ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CLAUDIO REA

Un teorema di rigidità

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 185-203

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_185_0>

UN TEOREMA DI RIGIDITÀ

CLAUDIO REA (*)

0.a) Introduzione.

Kodaira e Spencer dimostrano in [5] che una deformazione differenziabile di una varietà olomorfa, all'interno di un policilindro coordinato, è localmente triviale, se la varietà ha dimensione complessa > 1.

In questo lavoro proviamo che si può sostituire al policilindro coordinato un aperto di Stein relativamente compatto (teorema II).

In particolare ogni deformazione differenziabile, triviale all'infinito, di una varietà di Stein X, con $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$, è localmente triviale (teorema I) (1).

La parte essenziale della dimostrazione non consiste nel provare che le varietà « vicine » alla X sono ad essa isomorfe ma nello stabilire la dipendenza differenziabile di tale isomorfismo dal parametro di deformazione.

Sussiste difatti il seguente

TEOREMA 0.1. *Siano $X_i \, (i = 1, 2)$ varietà analitiche complesse, con $\dim_{\mathbb{C}} X_i > 1$. Siano dati, in ciascuna X_i, un compatto C_i, un aperto di Stein Ω_i che lo contiene ed una applicazione biolomorfa*

$$\Phi : X_1 - C_1 \to X_2 - C_2 ,$$

con

$$\Phi \, (\Omega_1 - C_1) = \Omega_2 - C_2 .$$

Esiste allora un isomorfismo $\widetilde{\Phi} : X_1 \to X_2$.

Inoltre l'isomorfismo $\widetilde{\Phi}$ può essere scelto in modo tale da aversi

$$\widetilde{\Phi} \mid (X_1 - \mathring{\widehat{K}}_1) = \Phi \mid (X_1 - \mathring{\widehat{K}}_1),$$

Pervenuto alla Redazione il 15 Luglio 1968.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 35 (per la Matematica) del C. N. R..

(1) In realtà però, la dimostrazione del Teorema I precede quello del Teorema II.

ove $\widehat{K}_1$ *è l'inviluppo d'olomorfia in* Ω_1 *di un qualunque compatto* $K_1 \subset \Omega_1$ *contenente nel suo interno* C_1. *Se* $X_1 - C_1$ *(oppure* $X_2 - C_2$*) è connesso, allora si ha*

$$\widetilde{\Phi} \mid (X_1 - C_1) = \Phi \mid (X_1 - C_1).$$

Di questo teorema diamo due dimostrazioni in appendice, la prima di esse mi è stata suggerita da A. Tognoli; esso non interviene nella dimostrazione dei teoremi I e II.

Nel numero 5 proviamo la necessità dell'ipotesi fatta sulla dimensione della varietà con un controesempio.

Ringraziamo A. Andreotti e A. Tognoli che mi hanno assistito durante la compilazione.

b) Teorema di Hartogs.

Nel seguito avremo più volte bisogno del seguente

TEOREMA 0.2. *Sia* X *una varietà di Stein di dimensione complessa* > 1, C *un compatto contenuto in* X, $\widehat{K}$ *l'inviluppo di olomorfia di un compatto* K *contenente* C *nel suo interno,* E *un fibrato vettoriale olomorfo su* X. *Data una sezione olomorfa* $f : X - C \to E$ *di* E *al disopra di* $X - C$, *esiste una sezione olomorfa* $\widetilde{f} : X \to E$ *tale che*

$$f \mid (X - \widehat{K}) = \widetilde{f} \mid (X - \widehat{K}).$$

Se $X - C$ *è connesso si ha ovviamente*

$$f \mid (X - C) = \widetilde{f} \mid (X - C).$$

Dimostrazione. Si scriva la successione di restrizione

$$0 \to H_k^0(\mathring{\widehat{K}}, \mathcal{O}) \to H^0(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{r} H^0(X - \mathring{\widehat{K}}, \mathcal{O}) \to H_k^1(\mathring{\widehat{K}}, \mathcal{O}) \to \ldots$$

ove $\mathcal{O}$ è il fascio dei germi di sezioni olomorfe di E.

Si ha ovviamente $H_k^0(\mathring{\widehat{K}}, \mathcal{O}) = 0$ e, grazie al teorema di dualità di Serre [7], $H_k^1(\mathring{\widehat{K}}, \mathcal{O}) \simeq H^{n-1}(\mathring{\widehat{K}}, \Omega^n)$, ove Ω^n è il fascio (coerente) dei germi di n-forme olomorfe su X a valori in E, quest'ultimo gruppo è nullo perchè $n > 1$ e $\mathring{\widehat{K}}$ è di Stein.

Pertanto $H_k^1(\mathring{\widehat{K}}, \mathcal{O}) = 0$. L'applicazione r è dunque un isomorfismo. Il teorema è così dimostrato.

1. Deformazioni differenziabili di una varietà olomorfa.

Sia X una varietà olomorfa. Una deformazione differenziabile (2) è l'insieme dei dati α), β, γ) seguenti:

α) Un fibrato differenziabile $Y \xrightarrow{\pi} B$ ed un punto $0 \in B$.

β) Un atlante $\mathcal{A} \equiv \{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$, ove $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di Y, $\varphi_i: U_i \longrightarrow \mathbf{C}^n \times B$ è un'immersione differenziabile; indichiamo con (z_j^α, t) le coordinate così istituite su U_i, $(\alpha = 1, \dots, n)$. Si suppone che i cambiamenti di coordinate in $U_i \cap U_j$ siano del tipo $z_j^\alpha = h_{ji}^\alpha(z_i, t)$, $t = t$; le h_{ij}^α essendo olomorfe nelle z_i per ogni t. Supponiamo inoltre che sia $p_B \circ \varphi_i = \pi$.

Osservazione. per ogni $t \in B$, la famiglia

$$\mathcal{A}_t = \{U_i \cap \pi^{-1} t, \varphi_i \mid \pi^{-1} t\}$$

è un atlante su $\pi^{-1} t$ che rende $\pi^{-1} t$ una varietà analitica complessa che denoteremo con X_t.

γ) Un isomorfismo $X \longrightarrow X_0$.

Restrizione. Sia B' un intorno aperto di 0 in B.

$\pi^{-1} B' \xrightarrow{\pi} B'$ ha una ovvia struttura di deformazione indotta da $Y \xrightarrow{\pi} B$. Questa nuova deformazione dicesi *restrizione* di Y a B'.

Trivialità. $Y \xrightarrow{\pi} B$ dicesi triviale se esiste un isomorfismo $\tau: X_0 \times B \longrightarrow Y$ di fibrati differenziabili (di base B) tale che

$$\tau \mid (X_0 \times \{t\}) : X_0 \times \{t\} \longrightarrow X_t \quad \text{sia biolomorfa}$$

Una simile applicazione dicesi *trivializzazione* di Y.

Trivialità locale. $Y \xrightarrow{\pi} B$ dicesi localmente triviale se ammette una restrizione triviale.

Deformazione con supporto in un chiuso. Sia C_0 un chiuso di X_0. $Y \xrightarrow{\pi} B$ dicesi avere supporto in C_0 se esiste un isomorfismo $\mathcal{R}: X_0 \times B \longrightarrow Y$ di fibrati differenziabili con la proprietà che $\mathcal{R} \mid [(X_0 - C_0) \times \{t\}] : (X_0 - C_0) \times \times \{t\} \longrightarrow X_t$ sia biolomorfa sull'immagine.

(2) Differenziabile è sinonimo di C^∞.

Trivialità all'infinito. $Y \xrightarrow{\pi} B$ dicesi triviale all'infinito se ha supporto in un compatto di X_0.

TEOREMA II. *Sia X una varietà analitica complessa,* $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$. $Y \xrightarrow{\pi} B$ *una deformazione differenziabile di X, triviale all'infinito, con supporto contenuto in un aperto di Stein, allora Y è localmente triviale.*

Immediata conseguenza di questo teorema è il

TEOREMA I. *Ogni deformazione differenziabile, triviale all'infinito, di una varietà di Stein di dimensione > 1 è localmente triviale.*

2. Gruppi locali sopra una deformazione (3).

a) Ricordiamo che un gruppo locale ad un parametro $\{\gamma_\lambda\}$ su una varietà differenziabile M è una legge che associa ad ogni aperto $U \subset\subset M$ un numero positivo λ_U, e ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < \lambda_U$, un'imersione differenziabile $\gamma_\lambda : U \longrightarrow M$, in modo da soddisfare le seguenti proprietà.

(i) Se $V \subset\subset M$, $U \cap V \neq \emptyset$, $|\lambda| < \lambda_V$, $|\lambda| < \lambda_U$, allora i diffeomorfismi $\gamma_\lambda : U \longrightarrow M$ e $\gamma_\lambda : V \longrightarrow M$ coincidono su $U \cap V$;

(ii) Se $|\lambda_1|$, $|\lambda_2| < \lambda_U$, $|\lambda_1 + \lambda_2| < \lambda_U$, allora $\gamma_{\lambda_1} \circ \gamma_{\lambda_2} = \gamma_{\lambda_1+\lambda_2}$.

(iii) L'applicazione $U \times (-\lambda_U, \lambda_U) \longrightarrow M \times (-\lambda_U, \lambda_U)$ definita da $(x, \lambda) \rightsquigarrow (\gamma_\lambda x, \lambda)$ è un'immersione differenziabile.

Siano dati $x \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, diremo che esiste $\gamma_\lambda x \in M$, se si può trovare un intorno aperto $U \subset\subset M$ di x tale che sia $|\lambda| < \lambda_U$.

Sia A un aperto di M, A dicesi *sorgente* di $\{\gamma_\lambda\}$ se si ha $\inf_{x \in A} \{\sup |\lambda|, \exists \gamma_\lambda x\} = \lambda_A > 0$. Ogni aperto relativamente compatto è una sorgente; se A è una sorgente, valgono le proprietà (i), (ii), (iii) sostituendovi U con A.

Sia f una funzione reale differenziabile su M, l'espressione

$$v_x f = \left\{ \frac{d}{d\lambda} f(\gamma_\lambda x) \right\}_{\lambda=0}$$

definisce un campo vettoriale differenziabile, tangente ad M, che dicesi *campo di velocità* di $\{\gamma_\lambda\}$. Ogni campo vettoriale differenziabile v tangente ad M è il campo di velocità di un (solo) gruppo locale, quest'ultimo si indica con $\{\exp \lambda v\}$.

---

(3) Ogni gruppo locale è sottinteso essere ad un parametro e formato da diffeomorfismi (locali).

b) Siano X una varietà analitica complessa, T il suo fibrato tangente olomorfo, $X_{\mathbb{R}}$ la varietà differenziabile reale soggiacente, Θ il fibrato tangente di questa ultima. Si può definire un isomorfismo di fibrati reali $\Lambda : \Theta \longrightarrow T$, interamente determinato dalla relazione $v = \widehat{v} + \overline{\widehat{v}}$, $\forall\, v \in \Theta$, $(\widehat{v} = \Lambda\, v)$. Gli elementi di T verranno spesso indicati con lettere dotate del soprassegno « $\widehat{\ }$ » la soppressione del quale indicherà l'operazione di Λ^{-1}.

Sia $\mathcal{J} : \Theta \longrightarrow \Theta$, $\mathcal{J}^2 = -\, id_\Theta$, il tensore che definisce la struttura complessa di X e sia v un campo vettoriale reale su X_R.

Un calcolo elementare mostra che, se $\mathcal{L}_v \mathcal{J}$ è la derivata di Lie di $\mathcal{J}$ rispetto a v, si ha

$$\mathcal{L}_v \mathcal{J} = \sqrt{-1}\, (\overline{\partial}\, \widehat{v} - \partial\, \overline{\widehat{v}}). \tag{1}$$

Per evidenti ragioni di bigradazione si ha dunque

$$\mathcal{L}_v \mathcal{J} = 0 \iff \overline{\partial}\, \widehat{v} = 0.$$

I campi reali v su V per i quali si annulla $\mathcal{L}_v \mathcal{J}$ sono manifestamente caratterizzati dalla proprietà che $\{\exp \lambda v\}$ è formato da automorfismi locali di X, cioè da applicazioni di un aperto di X in X che sono bi-olomorfe sull'immagine. Tali campi diconsi *campi di Killing della varietà olomorfa* X. Dalla (1) e dall'osservazione che la segue risulta il seguente

LEMMA 2.1. *Il campo vettoriale differenziabile reale v, tangente alla varietà analitica complessa X è di Killing se e soltanto se $\widehat{v}$ è un campo olomorfo.*

c) Sia ora $Y \xrightarrow{\pi} B$ una deformazione differenziabile della varietà analitica complessa X, U un aperto di Y. Un'immersione differenziabile $\Phi : U \longrightarrow Y$ dicesi essere un automorfismo locale di Y, se esiste un diffeomorfismo locale $\Phi^\pi : \pi\, U \longrightarrow B$ di B tale che $\pi \circ \Phi = \Phi^\pi \circ \pi$ e che $\Phi \mid (U \cap X_t)$: $U \cap X_t \longrightarrow X_{\Phi^\pi t}$ sia un'immersione olomorfa, per ogni $t \in \pi U$.

Osservazione. Gli automorfismi locali di Y formano uno pseudogruppo.

Sia v un campo vettoriale reale tangente ad Y. Se $\{\exp \lambda v\}$ è formato da automorfismi locali di Y allora v dicesi *campo di Killing per la deformazione* $Y \xrightarrow{\pi} B$.

Sia ora Θ il fibrato dei vettori reali verticali tangenti ad Y e T il fibrato tangente olomorfo verticale di Y, T può essere definito dalle due seguenti proprietà.

(i) T è un fibrato differenziabile, vettoriale, complesso su Y,

(ii) la restrizione $T \mid X_t$ coincide con il fibrato olomorfo T_t tangente alla varietà olomorfa X_t.

Si può allora definire l'applicazione $\Lambda : \Theta \longrightarrow T$ come in *b*).

Una (p, q)-forma (complessa) verticale su Y, a valori in T, è un'applicazione $f : \Lambda^p T \otimes \Lambda^q \overline{T} \longrightarrow T$ lineare, differenziabile, ove Λ^p indica l'operazione « p esima potenza esterna » e $\overline{T}$ è il coniugato di T; lo spazio vettoriale di tali forme si indica con $C^{p,q}(Y, T)$.

La restrizione $C^{p,q}(X_t, T_t)$ di $C^{p,q}(Y, T)$ ad una fibra X_t è l'ordinario spazio delle (p, q)-forme differenziabili sulla varietà olomorfa X_t, a valori nel fibrato tangente olomorfo T_t di quest'ultima. Pertanto ha senso definire l'operatore

$$\overline{\partial} : C^{p,q}(Y, T) \longrightarrow C^{p,q+1}(Y, T).$$

Data l'ambiguità del termine « olomorfo » noi chiameremo campo verticale su Y una sezione del fibrato T e campo verticale olomorfo un campo i coefficienti della cui restrizione alle fibre X_t sono funzioni olomorfe. Una sezione di Θ sarà detta campo verticale reale.

Dal lemma 2.1 risulta allora il seguente

LEMMA 2.2. *Un campo vettoriale reale v su Y è di Killing, se, e soltanto se, $\widehat{v}$ è un campo olomorfo verticale* (i.e. $\overline{\partial}\, \widehat{v} = 0$).

Sia U un aperto di Y. Indicheremo con $\mathcal{K}(U)$ (risp. $\mathcal{V}(U)$) lo spazio vettoriale dei campi di Killing (risp. dei campi di Killing verticali) sull'aperto U di Y.

3. In questo numero $Y \xrightarrow{\pi} B$ è una deformazione differenziabile di una varietà analitica complessa X, con $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$, ψ è la famiglia dei chiusi C di Y tali che $\pi \mid C$ sia propria.

Introduciamo inoltre, per ogni aperto $U \subset Y$, lo spazio vettoriale $\mathcal{H}(U)$ dei campi vettoriali verticali olomorfi.

Si ha $\mathcal{H}(U) = \ker \{\overline{\partial} : C^{0,0}(U, T) \longrightarrow C^{0,1}(U, T)\}$. Se U_t è un aperto di X_t, $\mathcal{H}(U_t)$ indica lo spazio vettoriale dei campi vettoriali olomorfi su U_t, Ω_t^0 è il fascio su X_t dei germi di tali campi, Ω_t^p è il fascio dei germi di p-forme olomorfe su X_t a valori in T_t.

L'applicazione $\Lambda : \Theta \longrightarrow T$ definisce un isomorfismo $\mathcal{V}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$ di spazi vettoriali reali.

In [6] è dimostrato il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia $Y \longrightarrow B$ una deformazione differenziabile, triviale all'infinito, di una varietà di Stein X, con* $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$. *Sia data una forma* $f \in C^{p,q+1}(Y, T)$, *con* supp $f \in \psi$ *e* $\overline{\partial} f = 0$. *Se tutte le varietà X_t sono di Stein, esiste allora una sola forma u tale che* $\overline{\partial} u = f$, supp $u \in \psi$ *e si ha* $u \in C^{p,q}(Y, T)$.

Lemma 3.1. *Sia $Y \xrightarrow{\pi} B$ una deformazione differenziabile triviale all'infinito della varietà di Stein X. Esiste una restrizione $Y^* \xrightarrow{\pi} B^*$ di $Y \xrightarrow{\pi} B$ ed una funzione differenziabile $\varphi : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ in modo da aversi*

(i) $\forall\, t \in B^*, X_t$ *è di Stein*

(ii) $\forall\, x_0 \in X_0\,, \ \forall\, t,\ t' \in B^*,$ *è* $\varphi\,[\mathcal{R}\,(x_0\,, t)] = \varphi\,[\mathcal{R}\,(x_0\,, t')]$

(iii) $\varphi_t = \varphi \mid X_t$ *è strettamente plurisubarmonica,* $\forall\, t \in B^*$, *e si ha*

(iv) $\quad \{x \in X_t\,, \varphi\,(x) < c\} \subset\subset X_t\,, \quad \forall\, c \in R, \quad \forall\, t \in B^*.$

Dimostrazione.

Osserviamo intanto che (iii) e (iv) implicano ovviamente (i). Inoltre se (ii) è verificata e (iv) lo è per $t = 0$, allora (iv) è verificata per ogni t. Difatti, posto per ogni $t \in B$,

$$\mathcal{R}_t = p_{X_0} \circ (\mathcal{R}^{-1} \mid X_t) \colon X_t \to X_0\,,$$

$\mathcal{R}_t$ è un diffeomorfismo e

$$\mathcal{R}_t \,|\, (X_t - C_t) : X_t - C_t \longrightarrow X_0 - C_0$$

è biolomorfa.

Da (ii) segue

$$\{x \in X_t\,, \varphi\,(x) < c\} = \mathcal{R}_t^{-1}\,\{x \in X_0\,, \varphi\,(x) < c\}.$$

pertanto

$$\{x \in X_0\,, \varphi\,(x) < c\} \subset\subset X_0 \Longrightarrow \{x \in X_t\,, \varphi\,(x) < c\} \subset\subset X_t\,.$$

È sufficiente dunque costruire la restrizione

$$Y^* \xrightarrow{\pi} B^*$$

e la funzione φ in modo da verificare (ii), (iii) e (iv) per $t = 0$.

Sia φ_0 una funzione strettamente plurisubarmonica su X_0 soddisfacente

$$\{x \in X_0\,, \varphi\,(x) < c\} \subset\subset X_0\,, \qquad \forall\, c \in \mathbf{R}.$$

Posto $\varphi = \varphi_0 \circ p_{X_0} \circ \mathcal{R}^{-1}$, la funzione $\varphi : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ così costruita soddisfa trivialmenne (ii), e (iv) per $t = 0$ (e dunque per ogni $t \in B$). Resta da trovare una restrizione $Y^* \xrightarrow{\pi} B^*$ in modo da soddisfare (iii). Poniamo

$$C = \mathcal{R}\,(C_0 \times B).$$

Sia $\lambda\,(x)$ la funzione: « più piccolo autovalore della forma di Levi in x di $\varphi_{\pi x}$ »; $\lambda : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ è continua. Si ha

$$\inf_{C_0} \lambda > 0,$$

esiste allora un intorno V di C_0 in Y tale che sia

$$\inf_V \lambda \geq \frac{1}{2} \inf_{C_0} \lambda > 0.$$

Per la compattezza di C_0 non è restrittivo supporre che sia $V = \mathcal{R}(B^* \times V_0)$ ove B^* è un intorno di O in B e V_0 un intorno C_0 in X_0. Proviamo che $\lambda \mid \pi^{-1} B^*$ è positiva.

Sia $x \in \pi^{-1} B^*$. Se $x \in C$ allora $x \in V$ e

$$\lambda(x) \geq \frac{1}{2} \inf_{C_0} \lambda > 0;$$

se $x \notin C$, allora posto $t = \pi x$, è $\mathcal{R}_t x \in X_0 - C_0$.

Dato che $\mathcal{R}_t$ è biolomorfa in (un intorno di) x, si ha $\lambda(x) = \lambda(\mathcal{R}_t x) > 0$. Il lemma è dunque dimostrato.

Osservazione. Dal lemma precedente e dal teorema 0.1 segue che, per ogni $t, t' \in B^*$, si ha $X_t \simeq X_{t'}$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia* $Y \xrightarrow{\pi} B$ *una deformazione differenziabile, triviale. all'infinito della varietà di Stein* X *con* $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$. *Sia data una forma* $f \in C^{0,1}(Y, T)$ *con* $\bar\partial f = 0$ *e* $\operatorname{supp} f \in \psi$. *Allora esistono una restrizione* $\widetilde{Y} \xrightarrow{\pi} \widetilde{B}$ *di* $Y \xrightarrow{\pi} B$ *ed un (solo) campo verticale* $\widehat{u} \in C^{0,0}(\widetilde{Y}, T)$, *tale da aversi*

(i) $\bar\partial \widehat{u} = f$

(ii) $\operatorname{supp} \widehat{u} \in \psi$.

Dimostrazione. Si considerino la funzione φ e la restrizione $Y^* \xrightarrow{\pi} B^*$ ottenute nel lemma 3.1. Si può supporre $B^* \subset\subset B$. $\overline{Y}^* \cap (C \cup \operatorname{supp} f)$ è allora compatto in Y.

Sia

$$k = \max \{\varphi(x), x \in \overline{Y}^* \cap (C \cup \operatorname{supp} f)\}$$

e

$$W = \{x \in Y^*, \varphi(x) < k + 1\}.$$

Si ha $W \in \psi$ e $W_t = W \cap X_t$ è un aperto di Stein in X_t, relativamente compatto.

Per il teorema di dualità di Serre si ha

$$H_k^1(W_t, \Omega_t^0) \simeq H^{n-1}(W_t, \Omega_t^n),$$

dunque $H_k^1(W_t, \Omega_t^0) = 0$.

Pertanto, poichè supp $f_t \subset W_t$, deve esistere, per il teorema di Dolbeault, un campo $\widehat{u_t} \in C^{0,0}(X_t, T_t)$ tale che supp $\widehat{u_t} \subset W_t$ e $\overline{\partial}_t \widehat{u_t} = f_t$. Sia allora $\widehat{u}$ il campo verticale su Y^* individuato dalla condizione $\widehat{u} \mid X_t = u_t$. Si ha supp $\widehat{u} \subset W$, dunque supp $\widehat{u} \in \psi \cdot \widehat{u}$ coincide pertanto con la forma u fornita dal teorema 3.1.

4. Dimostrazione dei teoremi I e II.

Dimostreremo insieme il teorema I ed il seguente

LEMMA 4 1. *Supponiamo che $Y \xrightarrow{\pi} B$ abbia supporto nel compatto $C_0 \subset X_0$. È possibile trovare una restrizione $Y' \xrightarrow{\pi} B'$ di $Y \xrightarrow{\pi} B$, un aperto A_0 di X_0, con $A_0 \subset\subset X_0$, ed una trivializzazione $\tau : X_0 \times B' \to Y'$ di $Y' \to B'$ tali da aversi*

$$\tau \mid [(X_0 - A_0) \times B'] = \mathcal{R} \mid [(X_0 - A_0) \times B'].$$

Dimostrazione. Ci si può limitare alla restrizione $Y^* \xrightarrow{\pi} B^*$ di $Y \xrightarrow{\pi} B$ di cui al lemma 3.1.

a) Si considerino gli insiemi

$$J_0 \equiv \{j \in I,\ U_j \cap C_0 \neq \emptyset\},\ J_1 \equiv \{j \in I,\ U_j \cap X_0 \neq \emptyset,\ U_j \cap C_0 = \emptyset\}.$$

Si può supporre $\{U_i\}_{i \in I}$ localmente finito e $U_i \subset\subset Y^*, \forall\, i \in I$; allora J_0 è un insieme finito. Inoltre si ha $J_0 \cap J_1 = \emptyset$ e $J \equiv J_0 \cup J_1 \equiv \{j \in I, U_j \cap X_0 \neq \emptyset\}$. L'insieme $\bigcap_{j \in J_0} \pi U_j$ è un intorno aperto di 0 in B^*; sia allora $B_1 \subset\subset B^*$ un altro intorno aperto di 0 in B^* contenuto in $\bigcap_{j \in J_0} \pi U$ e $Y_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ la corrispondente restrizione.

Definiamo ora un ricoprimento di Y_1 mediante la famiglia d'aperti $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}_j\}_{j \in J}$ definita come segue

$$\widetilde{U}_j \begin{cases} = U_j \cap Y_1, & \text{se} \quad j \in J_0 \\ = \mathcal{R}[(U_j \cap X_0) \times B_1], & \text{se} \quad j \in J_1. \end{cases}$$

Si ha $\pi \widetilde{U}_j = B_1$, $\forall\, j \in J$. Costruiamo ora un nuovo atlante $\{\widetilde{U}_j, \psi_j\}_{j \in J}$ per $Y_1 \xrightarrow{\pi} B_1$, a partire da $\widetilde{\mathcal{U}}$. Sia $x \in \widetilde{U}_j$, poniamo

$$\psi_i(x) \begin{cases} = \varphi_j(x) & \text{se} \quad j \in J_0 \\ = pr_{C_n} \circ \varphi_j \circ pr_{X_0} \circ \mathcal{R}^{-1}(x) & \text{se} \quad j \in J_1 . \end{cases}$$

$\{\widetilde{U}_j, \psi_j\}_{j \in J}$ è visibilmente un atlante per $Y_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ e gode delle seguenti proprietà

(A_1) Sia $j \in J_1$ (i. e. $\widetilde{U}_j \cap C_0 = \emptyset$), allora due punti x, y di U_j hanno le stesse coordinate $z_j^1, \dots z_j^n$ se, e soltanto se, si ha $x = \mathcal{R}(x_0, \pi x)$ $y = \mathcal{R}(x_0, \pi y)$ per un certo $x_0 \in X_0 - C_0$.

(A_2) Si consideri il campo vettoriale

$$D_a^i = \left(\frac{\partial}{\partial t^a}\right)_{z_i = \text{cost}} \in \mathcal{X}(\widetilde{U}_i),$$

per ogni $a = 1, \dots, m$ ed ogni $i \in J$. Se i e j sono in J_1 e $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j = \emptyset$, allora $D_a^i = D_a^j$ su $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$.

b) Si ponga $A' = \bigcup_{j \in J_0} \widetilde{U}_j$, si ha $A' \supset C \cap Y_1$, $A' \in \psi$. Fissiamo un intero a, con $1 \leq a \leq m$. In virtù di (A_2) i campi D_a^i definiscono un campo $D_a \in \mathcal{X}(Y_1 - A')$, con $\pi \dot{D}_a = \dfrac{\partial}{\partial t^a}$. Sia ora $\{\tau_\lambda^a\}$ il gruppo locale su B_1 delle traslazioni parallele all'asse t_a,

$$\tau_\lambda^a : (t^1, \dots, t^m) \rightsquigarrow (t^1, \dots, t^{a-1}, t^a + \lambda, t^{a+1}, \dots, t^m),$$

cioè

$$\{\tau_\lambda^a\} = \left\{\exp \lambda \frac{\partial}{\partial t^a}\right\}.$$

Le applicazioni $(x, t) \rightsquigarrow (x, \tau_\lambda^a t)$ determinano trivialmente un gruppo locale su $X_1 \times B_1$, quest'ultimo a sua volta individua, tramite $\mathcal{R}$, un gruppo locale $\mathcal{R}_\lambda^a$ su Y_1.

Sia $y = \mathcal{R}(x, t) \in Y_1$, con $x \in X_0$ e $t = \pi y \in B_1$. Si ha

$$\mathcal{R}_\lambda^a\, y = \mathcal{R}(x, \tau_\lambda^a t).$$

$\{\mathcal{R}_\lambda^a\}$ gode delle seguenti proprietà :

(B_1) $\{\mathcal{R}_\lambda^a \mid (Y_1 - C)\}$ è un gruppo locale di automorfismi di $Y_1 \to B_1$.
(B_2) Il campo di velocità di $\{\mathcal{R}_\lambda^a\}$, ristretto a $Y_1 - A'$, è D_a,
(B_3) L'espressione esplicita di $\mathcal{R}_\lambda^a$, nella carta $(\widetilde{U}_j, \psi_j), j \in J_1$, è

$$\mathcal{R}_\lambda^a : (z_j^1, \ldots, z_j^n; t^1, \ldots, t^m) \rightsquigarrow$$

$$(z_j^1, \ldots, z_j^n; t^1, \ldots, t^{a-1}, t^a + \lambda, t^{a+1}, \ldots, t^m),$$

(B_4) Ogni aperto U di Y_1, tale che $\pi U \subset\subset B_1$, è una sorgente di $\{\mathcal{R}_\lambda^a\}$.
(B_5) $\{\mathcal{R}_\lambda^a\}$ è proiettabile e la sua proiezione è $\{\tau_\lambda^a\}$, cioè $\pi \circ \mathcal{R}_\lambda^a = \tau_\lambda^a \circ \pi$.
(B_6) Sia $t = (t^1, \ldots, t^m) \in B_1$, $x \in X_0$. Se esiste

$$\mathcal{R}_{t_1}^1 \circ \ldots \circ \mathcal{R}_{t^m}^m x,$$

si ha

$$\mathcal{R}_{t_1}^1 \circ \ldots \circ \mathcal{R}_{t^m}^m x = \mathcal{R}(x, t).$$

c) Sia $\{\varrho_j\}_{j \in J}$ una partizione differenziabile dell'unità su Y_1, con $\operatorname{supp} \varrho_j \,\widetilde{\subset}\, U_j$. Si consideri, su ciascun $\widetilde{U}$, il campo vettoriale reale

$$\Lambda_a^j = D_a^j - \sum_k \varrho_k D_a^k .$$

Su $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$ si ha

$$D_a^i - D_a^j = \Lambda_a^i - \Lambda_a^j ,$$

$D_a^j - \Lambda_a^j$ definisce un campo globale su $Y_1 \cdot \Lambda_a^j$ è verticale, pertanto

$$\dot{\pi}(D_a^j - \Lambda_a^j) = \frac{\partial}{\partial t^a};$$

inoltre

$$D_a^i - D_a^j \in \mathcal{V}(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j),$$

ne segue (lemma 2.2) che

$$\bar{\partial}(\widehat{\Lambda}_a^i - \widehat{\Lambda}_a^j) = \bar{\partial}\,(D_a^i - D_a^j)^{\wedge} = 0.$$

Dunque $\bar{\partial}\,\widehat{\Lambda}_a^i = \bar{\partial}\,\widehat{\Lambda}_a^j$ su $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$. $\bar{\partial}\,\widehat{\Lambda}_a^j$ definisce allora una $(0, 1)$ — forma globale $f_a \in C^{0,1}(Y_1, T)$, con $\bar{\partial} f_a = 0$. Del resto, in virtù di (A_2), si ha $\Lambda_a^j(x) = 0$ se $x \in A'$, dunque $\operatorname{supp} f_a \subset A'$; in particolare $\operatorname{supp} f_a \in \psi$. Per la proposizione 3.1 esistono dunque una restrizione $Y^a \xrightarrow{\pi} B^a$ di $Y_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ ed un campo verticale $\widehat{v_a} \in C^{0,0}(Y^a, T)$ tali che $\bar{\partial} \widehat{v_a} = f_a$ e supp $\widehat{v_a} \in \psi$. Dal fatto che supp $v_a \in \psi$ segue che ogni aperto $U \subset Y^a$ tale che $\pi U \subset\subset B^a$ è una sorgente per $\{\exp \lambda v_a\}$.

Poniamo $A_0^a = p_{X_0} \circ \mathcal{R}^{-1}(A' \cup \operatorname{supp} f_a)$ e $A^a = \mathcal{R}(A_0^a \times B^a)$: Si ha $A^a \in \psi$, $C \cap Y^a \subset A^a$, supp v_a A^a. Si consideri infine il campo reale $\theta_a = D_a^i - \Lambda_a^i + v_a$, esso è globale perchè tale è $D_a^i - \Lambda_a^i$ e gode delle seguenti proprietà:

$$(C_1) \qquad \dot{\pi}\, \theta_a = \frac{\partial}{\partial t^a}$$

$$(C_2) \qquad \theta_a \in \mathcal{K}(Y)$$

$$(C_2) \qquad \theta_a \,|\, (Y^a - A^a) = D_a \,|\, (Y^a - A^a).$$

La (C_1) segue dal fatto che $\dot{\pi}\, D_a = \dfrac{\partial}{\partial t^a}$ e che Λ_a^i e v_a sono verticali. Inoltre D_a^i è di Killing, pertanto (C_2) è vera se $-\Lambda_a^i + v_a \in \mathcal{V}(\widetilde{U}_i)$, cioè $\bar{\partial}(-\widehat{\Lambda^i} + \widehat{v_a}) = 0$ (lemma 2.2) ciò che segue da $\bar{\partial}\widehat{\Lambda_a^i} = f_a = \bar{\partial}\,\widehat{v_a}$.

Osserviamo infine che, se $x \in Y^a - A^a \subset Y_1 - A'$ e $\widetilde{U}_j \ni x$, allora $i \in J_1$, pertanto $\Lambda_a^j(x) = 0$, d'altro canto supp $v_a \subset A^a$, dunque $\theta_a(x) = D_a^i(x) = D_a(x)$ (vedi (A_2)).

Ciò prova (C_3).

d) Si ponga infine $B_2 = \bigcap_1^m{}_a B^a$, $Y_2 = \bigcap_1^m{}_a Y^a$, $A_0 = \bigcup_1^m{}_a A_0^a$, $Y_2 \xrightarrow{\pi} B_2$ è una restrizione di $Y_1 \xrightarrow{\pi} B_1$; sia

$$A = \mathcal{R}(A_0 \times B_2) = Y_2 \cap \left(\bigcup_1^m{}_a A^a\right), \{\Gamma_\lambda^a\} = \exp \lambda\theta_a .$$

Si fissi arbitrariamente un intero a, con $1 \leq a \leq m$. In virtù di (C_3), (B_2) e dell'unicità del gruppo locale si ha $\Gamma_\lambda^a \,|\, (Y_2 - A) = \mathcal{R}_\lambda^a (Y_2 - A)$. Si consideri ora un aperto relativamente compatto A'' in Y_2 con $A'' \supset A$ ed un intorno relativamente compatto B_3 di 0 in B_2. Sia $Y_3 = \pi^{-1} B_3$.

$Y_3 \cap A''$ è una sorgente di $\{\Gamma_\lambda^a\}$ poichè $Y_3 \cap A'' \subset\subset Y_2$. $Y_3 - A$ è una sorgente di $\{\Gamma_\lambda^a\}$ poichè $\Gamma_\lambda^a \,|\, (Y_2 - A) = \mathcal{R}_\lambda^a \,|\, (Y_2 - A)$, $\pi(Y_3 - A) \subset\subset B_2$ e per (B_4).

Dunque $Y_3 = (Y_3 \cap A'') \cup (Y_3 - A)$ è una sorgente per $\{\Gamma_\lambda^a\}$.

Per ogni a, $1 \leq a \leq m$, il gruppo locale $\{\Gamma_\lambda^a\}$ gode pertanto delle proprietà seguenti

(D_1) $\{\Gamma_\lambda^a\}$ è un gruppo locale di automorfismi di $Y_2 \xrightarrow{\pi} B_2$,

(D_2) La proiezione di $\{\Gamma_\lambda^a\}$ su B_2 è il gruppo locale $\{\tau_\lambda^a\}$ delle traslazioni parallele all'asse t^a,

(D_3) Y_3 è una sorgente di $\{\Gamma_\lambda^a\}$,

(D_4) Sia $x \in Y_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $t = (t^1, \dots, t^m) = \pi x$;

Se $(t^1, \dots, t^{a-1}, t^a + \lambda, t^{a+1}, \dots, t^m) \in B_2$ allora esiste $\Gamma_\lambda^a x$.

Si fissi infine un numero $\delta > 0$ tale che $B' \equiv \{t \in B, |t^a| < \delta\} \subset B_2$ e si consideri la restrizione $Y' \to B'$ di $Y \to B$. In virtù di (D_3) e (D_4), per ogni $t \in B'$ ed ogni $x_0 \in X_0$, esiste

$$\Gamma_{t^1}^1 \circ \dots \circ \Gamma_{t^m}^m x_0 \in Y'.$$

Definiamo allora l'applicazione bigettiva $\tau: X_0 \times B' \to Y'$ mediante la legge $\tau(x_0, t) = \Gamma_{t^1}^1 \circ \dots \circ \Gamma_{t^m}^m$. Grazie a (D_1), τ è una trivializzazione di $Y' \to B'$ ciò che dimostra il teorema I. Si osservi ora che, se $x \in Y_3 - A$, allora $\Gamma_\lambda^a x = \mathcal{R}_\lambda^a x$, dunque $\Gamma_\lambda^a x \in Y_3 - A$. Pertanto $(x_0, t) \in (X_0 - A_0) \times B' \Longrightarrow \tau(x_0, t) \in Y' - A$. Da (B_6) segue allora che si ha

$$\tau \,|\, [(X_0 - A) \times B'] = \mathcal{R} \,|\, [X_0 - A_0) \times B']$$

ciò che dimostra il lemma 4.1.

Dimostrazione del teorema II. Per ipotesi esistono

(i) un compatto $C_0 \subset X_0$,

(ii) un isomorfismo di fibrati differenziabili

$$\mathcal{R}: X_0 \times B \to Y,$$

tale che $\mathcal{R} \,|\, [(X_0 - C_0) \times \{t\}] : (X_0 - C_0) \to X_t$ sia biolomorfa sulla sua immagine,

(iii) un aperto di Stein $V_0 \subset X_0$, contenente C_0.

Osserviamo che $W = \mathcal{R}(V_0 \times B) \xrightarrow{\pi} B$ è una deformazione differenziabile, triviale all'infinito, della varietà di Stein V_0. Per il teorema I ed il lemma 4.1 esiste una restrizione triviale $W' \xrightarrow{\pi} B'$ di $W \xrightarrow{\pi} B$ ed una sua trivializzazione $\tau: V_0 \times B' \to W'$ tali che sia

$$\tau \,|\, [(V_0 - C_0) \times B'] = \mathcal{R} \,|\, [(V_0 - C_0) \times B'].$$

Si consideri la restrizione $Y' \xrightarrow{\pi} B'$ di $Y \xrightarrow{\pi} B$. Sia $x_0 \in X_0$ e $t \in B'$, poniamo

$$\tau^*(x_0, t) \begin{cases} = \tau(x_0, t), & \text{se} \quad x_0 \in V_0 \\ = \mathcal{R}(x_0, t), & \text{se} \quad x \in X_0 - C_0. \end{cases}$$

Per quanto sopra osservato $\tau^* : X_0 \times B' \longrightarrow Y'$ è una trivializzazione di $Y' \xrightarrow{\pi} B'$. Il teorema II è così dimostrato.

Osservazione. Al teorema II si può dare una presentazione apparentemente più generale sostituendo ad X uno spazio analitico complesso, supponendo che la deformazione $Y \xrightarrow{\pi} B$ abbia supporto contenuto in un compatto C_0 e che C_0 sia a sua volta contenuto in un aperto di Stein di X_0, privo di singolarità. La dimostrazione precedente rimane formalmente identica.

5. Controesempio.

Vogliamo costruire una deformazione differenziabile, triviale all'infinito, di una varietà di Stein di dimensione 1, che non è localmente triviale.

Ciò prova la necessità dell'ipotesi $\dim_{\mathbf{C}} X > 1$ nel teorema I e quindi anche nel teorema II (poichè teorema II $\Longrightarrow$ teorema I).

Siano $\alpha, \beta, a, \delta, d$ numeri positivi legati dalle relazioni $\alpha < \beta$, $a > 1$, $\beta(1 + a) < \delta < d$; sia $I = \{t \in \mathbf{R}, |t| < 1\}$.

Per ogni coppia di numeri reali s, s', con $0 \leq s \leq s'$, indichiamo con $\Gamma(s, s')$ la corona circolare $\{z \in \mathbf{C}, s < |z| < s'\}$.

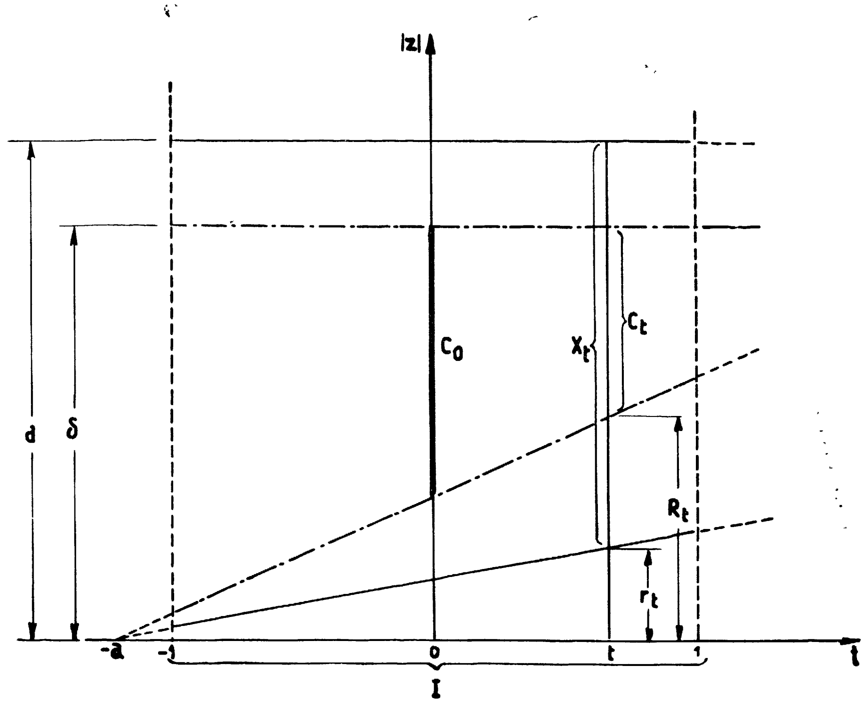

Fig. 1

Si ponga

$$r_t = \alpha\,(t + a), \qquad Y \equiv \{(z, t) \in \mathbf{C} \times I,\ r_t < |\,z\,| < d\}.$$

Y è un fibrato differenziabile su I la cui proiezione sarà indicata con π; la fibra $X_t = \pi^{-1}\,t$ è $\Gamma\,(r_t\,,\,d)$. È evidente che Y costituisce una deformazione differenziabile (in realtà analitica reale) della varietà analitica complessa $X_0 \equiv \Gamma\,(r_0\,,\,d)$. La deformazione $Y \xrightarrow{\pi} B$ non può essere localmente triviale (neppure in quanto deformazione continua) difatti

$$X_t \simeq X_{t'} \Longleftrightarrow \Gamma\,(r_t\,,\,d) \simeq \Gamma\,(r_{t'}\,,\,d) \Longleftrightarrow r_{t'} = r_t \Longleftrightarrow t = t'.$$

Proviamo ora che $Y \xrightarrow{\pi} B$ è triviale all'infinito. Si ponga

$$R_t = \beta\,(t + a), \qquad C_t = \{(z, t) \in \mathbf{C} \times \{t\},\ R_t \leq |\,z\,| \leq \delta\}.$$

Le relazioni imposte ad α, β, a, δ, d ci assicurano che $r_t < R_t < \delta$, $\forall\, t \in I$.

Osserviamo intanto che $\forall t,\, t' \in I$, si ha $X_t - C_t \simeq X_{t'} - C_{t'}$; difatti

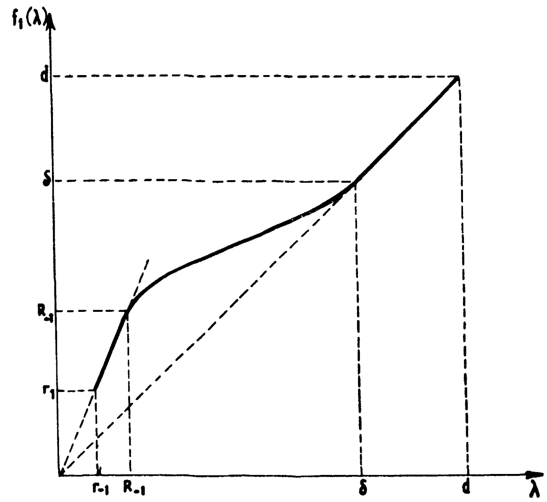

Fig. 2

$$X_t - C_t = \Gamma\,(\delta,\, d) \cap \Gamma\,(r_t\,,\, R_t)$$

e si ha

$$\Gamma\,(\delta,\, d) \cap \Gamma\,(r\ ,\, R_t) = \emptyset\,;$$

del resto $\dfrac{r_t}{R_t} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{r_{t'}}{R_{t'}}$, dunque $\Gamma\,(r_t,\, R_t) \simeq \Gamma\,(r_{t'}\,,\, R_{t'})$, Costruiamo ora l'applicazione $\mathcal{R}$ di cui al n. 1

Si consideri un' applicazione differenziabile, crescente, sorgettiva $f_1 : [r_{-1}, d] \to [r_1, d]$ soddisfacente le condizioni (Cfr. figura 2)

α) $f_1 \mid [r_{-1}, R_{-1}]$ è lineare ed ha per immagine $[r_1, R_1]$;

β) $f_1 \mid [\delta, d] = id_{[\delta, d]}$.

Si ponga allora, per ogni $t \in I$,

$$f_t(\lambda) = \frac{1}{2}(t+1)[f_1(\lambda) - \lambda] + \lambda$$

e

$$g_t = f_t \circ f_0^{-1} : [r_0, d] \to [r_t, d].$$

La famiglia di applicazioni $\{g_t\}$ gode delle seguenti proprietà

γ) $g_t \mid [r_0, R_0]$ è lineare ed ha per immagine $[r_t, R_t]$,

δ) $g_t \mid [\delta, d] = id_{[\delta, d]}$,

ε) $g_t : [r_0, d] \to [r_t, d]$ è un diffeomorfismo crescente,

ζ) L'applicazione $[r_0, d] \times I \to \{(\varrho, t) \in \mathbb{R}^+ \times I, r_t < \varrho < d\}$ definita da $(\varrho, t) \leadsto (g_t(\varrho), t)$ è un isomorfismo di fibrati differenziabili di base I.

Siano ϱ, θ coordinate polari su $\mathbb{C}$; la legge

$$(\varrho, \theta, t) \leadsto (g_t(\varrho), \theta, t)$$

definisce un isomorfismo $\mathcal{R} : X_0 \times I \to Y$ di fibrati differenziabili (di base I).

Resta da provare che $\mathcal{R} \mid [(X_0 - C_0) \times \{t\}] : X_0 - C_0 \to X_t - C_t$ è bilomorfa per ogni $t \in I$.

Si ha

$$X_0 - C_0 = \Gamma(\delta, d) \cup \Gamma(r_0, R_0), \qquad X_t - C_t = \Gamma(\delta, d) \cup \Gamma(r_t, R_t),$$

le unioni essendo disgiunte; $\Gamma(\delta, d)$ è applicata su se stessa mediante l'identità e l'applicazione

$$\Gamma(r_0, R_0) \to \Gamma(r_t, R_t)$$

si scrive

$$(\varrho, \theta) \leadsto (q_t \varrho, \theta)$$

ove s'è posto

$$q_t = \frac{t+a}{a} = \frac{r_t}{r_0} = \frac{R_t}{R_0},$$

essa è dunque conforme.

APPENDICE

Dimostrazione del teorema 0.1.

Osservazione. È sufficiente dimostrare il teorema nel caso che le X_i siano di Stein.

Difatti, se il teorema è vero in tale caso, esiste un'applicazione biolomorfa $\Phi' : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tale che

$$\Phi' \mid (\Omega_1 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_1) = \Phi \mid (\Omega_1 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_1) ;$$

allora l'applicazione $\widetilde{\Phi} : X_1 \longrightarrow X_2$ definita da

$$\widetilde{\Phi}(x) \begin{cases} = \Phi'(x), & \text{se} \quad x \in \Omega_1 \\ = \Phi(x), & \text{se} \quad x \in X_1 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_1 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni richieste.

Prima dimostrazione. Si immerga X_2 in $\mathbf{C}^N$ mediante una N-pla di funzioni $\{f_i\}$. Le funzioni $g_i = f_i \circ \Phi : X_1 - C_1 \longrightarrow \mathbf{C}$ sono olomorfe e la loro matrice jacobiana è di rango massimo.

Per il teorema di Hartogs ciascuna di esse si prolunga in una funzione olomorfa $\widetilde{g}_i : X_i \longrightarrow \mathbf{C}$, con $\widetilde{g}_i \mid (X_1 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_1) = g_i \mid (X_1 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_1)$. La matrice jacobiana delle $\widetilde{g}_1$ può essere di rango non massimo in uno spazio analitico di codimensione 1. Del resto tale spazio analitico si troverebbe contenuto nel compatto $\widehat{K}_1$ (al di fuori del quale è $\widetilde{g}_i = g_i$) esso è dunque vuoto. Ne segue che il rango delle $\widetilde{g}_i$ è ovunque massimo. Resta da provare che il sottoinsieme

$$Z \equiv \{z \in \mathbf{C}^N, \; z^i = \widetilde{g}_i(x), \; x \in X_1\}$$

di $\mathbf{C}^N$ è l'immagine Z^* di X_2 in $\mathbf{C}^N$. Siano $h_j(z^1, \dots, z^N) = 0$ le equazioni di Z^* in $\mathbf{C}^N$; le funzioni

$$x \rightsquigarrow h_j[\widetilde{g}_1(x), \dots, \widetilde{g}_N(x)],$$

olomorfe su X_1, sono nulle al difuori di $\widehat{K}_1$ e pertanto identicamente nulle Ne segue che $Z \equiv Z^*$.

Seconda dimostrazione. Si può assumere $\Omega_i \equiv X_i$.

Sia $\mathcal{O}_1$ il fascio di germi di funzioni olomorfe su X_i. $H^0(X_i, \mathcal{O}_i)$ e $H^0(X_i - \widehat{K}_i, \mathcal{O}_i)$ sono dotati di una struttura naturale di algebre di Fréchet mediante la topologia della convergenza uniforme sui compatti; l'applicazione di restrizione $r_i : H^0(X_i, \mathcal{O}_i) \longrightarrow H^0(X_i - \overset{\circ}{\widehat{K}}_i, \mathcal{O}_i)$ è manifestamente continua e per il teorema di Hartogs è bigettiva, essa è dunque un isomorfismo.

Poichè le X_i sono di Stein, ogni ideale massimale chiuso di $H^0(X_i, \mathcal{O}_i)$ è costituito dalla totalità delle funzioni olomorfe $X_i \longrightarrow \mathbf{C}$ che si annullano in un dato punto; indicato pertanto con Spec $[H^0(X_i, \mathcal{O}_i)]$ l'insieme di tali ideali, si ha un'applicazione bigettiva

$$\lambda_i : X_i \longrightarrow \operatorname{Spec}\,[H^0(X_i, \mathcal{O}_i)].$$

Un'applicazione $\Xi : X_1 \longrightarrow X_2$ è biolomorfa se, e solo se, induce un isomorfismo $\Xi^* : H^0(X_2, \mathcal{O}_2) \longrightarrow H^0(X_1, \mathcal{O}_1)$ di algebre di Fréchet. Se ciò è verificato, indicata con Ξ_* la corrispondente applicazione di Spec $[H^0(X_1, \mathcal{O}_1)]$ su Spec $[H^0(X_2, \mathcal{O}_2)]$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\Xi"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & X_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\
\operatorname{Spec}\,[H^0(X_1, \mathcal{O}_1)] \arrow[r, "\Xi_*"] & \operatorname{Spec}\,[H^0(X_2, \mathcal{O}_2)]
\end{tikzcd}$$

Fig. 3

è commutativo.

Nel nostro caso si può allora dapprima costruire il diagramma commutativo di isomorfismi di algebre di Fréchet

$$\begin{tikzcd}
H^0(X_1 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_1, \mathcal{O}_1) & H^0(X_2 - \overset{\circ}{\widehat{K}}_2, \mathcal{O}_2) \arrow[l, "\phi^*"'] \\
H^0(X_1, \mathcal{O}_1) \arrow[u, "r_1"'] & H^0(X_2, \mathcal{O}_2) \arrow[l, "\tilde{\phi}^*"'] \arrow[u, "r_2"]
\end{tikzcd}$$

Fig. 4

ove Φ^* è definito per commutatività, e, in seguito, il diagramma di corrispondenze biunivoche

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & X_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\
\mathrm{Spec}\,[H^0(X_1, \mathcal{O}_1)] \arrow[r, dash, "\widetilde{\Phi}_*"] & \mathrm{Spec}\,[H^0(X_2, \mathcal{O}_2)]
\end{tikzcd}$$

Fig. 5

ove la $\widetilde{\Phi}_*$ è indotta dalla $\widetilde{\Phi}^*$ in modo ovvio e la $\widetilde{\Phi}$ è costruita per commutatività. Ora la $\widetilde{\Phi}$ è biolomorfa e soddisfa evidentemente le condizioni richieste.

Ist. Mat. Univ. Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e E. VESENTINI, *On pseudo-rigidity of Stein manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 16, (1962), 213-223.

[2] A. ANDREOTTI e E. VESENTINI, *On deformation of discontinuous groups*, Acta Math., 112 (1964), 249-297.

[3] F. GHERARDELLI, *Deformazioni rigide all'infinito di varietà di Stein*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 20, (1966), 583-588.

[4] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis of several variables*, D. Van Nostrand Publ., Princeton, (1966).

[5] K. KODAIRA e D. C. SPENCER, *On deformations of complex analytic structures*, I e II. Ann. of Math., 67. (1958), 328-466.

[6] C. REA, *Le problème de Cauchy-Riemann pour des structures mixtes*, Ann. Scuola Norm. di Pisa, 22, (1968), 695-727.

[7] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, Comment, Math, Helv., 29, (1955), 9-26.