ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

E. GIUSTI

Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi-lineari di ordine arbitrario

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 115-141

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_115_0>

REGOLARITÀ PARZIALE DELLE SOLUZIONI DI SISTEMI ELLITTICI QUASI-LINEARI DI ORDINE ARBITRARIO [1]

E. Giusti

1. Introduzione.

In questo lavoro ci occuperemo della regolarità delle soluzioni $u \in \mathcal{H}^{m,p}_{-}(\Omega)$ (vedi Definizione 1) del sistema

$$\int_\Omega V^{p-2} \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha| \leq m_i} D^\alpha \varphi_i \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{|\beta| = m_j} A^{ij}_{\alpha\beta}(x, \delta u)\, D^\beta u_j + \right. \tag{1.1}$$

$$\left. + \, b^i_\alpha(x, \delta u) \right\} dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$$

dove δu sta per $D^\gamma u_h$ ($h = 1, 2, \ldots, N$; $|\gamma| < m_h$), ed i coefficienti $A^{ij}_{\alpha\beta}$ sono funzioni continue dei loro argomenti e verificano le condizioni:

$$|A^{ij}_{\alpha\beta}| \leq L \tag{1.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^N \sum_{|\alpha| = m_i} \sum_{|\beta| = m_j} A^{ij}_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha_i\, \xi^\beta_j \geq |\xi|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha| = m_j} |\xi^\alpha_j|^2. \tag{1.3}$$

Per quanto riguarda le b^i_α si supporrà che

Pervenuto in Redazione il 6 Luglio 1968.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del C. N. R. nell'anno 1968-69.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} |b_\alpha^i|^2 \leq K^2 V^2 \tag{1.4}$$

dove

$$V^2 = 1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| < m_i} |D^\alpha u_i|^2. \tag{1.5}$$

Nelle ipotesi suddette verranno dimostrati i seguenti teoremi di regolarità parziale:

TEOREMA 1. *Per ogni soluzione u della* (1.1) *esiste un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ tale che*:

$$u_i \in C_{\mathrm{loc}}^{m_i - 1, 1/2}(\Omega_0) \qquad (i = 1, 2, \dots N) \tag{1.6}$$

$$\mathrm{mis}\,(\Omega - \Omega_0) = 0. \tag{1.7}$$

TEOREMA 2. *Si ha*:

$$H_{n-1}(\Omega - \Omega_0) = 0 \tag{1.8}$$

dove H_{n-1} è la misura di HAUSDORFF $(n-1)$*-dimensionale in* $\mathbb{R}^n$ [2].

La dimostrazione del TEOREMA 2 si basa sul seguente risultato annunciato da FEDERER [3]:

Se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ed ha derivate misure, allora, posto

$$E = \{x \in \Omega : \sup_{0 < \varrho < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)} |f_{x,\varrho}| = +\infty\}$$

si ha:

$$H_{n-1}(E) = 0.$$

Dal TEOREMA 1, grazie a risultati relativi ai sistemi lineari (vedi ad es. [7], § 6.4), segue che ogni u_i ha derivate di ordine $m_i - 1$ hölderiane in Ω_0 con qualunque esponente minore di 1. Se poi i coefficienti $A_{\alpha\beta}^{ij}$ e le b_α^i hanno derivate di ordine s hölderiane [sono analitiche] allora ogni u_i ha derivate di ordine $m_i + s$ hölderiane [è analitica] in Ω_0.

Lo studio della regolarità delle soluzioni deboli dei sistemi ellittici quasi-lineari in dimensione arbitraria è stato iniziato da MORREY, che ha ottenuto in [8] un risultato del tipo del TEOREMA 1 per alcune classi di sistemi. La tecnica che qui si usa è comunque differente, avvicinandosi piuttosto a quella introdotta in [5], dove si dimostrano i TEOREMI 1 e 2 nelle ipotesi $p = 2$, $b_\alpha^i \equiv 0$ e $m_i = 1$.

---

(2) Per $\alpha \geq 0$ e $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$H_\alpha(X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\, X_i)^\alpha ; \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \supset X, \mathrm{diam}\, X_i < \varepsilon \right\}.$$

I risultati di questo lavoro non sono però del tutto disgiunti da quelli di MORREY; anzi, almeno nel caso del primo gruppo di ipotesi (vedi § 7 e [8], ipotesi (1.2)) si può dire che il TEOREMA 1 contenga il MAIN THEOREM di [8] in ipotesi senz'altro più generali.

Osserviamo infine che la classe di sistemi discussa in questo lavoro contiene gli esempi di sistemi dotati di soluzioni singolari riportati in [4] e [6].

Trattandosi di risultati di carattere locale, non sarà restrittivo supporre Ω limitato ed i coefficienti $A^{ij}_{\alpha\beta}(x, q)$ definiti e continui per x che varia in $\bar{\Omega}$; cosa che faremo senz'altro nel seguito.

Il § 2 è riservato alle notazioni, nel § 3 si dimostrano alcuni lemmi relativi a sistemi lineari, mentre § 4 è dedicato alla dimostrazione del LEMMA 3, che è da riguardare come il punto centrale di tutto il lavoro.

Nei §§ 5 e 6 si dimostrano rispettivamente i TEOREMI 1 e 2, ed infine nel § 7 si fa un confronto con i risultati di [8].

Ringrazio E. BOMBIERI, S. CAMPANATO, E. DE GIORGI e M. MIRANDA, con cui ho discusso i risultati di questo lavoro.

2. Notazioni.

In tutto il lavoro Ω indicherà un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$; inoltre per $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ed $R > 0$ si pone:

$$B(x_0, R) = \{x : x \in \mathbb{R}^n ; |x - x_0| < R\} ; \; B = B(0, 1). \tag{2.1}$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, , \dots, \alpha_n)$ è un multi-indice (tutti gli α_i sono interi non negativi) si pone $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e si dice che $\alpha < \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i$ e $|\alpha| < |\beta|$.

Si pone $D_s = \dfrac{\partial}{\partial x_s}$ e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} . \tag{2.2}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni a supporto compatto contenuto in Ω ed infinitamente derivabili; $[\mathcal{D}(\Omega)]^N$ è il prodotto cartesiano di N copie di $\mathcal{D}(\Omega)$.

Se k è un intero positivo e p un numero non inferiore a 2, $H^{k,p}(\Omega)$, $H_0^{k,p}(\Omega)$ e $H_{\mathrm{loc}}^{k,p}(\Omega)$ sono gli usuali spazi di Sobolev.

Se $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ è una n-pla di interi positivi, si pone: $m = \max m_i$ e:

$$H^{\underline{m}, p}(\Omega) = H^{m_1, p}(\Omega) \times H^{m_2, p}(\Omega) \times \dots \times H^{m_n, p}(\Omega). \tag{2.3}$$

Analoga definizione per $H_0^{\underline{m}, p}(\Omega)$ ed $H_{\text{loc}}^{\underline{m}, p}(\Omega)$.

Lo spazio in cui si porrà il problema è il seguente:

DEFINIZIONE 1. *$\mathcal{H}^{\underline{m}, p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni vettoriali $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ tali che per ogni i si abbia:*

$$V^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha u_i \in L^2(\Omega) \qquad |\alpha| < m_i \tag{2.4}$$

$$V^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha u_i \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \qquad |\alpha| = m_i \tag{2.5}$$

(*V è dato dalla* (1.5)).

Le (2.4) sono evidentemente equivalenti alle:

$$D^\alpha u_i \in L^p(\Omega) \quad |\alpha| < m_i. \tag{2.6}$$

Se inoltre $p = 2$, $\mathcal{H}^{\underline{m}, 2}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni vettoriali u tali che $u_i \in H_{\text{loc}}^{m_i, 2}(\Omega) \cap H^{m_i - 1, 2}(\Omega)$.

Con $c_1, c_2, \dots$ indicheremo delle costanti; verrà sempre sottaciuta la loro dipendenza da L, m, N, n, p. Qualora si abbia a che fare con costanti che ricorrono in più di una parte del lavoro, queste verranno indicate con lettere speciali (γ, H, Λ, ecc...).

3. Preliminari.

Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione di due lemmi. Il primo di questi è una nota maggiorazione di CACCIOPPOLI, che è stata usata da molti autori. Verrà dimostrata per completezza, peraltro senza indugiare troppo sui dettagli.

LEMMA 1. *Sia μ una misura positiva in $B(x_0, R)$, $A_{\alpha\beta}^{ij}$ funzioni μ-misurabili, verificanti le* (1.2) *e* (1.3) *e d_α^i funzioni di $L^2(\mu)$. Siano u_j funzioni appartenenti ad $L^2(\mu)$ insieme a tutte le loro derivate fino all'ordine m_j e tali che per ogni φ di $[\mathcal{D}(B(x_0, R))]^N$ si abbia,*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha| \le m_i} \sum_{|\beta| = m_j} \int_{B(x_0, R)} \left\{ A_{\alpha\beta}^{ij}(x) D^\beta u_j + d_\alpha^i(x) \right\} D^\alpha \varphi_i \, d\mu = 0 \tag{3.1}$$

Per ogni ϱ, $0 < \varrho < R$, *si ha*:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \int_{B(x_0, \varrho)} | D^\alpha u_i |^2 \, d\mu \leq \tag{3.2}$$

$$\leq c_1 (R, \varrho) \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| < m_i} \int_{B(x_0, R)} | D^\alpha u_i |^2 \, d\mu + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_{B(x_0, R)} | d^i_\alpha |^2 \, d\mu \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta \in \mathcal{D}(B(x_0, R))$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ in $B(x_0, \varrho)$ e tale che per ogni α, $|\alpha| \leq m = \max\limits_{1 \leq i \leq N} m_i$:

$$| D^\alpha \eta | \leq c_2 (R - \varrho)^{-|\alpha|}. \tag{3.3}$$

Posto $\varphi_i = \eta^{2m} u_i$ e $U_i = \eta^m u_i$, si ha:

$$D^\alpha \varphi_i = \eta^m \{ D^\alpha U_i + \sum_{\gamma < \alpha} L_{\alpha\gamma}(\eta) D^\gamma u_i \} \qquad |\alpha| = m_i \tag{3.4}$$

$$D^\alpha \varphi_i = \eta^m \sum_{\gamma \leq \alpha} N_{\alpha\gamma}(\eta) D^\gamma u_i \qquad |\alpha| < m_i \tag{3.5}$$

$$\eta^m D^\beta u_j = D^\beta U_j - \sum_{\delta < \beta} M_{\beta\delta}(\eta) D^\delta u_j \qquad |\beta| = m_j \tag{3.6}$$

dove le $L_{\alpha\gamma}$, $N_{\alpha\gamma}$ e $M_{\alpha\gamma}$ contengono η e le sue derivate fino all'ordine $|\alpha| - |\gamma|$ e, in virtù della (3.3) verificano le maggiorazioni:

$$| L_{\alpha\gamma} |, \ | M_{\alpha\gamma} |, \ | N_{\alpha\gamma} | \leq c_3 (R - \varrho)^{|\gamma| - |\alpha|}. \tag{3.7}$$

Se si introduce nella (3.1) la φ così scelta, si usano le (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) e si ricordano le (1.2) e (1.3) e la maggiorazione

$$| 2ab | \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2 \qquad (\varepsilon > 0) \tag{3.8}$$

si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \int_{B(x_0, R)} | D^\alpha U_i |^2 \, d\mu \leq \tag{3.9}$$

$$\leq c_4 (R, \varrho) \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| < m_i} \int_{B(x_0, R)} | D^\alpha u_i |^2 \, d\mu + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_{B(x_0, R)} | d^i_\alpha |^2 \, d\mu \right\}$$

da cui segue la tesi, ricordando che $\eta \equiv 1$ in $B(x_0, \varrho)$.

c.v.d.

Un risultato di cui si farà largo uso nel seguito è espresso dal:

TEOREMA DI POINCARÉ. *Se $u(x)$ è una funzione di $H^{1,p}(B(x_0, R))$ $(p > 1)$ con media nulla in $B(x_0, R)$, allora:*

$$\int_{B(x_0, R)} |u|^p \, dx \leq c_5 R^p \int_{B(x_0, R)} |\nabla u|^p \, dx. \tag{3.10}$$

Sia ora Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e w una funzione di $H^{\underline{m}, 2}(\Omega)$. Per ogni $x_0 \in \Omega$ ed R, $0 < R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, esiste (unico) un polinomio $P_i = P(w_i, x_0, R; x)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ di grado minore di m_i, tale che

$$\int_{B(x_0, R)} D^\alpha (w_i - P_i) \, dx = 0 \qquad \forall\, \alpha, \, |\alpha| < m_i. \tag{3.11}$$

Qualora non vi sia luogo ad equivoci, scriveremo $P_i^{x_0, R}$ al posto di $P(w_i, x_0, R; x)$; inoltre si converrà sempre di scrivere il polinomio nella forma:

$$P_i^{x_0, R} = \sum_{|\alpha| < m_i} \frac{a_\alpha^i (x_0, R)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha. \tag{3.12}$$

Porremo inoltre:

$$[P^{x_0, R}] = 1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| < m_i} |a_\alpha^i (x_0, R)|. \tag{3.13}$$

Possiamo ora dimostrare il

LEMMA 2. *Siano $A_{\alpha\beta}^{ij}$ delle costanti verificanti le (1.2) e (1.3) e d_α^i delle funzioni di $L^2(B)$. Sia $u \in \mathcal{H}^{\underline{m}, 2}(B)$ soluzione del sistema:*

$$\begin{aligned} A(u, \varphi) \equiv \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \sum_{|\beta| = m_j} \int_B A_{\alpha\beta}^{ij} D^\beta u_j D^\alpha \varphi_i \, dx = \\ = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_B d_\alpha^i D^\alpha \varphi_i \, dx \qquad \forall\, \varphi \in [\mathcal{D}(B)]^N. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Esiste una costante $\Lambda = \Lambda(n, N, L, m)$ tale che per ogni $\varrho \leq 1/2$ si abbia:

$$I(0, \varrho) \leq \frac{\Lambda}{2} \{\varrho^2 I(0, 1) + \varrho^{2-n} D(0, 1)\}. \tag{3.15}$$

dove si è posto :

$$I(0,\varrho)=\varrho^{-n}\int\limits_{B(0,\varrho)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=m_i-1}|D^\alpha(u_i-P_i^{0,\varrho})|^2\,dx \tag{3.16}$$

e :

$$D(0,\varrho)=\varrho^{-n}\int\limits_{B(0,\varrho)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|\le m_i}|d_\alpha^i|^2\,dx. \tag{3.17}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la soluzione del problema di Dirichlet :

$$\begin{cases} A(w,\varphi)=\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{|\alpha|\le m_i}\int\limits_B d_\alpha^i\,D^\alpha\varphi_i\,dx \qquad \forall\,\varphi\in[\mathcal{D}(B)]^N \\ w\in H_0^{m,2}(B) \end{cases} \tag{2.18}$$

e la funzione $v=u-w$, che evidentemente verifica :

$$A(v,\varphi)=0 \qquad \forall\,\varphi\in[\mathcal{D}(B)]^N. \tag{3.19}$$

La v è infinitamente derivabile in B, ed ogni sua derivata è ancora soluzione di (3.19). Fissato un numero positivo k si può dividere l'intervallo (2/3,1) in k parti uguali ed applicare più volte il LEMMA 1 ; si ottiene :

$$\sum_{i=1}\sum_{|\alpha|\le m_i+k}\int\limits_{B(0,2/3)}|D^\alpha v_i|^2\,dx\le c_5(k)\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|<m_i}\int\limits_B|D^\alpha v_i|^2\,dx. \tag{3.20}$$

Se $k>n/2$, da un noto teorema di SOBOLEV segue :

$$\sup_{|x|<\frac{1}{2}}|D^\beta v_j(x)|^2\le c_6\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|<m_i}\int\limits_B|D^\alpha v_i|^2\,dx \qquad |\beta|=m_j \tag{3.21}$$

e da questa, se $\varrho\le\dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=m_i}\int\limits_{B(0,\varrho)}|D^\alpha v_i|^2\,dx\le c_7\,\varrho^n\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|<m_i}\int\limits_B|D^\alpha v_i|^2\,dx. \tag{3.22}$$

Per quanto riguarda la w si ha, tenendo conto della (1.2) e del fatto che $w \in H_0^{m,2}(\Omega)$:

$$(3.23) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_B |D^\alpha w_i|^2 dx \leq c_8 \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \int_B |D^\alpha w_i|^2 dx \leq$$

$$\leq c_9 \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_B |d_\alpha^i|^2 dx.$$

Dalle (3.22) e (3.23) segue:

$$(3.24) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \int_{B(0,\varrho)} |D^\alpha u_i|^2 dx \leq$$

$$\leq c_{10} \left\{ \varrho^n \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| < m_i} \int_B |D^\alpha u_i|^2 dx + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_B |d_\alpha^i|^2 dx \right\}.$$

Si osservi ora che $u - P^{0,1}$ è ancora soluzione di (3.14).
Si può allora scrivere la (3.24) con $u - P^{0,1}$ al posto di u.
Tenendo conto del TEOREMA DI POINCARÈ si ha:

$$(3.25) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \int_{B(0,\varrho)} |D^\alpha u_i|^2 dx \leq c_{11} \{\varrho^n I(0,1) + D(0,1)\}$$

e

$$(3.26) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i - 1} \int_{B(0,\varrho)} |D^\alpha (u_i - P_i^{0,\varrho})|^2 dx \leq c_{12}\, \varrho^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} \int_{B(0,\varrho)} |D^\alpha u_i|^2 dx$$

da cui segue la (3.15).

c.v.d.

4. Un lemma fondamentale.

In questo paragrafo dimostremo il lemma su cui si basa tutta la successiva teoria.

LEMMA 3. *Per ogni* $M \geq 0$ *e per ogni* $\tau \left(0 < \tau \leq \frac{1}{2}\right)$ *esistono due costanti* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau, M)$ *ed* $R_0 = R_0(\tau, M)$ *tali che se* $u \in \mathcal{H}_-^{m,p}(\Omega)$ *è soluzione di* (1.1) *con i coefficienti* $A_{\alpha\beta}^{ij}$ *verificanti le* (1.2), (1.3), *e se per* $x_0 \in \Omega$ *e per* *qualche* $R \leq R_0 \cap \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ [3] *si ha*:

$$[P^{x_0, R}] \leq M \tag{4.1}$$

$$J(x_0, R) = R^{-n} \int_{B(x_0, R)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i - 1} |D^\alpha (u^i - P^{x_0, R})|^2 \, dx < \varepsilon_0^2 \tag{4.2}$$

$$\mathcal{B}(x_0, R) = R^{2-n} \int_{B(x_0, R)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} R^{2m_i - 2|\alpha|} |b_\alpha^i|^2 \, dx < \varepsilon_0^2 \tag{4.3}$$

allora [4]:

$$J(x_0, \tau R) \leq A \{\tau^2 J(x_0, R) + \tau^{2-n} \mathcal{B}(x_0, R)\}. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo che per un M ed un τ non esistano ε_0 ed R_0. Vi sarebbero allora una successione x_ν di punti di Ω, due successioni infinitesime ε_ν ed R_ν ed una successione $u^{(\nu)} \in \mathcal{H}_{-}^{m, p}(\Omega)$ di soluzioni di (1.1), tali che:

$$[P^{(\nu)}] \leq M \qquad (P_i^{(\nu)} = P(u_i^{(\nu)}, x_\nu, R_\nu; x)) \tag{4.5}$$

$$\max \{J^{(\nu)}(x_\nu, R_\nu); \mathcal{B}^{(\nu)}(x_\nu, R_\nu)\} = \varepsilon_\nu^2 \tag{4.6}$$

mentre

$$J^{(\nu)}(x_\nu, \tau R_\nu) > A \{\tau^2 J^{(\nu)}(x_\nu, R_\nu) + \tau^{2-n} \mathcal{B}^{(\nu)}(x_\nu, R_\nu)\}. \tag{4.7}$$

Se si pone

$$v_i^{(\nu)}(y) = \varepsilon_\nu^{-1} R_\nu^{1-m_i} \{u_i^{(\nu)}(x_\nu + R_\nu y) - P_i^{(\nu)}(x_\nu + R_\nu y)\} \tag{4.8}$$

$$\chi_{i\alpha}^{(\nu)}(y) = \varepsilon_\nu R_\nu^{m_i - 1 - |\alpha|} D^\alpha v_i^{(\nu)}(y) + P_{i,\alpha}^{(\nu)}(x_\nu + R_\nu y) \text{ [5]} \tag{4.9}$$

$$d_\alpha^{i(\nu)}(y) = \varepsilon_\nu^{-1} R_\nu^{1+m_i - |\alpha|} b_\alpha^i(x_\nu + R_\nu y; \chi_{h\gamma}^{(\nu)}(y)) \tag{4.10}$$

$$\psi_i(y) = R_\nu^{-m_i} \varphi_i(x_\nu + R_\nu y) \tag{4.11}$$

---

(3) $a \cap b = \min(a, b)$.

(4) A è la costante determinata nel Lemma 2.

(5) Con $P_{i,\alpha}^{(\nu)}$ si indica la derivata di ordine α fatta rispetto alla variabile x, mentre evidentemente in $D^\alpha v_i^{(\nu)}$ le derivate sono da intendersi fatte rispetto ad y.

la $v^{(\nu)}$ verifica il sistema :

$$\int_B W_\nu^{p-2} \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha|\le m_i} D^\alpha \psi_i(y) \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{|\beta|=m_j} a_{\alpha\beta}^{ij(\nu)}(y)\, D^\beta v_j^{(\nu)} + \right.$$
$$\left. + d_\alpha^{i(\nu)}(y) \right\} dy = 0 \qquad \forall \psi \in [\mathcal{D}(B)]^N \tag{4.12}$$

dove

$$W_\nu^2 = 1 + \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha|<m_i} |\chi_{i\alpha}^{(\nu)}|^2 \tag{4.13}$$

$$a_{\alpha\beta}^{ij(\nu)}(y) = R_\nu^{m_i-|\alpha|} A_{\alpha\beta}^{ij}(x_\nu + R_\nu y, \chi_{h\gamma}^{(\nu)}(y)). \tag{4.14}$$

Le (4.6) e (4.7) diventano

$$\max\{\mathcal{J}^{(\nu)}(0,1), \mathcal{D}^{(\nu)}(0,1)\} = 1 \tag{4.15}$$

$$\mathcal{J}^{(\nu)}(0,\tau) > A\{\tau^2 \mathcal{J}^{(\nu)}(0,1) + \tau^{2-n} \mathcal{D}^{(\nu)}(0,1)\} \ge A\tau^2 \tag{4.16}$$

dove si è posto

$$\mathcal{J}^{(\nu)}(0,\varrho) = \varrho^{-n} \int_{B(0,\varrho)} W_\nu^{p-2} \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha|=m_i-1} |D^\alpha (v_i^{(\nu)} - Q_i^{(\nu),\varrho})|^2\, dy \tag{4.17}$$

$$Q_i^{(\nu),\varrho} = P(v_i, 0, \varrho, ; y) = \varepsilon_\nu^{-1} R_\nu^{1-m_i} \{P(u_i^{(\nu)}, x_\nu, \varrho R_\nu ; x_\nu + R_\nu y) -$$
$$- P(u_i^{(\nu)}, x_\nu, R_\nu ; x_\nu + R_\nu y)\} \tag{4.18}$$

$$\mathcal{D}^{(\nu)}(0,1) = \int_B W_\nu^{p-2} \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha|\le m_i} |d_\alpha^{i(\nu)}|^2\, dy. \tag{4.19}$$

Facciamo ora tendere ν all'infinito. Passando eventualmente ad una successione estratta si può supporre che (6)

$$x_\nu \longrightarrow x_0 \in \bar{\Omega} \,;\; P_{i,\alpha}^{(\nu)} \longrightarrow p_{i\alpha} \text{ uniformemente in } B \tag{4.20}$$

$$D^\alpha v_i^{(\nu)} \longrightarrow D^\alpha v_i \text{ debolmente in } L^2(B) \qquad |\alpha| < m_i \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_\nu D^\alpha v_i^{(\nu)} \longrightarrow 0 \text{ quasi ovunque in } B \qquad |\alpha| < m_i \tag{4.22}$$

(6) Le (4.20)-(4.29) verranno dimostrate più oltre.

$$(4.23)\qquad \begin{cases} a^{ij(\nu)}_{\alpha\beta}(y) \longrightarrow a^{ij}_{\alpha\beta} = A^{ij}_{\alpha\beta}(x_0, p_{h\gamma}) \text{ q. ov. in } B; |\alpha| = m_i, |\beta| = m_j \\ a^{ij(\nu)}_{\alpha\beta}(y) \longrightarrow 0 \text{ uniformemente in } B; |\alpha| < m_i, |\beta| = m_j \end{cases}$$

$$(4.24)\qquad W_\nu \longrightarrow V_0 = \left\{1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_j} |p_{i\alpha}|^2\right\}^{1|2} \text{ in } L^p(B)$$

$$(4.25)\qquad W_\nu^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i^{(\nu)} \longrightarrow V_0^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i \text{ debolmente in } L^2(B); |\alpha| = m_i - 1$$

$$(4.26)\qquad W_\nu^{\frac{p-2}{2}} d_\alpha^{i(\nu)} \longrightarrow V_0^{\frac{p-2}{2}} d_\alpha^i \text{ debolmente in } L^2(B); |\alpha| \leq m_i$$

$$(4.27)\qquad D^\alpha v_i^{(\nu)} \longrightarrow D^\alpha v_i \text{ debolmente in } L^2(B(0,\varrho))\ \forall\ \varrho < 1;\ |\alpha| = m_i$$

(4.28) La convergenza nella (4.25) è forte in L^2 $(B(0, \varrho))$ per ogni $\varrho < 1$

Infine la v è soluzione del sistema:

$$(4.29)\qquad \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} \sum_{|\beta|=m_j} \int_B a^{ij}_{\alpha\beta} D^\beta v_j D^\alpha \varphi_i \, dy = - \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq m_i} \int_B d^i_\alpha D^\alpha \varphi_i \, dy \qquad \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(B)]^N$$

e quindi, per il LEMMA 2, dovrebbe aversi:

$$(4.30)\qquad I(0,\tau) \leq \frac{A}{2}\{\tau^2 I(0,1) + \tau^{2-n} D(0,1)\}$$

mentre passando al limite nella (4.16) e tenendo conto delle (4.25), (4.26) e (4 28) si ottiene:

$$(4.31)\qquad I(0,\tau) \geq A\{\tau^2 I(0,1) + \tau^{2-n} D(0,1)\}$$

e

$$(4.32)\qquad I(0,\tau) \geq A\, \tau^2\, V_0^{2-p}.$$

Queste ultime contraddicono la (4.30).

c. v. d.

Dimostrazione delle (4.20), (4.29).

(4.20): È evidente.

(4.21): Se $|\alpha| = m_i - 1$ dalla (4.15) e dal fatto che $W_\nu \geq 1$ segue che $D^\alpha v_i^{(\nu)}$ sono equilimitate in $L^2(B)$.

Poichè le $D^\alpha v_i^{(\nu)}$ $(|\alpha| < m_i)$ hanno media nulla in B, dal TEOREMA di POINCARÉ segue allora l'equilimitatezza anche se $|\alpha| < m_i$. Passando eventualmente ad una successione estratta si ha la (4.21).

(4.22): Segue dalla (4.21).

(4.23): Segue dalle (4.20), (4.22) e dalla continuità dei coefficienti.

(4.24): Osserviamo dapprima che, se $|\alpha| = m_i - 1$, si ha:

$$\varepsilon_\nu^{p-2} |D^\alpha v_i^{(\nu)}|^p \leq c_{13} [W_\nu^{p-2} + M^{p-2}] |D^\alpha v_i^{(\nu)}|^2 \leq c_{14} W_\nu^{p-2} |D^\alpha v_i^{(\nu)}|^2 \tag{4.33}$$

da cui, tenendo conto del TEOREMA di POINCARÈ:

$$\varepsilon_\nu^{p-2} \int_B |D^\alpha v_i^{(\nu)}|^p \, dy \leq c_{15} \mathcal{G}^{(\nu)}(0, 1) \leq c_{15} \qquad (|\alpha| < m_i). \tag{4.34}$$

D'altra parte si ha [7]:

$$|W_\nu - V_0| \leq \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha| < m_i} |P_{i,\alpha}^{(\nu)} - p_{i\alpha}|^2 \right\}^{1/2} + \tag{4.35}$$

$$+ \varepsilon_\nu \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha| < m_i} |D^\alpha v_i^{(\nu)}|^2 \right\}^{1/2}.$$

Da questa, tenendo conto della (4.20), della (4.34) e della diseguaglianza:

$$c_{16}(\lambda, t) \sum_{i=1}^t a_i^\lambda \leq \left(\sum_{i=1}^t a_i \right)^\lambda \leq c_{17}(\lambda, t) \sum_{i=1}^t a_i^\lambda \tag{4.36}$$

valida per $a_i \geq 0$ e $\lambda > 0$, segue la (4.24).

(4.25): Evidentemente [8] $W_\nu^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i^{(\nu)}$, essendo equilimitate in $L^2(B)$, tendono debolmente in $L^2(B)$ a qualche funzione $g_{i\alpha}$. D'altra parte, usando le (4.21) e (4.24) è semplice dimostrare che $W_\nu^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i^{(\nu)}$ tendono a $V_0^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i$ nel senso delle distribuzioni. La (4.25) segue allora per l'unicità del limite.

---

(7) Si può evidentemente supporre $R_\nu \leq 1$.

(8) Qui, come altrove, si sottintende l'eventuale passaggio ad una successione estratta.

(4.26): Segue dalla (4.15).

(4.27): Osserviamo dapprima che dalla maggiorazione

$$W_\nu^{p-2} \le c_{18} \left[M^{p-2} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|<m_j} \varepsilon_\nu^{p-2} \, | D^\beta v_j^{(\nu)} |^{p-2} \right] \tag{4.37}$$

tenendo conto della diseguaglianza di Hölder e della (4.34) si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} \int_B W_\nu^{p-2} \, | D^\alpha v_i^{(\nu)} |^2 \, dy \le c_{19} . \tag{4.38}$$

Da questa dalla (4.15) e dal LEMMA 1 applicato alla (4.12), con $d\mu = W_\nu^{p-2} \, dy$, segue che

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} \int_{B(0,\varrho)} W_\nu^{p-2} \, | D^\alpha v_i^{(\nu)} |^2 \, dy \le c_{20}(\varrho) \tag{4.39}$$

e quindi la (4.27).

(4.28): Per noti teoremi di compattezza, basterà provare che le funzioni $g_\nu = W_\nu^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i^{(\nu)}$ hanno gradiente equilimitato in $L^2(B(0,\varrho))$ ($|\alpha| = m_i - 1$).

Poichè, per la (4.39), la $W_\nu^{\frac{p-2}{2}} \nabla D^\alpha v_i^{(\nu)}$ è equilimitata in $L^2(B(0,\varrho))$, basterà considerare la quantità:

$$\begin{aligned} D^\alpha v_i^{(\nu)} D_s W_\nu^{\frac{p-2}{2}} = {} & D^\alpha v_i^{(\nu)} \frac{p-2}{2} W^{\frac{p}{2}-3} \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|<m_j} \\ & [\varepsilon_\nu R_\nu^{m_j-1-|\beta|} D^\beta v_j^{(\nu)} + P_{j,\beta}^{(\nu)}(x_\nu + R_\nu y)] \times \\ & \times [\varepsilon_\nu R_\nu^{m_j-1-|\beta|} D^\beta D_s v_j^{(\nu)} + R_\nu P_{j,\beta+e^s}^{(\nu)}(x_\nu + R_\nu y)] \end{aligned} \tag{4.40}$$

dove e^s è la n-pla tale che $e_i^s = \delta_{is}$.

Dalla (4.40) segue che

$$\begin{aligned} & | D^\alpha v_i^{(\nu)} | \, | D_s W_\nu^{\frac{p-2}{2}} | \le \\ & \le c_{21} \varepsilon_\nu | D^\alpha v_i^{(\nu)} | \, W_\nu^{\frac{p}{2}-2} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|=m_j-1} | D^\beta D_s v_j^{(\nu)} |^2 \right\}^{1/2} + c_{22} | D^\alpha v_i^{(\nu)} | \, W^{\frac{p}{2}-1} \end{aligned} \tag{4.41}$$

e quindi, per la (4.39) e (4.38):

$$(4.42) \qquad \int_{B(0,\varrho)} | \nabla (W_\nu^{\frac{p-2}{2}} D^\alpha v_i^{(\nu)}) |^2 \, dy \leq c_{23} (\varrho)$$

da cui la (4.28).

(4.29): Consideriamo la quantità

$$(4.43) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \sum_{|\beta| = m_j} \int_B D^\alpha \varphi_i \left\{ W_\nu^{p-2} a_{\alpha\beta}^{ij(\nu)} D^\beta v_j^{(\nu)} - V_0^{p-2} a_{\alpha\beta}^{ij} D^\beta v_j \right\} dy.$$

Il termine generico della (4.43) si può scrivere:

$$(4.44) \qquad \int_{B(0,\varrho)} D^\alpha \varphi_i \Big\{ V_0^{p-2} a_{\alpha\beta}^{ij} [D^\beta v_j^{(\nu)} - D^\beta v_j] + $$
$$+ V_0^{p-2} [a_{\alpha\beta}^{ij(\nu)} - a_{\alpha\beta}^{ij}] D^\beta v_j^{(\nu)} + a_{\alpha\beta}^{ij(\nu)} [W_\nu^{p-2} - V_0^{p-2}] D^\beta v_j^{(\nu)} \Big\} dy$$

dove ϱ è stato scelto in modo che supp $\varphi \subset B(0, \varrho)$.

Dalle (4.23) e (4.27) segue che i primi due termini tendono a zero; analogamente l'ultimo termine, come si può vedere se si usa la (4.15) e (4.24) e si tiene conto che se $f_\nu \to f$ in L^p e $f_\nu \geq 0$, allora $f_\nu^\alpha \to f^\alpha$ in $L^{p/\alpha}$ per ogni α, $0 < \alpha \leq p$.

Con considerazioni analoghe si prova che:

$$(4.45) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m_i} \int_B D^\alpha \varphi_i \left\{ W_\nu^{p-2} d_\alpha^{i(\nu)} - V_0^{p-2} d_\alpha^i \right\} dy = 0$$

e quindi la (4.29).

Il LEMMA 3 è quindi completamente dimostrato.

5. Il Teorema di regolarità parziale.

Possiamo ora passara alle dimostrazione del TEOREMA 1.

Prima però occorre dimostrare alcuni risultati intermedi, che sono contenuti nei LEMMI 4-6.

Trattandosi di risultati locali, tutte le sfere che considereremo avranno raggio minore di 1.

LEMMA 4. *Esiste una costante $H = H(n, N, m)$ tale che per ogni $\tau \left(0 < \tau \leq \frac{1}{2}\right)$ e per ogni intero positivo k, si abbia* ($R \leq 1$):

$$[P^{x_0, \tau^k R}] \leq [P^{x_0, R}] + H \tau^{-n/2} \sum_{s=0}^{k} J^{1/2}(x_0, \tau^s R). \tag{5.1}$$

DIMOSTRAZIONE. È noto [9] che esiste una costante c_{24} tale che per ogni polinomio in n variabili, di grado non superiore ad m:

$$Q(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{b_\alpha}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \tag{5.2}$$

si abbia, per ogni $\varrho > 0$:

$$|b_0| \leq \frac{c_{24}}{\varrho^{n/2}} \left\{ \int_{B(x_0, \varrho)} |Q(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}. \tag{5.3}$$

Fissati due numeri ϱ ed R ($0 < \varrho < R < 1$) poniamo

$$Q = P_i^{x_0, \varrho} - P_i^{x_0, R} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{5.4}$$

Dalla (5.3) segue:

$$|a_\alpha^i(x_0, \varrho) - a_\alpha^i(x_0, R)| \leq \frac{c_{24}}{\varrho^{n/2}} \left\{ \int_{B(x_0, \varrho)} |D^\alpha (P_i^{x_0, \varrho} - P_i^{x_0, R})|^2 \, dx \right\}^{1/2} \leq \tag{5.5}$$

$$\leq \frac{c_{24}}{\varrho^{n/2}} \left[\left\{ \int_{B(x_0, \varrho)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, \varrho})|^2 \, dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{B(x_0, R)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})|^2 \, dx \right\}^{1/2} \right].$$

Se si tiene conto del TEOREMA DI POINCARÈ e del fatto che $V \geq 1$, si ottiene:

$$|a_\alpha^i(x_0, \varrho) - a_\alpha^i(x_0, R)| \leq c_{25} \left\{ J^{1/2}(x_0, \varrho) + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n/2} J^{1/2}(x_0, R) \right\}. \tag{5.6}$$

Da qui, con semplici calcoli:

$$[P^{x_0, \tau^k R}] \leq [P^{x_0, R}] + c_{26} \sum_{s=1}^{k} \{ J^{1/2}(x_0, \tau^s R) + \tau^{-n/2} J^{1/2}(x_0, \tau^{s-1} R) \} \tag{5.7}$$

da cui segue immediatamente la (5.1).

c. v. d.

---

[9] Vedi ad es. [2] LEMMA [2.I].

LEMMA 5. *Esiste una costante* $Q = Q(n, N, m)$ *tale che per ogni* $\varrho\,(0 < < \varrho < 1)$ *si abbia*:

$$\varrho^{-n} \int_{B(x_0,\varrho)} V^p \, dx \leq Q\,\{[P^{x_0,\varrho}]^p + J(x_0, \varrho)\}. \tag{5.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla diseguaglianza:

$$\int_{B(x_0,\varrho)} V^p \, dx \leq c_{27} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| < m_i} \int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^p \, dx + \varrho^n \, [P^{x_0,\varrho}]^p \right\} \tag{5.9}$$

e dal Teorema di Poincarè, segue:

$$\int_{B(x_0,\varrho)} V^p \, dx \leq c_{28} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i - 1} \int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^p \, dx + \varrho^n \, [P^{x_0,\varrho}]^p \right\}. \tag{5.10}$$

Se $p = 2$ questa è la (5.8); se $p > 2$ si ha:

$$\int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^p \, dx \leq c_{29} \left\{ \int_{B(x_0,\varrho)} V^{p-2} \, | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^2 \, dx + \right. \tag{5.11}$$

$$\left. + [P^{x_0,\varrho}]^{p-2} \int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^2 \, dx \right\}$$

e per la diseguaglianza di Hölder:

$$[P^{x_0,\varrho}]^{p-2} \int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^2 \, dx \leq \tag{5.12}$$

$$\leq c_{30} \, [P^{x_0,\varrho}]^{p-2} \, \varrho^{n \frac{p-2}{p}} \left\{ \int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^p \, dx \right\}^{2/p} \leq$$

$$\leq c_{31} \left\{ \varrho^n \, [P^{x_0,\varrho}]^p \, \varepsilon^{-\frac{p}{p-2}} + \varepsilon^{p/2} \int_{B(x_0,\varrho)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho}) |^p \, dx \right\}$$

dove si è fatto uso della diseguaglianza:

$$| ab | \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\tilde q}}{\tilde q} \qquad \left(\tilde q = \frac{q}{q-1} \right). \tag{5.13}$$

Se nella (5.11) si introduce la (5.12) e si sceglie opportunamente $\varepsilon > 0$ si trova:

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho})|^p \, dx \leq \tag{5.14}$$

$$\leq c_{32} \left\{ \int_{B(x_0,\varrho)} V^{p-2} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0,\varrho})|^2 \, dx + \varrho^n [P^{x_0,\varrho}]^p \right\}$$

da cui, tenuto conto della (5.10), segue la (5.8).

c. v. d.

Conviene a questo punto scegliere la costante τ, finora arbitraria. Porremo d'ora in poi:

$$\tau = \Lambda^{-1} \cap \frac{1}{2}. \tag{5.15}$$

Si ha allora il

LEMMA 6. *Sia $u \in \mathcal{H}^{m,p}(\Omega)$ è soluzione di* (1.1) *con le b_α^i verificanti la* (1.4). *Per $M > 0$ poniamo* [10]

$$\eta_0(M) = \frac{M \tau^{n/2} (1 - \sqrt{\tau})}{2 \sqrt{2H}} \cap \varepsilon_0(\tau, M) \tag{5.16}$$

$$\lambda_0(M) = K^2 Q [M^p + \eta_0^2] \tag{5.17}$$

$$r_0(M) = \eta_0 \tau^{n/2} \left(\frac{1 - \tau}{\lambda_0} \right)^{1/2} \cap R_0(\tau, M). \tag{5.18}$$

Se per $x_0 \in \Omega$ e per un certo $R \leq r_0 \cap \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ si ha:

$$[P^{x_0,R}] \leq \frac{M}{2} \tag{5.19}$$

$$J(x_0, R) < \eta_0^2 \tag{5.20}$$

allora per ogni intero $k > 0$:

$$J(x_0, \tau^k R) \leq \tau^k \left\{ \eta_0^2 + \tau^{-n} \lambda_0 R^2 \sum_{i=0}^{k-1} \tau^i \right\}. \tag{5.21}$$

---

(10) Si ricordi la (5.15).

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per semplicità:

(5.22) $P_k = [P^{x_0, \tau^k R}]$; $J_k = J(x_0, \tau^k R)$; $B_k = \tau^{-2k} R^{-2} \mathcal{B}(x_0, \tau^k R)$.

I LEMMI 4 e 5 forniscono le maggiorazioni:

$$P_k \leq \frac{M}{2} + H\tau^{-n/2} \sum_{s=0}^{k} J_s^{1/2} \tag{5.23$_k$}$$

$$B_k \leq K^2 Q [P_k^p + J_k]. \tag{5.24$_k$}$$

Dimostreremo, per induzione su k, la (5.21) che riscriviamo ([11])

$$J_k \leq \tau^k \left\{ \eta_0^2 + \tau^{-n} \lambda_0 R^2 \sum_{i=0}^{k-1} \tau^i \right\} \tag{j_k}$$

insieme alle

$$P_k \leq \frac{M}{2} + H\tau^{-n/2} \left\{ \eta_0^2 + \frac{\tau^{-n} \lambda_0 R^2}{1-\tau} \right\}^{1/2} \sum_{s=0}^{k} \tau^{s/2} \tag{p_k}$$

$$B_k \leq \lambda_0 . \tag{b_k}$$

Per questo scriviamo le seguenti relazioni sussidiarie:

$$P_k \leq M \tag{5.25$_k$}$$

$$\tau^{2k} R^2 B_k < \eta_0^2 \tag{5.26$_k$}$$

$$J_k < \eta_0^2 \tag{5.27$_k$}$$

$$J_{k+1} \leq \tau J_k + \tau^{2k+1-n} R^2 B_k . \tag{5.28$_k$}$$

Il procedimento di induzione e il seguente:
(j_0) e (p_0) non sono altro che le (5.19) e (5.20).
Da queste e dalla (5.24_0) segue (b_0).
Supponiamo ora (j_h) (p_h) e (b_h) per ogni $h \leq k$; si ha allora il seguente schema deduttivo:

(p_k), (5.18) e (5.16) $\Longrightarrow$ (5.25_k)
(b_k) e (5.18) $\Longrightarrow$ (5.26_k)
(j_k) e (5.18) $\Longrightarrow$ (5.27_k)

([11]) Se $k = 0$, si intenda (j_0): $J_0 < \eta_0^2$.

(5.25_k), (5.26_k), (5.27_k) e LEMMA 3 $\Longrightarrow (5.28_k)$

(5.28_k), (b_k) e (j_k) $\Longrightarrow (j_{k+1})$

$(j_h)_{h \leq k+1}$, (5.23_{k+1}) e (p_k) $\Longrightarrow (p_{k+1})$

(j_{k+1}) e (5.18) $\Longrightarrow (5.27_{k+1})$

(p_{k+1}), (5.27_{k+1}) e (5.24_{k+1}) $\Longrightarrow (b_{k+1})$.

L'induzione è così completa ed il lemma è dimostrato.

c. v. d.

Dimostrazione del Teorema 1.

Dalla diseguaglianza di Hölder segue:

$$(5.29) \quad J(x_0, R) \leq$$

$$\leq \left\{ R^{-n} \int_{B(x_0, R)} V^p \, dx \right\}^{\frac{p-2}{p}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i - 1} \left\{ R^{-n} \int_{B(x_0, R)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R}) |^p \, dx \right\}^{2/p}$$

e poichè per quasi tutti gli $x_0 \in \Omega$:

$$(5.30) \qquad R^{-n} \int_{B(x_0, R)} V^p \, dx \leq c_{33}(x_0, u) \qquad \forall\, R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$$

e

$$(5.31) \qquad \lim_{R \to 0^+} R^{-n} \int_{B(x_0, R)} | D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R}) |^p \, dx = 0 \qquad |\alpha| = m_i - 1$$

si ha:

$$(5.32) \qquad \lim_{R \to 0^+} J(x_0, R) = 0 \qquad \text{q. ov. in } \Omega.$$

D'altra parte per quasi tutti gli x_0 di Ω:

$$(5.33) \qquad \sup_{0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)} [P^{x_0, R}] = \frac{M}{4} < +\infty.$$

Sia allora x_0 un punto di Ω per cui valgono ambedue le (5.32) e (5.33); esisterà un $R \leq r_0(M) \cap \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ tale che:

$$(5.34) \qquad J(x_0, R) < \eta_0^2(M).$$

Per $x \in B(x_0, R)$ poniamo

$$R_x = R - |x - x_0|. \tag{5.35}$$

Per la continuità di $[P^{x, R_x}]$ e $J(x, R_x)$ esisterà allora un δ, $0 < \delta < R$, tale che per ogni $x \in B(x_0, \delta)$ si abbia:

$$[P^{x, R_x}] \leq \frac{M}{2} \tag{5.36}$$

$$J(x, R_x) < \eta_0^2(M). \tag{5.37}$$

Dal LEMMA 6 segue per ogni intero k:

$$J(x, \tau^k R_x) \leq 2\eta_0^2 \tau^k \tag{5.38}$$

e quindi, a maggior ragione (si ricordi la (3.16)):

$$I(x, \tau^k R_x) \leq 2\eta_0^2 \tau^k . \tag{5.39}$$

Sia ora ϱ un numero compreso tra 0 e $R - \delta$; esisterà un $k \geq 0$ tale che:

$$\tau^{k+1} R_x < \varrho \leq \tau^k R_x . \tag{5.40}$$

Si ha allora per tale ϱ [12]:

$$I(x, \varrho) \leq \left(\frac{\tau^k R_x}{\varrho}\right)^n I(x, \tau^k R_x) \leq 2\, \eta_0^2\, \tau^k \left(\frac{\tau^k R_x}{\varrho}\right)^n \tag{5.41}$$

e quindi, per ogni $x \in B(x_0, \delta)$:

$$I(x, \varrho) \leq \frac{2\, \eta_0^2}{(R - \delta)\, \tau^{n+1}}\, \varrho. \tag{5.41}$$

---

(12) Si ricordi che (vedi [1]):

$$I(x, \varrho) = \inf_{\lambda_{i,\alpha} \in \mathbb{R}} \varrho^{-n} \int_{B(x, \varrho)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i - 1} |D^\alpha u_i - \lambda_{i,\alpha}|^2\, dy$$

dato che, per $|\alpha| = m_i - 1$, $D^\alpha P_i^{x, \varrho}$ non sono altro che le medie delle corrispondenti $D^\alpha u_i$.

Dalla (5.41), per un risultato di CAMPANATO ([1], teor. [I.2]) segue che

$$D^\alpha u_i \in C^{0,1/2}(B(x_0, \delta)) \quad (i = 1, 2, \dots N; |\alpha| = m_i - 1). \tag{5.42}$$

La tesi segue allora dalle (5.32) e (5.33).

c. v. d.

5. L'insieme singolare $\Omega - \Omega_0$.

Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione del TEOREMA 2; per questo ci occorre il

LEMMA 7. *Per ogni* $x_0 \in \Omega$ *e per ogni* $R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ *si ha*:

$$J(x_0, R) \leq c_{34} [P^{x_0, R}]^{p-2} R^{2-n} \int_{B(x_0, R)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^2 \, dx. \tag{6.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $p = 2$ la (6.1) segue ovviamente dal TEOREMA di POINCARÈ; supponiamo allora $p > 2$. Dalla

$$V^{p-2} \leq c_{35} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})|^{p-2} + [P^{x_0, R}]^{p-2} \right\} \tag{6.2}$$

e dalla diseguaglianza di Hölder, segue per ogni j e per $|\beta| = m_j - 1$

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} V^{p-2} |D^\beta (u_j - P_j^{x_0, R})|^2 dx \leq \\ \leq c_{36} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} \left\{ \int_{B(x_0, R)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})|^p \, dx \right\}^{\frac{p-2}{p}} \times \\ \times \left\{ \int_{B(x_0, R)} |D^\beta (u_j - P_j^{x_0, R})|^p \, dx \right\}^{2/p} + c_{36} [P^{x_0, R}]^{p-2} \int_{B(x_0, R)} |D^\beta (u_j - P_j^{x_0, R})|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Da questa, tenuto conto del TEOREMA DI POINCARÈ [13]

$$(6.4)\qquad J(x_0, R) \leq R^{-n} c_{37} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i - 1} \left\{ \int_{B(x_0, R)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})|^p \, dx + \right.$$

$$\left. + [P^{x_0, R}]^{p-2} \int_{B(x_0, R)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})|^2 \, dx \right\}.$$

Ora si ha, se $|\alpha| = m_i - 1$:

$$(6.5)\qquad \int_{B(x_0, R)} |D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})|^2 \, dx \leq c_{38} R^2 \int_{B(x, R)} V^{p-2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta| = m_j} |D^\beta u_j|^2 \, dx.$$

D'altra parte, per ogni funzione f (per cui i due membri abbiano senso) si ha [14]:

$$(6.6)\qquad \int_{B(x_0, R)} |f - f_{x_0 R}|^p \, dx \leq c_{39} R^2 \int_{B(x_0, R)} |f - f_{x_0, R}|^{p-2} |\nabla f|^2 \, dx.$$

Dalle (6.4), (6.5) e dalla (6.6) con $f = D^\alpha (u_i - P_i^{x_0, R})$ $(|\alpha| = m_i - 1)$ si ottiene la (6.1), quando si tenga conto del fatto che $[P^{x_0, R}] \geq 1$.

Per provare la (6.6) osserviamo che è sufficiente dimostrarla per $x_0 = 0$, $R = 1$ e $f_{0,1} = 0$.

Se ora non esistesse nessuna costante c_{39} si potrebbe trovare una successione di funzioni f_i con media nulla in $B(0, 1)$ tale che:

$$(6.7)\qquad \int_{B(0,1)} |f_i|^p \, dx = 1 ; \qquad \int_{B(0,1)} |f_i|^{p-2} |\nabla f_i|^2 \, dx \to 0.$$

Posto $\varphi_i = |f_i|^{p/2-1} f_i$ si ha:

$$(6.8)\qquad \int_{B(0,1)} |\varphi_i|^2 \, dx = 1 ; \qquad \int_{B(0,1)} |\nabla \varphi_i|^2 \, dx \to 0.$$

Per il Teorema di RELLICH esiste una sottosuccessione (che chiameremo ancora φ_i) fortemente convergente in $L^2(B(0, 1))$ ad una costante α.

---

(13) Si suppone $R \leq 1$.

(14) $f_{x_0, R} = \omega_n^{-1} R^{-n} \int_{B(x_0, R)} f \, dx$ è la media di f nella sfera $B(x_0, R)$.

Da ciò segue che $|f_i|$ converge a $|\alpha|^{2/p}$ in L^p.

D'altra parte per la prima delle (6.7), una sottosuccessione delle f_i converge debolmente in L^p ad una funzione f; ne segue la relazione $\alpha = |\alpha|^{1-2/p} f$, e, poichè f ha media nulla, $\alpha = 0$. Ciò è in contraddizione con la prima delle (6.8).

c.v.d.

Dimostrazione del Teorema 2.

Basterà evidentemente dimostrare che per ogni parte compatta K di $\Omega - \Omega_0$ si ha:

$$H_{n-1}(K) = 0. \tag{6.9}$$

Per questo consideriamo i due insiemi

$$E = \{x : x \in \Omega, \sup_{0<\varrho<\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)} [P^{x,\varrho}] = +\infty\} \tag{6.10}$$

$$F = \left\{ x : x \in \Omega, \min\lim_{\varrho \to 0^+} \varrho^{2-n} \int_{B(x,\varrho)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m_i} |D^\alpha u_i|^2 \, dy > 0 \right\}. \tag{6.11}$$

Si ha:

$$K = \tilde{E} \cup \tilde{F} \qquad (\tilde{E} = E \cap K). \tag{6.12}$$

Infatti se $x_0 \notin E \cup F$ allora

$$\sup_{0<\varrho<\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)} [P^{x_0,\varrho}] = \frac{M}{4} < +\infty \tag{6.13}$$

e, per la (6.1):

$$\min\lim_{\varrho \to 0^+} J(x_0, \varrho) = 0. \tag{6.14}$$

Esisterà allora un $R < r_0(M)$ per cui valgono le (5.33) e (5.34) e quindi $x_0 \in \Omega_0$.

Poichè i polinomi $P^{x_0,R}$ hanno coefficienti che sono combinazioni lineari delle medie delle derivate $D^\alpha u_i (|\alpha| < m_i)$ nella sfera $B(x_0, R)$, e poichè tali derivate appartengono ad $H^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$, per il risultato di FEDERER (vedi Introduzione) si ha:

$$H_{n-1}(\tilde{E}) = 0. \tag{6.15}$$

Proviamo ora che:

$$H_{n-2}(\tilde{F}) = 0. \tag{6.16}$$

Per questo si ponga

$$F_j = \left\{ x : x \in \Omega : \inf_{0<R<\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)} R^{2-n} \int_{B(x,R)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^2 \, dy \geq j^{-1} \right\} \tag{6.17}$$

e

$$\widetilde{F}_j = F_j \cap K. \tag{6.18}$$

Si ha evidentemente:

$$\widetilde{F} = \bigcup_{s=1}^{\infty} \widetilde{F}_s. \tag{6.19}$$

Fissato un $s \geq 1$, sia $\varrho < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$; si ricopra $\widetilde{F}_s$ con un numero finito $\sigma(\varrho)$ di sfere aventi raggio ϱ e centri nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_{\sigma(\varrho)}$ di $\widetilde{F}_s$. Si può supporre che sia

$$\widetilde{F}_s \subset \bigcup_{i=1}^{\sigma(\varrho)} B(x_i, \varrho) \tag{6.20}$$

$$B(x_i, \varrho/4) \cap B(x_j, \varrho/4) = \Phi \qquad i \neq j. \tag{6.21}$$

Per ognuno dei punti x_i si deve avere

$$\left(\frac{\varrho}{4}\right)^{2-n} \int_{B(x_i,\varrho/4)} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^2 \, dx \geq s^{-1} \tag{6.22}$$

e quindi, sommando su i e tenendo conto della (6.21):

$$\int_{K_{\varrho/4}} V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |D^\alpha u_i|^2 \, dx \geq 4^{2-n} s^{-1} \sigma(\varrho) \varrho^{n-2} \tag{6.23}$$

dove si è posto

$$K_{\varrho/4} = \{x : x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, K) < \varrho/4\}. \tag{6.24}$$

Se si fa tendere ϱ a zero, l'integrale a primo membro della (6.23) tende a zero (ricordiamo che K è chiuso e di misura nulla); tenendo conto della definizione della misura di Hausdorff si ha allora

$$H_{n-2}(\widetilde{F}_s) = 0. \tag{6.25}$$

Da questa e dalla (6.19) segue la (6.16) e quindi la tesi.

c.v.d.

7. Confronto con i risultati di Morrey.

Nel suo lavoro sui sistemi ellittici [8] MORREY considera sistemi del tipo:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} \int_{\Omega} B^i_\alpha(x, \delta u)\, D^\alpha \varphi_i \, dx \qquad \forall\, \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N \tag{7.1}$$

dove ogni $u_i \in H^{m_i-1,p}(\Omega)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ e δu sta per $D^\gamma u_h\,(|\gamma| < m_h)$.

Le $B^i_\alpha(x, q)$ si suppongono di classe $C^{2,\mu}$ nei loro argomenti, e verificanti le maggiorazioni {[8], ipotesi (1.2)}:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i-1} \sum_{|\beta|=m_j-1} B^i_{\alpha, q^\beta_j}\, \xi^\alpha_i\, \xi^\beta_j \geq V^{p-2}\, |\xi|^2 \ \text{(15)} \tag{7.2}$$

$$|B|,\ |B_x| \leq L\, V^{p-1}; \quad |B_q| \leq L\, V^{p-2} \tag{7.3}$$

$$|B_{qx}|,\ |B_{qq}| \leq L\, V^{p-2} \tag{7.4}$$

dove, al solito, $V^2 = 1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} |D^\alpha u_i|^2$, e

$$|B_q|^2 \text{ sta per } \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} \sum_{|\beta|<m_j} \Big|B^i_{\alpha, q^\beta_j}\Big|^2, \text{ ecc.} \tag{7.5}$$

Il primo passo ([8], Teorema 1) consiste nel dimostrare che la soluzione u di (7.1) appartiene ad $\mathcal{H}^{\underline{m},p}(\Omega)$ e che le sue derivate $D_s u_j$ sono soluzioni del sistema:

$$\int_\Omega V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} D^\alpha \varphi_i \left\{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|<m_j} a^{ij}_{\alpha\beta}(x, \delta u)\, D^\beta D_s u_j + \right.$$
$$\left. + \, V e^i_{\alpha s}(x, \delta u) \right\} dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N \tag{7.6}$$

---

(15) $B^i_{\alpha, q^\beta_j} = \dfrac{\partial B^i_\alpha(x, q)}{\partial q^\beta_j}$.

con :

$$V^{p-2}\, a^{ij}_{\alpha\beta}(x, \delta u) = B^i_{\alpha\,,\, q^j_\beta}(x, \delta u) \tag{7.7}$$

$$V^{p-1}\, e^i_{\alpha s}(x, \delta u) = B^i_{\alpha, x^s}(x, \delta u). \tag{7.8}$$

Scegliendo $\varphi_i = D_s\, \psi_i$ nella (7.6) e sommando su s, si ottiene che u è soluzione del sistema :

$$\sum_{s,t=1}^{N} \int_\Omega V^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} D^\alpha D_s\, \psi_i \left\{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|=m_j-1} A^{ij}_{(\alpha s)\,(\beta t)}\, D^\beta D_t\, u_j + \right. \tag{7.9}$$

$$\left. + \, b^i_{(\alpha s)} \right\} dx = 0 \qquad \forall\ \psi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$$

dove

$$A^{ij}_{(\alpha s)\,(\beta t)} = \delta_{st}\, a^{ij}_{\alpha\beta} \tag{7.10}$$

$$b^i_{(\alpha s)} = V\, e^i_{\alpha s} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|<m_j-1} a^{ij}_{\alpha\beta}\, D^\beta\, D_s u_j\,. \tag{7.11}$$

Si verifica facilmente, usando le (7.2), (7.3), (7.7) e la (7.8) che :

$$\sum_{s,t=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i-1} \sum_{|\beta|=m_j-1} A^{ij}_{(\alpha s)\,(\beta t)}\, \xi_i^{(\alpha s)}\, \xi_j^{(\beta t)} \geq |\, \xi\,|^2 \tag{7.12}$$

e

$$|\, A^{ij}_{(\alpha\beta)\,(\beta t)}\,| \leq L \tag{7.13}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|<m_i} |\, b^i_{(\alpha s)}\,|^2 \leq K^2\, V^2. \tag{7.14}$$

Siamo allora nelle ipotesi del TEOREMA 1, per cui i risultati di [8] ([16]) rientrano in quelli del presente lavoro.

Poichè la dimostrazione delle (7.1) richiede soltanto che le B^i_α siano di classe C^1 (e quindi non richiede le (7.4)), segue che il risultato di regolarità parziale è valido anche in queste ipotesi meno restrittive.

Inoltre la tesi del TEOREMA 2 si estende evidentemente ai sistemi di tipo (7.1).

([16]) Nel caso del gruppo di ipotesi (1.2) di [8]; il gruppo (1.5) non rientra invece in questo schema.

BIBLIOGRAFIA

[1] Campanato S. « *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni* », Annali S.N.S. Pisa, vol. XVII (1963).

[2] Campanato S. « *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali* », Annali S.N.S. Pisa, vol. XVIII (1964).

[3] Federer H. « *Some properties of distributions ... etc.* », Bull. Am. Mat. Soc., vol. 74 n. 1 (1968).

[4] Giusti E. - Miranda M. « *Un esempio di soluzioni discontinue, ecc.* », Boll. U.M.I vol. II (1968).

[5] Giusti E. - Miranda M. « *Sulla regolarità delle soluzioni di una classe di sistemi ellittici quasi-lineari* », Archive of Rat. Mech. and Anal. Vol. 31, n. 3 (1968).

[6] Maz'ya V. G. « *Esempi di soluzioni non regolari per equazioni ellittiche quasilineari a coefficienti analitici* », Preprint (in russo).

[7] Morrey C. B., Jr. « *Multiple integrals in the calculus of variations* », Springer-Verlag (1966).

[8] Morrey C. B., Jr. « *Partial regularity results for nonlinear elliptic systems* », J. Math. and Mech. (1968).

Istituto Matematico
Università, Pisa