\xi)\; d\xi - \int_\Omega \omega u\; dx\; dy. \tag{4,3}$$

b) Le fléchissement élastico-plastique des plaques rigidement fixées à la frontière conduit au problème suivant [14] [19]

$$Pw = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\bar{g}\,(H\,(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\bar{g}\,(H\,(w))\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\bar{g}\,(H\,(w))\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] = f\,(x, y) \tag{4,4}$$

$$w\,|_S = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_S = 0. \tag{4,5}$$

Ici S est la frontière du domaine plan Ω de la plaque; $f\,(x, y)$ est proportionnelle à la charge normale par l'unité de surface; $w\,(x, y)$ est la déplacement normale; $\frac{\partial w}{\partial n}$ est sa dérivée selon la normale à S; enfin, on a

$$H\,(w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,. \tag{4,6}$$

Si la fonction $\bar{g}$ du matériau écrouisable satisfait aux conditions (2,8) et (2,9), alors l'opérateur P considéré comme apliquant $\widetilde{\Phi}^{(4)}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ satisfait aux conditions des théorèmes 5 et 6 ([14], [19]) et alors, le problème (4,4), (4,5) conduit à trouver le minimum de la fonctionnelle

$$F(w) = \int_0^1 \langle P(tw), w \rangle \, dt - \int_\Omega f \, w \, d\Omega$$

sur $\widetilde{\Phi}^{(4)}(\Omega)$.

Les calculs conduisent à l'expression

$$F(w) = \int_\Omega dx\, dy \int_0^{H(w)} \frac{1}{2} \bar{g}(\xi)\, d\xi - \int_\Omega fw \, d\Omega. \tag{4,7}$$

Remarquons que les fonctionnelles (4,3) et (4,7) sont, en ce qui concerne la forme, des cas particulièrs de la fonctionnelle (2,50) obtenue pour le problème de Dirichlet de la théorie tridimensionnel de Hencky-Nadai. En effet, si dans les raisonnements du deuxième châpitre on introduit l'hypothèse de l'incompressibilité du matériau, alors, résoudre le premier problème fondamental pour la théorie de Hencky-Nadai revient à trouver sur $\Phi^{(2)}(\Omega)$ le minimum de la fonctionnelle

$$F_1(\mathbf{u}) = \int_\Omega d\Omega \int_0^{\Gamma(\mathbf{u})} \frac{3}{4} g(\xi)\, d\xi - \int_\Omega f_i u_i \, d\Omega \tag{4,8}$$

où

$$\Gamma(\mathbf{u}) = \frac{4}{3} \sum_{i,j=1}^{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^2(\mathbf{u}).$$

La fonctionnelle (4,8) a la même forme que (4,3) et (4,7).

Nous avons mis en évidence une classe de fonctionnelle non linéaires aux quelles correspondent divers problèmes de la théorie de la plasticité; la résolution de ces problèmes équivaut à la recherche du minimum de ces fonctionnelles sur des ensembles de fonctions d'une classe convenable et qui vérifient des conditions aux limites linéaires et homogènes.

En vertu du théorème 6, pour tous ces problèmes il existe une solution généralisée unique, cette solution étant la limite dans $L_2(\Omega)$ (ou dans $\mathbf{L}_2(\Omega)$) de chaque suite minimisante des fonctionnelles antérieures. Dans [15] Langenbach a démontré la possibilité d'appliquer la méthode de Ritz pour construire une suite minimisante; plus exactement, il a démontré que les solutions aproximatives au sens de Ritz forment une suite minimisante.

Évidement, le résultat est valable aussi pour la fonctionnelle (4,8) qui a la même forme que (4,3) et (4,7).

Mais Langenbach n'a pas résolu effectivement les systèmes (non linéaires) des coefficients de Ritz. Évidement, si cette question n'est pas menée à bon fin, la construction effective de la solution généralisée pour les problèmes mentionnés n'est pas possible.

La résolution effective des systèmes de Ritz correspondant aux fonctionnelles (4,3) et (4,7) a fait l'object des travaux de Davidenko [3] Mikhline [8] et Gahen-Torn ([8], [9]). Puisque la fonctionnelle qui corresponde au premier problème fondamental de la théorie de Hencky-Nadai pour le cas incompressible a la même forme que les fonctionnelles (4,3) et (4,7), il résulte que le système non linéaire de Ritz qui correspond à cette fonctionnelle peut être effectivement résolu et nous avons à notre disposition une méthode effective de construction de la solution généralisée du premier problème fondamental de la théorie tridimensionnelle de Hencky Nadai.

Supposons que l'on dire résoudre le système algebrique non linéaire

$$f_k(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0, \quad k = 1, \dots, n \tag{4,9}$$

où λ est un paramètre prenant des valeurs dans l'intervale $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*$. Supposons que pour une valeur de λ — soit λ_0 — la solution de (4,9) est connue:

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0. \tag{4,10}$$

Supposons que

1) les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont définies et continues dans un domaine $(n+1)$ dimensionel G dans l'espace des variables $x_1, \dots, x_n, \lambda$;

2) les dérivées partielles de ces fonctions existent et sont continues dans G;

3) le jacobien $J = D(f_1, \dots, f_n)/D(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas nul dans $(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_0)$.

On demande la solution du système (4,9) pour $\lambda > \lambda_0$.

Prenant λ comme variable indépendante et considerant $x_1, \dots, x_n$ comme des fonctions de λ, de (4,9) il résulte (cf. [3]):

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_r} \frac{dx_r}{d\lambda} = -\frac{\partial f_k}{\partial \lambda} \quad k = 1, \dots, n. \tag{4,11}$$

En supposant que dans les points de G on a

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \Delta(x_1, \dots, x_n, \lambda) \neq 0, \tag{4,12}$$

on obtient de (4,11):

$$\frac{dx_r}{d\lambda} = \frac{\Delta_r(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\Delta(x_1, \dots, x_n, \lambda)} = F_r(x_1, \dots, x_n, \lambda). \tag{4,13}$$

Évidement, le courbe

$$x_1 = x_1(\lambda), \quad x_2 = x_2(\lambda), \dots, x_n = x_n(\lambda) \tag{4,14}$$

définie par le système (4,9) et contenant le point $(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_0)$ sera la courbe intégrale du système d'équations (4,13).

Pour définir pour un λ donné le point de la courbe (4,14) correspondant à cette valeur de λ, (ou bien, ce qui revient au même, la solution de (4,9) qui correspond à cette valeur de λ) il faut effectuer l'intégration numérique du système (4,13) sur l'intervale $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ avec les conditions initialles $\lambda = \lambda_0$, $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. À cette fin, le pas d'intégration sera choisi de sorte que les points de division de l'intervale soient les valeurs données du paramètre λ. Les solutions numériques $x_1, \dots, x_n$ obtenues pour chaque λ seront les solutions approchées du système (4,9). La méthode s'applique aussi pour des systèmes non linéaires ayant la forme [3]

$$\Phi_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{4,15}$$

A cette fin, le système (4,15) devra être transformé en introduisant le paramètre λ, de sorte que pour $\lambda = 1$ le système transformé se réduise à (4,15), et que pour $\lambda = 0$, le système transformé puisse être facilement résolu. Pour le système transformé on applique la méthode de Davidenko espuisée plus haut, le système d'équations différentielles obtenu étant intégré sur l'intervale $0 \leq \lambda \leq 1$ avec les conditions qui correspondent à $\lambda = 0$. Les résultats antérieurs ont été appliqués par Mikhline et Gahen-Torn pour résoudre le système non linéaire de Ritz [8].

Soit F une fonctionnelle non linéaire définie sur un ensemble linéaire $\mathcal{D}(F)$ dense dans un espace de Banach réel séparable $\mathcal{B}$, et soit $Q = (DF)$. Supposons que $\mathcal{D}(Q)$ est un ensemble linéaire et dense dans $\mathcal{B}$. Enfin, supposons que pour chaque $u \in \mathcal{D}(Q)$, Q possède une différentielle au sens de Gâteaux linéaire et que $(DQ)(u)$ est défini sur un ensemble linéaire qui contient $\mathcal{D}(Q)$. Supposons encore que

$$\langle (DQ)(u)\cdot h_1 , h_2 \rangle = \langle (DQ)(u)\cdot h_2 , h_1 \rangle \tag{4,16}$$

$$\langle (DQ)(u)\cdot h, h \rangle > 0 \quad h \neq 0. \tag{4,17}$$

Désignons par $\{\varphi_k\}$ le système des éléments coordonnés et admetons que $\varphi_k \in \mathcal{D}(Q)$, $k = 1, 2, \dots, n_n$.

On sait que dans la méthode de Ritz, en cherchant le minimum de la fonctionnelle F sur le sous-espace engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, le point de minimum admettant donc la représentation $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$ on est conduit à résoudre le système

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{4,18}$$

ψ étant la fonction définie par

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right) = F(u_n). \tag{4,19}$$

Compte tenu de (4,19), les conditions (4,18) deviennent

$$\langle Q(u_n), \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4,20}$$

C'est ce système non linéaire de la méthode de Ritz qu'il faut résoudre à fin d'obtenir les $a_1, \dots, a_n$, et donc la solution approchée u_n.

Suivant la méthode de Davidenko [3], Mikhline et Gahen-Torn considèrent le système transformé

$$a_j + \lambda\left[\langle Q(u_n), \varphi_j \rangle - a_j\right] = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2,1}$$

Pour $\lambda = 1$ ce système coincide avec (4,20) tandis que pour $\lambda = 0$ il admet la solution

$$a_j\big|_{\lambda=0} = 0, j = 1, \dots, n. \tag{4,22}$$

De (4,21) il résulte

$$\frac{da_j}{d\lambda} + \lambda\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\langle (DQ)(u_n)\cdot\varphi_k , \varphi_j \rangle - \delta_{jk}\right]\frac{da_k}{d\lambda}\right\} + \langle Q(u_n), \varphi_j \rangle - a_j = 0. \tag{4,23}$$

On demontre [8] que (4,23) peut être (dans le cadre des hypothèses (4.16), (4,17)), résolu par rapport aux $da_j/d\lambda$, de sorte que l'on a

$$\frac{da_j}{d\lambda} = \frac{\Delta_n^{(j)}}{\Delta_n} = g_j(a_1, \dots, a_n, \lambda). \tag{4,24}$$

On fait [8] les hypothèses suivantes :

1) les produits scalaires $\langle Q(u_n), \varphi_j \rangle$ et $\langle (DQ)(u_n)\cdot\varphi_k, \varphi_j \rangle$ vérifient les inégalités

$$|\langle Q(u_n), \varphi_j \rangle| \leq P_m(|a_1|, \dots, |a_n|), \tag{4,25}$$

$$|\langle (DQ)(u_n)\cdot\varphi_k, \varphi_j \rangle| \leq P_{m-1}(|a_1|, \dots, |a_n|), \tag{4.26}$$

les P_m et $P_{m=1}$ étant des polynomes d'ordre m et $(m-1)$ respectivement (m pouvant être une fonction de n) ;

2) dans chaque intervale $\delta \leq \lambda \leq 1$, $\delta > 0$, nous avons

$$\langle (DQ)(u_n)\cdot h, h \rangle \geq N \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \| h \|^2, \tag{4,27}$$

N étant une constante.

Moyennant ces hypothèses, on démontre dans [19] que le probléme de Cauchy (4,22), (4,24) possède une solutions unique dans $0 \leq \lambda \leq 1$. Comme nous l'avons déjà vu, cela entraîne la resolubilité du système de Ritz (4.20).

Dans [9], Gahen-Torn a démontré que pour les fonctionnelles du type (4,3), (4,7), (4,8) ou bien encore du type (2,50), plus général, les conditions (4,26) sont vérifiées pour $m = 1$. Plus exactement, son résultat, est le suivant :

THÉORÈME 23. Soit $\Omega \subset R^{(n)}$ un borné de frontière S satisfaisant les conditions des théorèmes de Green et de Sobolev (théorèmes d' immersion). Soit $\Phi_{(\Omega)}^{(2l)}$ l'ensemble des fonctions continues avec leurs dérivées d'ordre 2_l inclusivement, et qui vérifient sur S des conditions aux limites linéaires et homogènes. Soit la fonctionnelle

$$F(u) = Q(u) + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{1} \int_{0}^{\tau_i(u)} g_i(\xi)\, d\xi \right) d\Omega - \int_{\Omega} fu \, d\Omega \tag{4,28}$$

définie sur $\Phi^{(2l)}(\Omega)$, où

a) $Q(u)$ est une fonctionnelle quadratique non-négative sur $\Phi^{(2l)}(\Omega)$:

b) $\tau_i(u)$ sont des formes quadratiques par rapport aux dérivées d'ordre l de u (ou de ses composantes, si $\mathbf{u}$ est une fonction vectorielle):

c) il existe un indice i_0 (ou plusieurs) de sorte que pour chaque $u \in \Phi^{(2l)}(\Omega)$ on ait

$$\int_{\Omega} \tau_{i_0}(u)\, d\Omega \geq \gamma^2 \int_{\Omega} u^2\, d\Omega \qquad \gamma = cte\,; \tag{4,29}$$

d) les fonctions g_i possèdent des dérivées continues jusqu's l'ordre $l+1$ inclusivement;

e) pour chaque i, on a

$$0 \leq g_i(\xi) \leq c_1 < \infty \qquad c_1 = \text{etc.},\ i = 1, \dots s, \tag{4,30}$$

et il existe un indice i_0 (ou plusieurs) tel que

$$0 < c_0 \leq g_{i_0}(\xi)\,; \tag{4,31}$$

f) pour chaque i, on a

$$0 \leq g_i(\xi) + 2\xi\, g_i'(\xi) \leq k,\ i = 1, \dots s,\ k = cte, \tag{4,32}$$

et il existe un indice i_0 (ou plusieurs) tel que

$$0 < \alpha \leq g_{i_0}(\xi) + 2\xi\, g_{i_0}'(\xi),\ x = cte, \tag{4,33}$$

g) enfin $f \in L_2(\Omega)$ (ou $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$)

Si les conditions *a*) — *g*) sont vérifiées, la fonctionnelle (4,28) satisfait aux conditions (4,25), (4,26), (4, 27) pour $m = 1$.

Tenant compte de (2,39) nous pouvons enoncer:

THÉORÈME 24. En choisissant $l = s = i_0 = 1$, et

$$\tau_{i_0}(\mathbf{u}) = \tau_1(\mathbf{u}) = \Gamma(\mathbf{u}) \tag{4,34}$$

$$Q(\mathbf{u}) = \frac{9k}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^2(\mathbf{u})\, d\Omega \tag{4,35}$$

alors, la fonctionnelle de la théorie de plasticité (2,50) satisfait aux conditions du théorème 23.

En conclusion, nous obtenons de la sorte une méthode effective pour construire pour la fonctionnelle de la théorie de plasticité une suite minimisante selon Ritz si nous connaissons un système d'éléments coordonnés. Mais puisque pour le problème analogue de la théorie d'élasticité linéaire les éléments coordonnés doivent remplir exactement les mêmes conditions de régularité, nous pouvons énoncer le résultat suivant:

pour tous les domaines Ω pour lesquels dans la théorie de l'elasticité linéaire a été résolu le premier problème fondamental selon la méthode de Ritz, le même problème pour l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai peut être résolu avec la même méthode, et en utilisant le même système d'éléments coordonnés.

Une remarque analogue peut être faite à propos du problème de la torsion élastico-plastique.

REMARQUE. On a considéré ici seulement des conditions aux limites linéaires et homogènes; on peut démontrer [14] que pour les opérateurs satisfaisant aux conditions du théorème 5, le problème à résoudre (1,12) avec des conditions aux limit l'inéaires mais non-homogènes peut être reduit à un problème avec des conditions homogènes si l'on connait une fonction appartenant à $\mathcal{D}(P)$ et satisfaisant aux condition aux limites nonhomogènes données. Èvidemment, pour l'opérateur de la théoriee de plasticité, la rôle de cette fonction peut être joué par la solution avec des données aux limites non-homogènes du problème èlastique associé.

REFERENCES

[1] BROWDER, F. E. *Problemes non linéaires,* Montreal, 1966.

[2] BUDIANSKY, B. *A reassessmet of deformation theories of plasticity,* Journ. Appl. Mech., 26, 2, 1959.

[3] DAVIDENKO, D. F. *Sur une méthode nouvelle pour la résolution des systèmes non linéaires,* D. A. N., 88, 4, 1953, 601-603 (en russe).

[4] DINCA, G. *Sur la monotonie d'après Minty-Browder de l'opérateur de la théorie de plasticité,* C. R. Acad. Sc. Paris, Séries A et B, t. 269 (1969). A. 535.

[5] DINCA. G. *Sur l'existence et l'unicité des solutions généralisées dans la mécanique des fils élastico-plastiques,* C. R. Acad. Sc. Paris, Séries A et B, t. 269 (1969), A.148.

[6] DINCA, G. *Sur l'existence et l'unicité des solutions généralisées dans la théorie du fluage non linéaire, stationnaire et isotrope,* C. R. Acad. Sc. Paris Séries A et B, t. 269 (1969), A.323.

[7] DUNFORD NELSON, JACOB SCHWARZ. *Opérateurs linéaires,* Moscou 1963 (en russe).

[8] GAHEN-TORN L. N., S. G. MIKHLINE. *Sur la résnlutions des systè mes non-linéaires de Ritz,* D. A. N., 138, 2 (1961) (en russe).

[9] GAHEN-TORN, L. N. *Sur la résolution du système de Ritz pour les fonctionnelles de la théorie de plasticité,* T. Mat. Inst. V. A. Steklov, 66 (1962), 190-195 (en russe).

[10] GANTMAHER, V. P. *Sur la compacité faible dans les espaces de Banach,* Matem. Sb. 50, 1940, 489-492 (en russe).

[11] Gheliman, N. V. *Sur le problème de minimum d'ume fonctionnelle non linéaire,* Uci. Zap. Leningr. Inst., 166, 1958, 255-263 (en russe).

[12] ILIUSIN A. A. *Plasticité,* Moscou, 1948 (en russe).

[13] KAZIMIROF, V. I. *Sur la semicontinuité des integrales du calcul variationnel,* Usp. Mat. Nauk, 3, 1956, 125-130.

[14] LANGENBACH, A. *Sur quelques opérateurs non-linéaires de la théorie de l'élasticité, dans les espaces de Hilbert,* V.est. L. G. U. 1, 1961 (en russe).

[15] LANGENBACH, A. *Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitat-und Plastizitatstheorie,* Wiss. Z. Humboldt-Univ., Berlin Math. Nat. R., IX, 1959/1960.

[16] MARINESCU, G. *Espaces vectoriels normés,* Acad. R. P. R., 1956 (en roumaine).

[17] MARINESCU, G. *Sur la formule de Lagrange dans les espaces de Banach,* Rev. Univ. C. I. Parhon şi a Politehnicii Bucureşti, Ser. St. Nat. 1954, No. 4-5, 71-72.

[18] MIKHLINE, S. G. *Problème de minimum de la fonctionnelle quadratique,* Moscou, 1952 (en russe).

[19] MIKHLINE, S. G. *Réalisation numériques des methodes variationnelles,* Moscou, 1966.

[20] MIKHLINE, S. G. *Methodes directes dans la physique-mathématique,* 1950.

[21] MINTY, J. G. *On the monotonicity of the gradient of a convex function,* Pacific Journ. Math. 14, 1964, 2/3.

[22] NECAS, JINDRICH. *Les méthodes directes en théories des équations elliptiques,* Prague, 1967.

[23] NIKAIDO, H. *On a minimax theorem and its applications to functional analysis,* J. Math. Soc. Japan 5, No. 1, 1953, 86-94.

[24] RATHE, E. *A Note on the Banach spaces of Calkin and Morrey,* Pacific J. Math., 3, 1953, 493-499.

[25] SANSONE, G. *Équations differentielles,* t. I., Moscou, 1953 (en russe).

[26] SOBOLEV, S. L. *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique,* 1950 (en russe).

[27] SOLOMON, L. *Élasticité linéaire.* Masson, Paris, 1968.

[28] VAJNBERG, M. M. *Méthodes variationnelles dans l'étude des opérateurs non linéaires,* Moscou 1956 (en russe).

[29] RABOTNOV, Iu, N. *Le fluage des éléments des constructions* Moscou, 1966 (en russe).

[30] FRIEDRICHS, K. *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality,* Annals of Mathematics, V, 48, No. 2, April 1947.

[31] EBERLEIN, W. F. *Weak compactness in Banach spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. 33 (1947) 51-53.

[32] NICOLESCU, L. J. *Sur l'intégrabilité des différentielles de Fréchet,* St. Cerc. Mat., 11, 1960, 305-335 (en roumaine).

(Faculté de Mathématique-Mécanique, 14 rue de l'Académie, Bucarest, Roumanie)