Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Hans Triebel

Allgemeine Legendresche Differentialoperatoren II

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 1 (1970), p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_1_0>

ALLGEMEINE LEGENDRESCHE DIFFERENTIALOPERATOREN II

HANS TRIEBEL (Jena)

(Definitionsgebiete gebrochener Potenzen, Interpolation von Sobolev - Besov - Räumen mit Gewichtsfunktionen).

In der Arbeit wird die Untersuchung der allgemeinen Legendreschen Differentialoperatoren, die in der Arbeit [7] begonnen wurde, fortgesetzt. Das Ziel besteht in der Bestimmung der Definitionsgebiete gebrochener Potenzen allgemeiner Legendrescher Differentialoperatoren. Dazu ist die Untersuchung von Interpolationsräumen von Sobolev - Besov - Räumen mit Gewichtsfunktionen notwendig.

Im Abschnitt 1 werden die Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ eingeführt, μ, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind reelle Zahlen $\mu \geqq 0$. Ferner sei $[a, b]$ ein beschränktes Intervall, $-\infty < a < < b < \infty$. Ist μ nicht ganzzahlig, so besteht $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ aus denjenigen Distributionen u von $\mathcal{D}'(a, b)$, für welche u and $u^{([\mu])}$ Distributionen vom Typ einer Funktion sind und

$$\int_a^b \int_a^b \frac{\left| q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(x)\, u^{([\mu])}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(y)\, u^{([\mu])}(y) \right|^2}{|x-y|^{1+2(\mu-[\mu])}}\, dx\, dy + \int_a^b q^{\varkappa_2}(x)\, |u(x)|^2\, dx < \infty$$

gilt. Für ganzzahlige Werte von μ hat man diese Definition in der üblichen Weise abzuändern. $q(x)$ ist hierbei wie im ersten Teil der Arbeit eine reellwertige Funktion aus $C^{\infty}[a, b]$, die sich im Punkt a (bzw. b) wie $c_a(x-a)$ (bzw. $c_b(b-x)$), $c_a c_b \neq 0$, verhält. $q(x) > 0$ für $x \in (a, b)$. Ist $\varkappa_2 = 0$ und $\mu = m$ eine natürliche Zahl, so erhält man die im ersten Teil der Arbeit betrachteten Räume $H^{m}_{\varkappa_1}$. Es wird gezeigt, dass $C^{\infty}_0(a, b)$ dicht in Raum $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ ist, sofern $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$ gilt.

Pervenuto alla Redazione il 27 Giugno 1969.

Im Abschnitt 2 wird die Interpolation der Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ mit $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$ untersucht. Gilt neben $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$ die Ungleichung $\varrho_1 \geqq \varrho_2 + 2\nu$ und ist $\nu(\varkappa_1 - \varkappa_2) = \mu(\varrho_1 - \varrho_2)$, so ergibt sich $(H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2} = H^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_2}$ mit $\eta = \mu(1 - \theta) + \nu\theta$ und $\sigma_i = \varkappa_i(1 - \theta) + \varrho_i \theta$, $i = 1, 2$, $\mu \neq \nu$. $(\cdot)_{\theta, 2}$ ist hierbei das reelle Interpolationsverfahren von LIONS-PEETRE [1, 3], $0 < \theta < 1$.

Es zeigt sich, dass die Untersuchung der Interpolation der Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ für $\varkappa_1 < \varkappa_2 + 2\mu$ mit zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden ist. Im Abschnitt 3 werden die Räume $(\mathring{H}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, \mathring{H}^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2}$ bestimmt, $\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 + 2\mu$, $\varrho_1 \leqq \varrho_2 + 2\nu$. Hierbei ist $\mathring{H}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ die Vervollständigung von $C_0^{\infty}(a, b)$ in der entsprechenden Norm. Es ist $(\mathring{H}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, \mathring{H}^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2} = \mathring{H}^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_1 - 2\eta}$. Dabei haben η und σ_1 die gleiche Bedeutung wie früher. Es zeigt sich, dass $\mathring{H}^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_1 - 2\eta}$ im allgemeinen nicht mit $\mathring{H}_{\sigma_1, \sigma_2}$ übereinstimmt. Vielmehr ergibt sich, dass man die Interpolationseigenschaften dieser Räume zur Konstruktion von Gegenbeispielen zur Interpolationstheorie verwenden kann. H_0 sei ein separabler Hilbertraum. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl r ein Paar von separablen Hilberträumen H_1 und H_2 mit den Eigenschaften: 1. H_1 ist stetig in H_0 eingebettet, $H_1 \subseteq H_0$, 2. H_2 ist ein Teilraum von H_1 mit der Kodimension r, 3. Auf H_2 sind die Normen der Räume $(H_0, H_1)_{\frac{1}{2}, 2}$ und $(H_0, H_2)_{\frac{1}{2}, 2}$ inäquivalent. Gegenbeispiele dieser Art sind bekannt [2], S. 190, Punkt e.

Hat $q(x)$ die gleiche Bedeutung wie oben, so werden im Abschnitt 4 die Definitionsgebiete gebrochener Potenzen allgemeiner Legendrescher Differentialoperatoren A betrachtet. Dabei ist A durch

$$lu = (-1)^m (q^k u^{(m)})^{(m)}$$

$$Au = lu, \ \mathcal{D}(A) = C^{\infty}[a, b] \cap \mathring{C}^{m-k-1}[a, b],$$

bestimmt, $k = 1, \dots, 2m - 1$ (1). Ist $m - k - 1 < 0$, so hat man $\mathcal{D}(A) = C^{\infty}[a, b]$ zu setzen. In [7] wurden diese Operatoren ausführlich untersucht. Insbesondere wurden die Definitionsgebiete der ganzzahligen Potenzen von $\bar{A}$ bestimmt. Es zeigt sich, dass die Berechnung der Definitionsgebiete der gebrochenen Potenzen von $\bar{A}$ relativ kompliziert ist. Es ergibt sich, dass man hierbei die Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ mit $\varkappa_2 \neq 0$ verwenden muss. Im Abschnitt 4 wird der Fall $0 < k < m$, $k \equiv 0\ (2)$ und $(k, m) = 1$ (d. h., dass k und m

(1) Die Räume $C^{\infty}[a, b]$, $C^{j}[a, b]$, $\mathring{C}^{j}[a, b]$ usw. haben die gleiche Bedentung wie im ersten Teil der Arbeit, Fussnote 1.

teilerfremd sind) untersucht. Ist $\varkappa$ eine reelle Zahl, $\varkappa \geqq 0$, und $(4m - 2k)\varkappa \not\equiv 1\ (2)$, so ist $\mathcal{D}(\bar{A}^{\varkappa})$ die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\bar{A}^{\infty})$ in der Norm des Raumes $H^{2m\varkappa}_{2k\varkappa,0}$. Dem entsprechen die Resultate aus der Arbeit [7], Satz 6. Dort wurde $\mathcal{D}(\bar{A}^{\varkappa})$ bestimmt, wobei $\varkappa$ eine natürliche Zahl war.

Abschnitt 5 enthält eine vollständige Behandlung des wichtigen Falles $k = m = 1$. Es zeigt sich, dass $\mathcal{D}(\bar{A}^{\varkappa}) = H^{2\varkappa}_{2\varkappa,0}$ für $\varkappa \geqq \frac{1}{2}$ und $\mathcal{D}\bar{A}^{\varkappa}) = \overset{\circ}{H}{}^{2\varkappa}_{2\varkappa,0}$ für $0 \leqq \varkappa < \frac{1}{2}$ ist.

Die Interpolation der Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ wird nach den gleichen Prinzipien wie in der Arbeit [6] durchgeführt. Es zeigt sich, dass die dort entwickelten Methoden wesentliche Verallgemeinerungen zulassen. Dabei ist eine Beschränkung auf den Hilbertraumfall, wie es in [6] und in dieser Arbeit geschehen ist, nicht notwendig. In diesem Zusammenhang ist die von PEETRE entwickelte Interpolation von Quasibanachräumen von Interesse [4]. Eine unein geschränkte Übertragung der Resultate aus [6] auf allgemeinere Gewichtsfunktionen in Sobolev-Besov-Räumen ist jedoch nicht zu erwarten. Die Sätze dieser Arbeit, Abschnitt 3, können als Gegenbeispiele dienen.

1. Die Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$.

Es zeigt sich, dass man zur Bestimmung der Definitionsgebiete gebrochener Potenzen allgemeiner Legendrescher Differentialoperatoren nicht mit den im ersten Teil der Arbeit eingeführten Räume H^m_α auskommt. Es ist auch nicht ausreichend, H^m_α auf nicht ganze m auszudehnen, obwohl in den Sätzen der Abschnitte 4 und 5 nur solche Räume erscheinen.

Ist $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $-\infty < a < b < \infty$, so sei

$$q(x) \in C^{\infty}[a, b],\ q(x) > 0 \ \text{für}\ x \in (a, b)$$

und

$$\infty > \lim_{x \downarrow a} \frac{q(x)}{x - a} = C_a > 0, \qquad \infty > \lim_{x \uparrow b} \frac{q(x)}{b - x} = C_b > 0.$$

Sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reelle Zahlen und ist μ eine natürliche Zahl, so wird mit $H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ die Gesamtheit der Distributionen aus $\mathcal{D}'(a, b)$ des offenen Intervalls (a, b) bezeichnet, für welche u und $u^{(\mu)}$ vom Typ einer Funktion sind und

$$\int_a^b (q^{\varkappa_1} |u^{(\mu)}|^2 + q^{\varkappa_2} |u|^2)\, dx < \infty \tag{1}$$

gilt. Ist μ eine positive nicht ganze Zahl, so wird $\mu = [\mu] + \}\mu\{$ gesetzt, $[\mu]$ ganz, $0 \leqq \}\mu\{ < 1$. Sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reelle Zahlen und ist μ eine positive nicht ganze Zahl, so wird mit $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ die Gesamtheit der Distributionen aus $\mathcal{D}'(a, b)$ bezeichnet, für welche u und $u^{([\mu])}$ vom Typ einer Funktion sind und

$$(2) \qquad \int\int \frac{\left| q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(x)\, u^{([\mu])}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(y)\, u^{([\mu])}(y)\right|^2}{|x-y|^{1+2\}\mu\{}}\, dx\, dy + \int_a^b q^{\varkappa_2} |u|^2\, dx < \infty$$

gilt. Die Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ werden normiert, indem man die linken Seiten der Ungleichungen (1) und (2) mit $\| u \|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}}$ bezeichnet.

Aus der Formel (2) und dem Satz von FUBINI folgt, dass $q^{\frac{\varkappa_1}{2}} u^{([\mu])}$ zu $\mathcal{L}_2[a, b]$ gehört. Daraus erhält man, dass für jedes $\delta > 0$ u zu $W_2^{[\mu]}[a+\delta, b-\delta]$ gehört. Somit sind sämtliche Ableitungen $u^{(j)}, j = 0, \ldots, [\mu]$ vom Typ einer Funktion [5]. Ferner kann man leicht nachweisen, dass für jedes $\delta > 0$

$$(3) \qquad \int_{a+\delta}^{b-\delta} | u^{([\mu])} |^2\, dx \leqq C_1 \| u \|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}}$$

gilt. Da die Sobolev-Räume $W_2^{[\mu]}[a+\delta, b-\delta]$ vollständig sind, gewinnt man aus der letzten Abschätzung nach der üblichen Schlussweise, dass auch die Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ vollständig sind und somit Hilberträume darstellen.

LEMMA 1. *Es sei $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$. Dann gibt es eine Konstante C, so dass für $0 < j < \mu$, j natürliche Zahl, und $\varkappa \geqq \varkappa_1 \frac{j}{\mu} + \varkappa_2 \frac{\mu - j}{\mu}$*

$$\int_a^b q^{\varkappa} | u^{(j)} |^2\, dx \leqq C \| u \|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}}$$

gilt, $u \in H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$.

BEWEIS. Es sei $v \in W_2^{\mu}(I)$, wobei I ein Intervall der Länge 1 ist. Aus

$$(4) \qquad \| v^{(j)} \|_{\mathcal{L}_2(I)} \leqq C_2 \| v \|^{\frac{j}{\mu}}_{W_2^{\mu}(I)} \| v \|^{\frac{\mu - j}{\mu}}_{\mathcal{L}_2(I)}$$

folgt für $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ und $\delta_1 > 0$

$$\int\limits_I | v^{(j)} |^2 \, dx \leqq \delta_1 \, \varepsilon^{\frac{2\mu}{j}} \int\limits_{I \times I} \frac{| v^{([\mu])}(x) - v^{([\mu])}(y) |^2}{| x - y |^{1+2\{\mu\}}} \, dx \, dy + C_3(\delta_1) \, \varepsilon^{-\frac{2\mu}{\mu - j}} \int\limits_I | v |^2 \, dx,$$

sofern μ nicht ganzzahlig ist. Entsprechend für ganzzahliges μ. Daraus gewinnt man durch Koordinatentransformation für ein Intervall I_ϱ der Länge ϱ

$$(5) \qquad \begin{aligned} \int\limits_{I_\varrho} | v^{(j)} |^2 \, dx \leqq \delta_1 \, \varepsilon^{\frac{2\mu}{j}} \, \varrho^{2(\mu - j)} \int\limits_{I_\varrho \times I_\varrho} \frac{(v^{([\mu])}(x) - v^{([\mu])}(y) |^2}{| x - y |^{1+2\{\mu\}}} \, dx \, dy + \\ + C_3(\delta_1) \, \varepsilon^{-\frac{2\mu}{\mu - j}} \, \varrho^{-2j} \int\limits_{I_\varrho} | v |^2 \, dx, \qquad v \in W_2^\mu(I_\varrho). \end{aligned}$$

Setzt man $\varepsilon = \varrho^\tau$ mit $\tau \, 2\mu \left(\dfrac{1}{\mu - j} \right) = \varkappa_1 - \varkappa_2 - 2\mu \geqq 0$, $\varrho \leqq \varrho_0$, so folgt

$$\begin{aligned} \varrho^\varkappa \int\limits_{I_\varrho} | v^{(j)} |^2 \, dx \leqq \delta_1 \, \varrho^{\varkappa + \frac{\mu - j}{\mu}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \int\limits_{I_\varrho \times I_\varrho} \frac{v^{([\mu])}(x) - v^{([\mu])}(y) |^2}{| x - y |^{1+2\{\mu\}}} \, dx \, dy + \\ + C_3(\delta_1) \, \varrho^{\varkappa - \frac{j}{\mu}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \int\limits_{I_\varrho} | v |^2 \, dx. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man $\varkappa \geqq \varkappa_1 \dfrac{j}{\mu} + \varkappa_2 \dfrac{\mu - j}{\mu}$ und $\varrho \leqq \varrho_0$, so erhält man

$$(6) \qquad \varrho^\varkappa \int\limits_{I_\varrho} | v^{(j)} |^2 \, dx \leqq \delta_2 \, \varrho^{\varkappa_1} \int\limits_{I_\varrho \times I_\varrho} \frac{| v^{([\mu])}(x) - v^{([\mu])}(y) |^2}{| x - y |^{1+2\{\mu\}}} \, dx \, dy + C_4(\delta_2) \, \varrho^{\varkappa_2} \int\limits_{I_\varrho} | v |^2 \, dx.$$

Dabei ist $\delta_2 > 0$ beliebig wählbar. Entsprechende Abschätzungen gelten für ganzzahliges μ.

Es sei jetzt $u \in H^\mu_{\varkappa_1, \varkappa_2}$. Das Intervall $[a, b]$ wird wie folgt zerlegt.

$$(7) \qquad \begin{aligned} I_l = \left[a + \frac{1}{2^{l+1}}, a + \frac{1}{2^l} \right] \cup \left[b - \frac{1}{2^l}, b - \frac{1}{2^{l+1}} \right], \; l \geqq N, \\ I_{N-1} = \left[a + \frac{1}{2^N}, b - \frac{1}{2^N} \right]. \end{aligned}$$

Bei den Betrachtungen beschränke ich mich wieder auf den komplizierteren Fall $\{\mu\} > 0$. Aus der Formel (6) erhält man

$$\sum_{l=N-1}^{\infty} 2^{-l\varkappa} \int_{I_l} |u^{(j)}|^2\,dx \leqq \delta_3 \sum_{l=N-1}^{\infty} 2^{-l\varkappa_1} \int_{I_l\times I_l} \frac{|u^{([\mu])}(x) - u^{([\mu])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy + \tag{8}$$
$$+ C_5(\delta_3) \sum_{l=N-1}^{\infty} 2^{-l\varkappa_2} \int_{I_l} |u|^2\,dx.$$

Unter Verwendung von Lemma 3 aus [6], wobei man $p = q^{-1}$ und $\sigma = 1$ zu setzen hat, erhält man

$$\sum_{l=N-1}^{\infty} 2^{-l\varkappa_1} \int_{I_l\times I_l} \frac{|u^{([\mu])}(x) - u^{([\mu])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy \leqq \tag{9}$$
$$\leqq C_6 \sum_{l=N-1}^{\infty} \int_{I_l\times I_l} \frac{|q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(x)\,u^{([\mu])}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(y)\,u^{([\mu])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy +$$
$$+ C_7 \sum_{l=N-1}^{\infty} \int_{I_l\times I_l} |u^{([\mu])}(y)|^2 \frac{|q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy \leqq$$
$$\leqq C_6 \|u\|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2}} + C_8 \int_a^b q^{\varkappa_1 - 2\{\mu\}} |u^{([\mu])}|^2\,dx.$$

Die linke Seite der Formel (8) darf man durch $\int_a^b q^{\varkappa} |u^{(j)}|^2\,dx$ ersetzen. Wählt man $\varkappa_2 = \varkappa_1 - 2\mu$ und $j = [\mu]$, so kann man $\varkappa = \varkappa_1 - 2\{\mu\}$ setzen. Für diesen speziellen Fall folgt durch geeignete Wahl von δ_3 aus den Formeln (8) und (9) die Aussage des Lemmas. Im allgemeinen Fall ist $\varkappa_2 \leqq \varkappa_1 - 2\mu$. Somit kann man die rechte Seite der Formel (9) durch $C_9 \|u\|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2}}$ abschätzen. Daraus folgt das Lemma.

SATZ 1. (*a*) *Es sei* $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$. *Dann ist* $C_0^{\infty}(a, b)$ *dicht in* $H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$.

(*b*) *Ist ausser* $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$ *noch* $\varrho_1 \geqq \varrho_2 + 2\nu$, *so ist* $C_0^{\infty}(a, b)$ *dicht in* $H^{\mu}_{\varkappa_1,\varkappa_2} \cap H^{\nu}_{\varrho_1,\varrho_2}$.

Beweis. Mit $\chi_\varepsilon(x)$ wird eine Funktion aus $C_0^\infty\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ bezeichnet, die im Intervall $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ gleich 1 ist und für welche $|\chi_\varepsilon^{(r)}(x)| \leqq \leqq \frac{C_{10}}{\varepsilon^{(r)}}$ gilt, $\varepsilon>0$. $\chi_\varepsilon(x)$ wird ausserhalb des Intervalls $\left[a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ mit Null fortgesetzt. Zur Abkürzung wird vorübergehend $I_\varepsilon=[a, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b]$ gesetzt. Für ganzzahliges μ folgt der Satz sofort aus Lemma 1 und der Abschätzung

$$\int_a^b q^{\varkappa_1} | u^{(\mu)} - (u\,\chi_\varepsilon)^{(\mu)}|^2\,dx \leqq C_{11} \int_{I_\varepsilon} \sum_{v=0}^{\mu} q^{\varkappa_1-2(\mu-v)} | u^{(v)}|^2\,dx.$$

Dabei wurde benutzt, dass man $\varepsilon^{-2(\mu-v)}$ im Gebiet $\left[a+\frac{\varepsilon}{2}, a+\varepsilon\right] \cup \cup \left[b-\varepsilon, b-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ durch $q^{-2(\mu-v)}$ abschätzen kann.

Es sei $\{\mu\}>0$. Dann ist

$$\int_a^b\int_a^b \frac{| q^{\frac{\varkappa_1}{2}} (u(1-\chi_\varepsilon))^{([\mu])}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}} (u(1-\chi_\varepsilon))^{([\mu])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy \leqq \tag{10}$$

$$\leqq C_{12} \int_a^b\int_a^b (1-\chi_\varepsilon)(x)\, \frac{| q^{\frac{\varkappa_1}{2}} u^{([\mu])}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}} u^{([\mu])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy +$$

$$+ C_{12} \int_a^b\int_a^b q^{\varkappa_1}(y)\,| u^{([\mu])}(y)|^2 \frac{|(1-\chi_\varepsilon)(x)-(1-\chi_\varepsilon)(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy +$$

$$+ C_{12} \sum_{r=0}^{[\mu]-1} \int_a^b\int_a^b \frac{| q^{\frac{\varkappa_1}{2}} u^{(r)}\,\chi_\varepsilon^{([\mu]-r)}(x) - q^{\frac{\varkappa_1}{2}} u^{(r)}\,\chi_\varepsilon^{([\mu]-r)}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx\,dy.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite strebt gegen Null, wenn ε gegen Null geht. Um den zweiten Summanden abzuschätzen, verwendet man

$$\int_a^b \frac{|(1-\chi_\varepsilon)(x)-(1-\chi_\varepsilon)(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx \leqq \frac{C_{13}}{\varepsilon^{2\{\mu\}}} \qquad \text{für} \quad y \in I_{2\varepsilon},$$

$$\int_a^b \frac{|(1-\chi_\varepsilon)(x)-(1-\chi_\varepsilon)(y)|^2}{|x-y|^{1+2\{\mu\}}}\,dx \leqq \frac{C_{14}\,\varepsilon}{q^{2\{\mu\}+1}(y)} \quad \text{für} \quad y \in I - I_{2\varepsilon}\,.$$

Mit diesen Ungleichungen kann man unter Berücksichtigung von $\varepsilon^{-1} \leqq$ $\leqq C_{15}\, q^{-1}(y)$, $y \in I_{2\varepsilon}$, den zweiten Summanden der Formel (10) durch

$$C_{16} \int\limits_{I_{2\varepsilon}} q^{\varkappa_1 - 2\{\mu\}}(y)\,|\,u^{([\mu])}(y)\,|^2\,dy + C_{16} \int\limits_{I-I_{2\varepsilon}} q^{\varkappa_1-2\{\mu\}}(y)\,\frac{\varepsilon}{q(y)}\,|\,u^{([\mu])}(y)\,|^2\,dy$$

abschätzen. Lemma 1 zeigt, dass dieser Ausdruck gegen Null strebt für $\varepsilon \longrightarrow 0$. Der dritte Summand wird nach der in [6] entwickelten Abschätzungstechnik behandelt. Unter Verwendung einer Ungleichung vom Typ der Formel (4) erhält man für $r \leqq [\mu] - 1$

$$\| q^{\frac{\varkappa_1}{2}}\, u^{(r)}\, \chi_\varepsilon^{([\mu]-r)} \|^2_{W_2^{\{\mu\}}} \leqq$$

$$\leqq C_{17} \left[\int_a^b \{ \,|\, (q^{\frac{\varkappa_1}{2}}\, u^{(r)})'\, \chi_\varepsilon^{([\mu]-r)}\,|^2 + |\, q^{\frac{\varkappa_1}{2}}\, u^{(r)}\, \chi_\varepsilon^{([\mu]-r+1)}\,|^2 \}\, dx \right]^{\{\mu\}} \times$$

$$\times \left[\int_a^b q^{\varkappa_1}\,|\,u^{(r)}\,|^2\,|\,\chi_\varepsilon^{([\mu]-r)}\,|^2\,dx \right]^{1-\{\mu\}}$$

$|\,\chi_\varepsilon^{(k)}\,|^2$ wird durch ε^{-2k} abgeschätzt. Verteilt man die entstehenden Potenzen von ε passend auf die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern, wobei man

$$2\,([\mu]-r)\,\{\mu\} + 2\,([\mu]-r)\,(1-\{\mu\}) = 2\,(\mu - r - 1)\,\{\mu\} + 2\,(\mu - r)\,(1 - \{\mu\})$$

und

$$2\,([\mu]-r+1)\,\{\mu\} + 2\,([\mu]-r)\,(1-\{\mu\}) = 2\,(\mu-r)\,\{\mu\} + 2\,(\mu-r)\,(1-\{\mu\})$$

berücksichtigt und ersetzt man ε durch $q(x)$, so folgt schliesslich

$$\| q^{\frac{\varkappa_1}{2}}\, u^{(r)}\, \chi_\varepsilon^{([\mu]-r)} \|^2_{W_2^{\{\mu\}}} \leqq$$

$$\leqq C_{18} \int\limits_{I_\varepsilon} (q^{\varkappa_1 - 2(\mu-r-1)}(y)\,|\,u^{(r+1)}(y)\,|^2 + q^{\varkappa_1-2(\mu-r)}(y)\,|\,u^{(r)}(y)\,|^2)\,dy.$$

Da $r \leqq [\mu] - 1$ ist, streben diese Ausdrücke nach Lemma 1 gegen Null, wenn ε gegen Null geht. Daraus folgt der Satz.

2. Die Interpolation der Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ mit $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$.

Die Bestimmung der Interpolationsräume von $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ und $H^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2}$ mit $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$ und $\varrho_1 \geqq \varrho_2 + 2\nu$ geschieht nach dem gleichen Verfahren wie in [6]. Hierbei muss $(\varkappa_1 - \varkappa_2)\,\nu = (\varrho_1 - \varrho_2)\,\mu$ erfüllt sein. Um die Formulierung der Sätze zu erleichtern, wird ab jetzt statt $\mathcal{L}_{2, q^{\varkappa}}$ stets $H^{0}_{\varkappa, \varkappa}$ geschrieben. Analog zu den Betrachtungen in [6] werden einige Lemmata hergeleitet.

Haben die Mengen I_l, $l = N - 1, N, \ldots$, die gleiche Bedeutung wie früher, so gibt es Funktionen $\psi_i(x) \in C_0^{\infty}(I_{i-1} \cup I_i \cup I_{i+1})$, $i = N, N+1, \ldots$, mit

$$(11) \qquad |\psi_i^{(k)}| \leqq \frac{C_{19}}{2^{ik}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{i=N}^{\infty} \psi_i(x) \equiv 1, \quad 0 \leqq \psi_i(x) \leqq 1,$$

und Funktionen $\varphi_i(x) \in C_0^{\infty}(I_{i-1} \cup I_i \cup I_{i+1})$, $i = N, N+1, \ldots$, mit $0 \leqq \varphi_i(x) \leqq 1$,

$$(12) \qquad \varphi_i(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in \operatorname{supp} \psi_i(x), \qquad |\varphi_i^{(k)}| \leqq \frac{C_{20}}{2^{ik}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

LEMMA 2. *Für $u \in C_0^{\infty}(a, b)$ und $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2m$, m natürliche Zahl, ist*

$$(13) \qquad \int_a^b (q^{\varkappa_1} |u^{(m)}|^2 + q^{\varkappa_2} |u|^2)\, dx \backsim \sum_{i=N}^{\infty} \int_{R_1} (2^{-i\varkappa_1} |(u\psi_i)^{(m)}|^2 + 2^{-i\varkappa_2} |\psi_i - u|^2)\, dx.$$

BEMERKUNG. $\backsim$ ist dass Äquivalenzzeichen.

BEWEIS. Die linke Seite der Äquivalenz (13) kann man unmittelbar durch die rechte Seite nach oben abschätzen. Die Umkehrung erhält man, indem man die Eigenschaft (11) und anschliessend Lemma 1 verwendet.

Wie in [6] wird die Interpolationsfunktion

$$(14) \qquad \widetilde{K}(t, u, H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2}) = \inf(\|v\|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}} + t^2 \|w\|^2_{H^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2}})$$

eingeführt, wobei dass Infimum über alle Darstellungen $u = v + w$ mit $v \in H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ und $w \in H^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2}$ zu nehmen ist.

Mit R_1 wird die Achse der reellen Zahlen bezeichnet.

Lemma 3. *m und l seien nicht negative ganze Zahlen. Ferner mögen für die reellen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varrho_1$ und ϱ_2 die Ungleichungen*

$$\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2m \qquad \text{und} \qquad \varrho_1 \geqq \varrho_2 + 2l$$

gelten. Bezeichnet man mit $W^k_{2,(i)}(R_1)$ und $W^k_{2,[i]}(R_1)$ den Raum $W^k_2(R_1)$ mit den Normierungen

$$\| v \|^2_{W^k_{2,(i)}} = \int_{R_1} (2^{-i\varkappa_1} | v^{(k)} |^2 + 2^{-i\varkappa_2} | v |^2)\, dx \tag{15}$$

und

$$\| v \|^2_{W^k_{2,[i]}} = \int_{R_1} (2^{-i\varrho_1} | v^{(k)} |^2 + 2^{-i\varrho_2} | v |^2)\, dx, \tag{16}$$

so ist für $u \in C_0^\infty(a, b)$

$$\widetilde{K}(t, u, H^m_{\varkappa_1,\varkappa_2}, H^l_{\varrho_1,\varrho_2}) \backsim \sum_{i=N}^{\infty} \widetilde{K}(t, \psi_i u, W^m_{2,(i)}(R_1), W^l_{2,[i]}(R_1)).$$

Beweis. Die Funktion $\chi_\varepsilon(x)$ habe die gleiche Bedeutung wie im Satz 1. Nach Satz 1 wird jede Fuuktion v aus $H^m_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ durch die Funktionen $v\chi_\varepsilon$ approximiert. Entsprechendes gilt für Funktionen w aus $H^l_{\varrho_1,\varrho_2}$. Ist $v + w = u \in C_0^\infty(a, b)$ mit $v \in H^m_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ und $w \in H^l_{\varrho_1,\varrho_2}$, so folgt $v\chi_\varepsilon + w\chi_\varepsilon = u$ für $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$. Somit kann man sich in der Formel (14) auf Funktionen beschränken, die in einer Umgebung der Punkte a und b verschwinden. Ist $m \geqq l$ und $v \in \overset{\circ}{W}{}^m_2[a + \delta, b - \delta]$, so folgt aus der Approximation von v durch Funktionen aus $C_0^\infty(a + \delta, b - \delta)$ in der Norm des Raumes $\overset{\circ}{W}{}^m_2$, dass $w = u - v$ in der Norm des Raumes $\overset{\circ}{W}{}^l_2$ durch Funktionen aus $C_0^\infty(a + \delta, b - \delta)$ approximierbar wird. Somit kann man sich in (14) auf Funktionen v und w aus $C_0^\infty(a, b)$ beschränken. Schreibt man zur Abkürzung $\widehat{I_i} = I_{i-1} \cup I_i \cup I_{i+1}$, so folgt aus Lemma 2

$$\widetilde{K}(t, u, H^m_{\varkappa_1,\varkappa_2}, H^l_{\varrho_1,\varrho_2}) \geqq C_{21} \inf_{\substack{v+w=u \\ v \in C_0^\infty(a,b)}} \Bigg(\sum_{i=N}^{\infty} \int_{R_1} (2^{-i\varkappa_1} | (\psi_i v)^{(m)} |^2 + 2^{-i\varkappa_2} | \psi_i v |^2)\, dx +$$

$$+ \sum_{i=N}^{\infty} t^2 \int_{R_1} (2^{-i\varrho_1} | (\psi_i w)^{(l)} |^2 + 2^{-i\varrho_2} | \psi_i w |^2)\, dx \Bigg) \geqq$$

$$\geqq C_{21} \sum_{i=N}^{\infty} \inf_{\substack{v_i + w_i = \psi_i u \\ v_i \in C_0^\infty(\hat{I}_i)}} \left[\int_{R_1} (2^{-i\varkappa_1} \, | \, v_i^{(m)} \, |^2 + 2^{-i\varkappa_2} \, | \, v_i \, |^2) \, dx + \right.$$

$$\left. + t^2 \int_{R_1} (2^{-i\varrho_1} \, | \, w_i^{(l)} \, |^2 + 2^{-i\varrho_2} \, | \, w_i \, |^2) \, dx \right] \geqq$$

$$\geqq C_{21} \sum_{i=N}^{\infty} \left[\int_{R_1} (2^{-i\varkappa_1} \, | \, \mathring{v}_i^{(m)} \, |^2 + 2^{-i\varkappa_2} \, | \, \mathring{v}_i \, |^2) \, dx + \right.$$

$$\left. + t^2 \int_{R_1} (2^{-i\varrho_1} \, | \, \mathring{w}_i^{(l)} \, |^2 + 2^{-i\varrho_2} \, | \, \mathring{w}_i \, |^2) \, dx \right] - \varepsilon \geqq$$

$$\geqq C_{22} \left[\int_a^b (q^{\varkappa_1} \, | \, \mathring{v}^{(m)} \, |^2 + q^{\varkappa_2} \, | \, \mathring{v} \, |^2) \, dx + t^2 \int_a^b (q^{\varrho_1} \, | \, \mathring{w}^{(l)} \, |^2 + q^{\varrho_2} \, | \, \mathring{w} \, |^2) \, dx \right] - \varepsilon \geqq$$

$$\geqq C_{23} \, \widetilde{K}(t, u, H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2}) - \varepsilon.$$

Dabei ist $\mathring{v}_i + \mathring{w}_i = \psi_i u$, $\mathring{v}_i \in C_0^\infty(\widehat{I_i})$, $\mathring{v}_i = 0$ für $i \geqq i_0$. Durch geeignete Wahl von $\mathring{v}_i$ kann man $\varepsilon > 0$ beliebig klein machen. $\mathring{v} = \sum_{i=N}^{\infty} \mathring{v}_i$, $\mathring{w} = \sum_{i=N}^{\infty} \mathring{w}_i$, $u = \mathring{v} + \mathring{w}$. Die auftretenden Konstanten sind positiv. Somit ist

$$\widetilde{K}(t, u, H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2}) \backsim \sum_{i=N}^{\infty} \widetilde{K}(t, \psi_i u, W^m_{2,(i)}(\widehat{I_i}), W^l_{2,[i]}(\widehat{I_i})). \tag{17}$$

Auf Grund der Definition der Funktion $\widetilde{K}$ erhält man

$$\widetilde{K}(t, u\,\psi_i, W^m_{2,(i)}(R_1), W^l_{2,[i]}(R_1)) \leqq \widetilde{K}(t, \psi_i u, W^m_{2,(i)}(I_i), W^l_{2,[i]}(I_i)). \tag{18}$$

Um die Umkehrung zu zeigen, werden die Funktionen φ_i, Formel (12), verwendet.

Aus $v + w = \psi_i u$, $v \in C_0^\infty(R_1)$, folgt $\varphi_i v + \varphi_i w = \psi_i u$, $\varphi_i v \in C_0^\infty(\widehat{I_i})$. Es ist

$$\int_{\hat{I}_i} (2^{-i\varkappa_1} \, | \, (\varphi_i v)^{(m)} \, |^2 + 2^{-i\varkappa_2} \, | \varphi_i v \, |^2) \, dx \leqq C_{24} \sum_{r=0}^{m} \int_{R_1} (2^{-i\varkappa_1 + 2ir} \, | \, v^{(m-r)} \, |^2 + 2^{-i\varkappa_2} \, | \, v \, |^2) \, dx.$$

Aus $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2m$,

$$(19) \qquad 2^{2ir} \| v \|^2_{W_2^{m-r}} \leqq C_{25} (2^{2im} \| v \|^2_{\mathcal{L}_2})^{\frac{r}{m}} \| v \|^{2\frac{m-r}{r}}_{W_2^m} \leqq C_{26} (\| v \|^2_{W_2^m} + 2^{2im} \| v \|^2_{\mathcal{L}_2})$$

und einer entsprechenden Betrachtung für $\varphi_i w$ folgt schliesslich die Umkehrung der Formel (18). Zusammen mit der Äquivalenz (17) führt dies zum Beweis des Lemmas.

Für die weiteren Betrachtungen ist die Interpolation der Räume $W^m_{2,(i)}(R_1)$ und $W^l_{2,[i]}(R_1)$ von Interesse. Es wird für $v \in C_0^\infty(R_1)$

$$\| v \|_* = \left(\int_0^\infty t^{-2\theta} \tilde{K}(t, v, W^m_{2,(i)}(R_1), W^l_{2,[i]}(R_1)) \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

gesetzt.

LEMMA 4. *m und l seien nicht negative ganze Zahlen. $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ϱ_1 und ϱ_2 seien reelle Zahlen. Es gelte $(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, l = (\varrho_1 - \varrho_2)\, m$, wobei man im Falle $m = l = 0$ $\varkappa_1 = \varkappa_2$ und $\varrho_1 = \varrho_2$ zu setzen hat. Für eine vorgegebene Zahl θ, $0 < \theta < 1$, wird $g = [m(1-\theta) + l\theta]$ und $r = \}m(1-\theta) + l\theta\{$ gesetzt. Es gibt zwei positive von i unabhängige Konstanten c und C, so dass für $r = 0$*

$$c \| v \|^2_* \leqq 2^{-i\varkappa_1(1-\theta)-i\varrho_1\theta} \int_{R_1} | v^{(g)}(x) |^2 \, dx + \\ + 2^{-i\varkappa_2(1-\theta)-i\varrho_2\theta} \int_{R_1} | v(x) |^2 \, dx \leqq C \| v \|^2_*$$

und für $r > 0$

$$c \| v \|^2_* \leqq 2^{-i\varkappa_1(1-\theta)-i\varrho_1\theta} \int_{R_1 \times R_1} \frac{| v^{(g)}(x) - v^{(g)}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dx \, dy + \\ + 2^{-i\varkappa_2(1-\theta)-i\varrho_2\theta} \int_{R_1} | v(x) |^2 \, dx \leqq C \| v \|^2_*$$

gilt. $v \in C_0^\infty(R_1)$.

BEWEIS. Es wird $m \geqq 1$ vorausgesetzt. Führt man in der Formel (15) mit $k = m$ die Koordinatentransformation $y = 2^{\frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} x$ durch und setzt man $v(x) = w(y)$, so erhält man

$$\| v \|^2_{W^m_{2,(i)}} = 2^{-i\varkappa_2 - \frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \int\limits_{R_1} (\,| w^{(m)} |^2 + | w |^2)\, dy.$$

Auf Grund der Voraussetzung $(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, l = (\varrho_1 - \varrho_2)\, m$ bekommt man bei der gleichen Koordinatentransformation

$$\| v \|^2_{W^l_{2,[i]}} = 2^{-i\varrho_2 - \frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \int\limits_{R_1} (\,| w^{(l)} |^2 + | w |^2)\, dy.$$

Es sei jetzt $v \in C_0^\infty(R_1)$. Dann ist

$$\widetilde{K}(t, v, W^m_{2,(i)}(R_1), W^l_{2,[i]}(R_1)) = \inf_{\substack{v_0 + v_1 = v \\ v_0 \in C_0^\infty(R_1)}} (\,\| v_0 \|^2_{W^m_{2,(i)}} + t^2 \| v_1 \|^2_{W^l_{2,[i]}}).$$

Verwendet man die angegebene Koordinatentransformation und setzt man $v_0(x) = w_0(y)$, $v_1(x) = w_1(y)$ und $v(x) = w(y)$, so ergibt sich

$$\widetilde{K}(t, v, W^m_{2,(i)}(R_1), W^l_{2,[i]}(R_1)) =$$

$$= 2^{-i\varkappa_2 - \frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \inf_{\substack{w_0 + w_1 = w \\ w_0 \in C_0^\infty(R_1)}} (\,\| w_0 \|^2_{W_2^m} + (t\, 2^{\frac{i}{2}(\varkappa_2 - \varrho_2)})^2 \| w_1 \|^2_{W_2^l})$$

$$= 2^{-i\varkappa_2 - \frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)}\, \widetilde{K}(t\, 2^{\frac{i}{2}(\varkappa_2 - \varrho_2)}, w, W_2^m, W_2^l).$$

Somit ist

$$\| v \|^2_* = 2^{-i\varkappa_1 - \frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2) + i\theta(\varkappa_2 - \varrho_2)} \int\limits_0^\infty t^{-2\theta}\, \widetilde{K}(t, w, W_2^m, W_2^l)\, \frac{dt}{t}. \tag{20}$$

Dabei wurde noch eine Transformation der Grösse t vorgenommen. Das Integral in der letzten Gleichung ist unabhängig von i und äquivalent zu $\| w \|^2_{W_2^{(1-\theta)m + \theta l}}$. Andererseit ist

$$\| w \|^2_{W_2^{(1-\theta)m+\theta l}} \backsim \int\limits_{R_1} (| w^{(g)} |^2 + | w |^2)\, dy \quad \text{für } r = 0$$

und

$$\| w \|^2_{W_2^{(1-\theta)m+\theta l}} \backsim \int\limits_{R_1 \times R_1} \frac{| w^{(g)}(x) - w^{(g)}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dx \, dy + \int\limits_{R_1} | w |^2 \, dy \quad \text{für } r > 0.$$

Macht man die obige Koordinatentransformation rückgängig, so folgt im Fall $r > 0$

$$\| w \|^2_{W_2^{(1-\theta)m+\theta l}} \backsim$$

$$\backsim 2^{-i \frac{(1-\theta)m+\theta l}{m}(\varkappa_1 - \varkappa_2) + \frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \int\limits_{R_1 \times R_1} \frac{| v^{(g)}(x) - v^{(g)}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dx \, dy + 2^{\frac{i}{2m}(\varkappa_1 - \varkappa_2)} \| v \|^2_{\mathfrak{L}_2}.$$

Entsprechend für $r = 0$. Setzt man diese Äquivalenz in die Gleichung (20) ein, so erhält man das Lemma. Im Falle $m = l = 0$ vereinfacht sich die Rechnung wesentlich.

SATZ 2. *m und l seien nicht negative ganze Zahlen. Für die reellen Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varrho_1$ und ϱ_2 gelte $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2m$, $\varrho_1 \geqq \varrho_2 + 2l$ und $(\varkappa_1 - \varkappa_2) l = (\varrho_1 - \varrho_2) m$. Dabei hat man im Falle $m = l = 0$ $\varkappa_1 = \varkappa_2$ und $\varrho_1 = \varrho_2$ zu setzen. Dann ist*

$$(H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2} = H^\eta_{\sigma_1, \sigma_2}$$

mit $\eta = (1 - \theta) m + \theta l$, $\sigma_i = (1 - \theta) \varkappa_i + \theta \varrho_i$, $i = 1, 2$, $0 < \theta < 1$.

BEWEIS. Es ist $\sigma_1 \geqq \sigma_2 + 2\eta$. Nach Satz 1 und des Ergebnissen der Interpolationstheorie ist es ausreichend, auf $C_0^\infty(a, b)$ die Äquivalenz der Normen der Räume $(H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2}$ und $H^\eta_{\sigma_1, \sigma_2}$ nachzuweisen. Es sei $u \in C_0^\infty(a, b)$. Zur Abkürzung wird wieder $g = [1 - \theta) m + \theta l]$ und $r = \{1 - - \theta) m + \theta l\}$ gesetzt. Nach Lemma 3 und und Lemma 4 ist für $r = 0$

$$\| u \|^2_{(H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2}} \backsim \sum_{i=N}^{\infty} \left[2^{-i\sigma_1} \int\limits_{R_1} | (\psi_i u)^{(g)} |^2 \, dx + 2^{-i\sigma_2} \int\limits_{R_1} | \psi_i u |^2 \, dx \right] \tag{21}$$

und für $r > 0$

$$\| u \|^2_{(H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2}} \backsim \sum_{i=N}^{\infty} \left[2^{-i\sigma_1} \int\limits_{R_1 \times R_1} \frac{| (\psi_i u)^{(g)}(x) - (\psi_i u)^{(g)}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dx \, dy + \right.$$

$$\left. + 2^{-i\sigma_2} \int\limits_{R_1} | \psi_i u |^2 \, dx \right]. \tag{22}$$

Die weiteren Rechnungen verlaufen weitgehend analog zu den entsprechenden Überlegungen in [6]. Die rechte Seite der Äquivalenzen (21) und (22) wird mit A bezeichnet. Im Falle $r = 0$ folgt aus der Formel (11)

$$A \leqq C_{27} \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{g} q^{\sigma_1 - 2(g-n)}(x) \mid u^{(n)}(x) \mid^2 + q^{\sigma_2}(x) \mid u(x) \mid^2 \right) dx.$$

Lemma 1 zeigt nun, dass

$$A \leqq C_{28} \int_a^b (q^{\sigma_1}(x) \mid u^{(g)}(x) \mid^2 + q^{\sigma_2}(x) \mid u(x) \mid^2)\, dx$$

gilt. Ersetzt man in der rechten Seite der letzten Ungleichung u durch $\sum_{i=N}^{\infty} \psi_i u$, so folgt sofort, dass man die rechte Seite bis auf eine Konstante durch A abschätzen kann. Daraus folgt für $r = 0$ der Satz. Es sei jetzt $r > 0$. Die Integration über $R_1 \times R_1$ in der Formel (22) darf man durch die Integration über $\widehat{I_i} \times R_1$ ersetzen, wobei $\widehat{I_i}$ die gleiche Bedeutung wie früher hat (Beweis zu Lemma 3). Nach der gleichen Methode wie früher, Formel (10), erhält man

$$A \leqq C_{29} \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} 2^{-i\sigma_1} \left[\int_{\hat{I}_i \times R_1} \mid u^{(g)}(x) \mid^2 \frac{\mid \psi_i(x) - \psi_i(y) \mid^2}{\mid x - y \mid^{1+2r}}\, dx\, dy + \right.\right.$$
$$+ \int_{\hat{I}_i \times R_1} \psi_i(y) \frac{\mid u^{(g)}(x) - u^{(g)}(y) \mid^2}{\mid x - y \mid^{1+2r}}\, dx\, dy +$$
$$\left.\left. + \sum_{n=0}^{g-1} \int_{\hat{I}_i \times R_1} \frac{\mid u^{(n)}(x)\, \psi_i^{(g-n)}(x) - u^{(n)}(y)\, \psi_i^{(g-n)}(y) \mid^2}{\mid x - y \mid^{1+2r}}\, dy\, dx \right] + \int_a^b q^{\sigma_2}(x) \mid u(x) \mid^2 dx \right\}. \tag{23}$$

Aus

$$\int_{R_1} \frac{\mid \psi_i(x) - \psi_i(y) \mid^2}{\mid x - y \mid^{1+2r}}\, dy \leqq C_{30}\, 2^{2ir}$$

folgt, dass man die erste Summe in der Ungleichung (23) durch

$$\int_a^b q^{\sigma_1 - 2r}(x) \mid u^{(g)}(x) \mid^2 dx$$

abschätzen kann. In der zweiten Summe kann man die Integration über $\widehat{I}_i \times R_1$ durch die Integration über $\widehat{I}_i \times \widehat{I}_i$ ersetzen. Berücksichtigt man dies, so kann man die zweite Summe in der Formel (23) durch

$$C_{31} \sum_{i=N}^{\infty} \left[\int\limits_{\hat{I}_i \times \hat{I}_i} \frac{| q^{\frac{\sigma_1}{2}}(x)\, u^{(g)}(x) - q^{\frac{\sigma_1}{2}}(y)\, u^{(g)}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dx\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\hat{I}_i \times \hat{I}_i} | u^{(g)}(x) |^2 \frac{| q^{\frac{\sigma_1}{2}}(x) - q^{\frac{\sigma_1}{2}}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dx\, dy \right]$$

abschätzen. Aus Lemma 3 der Arbeit [6] mit $p = q^{-1}$ und $\sigma = 1$ folgt

$$\int\limits_{\hat{I}_i} \frac{| q^{\frac{\sigma_1}{2}}(x) - q^{\frac{\sigma_1}{2}}(y) |^2}{| x - y |^{1+2r}} \, dy \leqq C_{32}\, q^{\sigma_1 - 2r}(x), \qquad x \in \widehat{I}_i .$$

Somit kann man zweite Summe in der Formel (23) durch

$$C_{33} \| u \|^2_{H^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_2}} + C_{33} \int\limits_a^b q^{\sigma_1 - 2r}(x)\, | u^{(g)}(x) |^2 \, dx$$

abschätzen. Unter Verwendung von

$$2^{2i(g-n)} \| u^{(n+1)} \|^{2r}_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)} \| u^{(n)} \|^{2(1-r)}_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)} \leqq$$

$$\leqq \left(2^{2i(g-n)+2ir} \| u^{(n)} \|^2_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)}\right)^{1-r} \cdot \left(2^{2i(g-n-1)+2ir} \| u^{(n+1)} \|^2_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)}\right)^{r}$$

wird die dritte Summe der Formel (23) durch

$$C_{34} \sum_{n=0}^{g-1} \sum_{i=N}^{\infty} 2^{-i_1} \| u^{(n)} \psi_i^{(g-n)} \|^{2r}_{W_2^1(R_1)} \| u^{(n)} \psi_i^{(g-n)} \|^{2(1-r)}_{\mathfrak{L}_2(R_1)} \leqq$$

$$\leqq C_{35} \sum_{n=0}^{g-1} \sum_{i=N}^{\infty} 2^{-i\sigma_1} \left(2^{2i(g-n)+2ir} \| u^{(n)} \|^2_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)} + 2^{2i(g-r)} \| u^{(n+1)} \|^{2r}_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)} \| u^{(n)} \|^{2(1-r)}_{\mathfrak{L}_2(\hat{I}_i)}\right)$$

$$\leqq C_{36} \sum_{n=0}^{g} \int\limits_a^b q^{\sigma_1 - 2(g-n) - 2r}(x)\, | u^{(u)}(x) |^2 \, dx$$

abgeschätzt. Aus diesen Abschätzungen und dem Lemma 1 erhält man schliesslich

$$A \leqq C_{37} \| u \|^2_{H^\eta_{\sigma_1, \sigma_2}} .$$

Die umgekehrte Ungleichung

$$\| u \|^2_{H^\eta_{\sigma_1, \sigma_2}} \leqq c_{38} A$$

ist im dritten Beweisschritt des Satzes 1 der Arbeit [6] enthalten. Daraus folgt auch im Falle $r > 0$ die Äquivaleuz der Normen der Räume $(H^m_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^l_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2}$ und $H^\eta_{\sigma_1, \sigma_2}$ auf $C_0^\infty(a, b)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Das Reiterationstheorem der Interpolationstheorie [1, 3] erlaubt jetzt, Satz 2 zu verallgemeinern.

SATZ 3. *μ und ν seien nicht negative reelle Zahlen, $\mu \neq \nu$. Für die reellen Zahlen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ϱ_1 und ϱ_2 gelte $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 + 2\mu$, $\varrho_1 \geqq \varrho_2 + 2\nu$ und $(\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \nu = (\varrho_1 - \varrho_2)\, \mu$. Dann ist*

$$(H^\mu_{\varkappa_1, \varkappa_2}, H^\nu_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2} = H^\eta_{\sigma_1, \sigma_2}$$

mit $\eta = (1 - \theta)\, \mu + \theta\nu$, $\sigma_i = (1 - \theta)\, \varkappa_i + \theta \varrho_i$, $i = 1, 2$, $0 < \theta < 1$.

BEMERKUNG. Im Satz 1 war die Einschränkung $\mu \neq \nu$ nicht notwendig.

BEWEIS. Man wählt zwei nicht negative ganze Zahlen l und m, so dass $l \leqq \nu \leqq m$ und $l \leqq \mu \leqq m$ gilt. Da $\mu \neq \nu$ vorausgesetzt wurde, gibt es Zahlen θ_ν und θ_μ zwischen 0 und 1 mit

$$\mu = (1 - \theta_\mu)\, m + \theta_\mu\, l, \; \nu = (1 - \theta_\nu)\, m + \theta_\nu\, l, \qquad \theta_\mu \neq \theta_\nu .$$

Bestimmt man α_1, α_2, β_1 und β_2 aus

$$\alpha_1 (1 - \theta_\mu) + \beta_1\, \theta_\mu = \varkappa_1 , \qquad \alpha_2 (1 - \theta_\mu) + \beta_2\, \theta_\mu = \varkappa_2 ,$$

$$\alpha_1 (1 - \theta_\nu) + \beta_1\, \theta_\nu = \varrho_1 \qquad \alpha_2 (1 - \theta_\nu) + \beta_2\, \theta_\nu = \varrho_2 ,$$

so gilt $\alpha_1 \geqq \alpha_2 + 2m$, $\beta_1 \geqq \beta_2 + 2l$ und $(\alpha_1 - \alpha_2)\, l = (\beta_1 - \beta_2)\, m$.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt und es ist

$$H^\mu_{\varkappa_1, \varkappa_2} = (H^m_{\alpha_1, \alpha_2}, H^l_{\beta_1, \beta_2})_{\theta_\mu, 2} \text{ und } H^\nu_{\varrho_1, \varrho_2} = (H^m_{\alpha_1, \alpha_2}, H^l_{\beta_1, \beta_2})_{\theta_\nu, 2}, \; .$$

Der Satz folgt dann aus dem Reiterationstheorem der Interpolationstheorie.

3. Die Interpolation der Räume $\mathring{H}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ mit $\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 + 2\mu$.

Für die Anwendungen sind die Resultate des vorangegangenen Abschnittes nicht ausreichend. Es zeigt sich, dass man auch Aussagen über die Interpolation der Räume $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ mit $\varkappa_1 < \varkappa_2 + 2\mu$ benötigt. Diese Räume kann man jedoch nicht mit der obigen Methode behandeln.

Mit $\mathring{H}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ wird die Vervollständigung von $C_0^{\infty}(a, b)$ in der Norm des Raumes $H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ bezeichnet. Die Interpolation dieser Räume kann man teilweise auf die Resultate des letzten Abschnittes zurückführen. Es zeigt sich jedoch auch hier, wie durch Beispiele belegt wird, dass eine formale Übertragung der Sätze 2 und 3 nicht richtig ist.

Lemma 5. *μ sei eine nicht negative Zahl und $\varkappa_1$ eine reelle Zahl. Ferner sei $\varkappa_1 - 2\mu \neq -1, -3, \ldots, 1 - 2[\mu]$ (für $0 \leqq \mu < 1$ entfällt diese Bedingung, für $1 \leqq \mu < 2$ ist sie als $\varkappa_1 - 2\mu \neq -1$ zu verstehen). Für Funktionen $u(x)$ aus $C_0^{\infty}(a, b)$ gibt es eine von u unabhängige Konstante c, so dass*

$$\int_a^b q^{\varkappa_1 - 2\mu}(x)\, |u(x)|^2\, dx \leqq C \, \| u \|^2_{H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}}$$

gilt. Hierbei ist $\varkappa_2$ eine beliebig wählbare reelle Zahl.

Beweis. $q(x)$ hat die gleiche Bedeutung wie in den früheren Abschnitten. Die Voraussetzungen des Lemmas erlauben eine iterative Anwendung der Formel (3) aus [7]. Somit ist

$$\int_a^b q^{\varkappa_1 - 2\mu} |u|^2\, dx \leqq C_{39} \int_a^b q^{\varkappa_1 - 2\{\mu\}} \, |u^{([\mu])}|^2\, dx + C_{40} \int_{a+\delta}^{b-\delta} |u|^2\, dx$$

mit einem geeignet gewählten δ. Lemma 7 aus [6] führt nun zu

$$\int_a^b q^{\varkappa_1 - 2\mu} \, |u|^2\, dx \leqq C_{41} \left(\| q^{\frac{\varkappa_1}{2}} u^{([\mu])} \|^2_{W_2^{\{\mu\}}} + \| q^{\frac{\varkappa_2}{2}} u \|^2_{\mathfrak{L}_2} \right).$$

Das ist die Aussage des Lemmas.

Satz 4. (a) *Ist $\lambda \geqq 0$ und τ_1 reell, so gilt*

$$\overset{\circ}{H}{}^{\lambda}_{\tau_1, \tau_2} = H^{\lambda}_{\tau_1, \tau_1 - 2\lambda},$$

sofern $\tau_2 \geqq \tau_1 - 2\lambda$ und $\tau_1 - 2\lambda \neq -1, -3, \dots, 1 - 2[\lambda]$ ist.

(*b*) *μ und ν seien nicht negative reelle Zahlen, $\mu \neq \nu$. $\varkappa_1, \varkappa_2$, ϱ_1 und ϱ_2 seien reelle Zahlen mit $\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 + 2\mu$ und $\varrho_1 \leqq \varrho_2 + 2\nu$. Ferner gelte $\varkappa_1 - 2\mu \neq -1, -3, \dots, 1 - 2[\mu]$ und $\varrho_1 - 2\nu \neq -1, -3, \dots, 1 - 2[\nu]$ der gleichen Interpretation wie im Lemma 5. Dann ist*

$$(\overset{\circ}{H}{}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, \overset{\circ}{H}{}^{\nu}_{\varrho_1 \varrho_2})_{\theta, 2} = H^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_1 - 2\mu} = \overset{\circ}{H}{}^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_1 - 2\mu}$$

mit $\eta = \mu(1 - \theta) + \nu\theta$ und $\sigma_1 = \varkappa_1(1 - \theta) + \varrho_1 \theta$.

Beweis. Der Beweis der Aussage (*a*) folgt sofort aus Lemma 5 und Satz 1. Somit ist nach Satz 3

$$(\overset{\circ}{H}{}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, \overset{\circ}{H}{}^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2} = (H^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_1 - 2\mu}, H^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_1 - 2\nu})_{\theta, 2} = \overset{\circ}{H}{}^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_1 - 2\mu}.$$

Bemerkung. Sind μ und ν ganzzahlig, so kann man auf die Voraussetzung $\mu \neq \nu$ verzichten. Statt auf Satz 3 muss man dann auf Satz 2 zurückgreifen.

Es soll durch ein Beispiel gezeigt werden, dass $(\overset{\circ}{H}{}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, \overset{\circ}{H}{}^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2})_{\theta, 2}$ nicht immer gleich $\overset{\circ}{H}{}^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_2}$ mit $\sigma_2 = \varkappa_2(1 - \theta) + \varrho_2 \theta$ ist. Dabei haben η und σ_1 die gleiche Bedeutung wie im Satz 4. Es sei $\mu = \varkappa_1 = 2$ und $\nu = \varrho_1 = \varrho_2 = \varkappa_2 = 0$, also $\overset{\circ}{H}{}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2} = \overset{\circ}{H}{}^{2}_{2, 0}$ und $\overset{\circ}{H}{}^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2} = \mathcal{L}_2[a, b]$. Dann ist nach Satz 4 (*b*)

$$(\overset{\circ}{H}{}^{2}_{2, 0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2}, 2} = H^{1}_{1, -1}.$$

$H^1_{1, -1}$ ist die Vervollständigung von $C_0^\infty(a, b)$ in der Norm

$$\left(\int_a^b \left(q\,|u'|^2 + \frac{1}{q}\,|u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wäre in diesem Beispiel $(\overset{\circ}{H}{}^{\mu}_{\varkappa_1, \varkappa_2}, \overset{\circ}{H}{}^{\nu}_{\varrho_1, \varrho_2})_{\frac{1}{2}, 2} = \overset{\circ}{H}{}^{\eta}_{\sigma_1, \sigma_2}$, so müsste $H^1_{1, -1} = \overset{\circ}{H}{}^{1}_{1, 0}$ gelten. Nach Satz 2 aus [7] ist aber $\overset{\circ}{H}{}^{1}_{1, 0} = H^1_{1, 0}$. Insbesondere müsste also die Funcktion $u(x) \equiv 1$ zu $H^1_{1,-1}$ gehören, was nicht sein kann. Somit ist

$$(\mathring{H}^2_{2,0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2},2} = H^1_{1,-1} \dotplus \mathring{H}^1_{1,0} = H^1_{1,0}\,. \tag{24}$$

Betrachtet man andererseit den Legendreschen Differentialoperator

$$Au = -(qu')', \qquad \mathcal{D}(A) = C^\infty[a, b],$$

so folgt aus den Betrachtungen der Arbeit [7], insbesondere aus dem dortigen Satz 6 (b) und Lemma 6, dass

$$\mathcal{D}(\bar{A})^{\frac{1}{2}} = H^1_{1,0} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(\bar{A}) = H^2_{2,0}$$

gilt. Insbesondere ist

$$(H^2_{2,0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2},2} = H^1_{1,0}\,. \tag{25}$$

Die Formeln (24) und (25) kann man jetzt zur Konstruktion von Gegenbeispielen zur Interpolationstheorie verwenden.

SATZ 5. *H_0 sei ein separabler Hilbertraum und r eine natürliche Zahl. Dann gibt es zwei Hilberträume H_1 und H_2, so dass H_1 stetig in H_0 eingebettet ist, H_2 ein Teiltraum von H_1 mit der Kodimension r ist und auf H_2 die Normen der Räume $(H_1, H_0)_{\frac{1}{2},2}$ und $(H_2, H_0)_{\frac{1}{2},2}$ inäquivalent sind.*

BEWEIS. Es ist ausreichend, diesen Satz für einen speziellen separablen Hilbertraum und für $r = 1$ zu beweisen. Nach Satz 2 aus [7] ist dim $H^2_{2,0}/\mathring{H}^2_{2,0} = 2$. Wählt man eine Funktion $u(x)$ aus $H^2_{2,0}$, die nicht zu $\mathring{H}^2_{2,0}$ gehört und setzt man $\widetilde{H}^2_{2,0} = \{u\} + \mathring{H}^2_{2,0}$, so sind die Kodimensionen von $\widetilde{H}^2_{2,0}$ bezüglich $H^2_{2,0}$ und von $\mathring{H}^2_{2,0}$ bezüglich $\widetilde{H}^2_{2,0}$ jeweils gleich 1. Die Formeln (24) und (25) zeigen nun, dass entweder die Normen der Räume $(H^2_{2,0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2},2}$ und $(\widetilde{H}^2_{2,0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2},2}$ auf $\widetilde{H}^2_{2,0}$ oder die Normen der Räume $(\widetilde{H}^2_{2,0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2},2}$ und $(\mathring{H}^2_{2,0}, \mathcal{L}_2)_{\frac{1}{2},2}$ auf $\mathring{H}^2_{2,0}$ inäquivalent sind. Daraus folgt der Satz.

BEMERKUNG. Gegenbeispiele zu dieser Frage sind bekannt. Literaturhinweise findet man in [2], S. 190.

4. Definitionsgebiete gebrochener Potenzen allgemeiner Legendrescher Differentialoperatoren. Der Fall $0 < k < m$, $k \equiv 0\,(2)$, $(k, m) = 1$.

Die Funktion $q(x)$ habe die gleiche Bedeutuug wie im Abschnitt 1. Im diesem Abschnitt werden die allgemeine Legendreschen Differentialoperatoren

$$Au = (-1)^m (q^k u^{(m)})^{(m)}, \quad \mathcal{D}(A) = C^\infty[a, b] \cap \overset{\circ}{C}{}^{m-k-1}[a, b], \tag{26}$$

betrachtet. Dabei ist vorerst $0 \leqq k \leqq m$. Im Falle $k = m$ hat man $\mathcal{D}(A) = C^\infty[a, b]$ zu setzen. Operatoren dieser Form wurden im ersten Teil dieser Arbeit ausführlich betrachtet. Insbesondere wurden im Satz 6 aus [7] die Räume $\mathcal{D}(\bar{A}^l)$, $l = 1, 2, \ldots$, bestimmt. Es ergab sich $\mathcal{D}(\bar{A}^\infty) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{D}(\bar{A}^l) \subseteq C^\infty[a, b]$. Es zeigt sich, dass man Satz 6 aus [7] leicht verallgemeinern kann. Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird ab jetzt in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen aus [7]

$$H^{\mu}_{\varkappa_1, 0} = H^{\mu}_{\varkappa_1}$$

gesetzt.

Satz 6. *Ist A der Differentialoperator* (26) *mit* $0 \leqq k \leqq m$, *so ist* $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}})$ $l = 0, 1, 2, \ldots$, *die Vervollständigung von* $\mathcal{D}(\bar{A}^\infty)$ *in der Norm des Raumes* H^{lm}_{lk}.

Beweis. Nach Satz 6 aus [7] ist des Satz für $l = 0, 2, 4, \ldots$ richtig. Durch partielle Integration folgt sofort, dass er auch für $l = 1$ gültig ist. Im Sinne eines Induktionsschlusses nehmen wir an, dass der Satz für $l = 0, 1, \ldots, n+1$, bewiesen sei, $n \geqq 1$. Unter Verwendung von Lemma 1 aus [7] und unter Berücksichtingung von $nk + 2k - 2 < 2(nm + m) - 1$ erhält man für $u \in \mathcal{D}(\bar{A}^\infty) \subseteq C^\infty[a, b]$

$$\| u \|^2_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{n}{2}+1})} \backsim \int_a^b (q^{nk} \,|\, (Au)^{(nm)} \,|^2 + |\, u^2)\, dx \backsim$$

$$\backsim \int_a^b (q^{nk+2k} \,|\, u^{(nm+2m)} \,|^2 + |\, u \,|^2)\, dx \backsim \| u \|^2_{H^{(n+2)m}_{(n+2)k}}.$$

Daraus folgt der Satz.

Die Bestimmung der Räume $\mathcal{D}(\bar{A}^{\theta})$ mit allgemeinem $\theta > 0$ erweist sich als wesentlich komplizierter. Zur Vorbereitung sollen zwei Lemmata hergeleitet werden.

LEMMA 6. *H_0 und H_1 seien zwei stetig ineinander eingebettete Hilberträume, $H_1 \subseteq H_0$. N sei ein endlichdimensionaler Teilraum, $N \subseteq H_1$. Es sei $\widetilde{H}_0 = H_0 \ominus N$ und $\widetilde{H}_1 = H_1 \cap \widetilde{H}_0$. Dann ist*

$$(\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_1)_{\theta, 2} = (H_0, H_1)_{\theta, 2} \cap \widetilde{H}_0$$

und die zugehörigen Normen sind suf $(\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_1)_{\theta, 2}$ äquivalent.

BEWEIS. Man sieht leicht, dass die Bäume $\widetilde{H}_1$ und $(H_0, H_1)_{\theta,2} \cap \widetilde{H}_0$ vollständig sind. Es sei $u \in (\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_1)_{\theta,2}$. Dann ist auch $u \in (H_0, H_2)_{\theta, 2} \cap \widetilde{H}_0$ und

$$\| u \|_{(H_0, H_1)_{\theta,2}} \leqq C_{42} \| u \|_{(\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_1)_{\theta, 2}} \tag{27}$$

Es sei $u \in (H_0, H_1)_{\theta, 2} \cap \widetilde{H}_0$. Dann gibt es eine im Intervall $(0, \infty)$ lokal H_1-integrierbare Funktion $v(t)$, so dass $u = \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t} dt$ ist. Dabei hat man das Integral im Raum H_0 zu betrachten. Es ist $v(t) = u(t) + w(t)$ mit $u(t) \in \widetilde{H}_1$ und $w(t) \in N$. Aus $\| u(t) \|_{H_0} \leqq \| v(t) \|_{H_0}$ und

$$\| u(t) \|_{H_1} \leqq \| v(t) \|_{H_1} + \| w(t) \|_{H_1} \leqq \| v(t) \|_{H_1} + C_{43} \| w(t) \|_{H_0} \leqq C_{44} \| v(t) \|_{H_1}$$

folgt, dass $u(t)$ lokal $\widetilde{H}_1$-integrierbar ist und auch $u = \int_0^{\infty} \frac{u(t)}{t} dt$ im Raum $\widetilde{H}_0$ gilt. Daraus folgt, dass u zu $(\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_1)_{\theta,2}$ gehört [3]. Somit stimmen $(H_0, H_1)_{\theta, 2} \cap \widetilde{H}_0$ und $(\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_1)_{\theta, 2}$ als Mengen überein. Da die Normen vergleichbar sind, Formel (27), sind sie äquivalent. Daraus folgt das Lemma.

LEMMA 7. *H_0, H_1 und H_2 seien Hilberträume, $H_1 \subseteq H_0$, $H_2 \subseteq H_0$. H_1 und H_2 mögen mengentheoretisch übereinstimmen. Ferner sei $H_1 = M \oplus N_1$ und $H_2 = M \oplus N_2$, $\dim N_i < \infty, i = 1, 2$. Dann folgt aus $\| x \|_{H_1} \backsim \| x \|_{H_2}$ für alle $x \in M$, dass die Normen der Räume H_1 und H_2 äquivalent sind.*

Beweis. Es sei $x \in H_1$ und $x = x_M + x_{N_2}$, $x_M \in M$, $x_{N_2} \in N_2$. Dann ist

$$\| x \|^2_{H_1} \leqq C_{45} (\| x_M \|^2_{H_1} + \| x_{N_2} \|^2_{H_2}) \leqq C_{46} (\| x_M \|^2_{H_2} + \| x_{N_2} \|^2_{H_2}) = C_{46} \| x \|^2_{H_2} \cdot$$

Entsprechend wird die Umkehrung bewiesen.

Satz 7. *Es sei entweder $k = 0$ oder $0 < k < m$, $k \equiv 0\ (2)$ und $(k, m) = 1$ (d. h., dass k und m als teilerfremd vorausgesetzt werden). Ist A der Differentialoperator (26), so ist $\mathcal{D}(\bar{A}^{-\frac{l}{2}+\frac{p}{2m}})$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\bar{A}^{\infty})$ in der Norm des Raumes $H^{lm+p}_{kl+k\frac{p}{m}}$.*

Beweis. 1. *Schrittt.* Nach Satz 6 ist es ausreichend, $1 \leqq p \leqq m-1$ zu betrachten. Ferner folgt aus diesem Satz und den Sätzen der Interpolationstheorie für $u \in C_0^{\infty}(a, b)$

$$\| u \|_{(\mathcal{D}(\bar{A}^{-\frac{l}{2}}), \mathcal{D}(\bar{A}^{-\frac{l+1}{2}}))_{\theta, 2}} \leqq C_{47} \| u \|_{(\overset{\circ}{H}{}^{lm}_{lk}, \overset{\circ}{H}{}^{(l+1)m}_{(l+1)k})_{\theta, 2}} \cdot$$

Satz 4 zeigt, dass

$$(\overset{\circ}{H}{}^{lm}_{lk}, \overset{\circ}{H}{}^{(l+1)m}_{(l+1)k})_{\theta, 2} = \overset{\circ}{H}{}^{m(l+\theta)}_{k(l+\theta), k(l+\theta)-2m(l-\theta)}$$

ist. Setzt man $\theta = \frac{p}{m}$, so ist $k\theta = k\frac{p}{m}$ entweder 0 oder nicht ganzzahlig. In beiden Fällen folgt wiederum aus Satz 4

$$(\overset{\circ}{H}{}^{lm}_{lk}, \overset{\circ}{H}{}^{(l+1)m}_{(l+1)k})_{\frac{p}{m}, 2} = \overset{\circ}{H}{}^{ml+p}_{kl+p\frac{k}{m}} \cdot$$

Somit ist

$$\| u \|^2_{\mathcal{D}(\bar{A}^{-\frac{l}{2}+\frac{p}{2m}})} \leqq C_{48} \int_a^b (q^{kl+p\frac{k}{m}} | u^{(ml+p)} |^2 + | u |^2)\, dx. \tag{28}$$

2. *Schritt.* Es sei $l \geqq 1$ und wiederum $1 \leqq p \leqq m-1$. Es sei $u \in \mathcal{D}(\bar{A}^{\infty})$. Dann ist

$$\mathcal{B}u = \frac{u}{q^{m-k}} \in C^{\infty}[a, b].$$

Aus Satz 6 erhält man unter Verwendung von Lemma 1 aus [7] und unter

Berücksichtigung von $k \equiv 0\,(2)$ und $l \geqq 1$

$$(29)\qquad \|u\|^2_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}})} \sim \int_a^b q^{kl}\,|(q^{m-k}\,\mathcal{B}u)^{(lm)}|^2\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\mathcal{B}u|^2\,dx$$

$$\sim \int_a^b q^{kl+2(m-k)}\,|(\mathcal{B}u)^{(lm)}|^2\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\mathcal{B}u|^2\,dx,$$

$$(30)\qquad \|u\|^2_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l+1}{2}})} \sim \int_a^b q^{k(l+1)+2(m-k)}\,|(\mathcal{B}u)^{((l+1)m)}|^2\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\mathcal{B}u|^2\,dx$$

$$\sim \int_a^b \left(q^{k(l-1)}\,|(q^m(\mathcal{B}u)^{(lm)})^{(m)}|^2 + q^{k(l-2)}\,|q^m(\mathcal{B}u)^{(lm)}|^2\right)dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\mathcal{B}u|^2\,dx,$$

$\delta > 0$ ist hierbei geeignet gewählt.

Somit ist.

$$(31)\qquad \|\mathcal{B}u\|_{(H^{lm}_{lk+2(m-k)},\,H^{(l+1)m}_{(l+1)k+2(m-k)})_{\theta,2}} \leqq C_{49}\,\|u\|_{(\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}}),\,\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l+1}{2}}))_{\theta,2}}$$

$$= C_{49}\,\|u\|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l+\theta}{2}})}\,.$$

Es gilt nun

$$(32)\qquad \|v\|^2_{H^{lm}_{lk+2(m-k)}} \sim \int_a^b q^{k(l-2)+2m}\,|v^{(lm)}|^2\,dx, \qquad v \in H^{lm}_{kl+2(m-k)} \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\}.$$

Um diese Äquivalenz zu beweisen, hat man zu zeigen, dass

$$\int_a^b |v|^2\,dx \leqq C_{50}\int_a^b q^{k(l-2)+2m}\,|v^{(lm)}|^2\,dx, \qquad v \in H^{lm}_{lk+2(m-k)} \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\},$$

gilt. Nach Lemma 5 und Satz 2 aus [7] ist die Einbettung von $H^{lm}_{lk+2(m-k)}$ in $\mathcal{L}_2[a, b]$ kompakt. Gäbe es keine Konstante C_{50} mit der obigen Eigenschaft, so würde man nach dem gleichen Verfahren wie beim Beweis von Lemma 5 aus [7] zu einer Funktion v kommen mit $\|v\|_{\mathcal{L}_2} = 1$, $v \in H^{lm}_{lk+2(m-k)} \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\}$

und $v^{(lm)}(x) \equiv 0$. Das ist ein Widerspruch. Nach dem gleichen Prinzip kommt man zu einer äquivalenten Normierung im Raum

$$H^{(l+1)\,m}_{(l+1)\,k+2\,(m-k)} \cap (H^{lm}_{lk+2\,(m-k)} \ominus (\mathcal{P}_{lm-1}\}).$$

Unter Verwendung der Formel (30), wobei man Bu im zweiten Teil der Äquivalenz durch v zu ersetzen hat, erhält man

$$\| v \|^2_{H^{(l+1)\,m}_{(l+1)\,k+2\,(m-k)}} \backsim \int_a^b \{ q^{k\,(l-1)} \,|\, (q^m\, v^{(lm)})^{(m)} \,|^2 + q^{k\,(l-2)} \,|\, v^{(lm)}\, q^m \,|^2 \}\, dx,$$

(33)

$$v \in H^{(l+1)\,m}_{(l+1)\,k+2(m-k)} \cap (H^{lm}_{lk+2\,(m-k)} \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\}).$$

Die Formeln (32) und (33) zeigen nun, dass der Operator $Cv = q^m\, v^{(lm)}$ eine eineindeutige Abbildung von $H^{lm}_{lk+2\,(m-k)} \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\}$ in $H^0_{k\,(l-2)}$ und von $H^{(l+1)\,m}_{(l+1)\,k+2\,(m-k)} \cap (H^{lm}_{lk+2\,(m-k)} \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\})$ in $H^m_{k\,(l-1)}$ vermittelt, wobei man noch Formel (3) aus [7] verwendet hat. Bezeichnet man mit $R(C)$ den Wertevorrat des Operators C, so ist

$$C_0^\infty(a, b) \subseteq R(C) \subseteq \mathring{H}^m_{k(l-1)}\,.$$

Somit sind die Bilder von C gleich $H^0_{k\,(l-2)}$ und $\mathring{H}^m_{k\,(l-1)}$. Nach Satz 4 ist

$$(H^0_{k\,(l-2)}\,,\, \mathring{H}^m_{k\,(l-1)})_{\theta,\,2} = \mathring{H}^{m\theta}_{k\,(l-2)\,+\,k\theta,\; k\,(l-2)\,+\,k\theta-2m\theta}\,.$$

Insbesondere ist für $\theta = \dfrac{p}{m}$ nach Satz 4 auf Grund der Voraussetzungen

(34)
$$(H^0_{k\,(l-2)}\,,\, \mathring{H}^m_{k\,(l-1)})_{\frac{p}{m},\,2} = \mathring{H}^p_{k\,(l-2)\,+\,\frac{k}{m}p}\,.$$

Nach Lemma 6 ist nun für $v \in C^\infty[a, b] \ominus \{\mathcal{P}_{lm-1}\}$, wobei $\ominus$ in der Norm des Raumes $H^{lm}_{lk+2\,(m-k)}$ zu verstehen ist,

$$\| v \|^2_{(H^{lm}_{lk+2(m-k)},\, H^{(l+1)\,m}_{(l+1)\,k+2\,(m-k)})_{\theta,\,2}} \backsim \| Cu \|^2_{H^p_{k\,(l-2)\,+\,\frac{k}{m}p}} \backsim$$

(35)

$$\backsim \int_a^b (q^{k\,(l-2)\,+\,\frac{k}{m}p} \,|\, (q^m\, v^{(lm)})^{(p)} \,|^2 + |\, v \,|^2)\, dx \backsim$$

$$\backsim \int_a^b (q^{k(l-2)+\frac{k}{m}p+2m} \, | v^{(lm+p)} |^2 + | v |^2) \, dx \backsim \| v \|^2_{H^{lm+p}_{lk+2(m-k)+p\frac{k}{m}}} .$$

Lemma 7 zeigt nun, dass diese Formel auch für $v \in C^\infty [a, b]$ und damit auch für $v \in H^{lm+p}_{lk+2(m-k)+p\frac{k}{m}}$ gültig ist. Kehrt man jetzt zur Formel (32) zurück, so erhält man durch nochmalige Anwendung von Lemma 1 aus [7] für $\theta = \frac{p}{m}$

$$\| u \|_{H^{lm+p}_{lk+p\frac{k}{m}}} \leqq C_{51} \| u \|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}+\frac{p}{2m}})} , \qquad u \in \mathcal{D}(\bar{A}^\infty). \tag{36}$$

Zusammen mit der Ungleichung (28) und unter nochmaliger Verwendung von Lemma 7 erhält man schliesslich die Aussage des Satzes für $l \geqq 1$.

3. *Schritt.* Es sei $l = 0$ und wiederum $1 \leqq p \leqq m - 1$. Unter Verwendung von Lemma 1 aus [7] erhält man für $v \in \mathcal{D}(\bar{A}^\infty)$

$$\| Av \|^2_{H^p_{\frac{kp}{m}}} + \| v \|^2_{\mathfrak{L}_2} \backsim \int_a^b (q^{\frac{kp}{m}} \, | (Av)^{(p)} |^2 + | v |^2) \, dx \backsim$$

$$\backsim \int_a^b (q^{\frac{kp}{m}+2k} \, | v^{(2m+p)} |^2 + | v |^2) \, dx \backsim \| v \|^2_{H^{2m+p}_{2k+\frac{kp}{m}}} \backsim \| Av \|^2_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{p}{2m}})} + \| v \|^2_{\mathfrak{L}_2} .$$

Auf $\mathcal{D}(\bar{A}^\infty) \ominus N(A)$ sind somit die Normen der Räume $H^p_{\frac{pk}{m}}$ und $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{p}{2m}})$ äquivalent. Lemma 7 zeigt dann die Richtigkeit des Satzes auch in diesem Fall.

SATZ 8. *Ist entweder $k = 0$ und $\varkappa \geqq 0$ oder $0 < k < m$, $k \equiv 0\ (2)$, $(k, m) = 1$, $\varkappa \geqq 0$ und $(4m - 2k)\varkappa$ nicht gleich einer ungeraden ganzen Zahl, so ist $\mathcal{D}(\bar{A}^\varkappa)$ die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\bar{A}^\infty)$ in der Norm des Raumes $H^{2m\varkappa}_{2k\varkappa}$.*

BEWEIS 1. *Schritt.* Man kann sich wieder auf den Fall $k > 0$ beschränken. Aus $u \in \mathcal{D}(\bar{A}^\infty)$ folgt $u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0$ für $j = 0, \ldots, m - k - 1$. Ist $p = 0, \ldots, m - k + 1$, so gehört nach Lemma 4 aus [7] u zu $\mathring{H}^p_{\frac{pk}{m}}$. Dazu hat man lediglich $m - k - 1 \geqq p - \left[\left(\frac{pk}{m} + 1\right)\frac{1}{2}\right] - 1$ nachzuprüfen. Für $0 \leqq$

$\leqq p \leqq m - k$ ist dies sofort zu sehen. Für $p = m - k + 1$ folgt es aus

$$\frac{pk}{m} = 1 + \frac{1}{m}(m-k)(k-1). \tag{37}$$

Nach Satz 7 ist somit $\overset{\circ}{H}{}^{p}_{\frac{pk}{m}} = \mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{p}{2m}})$. Aus Satz 4 erhält man nun

$$\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{\theta p}{2m}}) = (\mathcal{L}_2, \mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{p}{2m}}))_{\theta, 2} = (\mathcal{L}_2, \overset{\circ}{H}{}^{p}_{\frac{pk}{m}})_{\theta, 2} = \overset{\circ}{H}{}^{\theta p}_{\theta\frac{pk}{m}, \theta\frac{pk}{m} - 2\theta p}. \tag{38}$$

2. *Schritt.* Es sei jetzt entweder $l \geqq 1$ und $1 \leqq p \leqq m$ oder $l = 0$ und $m \geqq p > m - k + 1$. Für $u \in C_0^\infty(a, b)$ ist nach Satz 7 für $0 < \theta < 1$

$$\| u \|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2} + \frac{p-1}{2m} + \frac{\theta}{2m}})} \leqq C_{52} \| u \|_{(\overset{\circ}{H}{}^{lm+p-1}_{lk+(p-1)\frac{k}{m}}, \overset{\circ}{H}{}^{lm+p}_{kl+p\frac{k}{m}})_{\theta, 2}}.$$

Setzt man $\varkappa = \frac{1}{2m}(lm + p - 1 + \theta)$, so folgt aus Satz 4

$$\| u \|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\varkappa})} \leqq c_{53} \| u \|_{\overset{\circ}{H}{}^{2m\varkappa}_{2k\varkappa, 2k\varkappa - 4m\varkappa}} \leqq c_{54} \| u \|_{H^{2m\varkappa}_{2k\varkappa}}. \tag{39}$$

Andererseits ist

$$\| u \|_{(H^{lm+p-1}_{lk+(p-1)\frac{k}{m}}, H^{lm+p}_{lk+p\frac{k}{m}})_{\theta, 2}} \leqq c_{55} \| u \|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\varkappa})}. \tag{40}$$

Wie die Formel (37) zeigt, ist stets $kl + \frac{pk}{m} > 1$. Daraus folgt nach Lemma 1 aus [7]

$$\| u \|^2_{H^{lm+p}_{lk+\frac{k}{m}p}} \backsim \int_a^b (q^{kl+p\frac{k}{m}-2} | (q u^{(ml+p-1)})' |^2 + q^{kl+p\frac{k}{m}} | u^{(lm+p-1)} |^2 + | u |^2) \, dx.$$

Beschränkt man sich auf Funktionen aus $C^\infty[a, b] \ominus \{\mathcal{P}_{lm+p-2}\}$, wobei $\ominus$ in der Norm des Raumes $H^{lm+p-1}_{lk+\frac{k}{m}(p-1)}$ zu verstehen ist, so sieht man wie früher, dass man in der letzten Äquivalenz den Anteil $\int_a^b | u |^2 \, dx$ weglassen darf.

Eine entsprechende Aussage gilt für die Norm des Raumes $H^{lm+p-1}_{lk+\frac{k}{m}(p-1)}$. Daraus folgt aber unter Verwendung von Lemma 1 aus [7] und Lemma 6 für $u \in C^\infty[a, b] \ominus \}\mathcal{P}_{lm+p-2}\{$ nach dem gleichen Verfahren wie früher für $Cu = qu^{(lm+p-1)}$

$$\| u \|_{(H^{lm+p-1}_{lk+(p-1)\frac{k}{m}},\, H^{lm+p}_{lk+p\frac{k}{m}})_{\theta, 2}} \backsim \| Cu \|_{(H^0_{kl+(p-1)\frac{k}{m}-2},\, \mathring{H}^1_{kl+p\frac{k}{m}-2})_{\theta, 2}}. \tag{41}$$

Nach Satz 4 und Lemma 7 aus [6] gilt nun

$$(H^0_{kl+(p-1)\frac{k}{m}-2}, \mathring{H}^1_{kl+p\frac{k}{m}+2})_{\theta, 2} =$$

$$= \mathring{H}^\theta_{kl+(p-1)\frac{k}{m}-2+\frac{\theta k}{m},\, kl+(p-1)\frac{k}{m}-2+\frac{\theta k}{m}-2\theta} = \mathring{H}^\theta_{kl+(p-1)\frac{k}{m}-2+\frac{\theta k}{m}}.$$

Dieses Resultat wird in die Äquivalenz (41) eingesetzt. Nach Lemma 7 gilt die so erhaltene Aussage für beliebige Elemente $u(x)$ aus $C^\infty[a, b]$. Die Ungleichung (40) und die Definition von $\varkappa$ führen dann zu

$$\| u \|_{H^{2m\varkappa}_{2k\varkappa}} \leqq C_{56} \| u \|_{\mathcal{D}(\overline{A}^\varkappa)}. \tag{42}$$

Die Formeln (38), (39) und (42) und nochmalige Anwendung von Lemma 7 zeigen dann die Richtigkeit des Satzes.

5. Definitionsgebiete gebrochener Potenzen allgemeiner Legendrescher Differentialoperatoren. Der Fall $k = m = 1$.

Im Abschnitt 4 wurde in den Sätzen 7 und 8 $k \equiv 0\,(2)$ vorausgesetz. Dadurch wurde es möglich, Lemma 1 aus [7] ohne Einschränken anzuwenden. Im Falle $k \equiv 1\,(2)$ muss man neue Überlegungen werwenden. In diesem Abschnitt soll der Fall $k = m = 1$ behandelt werden. Es zeigt sich, dass man zu abschliessenden Resultaten gelangen kann. Insbesondere erhält man für den üblichen Legendreschen Differentialoperator mit $q(x) = (b-x)(x-a)$ eine explizite Bestimmung der Definitionsgebiete $\mathcal{D}(\overline{A}^\varkappa)$. $q(x)$ habe die gleiche Bedeutung wie früher. In der Formel (26) wird $k = m = 1$ gesetzt, d. h., es wird der Differentialoperator

$$Au = -(qu')', \mathcal{D}(A) = C^\infty[a, b], \tag{43}$$

betrachtet.

Zur Abkürzung wird $\mathcal{L}_2^{(k)} = \mathcal{L}_2[a, b] \ominus \}\mathcal{P}_{k-1}\{$ gesetzt, wobei wie früher $\}\mathcal{P}_{k-1}\{$ die Gesamtheit der Polynome ist, deren Grad höchstens gleich $k - 1$ ist, $k = 0, 1, \ldots, \mathcal{L}_2^{(0)} = \mathcal{L}_2$.

LEMMA 8. *m sei eine natürliche Zahl.*

(a) *Im Raum* $H_{2m}^{2m} \cap \mathcal{L}_2^{(k)}$, $k = 0, \ldots, 2m$, *ist*

$$\| u \|^2_{H_{2m}^{2m}} \backsim \int_a^b | (q^m u^{(k)})^{(2m-k)} |^2 \, dx.$$

(b) *Im Raum* $H_m^m \cap \mathcal{L}_2^{(m)}$ *ist*

$$\| u \|^2_{\overset{-}{H}_m^m} \backsim \int_a^b q^m | u^{(m)} |^2 \, dx.$$

BEWEIS. Zum Beweis der Behauptung (a) ist es nach Lemma 2 aus [7] ausreichend, die Existenz einer positiven Konstanten C_{57} nachzuweisen, so dass

$$\int_a^b | (q^m u^{(k)})^{(2m-k)} |^2 \, dx \geqq C_{57} \int_a^b | u |^2 \, dx, \; u \in H_{2m}^{2m} \cap \mathcal{L}_2^{(k)}, \tag{44}$$

gilt. Das geschieht nach dem gleichen Verfahren wie früher. Die Einbettung von H_{2m}^{2m} in $\mathcal{L}_2$ ist nach Satz 2 aus [7] und Lemma 5 aus [7] kompakt. Wenn keine positive Konstante C_{57} existieren würde, so dass (44) gilt, so würde man wie früher eine Funktion $u(x)$ aus $H_{2m}^{2m} \cap \mathcal{L}_2^{(k)}$ mit $\| u \|_{\mathcal{L}_2} = 1$ und

$$q^m u^{(k)} = \mathcal{P}_{2m-k-1}$$

finden. $\mathcal{P}_{-1} = 0$. Ist $\mathcal{P}_{2m-k-1} \not\equiv 0$, so folgt, dass $q^{\frac{k}{2}} u^{(k)}$ entweder bei a oder bei b ein Lokalverhalten wie $x^\varkappa$ an der Stelle Null mit $\varkappa \leqq m - \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{2} -$

$-m+\frac{k}{2}=-\frac{1}{2}$ zeigt. Somit gehört $q^{\frac{k}{2}}u^{(k)}$ nicht zu $\mathcal{L}_2[a,b]$. Das ist aber ein Widerspruch, da man aus der Formel (3) von [7] schliesst, dass $q^{\frac{k}{2}}u^{(k)}$ zu $\mathcal{L}_2$ gehört. Also ist $u^{(k)}(x)\equiv 0$ und somit $u(x)=\mathcal{P}_{k-1}(x)$. Da u im Raum $H_{2m}^{2m}\cap\mathcal{L}_2^{(k)}$ liegt, muss $u(x)\equiv 0$ sein. Das ist ein Widerspruch. Der Beweis der Aussage (b) geschieht nach dem gleichen Verfahren, wie der Beweis des Teils (a) im Fall $k=2m$.

LEMMA 9. *Bei geeigneter Normierung vermittelt $\mathcal{B}u=qu''$ eine unitäre Abbildung von $H_2^2\cap\mathcal{L}_2^{(2)}$ auf $\mathcal{L}_2[a,b]$ und von $H_4^4\cap\mathcal{L}_2^{(2)}$ auf $\mathring{H}_2^2$.*

BEWEIS. Nach Lemma 8 kann man $H_2^2\cap\mathcal{L}_2^{(2)}$ durch

$$\left(\int_a^b q^2\,|u''|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\|\mathcal{B}u\|_{\mathcal{L}_2}\tag{45}$$

und $H_4^4\cap\mathcal{L}_2^{(2)}$ durch

$$\left(\int_a^b |(q^2u'')''|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b |(q\,\mathcal{B}u)''|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\tag{46}$$

normieren. Aus der Formel (45) folgt, dass $\mathcal{B}u$ den Raum $H_2^2\cap\mathcal{L}_2^{(2)}$ isometrisch auf einen Tailraum von $\mathcal{L}_2[a,b]$ abbildet. Andererseits sieht man sofort, dass $qu''=f(x)\in C_0^\infty(a,b)$ zu einer Lösung u aus H_2^2 führt. Da $C_0^\infty(a,b)$ dicht in $\mathcal{L}_2[a,b]$ liegt, ergibt sich die erste Behauptung des Lemmas. Nach Lemma 8 ist die rechte Seite der Formel (46) gleich $\|\mathcal{B}u\|_{H_2^2}$, wobei $\|\cdot\|$ eine mögliche Normierung des Raumes H_2^2 ist. Bezeichnet man mit $R(\mathcal{B})$ den Wertevorrat des Operators $\mathcal{B}$ als Abbildung von $H_4^4\cap\mathcal{L}_2^{(2)}$ in H_2^2 betrachtet, so ist

$$C_0^\infty(a,b)\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathring{H}_2^2.$$

Hierbei wurde Lemma 4 aus [7] verwendet. Daraus folgt die Behauptung des zweites Teils des Lemmas.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber des Betrachtungen im vorangegangenes Anschnitt zeigt sich bei der Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Operators $q^{\frac{m}{2}}u^{(m)}$, $m=1,2,\ldots$.

Hierzu wird der Raum $H^1_{1,-1}$ benötigt. $H^1_{1,-1}$ ist die Gesamtheit der Distributiones aus $\mathcal{D}'$ $a, b)$, für welche

$$(47)\qquad \left(\int_a^b (q\,|\,u'\,|^2 + \frac{1}{q}\,|\,u\,|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

ist, Formel (1). Nach Satz 1 ist $C_0^\infty(a, b)$ dicht in $H^1_{1,-1}$. Es ist zweckmässig, eine zu (47) äquivalente Norm anzugeben. Durch partielle Integration erhält man für $u \in C_0^\infty(a, b)$

$$(48)\qquad \int_a^b |\,(q^{\frac{1}{2}}\,u)'\,|^2 + |\,u\,|^2)\,dx \backsim \int_a^b \left(q\,|\,u'\,|^2 + \frac{1}{q}\,|\,u\,|^2\right) dx = \|\,u\,\|^2_{H^1_{1,-1}}\,.$$

Lemma 10. *Bei geeigneter Normierung vermittelt* $Cu = q^{\frac{m}{2}}\,u^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, *eine unitäre Abbildung von* $H^m_m \cap \mathcal{L}_2^{(m)}$ *auf* $\mathcal{L}_2\,[a, b]$ *und von* $H^{m+1}_{m+1} \cap \mathcal{L}_2^{(m)}$ *auf* $H^1_{1,-1}$.

Beweis. Lemma 8 (b) zeigt, dass Cu eine isometrische Abbildung von $H^m_m \cap \mathcal{L}_2^{(m)}$ in $\mathcal{L}_2\,[a, b]$ leistet. Da der Wertevorrat von C die Menge $C_0^\infty(a, b)$ umfasst, folgt daraus der erste Teil des Lemmas. Für $u \in C^\infty\,[a, b]$ ergibt sich nach Formel (48) durch partielle Integration

$$(49)\qquad \begin{aligned} \|\,Cu\,\|^2_{H^1_{1,-1}} &\backsim \int_a^b \big\{\,|\,(q^{\frac{m+1}{2}}\,u^{(m)})'\,|^2 + q^m\,|\,u^{(m)}\,|^2\big\}\,dx \backsim \\ &\backsim \int_a^b \Big(q^{m+1}\,|\,u^{(m+1)}\,|^2 - \frac{m+1}{2}\,(q^m\,q')'\,|\,u^{(m)}\,|^2 + \frac{(m+1)^2}{4}\,q^{m-1}\,q'^2\,|\,u^{(m)}\,|^2 + \\ &\qquad + q^m\,|\,u^{(m)}\,|^2\Big)\,dx. \end{aligned}$$

Nach Formel (3) aus [7] ist

$$\int_a^b q^{m-1}\,q'^2\,|\,u^{(m)}\,|^2\,dx \leqq \frac{4}{m^2}\,(1+\varepsilon) \int_a^b q^{m+1}\,|\,u^{(m+1)}\,|^2\,dx + C_{58} \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\,u^{(m)}\,|^2\,dx,$$

wobei ε beliebig klein gewählt werden darf, $\varepsilon > 0$. Berücksichtigt man, dass $(m+1)\left(\frac{m}{2} - \frac{m+1}{4}\right)\frac{4}{m^2} < 1$ ist, so folgt aus der Formel (49)

$$\| Cu \|^2_{H^1_{1,-1}} \backsim \int_a^b (q^{m+1} \mid u^{(m+1)} \mid^2 + q^m \mid u^{(m)} \mid^2)\, dx.$$

Man beweist jetzt nach dem gleichen Verfahren wie früher, dass die Norm auf der rechten Seite der letzten Formel äquivalent zu $\| u \|^2_{H^{m+1}_{m+1}}$ ist, sofern man sich auf $H^{m+1}_{m+1} \cap \mathcal{L}_2^{(m)}$ beschränkt. Somit vermittelt C bei geeigneter Normierung eine isometrische Abbildung von $H^{m+1}_{m+1} \cap \mathcal{L}_2^{(m)}$ in $H^1_{1,-1}$. Da andererseits der Wertevorrat von C die Menge $C_0^\infty(a, b)$ umfasst und $C_0^\infty(a, b)$ dicht in $H^1_{1,-1}$ liegt, wie oben bemerkt wurde, folgt daraus der zweite Teil des Lemmas.

LEMMA 11. *In einem Intervall (c, d) sei $0 < p_0(x) \leqq p_1(x)$, $p_0(x) \in C^\infty[c, d]$, $p_1(x) \in C^\infty[c, d] \cdot p_0(x)$ soll an der Stelle c eine Nullstelle erster Ordnung haben. Dann gibt es eine Konstante C, so dass*

$$\| p_0^{\frac{\varkappa}{2}} u^{([\varkappa])} \|_{W_2^{\{\varkappa\}}} + \| u \|_{\mathcal{L}_2} \leqq C (\| p_1^{\frac{\varkappa}{2}} u^{([\varkappa])} \|_{W_2^{\{\varkappa\}}} + \| u \|_{\mathcal{L}_2}) \tag{50}$$

gilt, $W_2^{\{\varkappa\}} = W_2^{\{\varkappa\}}(c, d)$, $\varkappa \geqq 1$, $u \in C^\infty[c, d]$.

BEWEIS. Für ganzzahliges $\varkappa$ sieht man sofort die Richtigkeit der Formel (50). Durch die Voraussetzungen an $p_0(x)$ überzeugt man sich davon, dass im Falle nicht ganzzahliger $\varkappa$ - Werte Formel (50) richtig ist, wenn man $W_2^{\{\varkappa\}}$ durch $\mathcal{L}_2$ oder durch W_2^1 ersetzt. Hierbei hat man nach partieller Integration eine sinngemässe Abwandlung der Formel (3) aus [7] zu verwenden. Dann ergibt sich das Lemma für gebrochene $\varkappa$ - Werte durch Interpolation.

LEMMA 12. *Die Menge $C^\infty[a, b]$ ist dicht in Raum $H_\varkappa^\varkappa$, $\varkappa \geqq 1$.*

BEWEIS. Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so folgt Lemma 12 aus Lemma 6 der Arbeit [7]. Man kann sich somit auf gebrochene $\varkappa$ beschränken. Da $\varkappa > 1$ gilt, ist die Einbettung von $H_\varkappa^\varkappa$ in $H_\varkappa^{[\varkappa]}$ stetig. Weil die Einbettung von $H_\varkappa^{[\varkappa]}$ in $\mathcal{L}_2$ kompakt ist, ist somit auch die Einbettung von $H_\varkappa^\varkappa$ in $\mathcal{L}_2$ kompakt. Nach dem gleichen Verfahren wie früher zeigt man nun, dass auf $H_\varkappa^\varkappa \ominus \}\mathcal{P}_{[\varkappa]-1}\{$

die Norm des Raumes $H_{\varkappa}^{\varkappa}$ durch

$$\int_a^b \int_a^b \frac{| q^{\frac{\varkappa}{2}}(x)\, u^{([\varkappa])}(x) - q^{\frac{\varkappa}{2}}(y)\, u^{([\varkappa])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\}\varkappa\{}}\, dx\, dy + \int_a^b q^{\varkappa}(x)\, | u^{([\varkappa])}(x)|^2\, dx$$

ersetzbar ist. Dabei ist $\varkappa = [\varkappa] + \}\varkappa\{$. Somit leistet $q^{\frac{\varkappa}{2}} u^{([\varkappa])}$ eine eineindeutige Abbildung von $H_{\varkappa}^{\varkappa} \ominus \}\mathcal{P}_{[\varkappa]-1}\{$ auf $W_2^{\}\varkappa\{}$. Da $C^{\infty}[a, b]$ dicht in $W_2^{\}\varkappa\{}$ ist, liegen somit diejenigen Funktionen $u(x)$ aus $C^{\infty}(a, b)$, für welche $\| u \|_{H_{\varkappa}^{\varkappa}} < \infty$ gilt, dicht in $H_{\varkappa}^{\varkappa}$. Man kann jede solche Funktion in der Form $u(x) = u_a(x) + u_b(x)$ schreiben, wobei $u_a(x) = u(x)$ für $x \in (a, a + \delta)$ ist und $u_a(x) = 0$ für $x \in (b - \delta, b)$ gilt, entsprechend für $u_b(x)$. Man kann sich somit auf die Approximation von Funktionen $u(x)$ mit den obigen Eigen schaften und $u(x) = 0$ für $x \in (b - \delta, b)$ beschränken. $u(x + \eta) \in C^{\infty}[a, b]$ für $0 < \eta < \delta$. Das Lemma ist bewiesen, wenn man $\| u(x) - u(x + \eta) \|_{H_{\varkappa}^{\varkappa}} \to 0$ für $\eta \to 0$ zeigen kann. Wählt man ein festes $\varepsilon > 0$, so kann man die in der Norm $\| u(x) - u(x + \eta) \|_{H_{\varkappa}^{\varkappa}}^2$ auftretende Integration über $[a, b] \times [a, b]$ durch Integrationem über $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \times [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $[a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon] \times [a, a + \varepsilon]$, $[a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon] \times [b - \varepsilon, b]$, $[a, a + \varepsilon] \times [a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon]$, $[b - \varepsilon, b] \times [a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon]$, $[a, a + 2\varepsilon] \times [a, a + 2\varepsilon]$, $[a, a + 2\varepsilon] \times [b - 2\varepsilon, b]$, $[b - 2\varepsilon, b] \times [a, a + 2\varepsilon]$ mit dem gleichen Integranden nach oben abschätzen. Ein Integral über $[b - 2\varepsilon, b] \times [b - 2\varepsilon, b]$ tritt nicht auf. Man sieht leicht, dass bei festgehaltenem ε die Integrale über die ersten 5 und über die letzen zwei Integrationsgebiete für $\eta \to 0$ gegen Null gehen. Das Integral über das Integrationsgebiet $[a, a + 2\varepsilon] \times [a, a + 2\varepsilon]$ schätzt man durch

$$C_{59} \int_a^{a+2\varepsilon} \int_a^{a+2\varepsilon} \frac{| q^{\frac{\varkappa}{2}}(x)\, u^{([\varkappa])}(x) - q^{\frac{\varkappa}{2}}(y)\, u^{([\varkappa])}(y)|^2}{|x-y|^{1+2\}\varkappa\{}}\, dx\, dy +$$

$$+ C_{59} \int_a^{a+2\varepsilon} \int_a^{a+2\varepsilon} \frac{| q^{\frac{\varkappa}{2}}(x)\, u^{([\varkappa])}(x+\eta) - q^{\frac{\varkappa}{2}}(y)\, u^{([\varkappa])}(y+\eta)|^2}{|x-y|^{1+2\}\varkappa\{}}\, dx\, dy$$

ab. Im dem zweiten Integral ersetzt man $x + \eta$ durch x und $y + \eta$ durch y. Es wird $0 < \eta < \varepsilon$ gewählt und ε so bestimmt, dass $q(x)$ im Intervall $[a, a + 3\varepsilon]$ monoton wächst. Dann kann man nach Lemma 11 das letzte

Integral gleichmässig in η durch

$$\int\limits_a^{a+3\varepsilon}\int\limits_a^{a+3\varepsilon} \frac{\left| q^{\frac{\varkappa}{2}}(x)\, u^{([\varkappa])}(x) - q^{\frac{\varkappa}{2}}(y)\, u^{([\varkappa])}(y)\right|^2}{|x-y|^{1+2\{\varkappa\}}}\, dx\, dy$$

abschätzen. Das Lemma folgt jetzt aus $\varepsilon \to 0$.

Satz 9. *Ist*

$$Au = -(qu')',\ \mathcal{D}(A) = C^\infty[a, b],$$

wobei $q(x)$ *die gleiche Bedeutung wie früher hat, so ist für*

$$\varkappa > \frac{1}{2}\ \mathcal{D}(\bar{A}^\varkappa) = H_{2\varkappa}^{2\varkappa} \text{ und für } 0 \leqq \varkappa \leqq \frac{1}{2}\ \mathcal{D}(\bar{A}^\varkappa) = \mathring{H}_{2\varkappa}^{2\varkappa}$$

Beweis. Nach Satz 6 ist $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}}) = H_l^l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Nach Lemma 6 und Lemma 10 gilt für $l \geqq 1$ und $u(x) \in H_{l+1}^{l+1} \cap \mathcal{L}_2^{(l)}$

$$\|u\|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}+\frac{\theta}{2}})} \backsim \|u\|_{(H_l^l,\, H_{l+1}^{l+1})_{\theta,2}} \backsim \|q^{\frac{l}{2}} u^{(l)}\|_{(\mathcal{L}_2,\, H_{1,-1}^1)_{\theta,2}}.$$

Nach Satz 4 ist nun

$$(\mathcal{L}_2, H_{1,-1}^1)_{\theta,2} = H_{\theta,-\theta}^\theta = \mathring{H}_\theta^\theta.$$

Somit ist auf $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}+\frac{\theta}{2}}) \cap \mathcal{L}_2^{(l)}$

$$\|u\|_{\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}+\frac{\theta}{2}})} \backsim \|u\|_{H_{l+\theta}^{l+\theta}}.$$

Lemma 7 zeigt nun, dass diese Äquivalenz auf $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{l}{2}+\frac{\theta}{2}})$ gilt. Für $l \geqq 1$ und $0 < \theta < 1$ folgt nun der Satz aus Lemma 12. Es fehlt noch die Bestimmung der Räume $\mathcal{D}(\bar{A}^\eta)$ mit $0 < \eta \leqq \frac{1}{2}$. Für $\eta = \frac{1}{2}$ folgt aus Satz 2 der Arbeit [7] $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{1}{2}}) = H_1^1 = \mathring{H}_1^1$. Ist B der Operator aus dem Lemma 9, so leistet $(\bar{A} + E)^{-1} B$ bei geeigneter Normierung eine unitäre Abbildung von $H_2^2 \cap \mathcal{L}_2^{(2)}$ auf H_2^2 und von $H_4^4 \cap \mathcal{L}_2^{(2)}$ auf einen Teilraum $\tilde{H}_4^4$ von H_4^4. Es ist $\mathring{H}_4^4 \subseteq \tilde{H}_4^4 \subseteq H_4^4$. Nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes ist

$(H_2^2, H_4^4)_{\theta,2} = H_{2+2\theta}^{2+2\theta}$. Ferner folgt aus Satz 4

$$(\overset{\circ}{H}{}_2^2, \overset{\circ}{H}{}_4^4)_{\theta,2} = \overset{\circ}{H}{}_{2+2\theta,\,-2-2\theta}^{2+2\theta} = \overset{\circ}{H}{}_{2+2\theta}^{2+2\theta}$$

für $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Somit führt die Interpolation $(H_2^2, \widetilde{H}_4^4)_{\theta,2} = \widetilde{H}_{2+2\theta}^{2+2\theta}$ zu einem Teilram von $H_{2+2\theta}^{2+2\theta}$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, und damit zu einem Teilraum von $\mathcal{D}(\bar{A}^{1+\theta}) \cdot (\bar{A} + E)\, \widetilde{H}_{2+2\theta}^{2+2\theta}$ ist somit ein Teilraum von $\mathcal{D}(\bar{A}^{\theta})$. Andererseits folgt aus den vorangegangenen Betrachtungen und aus Satz 4

$$(\bar{A} + E)\, \widetilde{H}_{2+2\theta}^{2+2\theta} = \overset{\circ}{H}{}_{2\theta}^{2\theta}.$$

Da $C_0^\infty(a, b)$ dicht in $\mathcal{D}(\bar{A}^{\frac{1}{2}})$ ist, liegt $C_0^\infty(a, b)$ auch dicht in $\mathcal{D}(\bar{A}^{\theta})$ mit $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Daraus folgt nun aber der Satz im Falle $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Bemerkung. Der Satz 9 zeigt, dass

$$(H_{\varkappa_1}^{\varkappa}\, H_{\mu}^{\mu})_{\theta,2} = H_{\varkappa(1-\theta)+\mu\theta}^{\varkappa(1-\theta)+\mu\theta}, \quad \mu \geqq 1, \quad \varkappa \geqq 1, \tag{51}$$

gilt. Daraus folgt, dass die Räme $H_\varkappa^\varkappa$ und $\overset{\circ}{H}{}_\varkappa^\varkappa$ wesentlich verschiedene Interpolationseigenschaften besitzen. Die Interpolation der Räume $H_\varkappa^\varkappa$ untereinander wurde im Satz 4 beschrieben. Man vergleiche hierzu auch die Formeln (24) und (25).

LITERATUR

[1] J. L. Lions, J. Peetre: *Sur une classe d'espaces d'interpolation.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19**, 5-68 (1964).

[2] E. Magenes: *Interpolationsräume und partielle Differentialgleichungen.* Usp. mat. nauk SSSR **21**, 2, 169-218 (1966). [Russisch].

[3] J. Peetre: *Inledning till interpolation.* Vorlesungsausarbeitung, Lund 1964-1966.

[4] J. Peetre: *A new approach in interpolation spaces.* Studia Math.

[5] S. L. Sobolew: *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik.* Akademie-Verlag, Berlin 1964.

[6] H. Triebel: *Singuläre elliptische Differentialgleichungen und Interpolationssätze für Sobolev-Slobodeckij-Räume mit Gewichtsfunktionen.* Arch. Rat. Mech. Analysis **32**, 2, 113-134 (1969).

[7] H. Triebel: *Allgemeine Legendresche Differentialoperatoren I.* Journ. Functional Analysis (im Druck).