Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

A. Tognoli

Sulla classificazione dei fibrati analitici reali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 709-744

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_709_0>

SULLA CLASSIFICAZIONE DEI FIBRATI ANALITICI REALI

A. TOGNOLI (*)

Introduzione.

Sia V uno spazio di Stein ed L^* un gruppo di Lie complesso. H. Grauert ha provato, (vedi [6]), che ogni fibrato principale topologico su V, di gruppo strutturale L^*, è equivalente ad un fibrato principale olomorfo, ed inoltre due fibrati principali olomorfi, di base V e gruppo strutturale L^*, sono analiticamente equivalenti se lo sono topologicamente.

In questo lavoro si proverà il risultato analogo quando V è uno spazio analitico reale coerente, ogni componente connessa del quale ha dimensione finita, ed L^* è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie connesso.

Daremo qui un breve sunto del lavoro.

Nel paragrafo 1 si richiamano alcune definizioni utili nel seguito.

Sia (V, O_V) un $\mathbb{R}$-spazio, $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato analitico principale di gruppo strutturale L^*. Nel paragrafo 2 si prova che se L^* è complessificabile il fibrato F ammette un complessificato.

Si esaminano in particolare i fibrati vettoriali analitici e nel paragrafo 3 si danno teoremi di approssimazione delle sezioni continue con sezioni analitiche.

Applicando i teoremi di immersione degli $\mathbb{R}$-spazi in $\mathbb{R}^n$ si ottengono analoghi risultati di approssimazione per le applicazioni di uno spazio analitico in una varietà.

È noto che, fissato $n \in N$ ed un gruppo di Lie compatto L^*, esiste una varietà analitica reale X_n tale che, per ogni spazio analitico V di dimensione n, l'insieme $\pi(V, X_n)$ nelle applicazioni continue, a meno di omotopia, di V in X_n è in corrispondenza biunivoca con le classi di fibrati principali su V e gruppo strutturale L^*.

Sia $\{f\} \in \pi(V, X_n)$, se esiste $g \in \{f\}$, g analitica, allora il fibrato associato ad $\{f\}$ è analitico.

Pervenuto alla Redazione il 17 Luglio 1967.

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 35 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per l'anno 1967-68.

Usando i teoremi di approssimazione stabiliti nel paragrafo 3 si prova nel paragrafo 4 che in ogni classe $\{f\}$ esiste un rappresentante g che è un'applicazione analitica. Segue che ogni fibrato principale su V, di gruppo strutturale L^*, è equivalente ad un fibrato principale analitico.

Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato principale analitico reale topologicamente banale ed L^* il suo gruppo strutturale.

Si prova che, se L^* è complessificabile, allora esiste un complessificato di F che è topologicamente banale e quindi, per i risultati di H. Grauert, olomorficamente banale.

Usando alcuni risultati di J. Frenkel si prova l'asserto anche quando L^* non è complessificabile.

L'autore ha in preparazione un secondo lavoro sull'argomento; gran parte del paragrafo 3 è stato scritto in funzione di detto lavoro e non è essenziale per la comprensione del paragrafo 4.

Ringrazio il professor A. Andreotti per utili suggerimenti datimi durante la stesura di questo lavoro.

§ 1. Generalità.

In questo paragrafo riporteremo, per comodità del lettore, alcune definizioni e proprietà che saranno utilizzate nel lavoro.

Uno spazio anulato si dice *spazio analitico* (reale o complesso) se:

1) è di Hausdorff e soddisfa al secondo assioma di numerabilità,

2) è localmente isomorfo ad un insieme analitico (di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{C}^n$).

Se X, Y sono due spazi analitici, reali o complessi, i morfismi (di spazi anulati) $\varphi: X \longrightarrow Y$ sono comunemente detti *applicazioni analitiche* (olomorfe nel caso complesso).

Dicesi spazio con fascio di anelli locali, uno spazio topologico X su cui è definito un fascio di anelli locali O_X, detto fascio strutturale.

Un *morfismo* $\gamma = (f, 'f)$ fra due spazi con fascio di anelli locali: (X, O_X), (Y, O_Y) è, per definizione, il dato di un'applicazione continua $f: X \longrightarrow Y$ e di un omomorfismo, $'f: O_Y \longrightarrow O_X$, che induce degli omomorfismi di anelli locali: $'f_x: O_{Y, f(x)} \longrightarrow O_{X, x}$ (ove $O_{Y, f(x)}$, $O_{X, x}$ sono le spighe di O_Y ed O_X nei punti $f(x)$ ed x).

Un morfismo si dice un *isomorfismo* se ammette un inverso.

Sia ora K un corpo valutato completo (nel seguito con K indicheremo il corpo reale od il corpo complesso) e K^n il prodotto topologico di n copie di K.

Indichiamo con A_{K^n} il fascio dei germi delle funzioni analitiche definite in K^n, a valori in K. Sia G un aperto di K^n, noteremo con A_G la restrizione di A_{K^n} a G.

Per ogni aperto G di K^n la coppia (G, A_G) è uno spazio con fascio di anelli locali.

Sia I un fascio di ideali di A_G generato da un numero finito di funzioni analitiche, definite su tutto G. Notiamo con $S(I)$ il supporto di A_G/I. La coppia $(S(I), A_G/I_{|S(I)})$ è uno spazio con fascio di anelli locali. Un tale spazio viene detto *K-spazio analitico locale.* Supponiamo ora che I' sia un secondo fascio di ideali di A_G e sia $I' \supset I$.

In questo caso si ha l'immersione $f: S(I') \longrightarrow S(I)$, e l'omomorfismo canonico $'f: A_G/I \longrightarrow A_G/I'$. Il dato del K-spazio analitico locale $(S(I'), A_G/I')$ e del morfismo $(f, 'f)$ è detto sotto K-spazio analitico locale di $(S(I), A_G/I)$.

Diamo infine la seguente:

DEFINIZIONE. Dicesi *K-spazio analitico* uno spazio di Hausdorff (1), con fascio di anelli locali, (X, O_X) tale che:

1) per ogni $x \in X$ esiste un aperto $U \ni x$ tale che $(U, O_{X|U})$ sia isomorfo ad un K-spazio analitico locale.

2) X soddisfa al II assioma di numerabilità.

Diremo realizzazione di un aperto U di X un isomorfismo fra $(U, O_{X|U})$ ed un K-spazio analitico locale. Il dato di U e della realizzazione dicesi carta locale.

Dicesi sotto K-spazio analitico di (X, O_X) un K-spazio analitico (Y, O_Y), tale che Y sia un sottospazio topologico di X, e sia definito un morfismo

$$(f, 'f): (Y, O_Y) \longrightarrow (X, O_X),$$

soddisfacente alle condizioni:

i) $f: Y \longrightarrow f(Y)$ è l'applicazione identica ed $f(Y)$ è localmente chiuso in X.

ii) (X, O_Y) col morfismo $(f, 'f)$ è, localmente, un sotto K-spazio analitico locale di (Y, O_X).

Sia (X, O_X) un $\mathbb{R}$-spazio analitico, si verifica che $(X, O_X \otimes \mathbb{C})$ è uno spazio con fascio di anelli locali.

Dato un $\mathbb{R}$-spazio analitico (X, O_X) diremo O_X *- complessificazione* (od O_X-complessificato) di X il dato di un $\mathbb{C}$-spazio analitico (Y, O_Y) e di un morfismo

$$j = (f, 'f): (X, O_X) \longrightarrow (Y, O_Y)$$

(1) L'ipotesi che X sia di Hausdorff non è essenziale ad una teoria dei K-spazi analitici. Noi la introduciamo perchè nel seguito saremo interessati solo a spazi separati.

tale che : $Y \supset X$ ed $f : X \longrightarrow f(X)$ è l'applicazione identica, $f(X)$ è chiuso in Y e

$$'f : O_{Y|f(X)} \longrightarrow O_X \otimes \mathbb{C}$$

è un isomorfismo fra $(Y, O_{Y|f(X)})$ e $(X, O_X \otimes \mathbb{C})$. Si prova che il germe dello spazio complessificato di (X, O_X) è unico. Quando non è possibile confusione (Y, O_Y) è detto semplicemente complessificato di (X, O_X). Usualmente il complessificato di (X, O_X) si indicherà con $(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}})$.

Sia I_T il sottofascio di O_X dei germi di sezioni s di O_X nilpotenti.

Il fascio I_T è un fascio di ideali e lo spazio anulato $(X, O_X/I_T)$ è uno spazio analitico (ridotto) cioè localmente isomorfo ad un sottoinsieme analitico A di un aperto di K^n munito del fascio delle funzioni analitiche su A.

Se $K = \mathbb{C}$ lo spazio ridotto $(X, O_X/I_T)$ è un sottospazio di (X, O_X) ed il suo fascio strutturale è coerente. Ciò può non essere vero nel caso $K = \mathbb{R}$.

In ogni caso lo spazio anulato $(X, O_X/I_T)$ si chiama *lo spazio analitico* ridotto associato ad (X, O_X). Lo si indica brevemente con X.

Nel caso reale, secondo la terminologia adottata, lo spazio ridotto può non essere un $\mathbb{R}$-spazio. Nè ogni spazio analitico reale X è lo spazio analitico ridotto di un $\mathbb{R}$-spazio (X, O_X). Chiameremo $(\mathbb{R})$-spazi gli spazi analitici reali che godono di questa proprietà.

Consideriamo un $\mathbb{C}$-spazio analitico locale dato su un aperto G di $\mathbb{C}^n$ mediante un fascio di ideali I generato da un numero finito di funzioni olomorfe $f_1, \dots, f_s$ su G.

Detto $S(I) = \{x \in G : f_1(x) = \dots = f_s(x) = 0\}$ esso è il supporto del fascio A_G/I (ove A_G è il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su G) e l'insieme considerato è dato da

$$(S(I), A_G/I_{|S(I)}).$$

Separiamo in ogni generatore f_r la parte reale dalla parte immaginaria: $f_r = f_r' + i f_r''$; identifichiamo $\mathbb{C}^n$ ed $\mathbb{R}^{2n}$ e consideriamo il fascio di ideali $I_{\mathbb{R}}$ di $A_G^{\mathbb{R}}$ (= fascio dei germi di funzioni analitiche reali su G) generato dalle funzioni $f_1', \dots, f_s'; f_1'', \dots, f_s''$.

E' chiaro che

$$S(I_{\mathbb{R}}) = \{x \in G : f_1'(x) = f_1''(x) = \dots f_s'(x) = f_s''(x) = 0\} = S(I).$$

Possiamo considerare l'$\mathbb{R}$-spazio analitico reale:

$$(S(I), A_G^{\mathbb{R}}/I_{\mathbb{R}\,|\,S(I)}).$$

Si verifica che questo secondo spazio non dipende, nè dalla realizzazione del primo $\mathbb{C}$-spazio analitico locale come sottospazio di un aperto di $\mathbb{C}^n$, nè dalla scelta di un sistema di generatori dell'ideale I della realizzazione locale.

Questo spazio si chiamerà l'$\mathbb{R}$-*spazio soggiacente* al $\mathbb{C}$-spazio analitico locale dato.

Questa nozione si trasporta poi ai $\mathbb{C}$-spazi analitici e permette di associare canonicamente ad ogni $\mathbb{C}$-spazio analitico (X, O_X) l'$\mathbb{R}$-spazio analitico reale soggiacente $(X^{\mathbb{R}}, O_X^{\mathbb{R}})$.

Il coniugio σ del corpo complesso è un automorfismo tale che $\sigma^2 = id$. Questo definisce su $\mathbb{C}^n$ un automorfismo antilineare involutivo che chiameremo ancora con σ. Data una funzione olomorfa $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ definita su un aperto G di $\mathbb{C}^n$ esiste, unica una funzione olomorfa f^σ su $\sigma(G)$ tale che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \sigma(G) & \xrightarrow{\quad f^\sigma \quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

sia commutativo.

Si definisce un automorfismo antilineare di fasci $\sigma^* : A_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow A_{\mathbb{C}^n}$.

Sia dato un $\mathbb{C}$-spazio analitico locale su G definito da un fascio di ideali I su G : $(S(I), A_G/I)$, ove $S(I)$ è il supporto di A_G/I.

Si consideri su $\sigma(G)$ il $\mathbb{C}$-spazio analitico locale $(S(\sigma^*(I)), A_{\sigma(G)}/\sigma^*(I))$, ove $S(\sigma^*(I))$ è il supporto di $\sigma^*(I)$. Questo secondo $\mathbb{C}$-spazio non è, in generale, isomorfo al primo, ma esiste un antiisomorfismo (σ, σ^*) che fa passare dal primo al secondo.

Il $\mathbb{C}$-spazio analitico $(S(\sigma^*(I)), A_{\sigma(G)}/\sigma^*(I))$ si chiamerà il *coniugato* di $(S(I), A_G/I)$; si verifica che la sua struttura non dipende dalla realizzazione del primo $\mathbb{C}$-spazio nell'aperto di $\mathbb{C}^n$.

La nozione si trasporta ai $\mathbb{C}$ spazi analitici e permette di definire per ogni tale spazio un nuovo spazio coniugato del precedente ed un « antiisomorfismo » del primo sul secondo.

Dato un $\mathbb{C}$-spazio analitico $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ può accadere che esso sia isomorfo al suo spazio coniugato $(\bar{\tilde{X}}, O_{\bar{\tilde{X}}})$ ed anzi sia $(\tilde{X}^{\mathbb{R}}, O^{\mathbb{R}}_{\tilde{X}}) = (\bar{\tilde{X}}^{\mathbb{R}}, O^{\mathbb{R}}_{\bar{\tilde{X}}})$, cioè il $\mathbb{C}$-spazio analitico coincide, con la sua struttura reale soggiacente, col coniugato.

In questo caso l'antiisomorfismo che fa passare dal $\mathbb{C}$-spazio al suo coniugato diviene un antiisomorfismo di $(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}})$ in sè che verrà detto *antiinvoluzione* di $(\widetilde{X}, O_{\widetilde{X}})$.

Si può notare che un'antiinvoluzione induce un isomorfismo delle strutture reali soggiacenti.

Osserviamo in particolare che se $\widetilde{X}$ è una varietà complessa su cui è definita un'antiinvoluzione $\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ e $z_1 \dots z_n$ è un sistema di coordinate in un intorno di un punto $p \in \widetilde{X}$ le funzioni $w_1 = \overline{\sigma^* (z_1)} \dots w_n = \overline{\sigma^* (z_n)}$ danno un sistema di coordinate in un intorno di $\sigma(p)$.

In tali coordinate l'antiinvoluzione si scrive $w_i = \overline{z}_i$, $i = 1 \dots n$.

Sia (X, O_X) un sotto $\mathbb{R}$-spazio analitico di $(\widetilde{X}^{\mathbb{R}}, O_{\widetilde{X}}^{\mathbb{R}})$ e $(i, {}'i) : (X, O_X) \longrightarrow \longrightarrow (\widetilde{X}^{\mathbb{R}}, O_{\widetilde{X}}^{\mathbb{R}})$ il morfismo associato.

Diremo che (X, O_X) è fisso, od è parte fissa, per la antiinvoluzione $\alpha = (\sigma, {}'\sigma)$ se:

$$X = \{x \in \widetilde{X} : \sigma(x) = x\}$$

ed inoltre si ha:

$${}'i \circ {}'\sigma = {}'i, \text{ ove } {}'\sigma : O_{\widetilde{X}}^{\mathbb{R}} \longrightarrow O_{\widetilde{X}}^{\mathbb{R}} \text{ e } {}'i : O_{\widetilde{X}}^{\mathbb{R}} \longrightarrow O_X$$

sono le applicazioni fra i fasci strutturali.

La definizione di complessificato e di antiinvoluzione si trasportano immediatamente agli spazi analitici reali o complessi.

§ 2. Complessificazione degli spazi fibrati.

a) *Alcune definizioni.*

Ricordiamo alcune definizioni: sia L^* un gruppo di Lie reale; dicesi complessificato o complessificazione di L^* un gruppo di Lie complesso $\widetilde{L}^*$ tale che:

i) la varietà complessa $\widetilde{L}^*$ sia una complessificata della varietà analitica reale L^*.

ii) esista un'antiinvoluzione $\alpha^* : \widetilde{L}^* \longrightarrow \widetilde{L}^*$ che sia un omomorfismo di $\widetilde{L}^*$ in sè e per cui risulti:

$${}'L^* \supset L^* \quad \text{ove} \quad {}'L^* = \{g \in \widetilde{L}^* \mid \alpha^*(g) = g\}.$$

Siano L, L^* due gruppi di Lie reali e supponiamo che L^* operi su L (cioè per ogni $l \in L^*$ sia definito un automorfismo analitico, (di gruppo), l^* di L ed inoltre l'applicazione $L^* \times L \rightarrow L$ definita da $l \times g \rightarrow l^*(g)$ sia analitica).

Diremo complessificazione della coppia L, L^* il dato di due complessificazioni $\widetilde{L} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \widetilde{L}, \widetilde{L}^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ di L, L^* tali che:

$$\widehat{\alpha}(l^*(g)) = \alpha^*(l)(\widehat{\alpha}(g)), \ \forall\ l \in \widetilde{L}^*, g \in \widetilde{L}. \tag{1}$$

Se (L, O_L) è un $\mathbb{R}$-spazio ed L^* è un gruppo di Lie di automorfismi di (L, O_L) diremo complessificazione della coppia L, L^* il dato di due complessificazioni $(\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}})$, $\widetilde{L}^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ di $(L, O_L), L^*$, tali che $\widetilde{L}^*$ operi su $(\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}})$, e di un' antiinvoluzione $(\widehat{\alpha}, \widehat{'\alpha}) : (\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}}) \rightarrow (\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}})$ che soddisfi la (1) ed abbia (L, O_L) come parte fissa.

Sia (V, O_V) un $\mathbb{R}$-spazio, L, L^* due gruppi di Lie reali e supponiamo che L^* operi su L.

Dicesi fibrato analitico reale di gruppi, con fibra L, gruppo strutturale L^*, base (V, O_V) e spazio totale (F, O_F) il dato delle cose seguenti:

un $\mathbb{R}$-spazio (F, O_F) ed un morfismo $(\pi, '\pi) : (F, O_F) \rightarrow (V, O_V)$ tale che esista un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di V e degli isomorfismi $(\varrho_i, '\varrho_i)$: $(\pi^{-1}(U_i), O_{F|\pi^{-1}(U_i)}) \rightarrow (U_i \times L, O_{U_i} \times O_L)$, con O_{U_i}, O_L fasci strutturali di U_i, L, e $\varrho_i(\pi^{-1}(y)) = y \times L$, $\forall y \in U_i$, per cui siano definiti dei morfismi $(g_{i,j}, 'g_{i,j}) : (U_i \cap U_j, O_{V|U_i \cap U_j}) \rightarrow L^*$ che soddisfino le relazioni:

$$(\varrho_j \circ \varrho_i^{-1})(x, g) = (x, (g_{i,j}(x))^*(g)), \ \forall\ x \in U_i \cap U_j, g \in L.$$

Se (L, O_L) è un $\mathbb{R}$-spazio ed L^* è un gruppo di Lie di automorfismi di (L, O_L) si da in modo del tutto analogo la nozione di fibrato analitico reale di fibra (L, O_L), gruppo strutturale L^*, base (V, O_V) e spazio totale (F, O_F).

L'applicazione π viene detta proiezione, i morfismi $(\varrho_j, '\varrho_j)$ banalizzazioni locali e l'insieme delle $\{g_{i,j}, 'g_{i,j}\}_{i,j \in I}$ un cociclo del fibrato (rispetto al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ o, più precisamente, il cociclo del fibrato rispetto alle banalizzazioni locali $(\varrho_i, '\varrho_i)$). È noto che fissati gli spazi V, L, L^* ed il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, il fibrato è individuato dal cociclo $\{g_{i,j}, 'g_{i,j}\}$. $F \xrightarrow{\pi} V$ verrà detto il fibrato associato od individuato dal cociclo $\{g_{i,j}, 'g_{i,j}\}$.

Dicesi infine atlante del fibrato la famiglia di morfismi

$$\{(\varrho_i, '\varrho_i), (g_{i,j}, 'g_{i,j})\}_{i,j \in I}.$$

Analoga è la definizione di fibrato olomorfo (di gruppi) su uno spazio complesso, o su un $\mathbb{C}$-spazio, lasciamo al lettore i facili dettagli. Col termine di fibrato analitico intenderemo un fibrato analitico, reale o complesso, di gruppi oppure no.

Se $F \xrightarrow{\pi} V$ è un fibrato analitico di gruppi sulle fibre di F, cioè sugli insiemi $\pi^{-1}(x)$, $x \in V$, risulta definita una struttura di gruppo di Lie (reale o complesso).

Si noti che un fibrato analitico in particolare è un fibrato topologico nel senso di [9].

Un fibrato di spazio totale (F, O_F), base (V, O_V), fibra (L, O_L) e gruppo strutturale L^* verrà notato con $((F, O_F), (\pi, '\pi), (V, O_V), (L, O_L), L^*)$ o più semplicemente, quando non è possibile confusione, con (F, π, V, L, L^*) od anche $F \xrightarrow{\pi} V$.

Dare un complessificato del fibrato analitico reale (di gruppi) (F, π, V, L, L^*) significa assegnare le cose seguenti:

i) una complessificazione $(\widehat{\alpha}, \widehat{'\alpha}) : (\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}}) \to (\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}})$, $\widetilde{L}^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ della coppia L, L^*.

ii) una complessificazione $(\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$, $(\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$ degli spazi (V, O_V), (F, O_F) ed un morfismo delle strutture complesse $(\widetilde{\pi}, \widetilde{'\pi}) : (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}}) \to (\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$ che prolunghi $(\pi, '\pi)$ e sia tale che $\widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{V}$ sia un fibrato olomorfo (di gruppi se tale era $F \xrightarrow{\pi} V$) con fibra $(\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}})$, gruppo strutturale $\widetilde{L}^*$ e base $(\widetilde{V}\ O_{\widetilde{V}})$.

iii) due antinvoluzioni $(\alpha, '\alpha) : (\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}}) \to (\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$, $(\sigma, '\sigma) : (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}}) \to (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$ tali che (V, O_V), (F, O_F) siano contenute nelle parti fisse di $(\alpha, '\alpha)$, $(\sigma, '\sigma)$ e valga: $(\widetilde{\pi}, \widetilde{'\pi}) \circ (\sigma, '\sigma) = (\alpha, '\alpha) \circ (\widetilde{\pi}, \widetilde{'\pi})$.
(se inoltre L è un gruppo, $\sigma : \widetilde{\pi}^{-1}(x) \to \widetilde{\pi}^{-1}(\alpha(x))$ sia un isomorfismo di gruppi).

iv) Supponiamo infine che per ogni $x \in V$ esista un intorno $\widetilde{U}_x$ di x in $\widetilde{V}$, con $\widetilde{U}_x = \alpha(\widetilde{U}_x)$, ed un isomorfismo

$(\varrho_x, '\varrho_x) : (\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}_x), O_{\widetilde{F} | \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}_x)}) \to (\widetilde{U}_x \times \widetilde{L}, O_{\widetilde{U}_x} \times O_{\widetilde{L}})$ tali che $\sigma' \circ \varrho_x = \varrho_x \circ \sigma$

ove $\sigma'(y, l) = (\alpha(y), \widehat{\alpha}(l))$, $\forall\, y \in \widetilde{U}_x$, $l \in \widetilde{L}$.

Dati due fibrati analitici (di gruppi):
$(F_1, \pi_1, V_1, L_1, L_1^*)$, $(F_2, \pi_2, V_2, L_2, L_2^*)$ dicesi applicazione fibrata analitica del primo nel secondo il dato di due morfismi

$$(\psi, '\psi) : (V_1, O_{V_1}) \to (V_2, O_{V_2}), (\varphi, '\varphi) : (F_1, O_{F_1}) \to (F_2, O_{F_2})$$

tali che:

$$(\pi_2, '\pi_2) \circ (\varphi, '\varphi) = (\psi, '\psi) \circ (\pi_1, '\pi_1)$$

ed inoltre

$$(\varphi, '\varphi) : (\pi_1^{-1}(x), O_{F_1 | \pi_1^{-1}(x)}) \longrightarrow (\pi_2^{-1}(\psi(x)), O_{F_2 | \pi_2^{-1}(\psi(x))})$$

è un isomorfismo, $\forall\, x \in V_1$. (Se L è un gruppo di Lie, $\varphi : \pi_1^{-1}(x) \longrightarrow \pi_2^{-1}(\psi(x))$ è un isomorfismo di gruppi di Lie).

Un'applicazione fibrata verrà indicata con $((\varphi, '\varphi), (\psi, '\psi))$ od anche (φ, ψ) quando non è possibile confusione.

Un'applicazione di F_1 in F_2 sarà detta applicazione fibrata continua se è un'applicazione fibrata nel senso di [9] fra i fibrati topologici F_1, F_2.

Un'applicazione fibrata sarà detta un isomorfismo continuo (od analitico) quando ammette un'inversa che è ancora un'applicazione fibrata continua (od analitica).

Due spazi fibrati analitici aventi medesima fibra e gruppo strutturale si dicono isomorfi topologicamente (od analiticamente) od equivalenti, se esiste un isomorfismo continuo (od analitico) del primo sul secondo.

In particolare diremo (F, π, V, L, L^*) topologicamente (od analiticamente) banale se $F \xrightarrow{\pi} V$ è isomorfo topologicamente (od analiticamente) al fibrato $V \times L \longrightarrow V$.

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale ed $(\widetilde{F}', \widetilde{\pi}', \widetilde{V}', \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$, $(\widetilde{F}'', \widetilde{\pi}'', \widetilde{V}'', \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ due suoi complessificati. Diremo che essi sono equivalenti, (come complessificati di F), se il morfismo identico $i : F \longrightarrow F$ si può prolungare ad un isomorfismo (φ, ψ) del fibrato $\widetilde{F}' \xrightarrow{\widetilde{\pi}'} \widetilde{V}'$ su $\widetilde{F}'' \xrightarrow{\widetilde{\pi}''} \widetilde{V}''$, tale che: $\sigma'' \circ \varphi = \varphi \circ \sigma'$, ove σ', σ'' sono le antiinvoluzioni di $\widetilde{F}', \widetilde{F}''$.

b) *Il teorema di complessificazione.*

TEOREMA 1. *Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale avente per base e per fibra gli $\mathbb{R}$-spazi (V, O_V), (L, O_L) e per gruppo strutturale il gruppo di Lie L^*.*

Se $(\widehat{\alpha, '\alpha}) : (\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}}) \longrightarrow (\widetilde{L}, O_{\widetilde{L}}), \alpha^* : \widetilde{L}^* \longrightarrow \widetilde{L}^*$ è una complessificazione della coppia (L, O_L), L^* esiste un complessificato $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ di $F \longrightarrow V$ in cui $(\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$, $(\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$ sono $\mathbb{C}$-spazi. Se L è un gruppo di Lie allora $\widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{V}$ è un fibrato olomorfo di gruppi.

Detta $\alpha : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}$ l'antiinvoluzione di V lo spazio V ha in $\widetilde{V}$ un sistema fondamentale di intorni aperti $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ i cui spazi complessi ridotti associati sono spazi di Stein ed inoltre $\alpha(U_\lambda) = U_\lambda$.

Date due complessificazioni $(\widetilde{F}_1, \widetilde{\pi}_1, \widetilde{V}_1, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*), (\widetilde{F}_2, \widetilde{\pi}_2, \widetilde{V}_2, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ *di* $F \longrightarrow V$ *se* $\widetilde{L}^*$ *opera effettivamente su* $\widetilde{L}$ *e se* L^* *è il luogo dei punti fissi di* α^* *esistono due intorni aperti* $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ *di* V *in* $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ *tali che* $\widetilde{F}_1$ *ristretto ad* $\widetilde{U}_1$ *è equivalente (come complessificato di* $F \longrightarrow V$*) ad* $\widetilde{F}_2$ *ristretto ad* $\widetilde{U}_2$.

PROVA. Dimostriamo il caso in cui L è un gruppo di Lie reale; la dimostrazione si può ripetere, senza sostanziali differenze nel caso in cui L è un $\mathbb{R}$-spazio.

α) Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di V tale che:

I) ogni U_i sia relativamente compatto in V

II) il fibrato F ristretto alla base U_i, $\forall i \in I$, sia isomorfo, come fibrato analitico in gruppi, al fibrato banale $U_i \times L$.

III) per ogni $i \in I$ esista una realizzazione $\eta_i \colon U_i \longrightarrow U_i' \subset \mathbb{R}^{n_i}$ dell'$\mathbb{R}$-spazio $(U_i, O_{V \mid U_i})$ in un aperto di $\mathbb{R}^{n_i}$, (più precisamente esista un isomorfismo $(\eta_i, {}'\eta_i) \colon (U_i, O_{V \mid U_i}) \longrightarrow (U_i', O_{U_i'})$ di $(U_i, O_{V \mid U_i})$ in un $\mathbb{R}$-spazio locale di $\mathbb{R}^{n_i}$; per brevità, quando non è possibile confusione, ometteremo di scrivere i fasci strutturali).

Poniamo $\mathbb{R}^{n_i} = \operatorname{Re}(\mathbb{C}^{n_i})$ e si supponga che in un aperto di $\mathbb{C}^{n_i}$ sia contenuta una complessificazione $(\widetilde{U}_i', O_{\widetilde{U}_i'})$ di $(U_i', O_{U_i'})$.

Tale ricoprimento esiste perchè V ha topologia a base numerabile ed è localmente compatto.

Notiamo per ogni $i, j \in I$:

$$U_{i,j}' = U_i' \cap \eta_i(\eta_j^{-1}(U_j'))$$

$$\eta_{i,j} = \eta_j \circ \eta_i^{-1}, \text{ e sia } (g_{i,j}, {}'g_{i,j}) \colon (U_i \cap U_j, O_{V \mid U_i \cap U_j}) \longrightarrow L^*$$

un cociclo del fibrato F rispetto al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$.

Poniamo infine:

$$(\widehat{g}_{i,j}, {}'\widehat{g}_{i,j}) = (g_{i,j}, {}'g_{i,j}) \circ (\eta_i, {}'\eta_i)^{-1}.$$

Per ogni terna di indici $i, j, k \in I$ si ha, su $U_{i,j}' \cap U_{i,k}'$, la relazione di compatibilità:

$$(\widehat{g}_{i,j}, {}'\widehat{g}_{i,j}) = (\widehat{g}_{i,k}, {}'\widehat{g}_{i,k}) \circ (\eta_{k,i}, {}'\eta_{k,i}) \circ (\widehat{g}_{k,j}, {}'\widehat{g}_{k,j}).$$

Sia $L \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \widetilde{L}$, $L^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ la complessificazione assegnata della coppia L, L^*; per il teorema 17 di [10] i morfismi $(\widehat{g}_{i,j}, {}'\widehat{g}_{i,j})$, $(\eta_{i,j}, {}'\eta_{i,j})$ si estendono a dei morfismi $(\widetilde{g}_{i,j}\,,\ '\widetilde{g}_{i,j})$, $(\widetilde{\eta}_{i,j}\,,\ '\widetilde{\eta}_{i,j})$ definiti su un intorno di $U'_{i,j}$ in $\widetilde{U}'_i$, a valori rispettivamente in $\widetilde{L}^*$ ed in $(\widetilde{U}'_j\,,\, O_{\widetilde{U}'_j})$.

Si possono scegliere degli intorni $\widetilde{U}'_{i,j}$ di $U'_{i,j}$ in $\widetilde{U}'_i$, trasformati in sè dal coniugio di $\mathbb{C}^{n_i}$ e tali che su essi, e quindi su ogni intorno più piccolo, valga:

(1) $$\alpha_j \circ \widetilde{\eta}_{i,j} = \widetilde{\eta}_{i,j} \circ \alpha_i$$

ove α_i, α_j sono le antiinvoluzioni indotte su $\widetilde{U}'_i$, $\widetilde{U}'_j$ dal coniugio di $\mathbb{C}^{n_i}$, $\mathbb{C}^{n_j}$

(2) $$\widetilde{g}_{i,j}\,(\alpha_i(y)) = \alpha^*\,(\widetilde{g}_{i,j}\,(y)),\ \ \forall y \in \widetilde{U}'_{i,j}\,,$$

ed inoltre su $\widetilde{U}'_{i,j} \cap \widetilde{U}'_{i,k}$ risulti

(3) $$(\widetilde{g}_{i,j}\,,\ '\widetilde{g}_{i,j}) = (\widetilde{g}_{i,k}\,,\ '\widetilde{g}_{i,k}))\circ((\widetilde{\eta}_{k,i}\,,\ '\widetilde{\eta}_{k,i})\cdot(\widetilde{g}_{k,j}\,,\ '\widetilde{g}_{k,j})).$$

Per intorni abbastanza piccoli di $U'_{i,j}$, $U'_{i,k}$ la (1) e la (2) sono conseguenza della proposizione 1 di [11] e la (3) del teorema 17 di [10].

Il ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ è localmente finito, quindi ogni $\overline{U}_i$ interseca un numero finito di U_j, $j \in I$. Da quanto osservato segue che esistono degli intorni $\widetilde{U}''_i$ di U'_i in $\widetilde{U}'_i$ tali che, per ogni $i, j \in I$, i morfismi $(\eta_{i,j}\,,\ '\eta_{i,j})$, $(\widehat{g}_{i,j}\,,\ '\widehat{g}_{i,j})$ si estendono a dei morfismi $(\widetilde{\eta}_{i,j}\,,\ '\widetilde{\eta}_{i,j})$, $(\widetilde{g}_{i,j}\,,\ '\widetilde{g}_{i,j})$ definiti su degli intorni $\widetilde{U}''_{i,j} \supset \widetilde{U}''_i \cap \widetilde{\eta}_{j,i}\,(\widetilde{U}''_j)$ di $U'_{i,j}$ in $\widetilde{U}_i$ e su $\widetilde{U}''_{i,j}$ valgono le (1), (2), (3).

Come provato in [10], (teorema 3 e 12) esiste un restringimento $\{V_i\}_{i\in I}$ di $\{U_i\}_{i\in I}$ e degli intorni $'\widetilde{U}_i$ di $\eta_i(V_i)$ in $\widetilde{U}''_i$ tali che:

a) gli intorni $'\widetilde{U}_i$ siano trasformati in sè dal coniugio di $\mathbb{C}^{n_i}$

b) le applicazioni $\{\widetilde{\eta}_{i,j}\}_{i,\,j\in I}$, definiscano nello spazio $\bigcup_{i\in I} {'\widetilde{U}_i}$ una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ (ponendo $x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y$ se, e solo se, $x \in {'\widetilde{U}_i}$, $y = \widetilde{\eta}_{i,j}\,(x)$) tale che lo spazio topologico quoziente $\widetilde{V} = \bigcup_{i\in I} {'\widetilde{U}_i}/_{\mathcal{R}}$ sia separato

c) la struttura di $\mathbb{C}$-spazio di $('\widetilde{U}_i\,,\, O_{\widetilde{U}_i})$ e quindi di $\bigcup_{i\in I} {'\widetilde{U}_i}$ induca una struttura di $\mathbb{C}$-spazio $(\widetilde{V},\ O_{\widetilde{V}})$ su $\widetilde{V}$.

Se si identifica V al sottospazio $'V = (\bigcup_{i\in I} U'_i)/_{\mathcal{R}}$ di $\widetilde{V}$ lo spazio $\widetilde{V}$ è un complessificato di V.

d) Le antiinvoluzioni indotte dal coniugio in $'\widetilde{U}_i$ definiscano in $\widetilde{V}$ un'antiinvoluzione $\alpha : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}$ tale che:

$$V = \{x \in \widetilde{V} \mid \alpha\,(x) = x\}.$$

Si è anche provato, in [10] (teorema 14), che V ha in $\widetilde{V}$ un sistema fondamentale di intorni aperti $\{U_\lambda\}$ i cui spazi complessi ridotti associati sono spazi di Stein ed inoltre $\alpha(U_\lambda) = U_\lambda$.

β) I morfismi $(\widetilde{g}_{i,j}, '\widetilde{g}_{i,j})$, $(\widehat{g}_{i,j}, '\widehat{g}_{i,j})$ definiscono sugli aperti degli spazi quozienti $\widetilde{V}$, V dei morfismi che indicheremo con gli stessi simboli.

Si verifica che il cociclo $(\widehat{g}_{i,j}, '\widehat{g}_{i,j})$ definisce su V il fibrato analitico F che dobbiamo complessificare.

Vogliamo ora definire il $\mathbb{C}$-spazio $(\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$ e l'antiinvoluzione $\sigma: \widetilde{F} \to \widetilde{F}$.

Si consideri il $\mathbb{C}$-spazio $\widetilde{F}' = \bigcup_{i \in I} '\widetilde{U}_i \times \widetilde{L}$, ove il fascio strutturale di $'\widetilde{U}_i \times \widetilde{L}$ è $O_{'\widetilde{U}_i} \times O_{\widetilde{L}}$, e la relazione $\mathcal{R}'$ definita da

$$(x, v) \overset{\mathcal{R}'}{\sim} (\widetilde{\eta}_{i,j}(x), (\widetilde{g}_{i,j}(x))(v)), \quad \forall (x, v) \in '\widetilde{U}_i \times \widetilde{L}.$$

Per la (3) ed il punto (b) $\mathcal{R}'$ risulta una relazione di equivalenza; è noto, (vedi ad esempio [9]), che lo spazio quoziente $\widetilde{F} = \widetilde{F}'/\mathcal{R}'$ ha struttura naturale di spazio fibrato di gruppi su V con fibra $\widetilde{L}$, gruppo strutturale $\widetilde{L}^*$. Sia $\widetilde{\pi}: \widetilde{F} \to \widetilde{V}$ la proiezione canonica.

È una verifica constatare (vedi ad esempio il teor. 3 di [10]) che $\widetilde{F}$ ha una struttura di $\mathbb{C}$-spazio indottagli da quella di $\widetilde{F}'$; notiamo con $O_{\widetilde{F}}$ il suo fascio strutturale. Dalla costruzione segue senza difficoltà che $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ è un fibrato olomorfo di gruppi ed inoltre $(\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$ è un complessificato dell'$\mathcal{R}$-spazio (F, O_F).

Vogliamo ora definire l'antiinvoluzione $(\sigma, '\sigma): (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}}) \to (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$.

Consideriamo su $('\widetilde{U}_i \times \widetilde{L}, O_{\widetilde{U}_i} \times O_{\widetilde{L}})$ le antiinvoluzioni $(\sigma_i, '\sigma_i)$ definite dall'applicazione:
$\sigma_i(x, v) = (\alpha_i(x), \widehat{\alpha}(v))$, ove α_i è l'antiinvoluzione indotta dal coniugio in $\mathbb{C}^{n_i}$.

Basta quindi provare che i morfismi $(\sigma_i, '\sigma_i)$ sono coerentemente definiti cioè che

$$(4) \qquad (\widetilde{\eta}_{i,j}(\alpha_i(x)), \widetilde{g}_{i,j}(\alpha_i(x)) \cdot \widehat{\alpha}(v)) = (\alpha_j(\widetilde{\eta}_{i,j}(x)), \widehat{\alpha}(\widetilde{g}_{i,j}(x)(v))) \ \forall x \in '\widetilde{U}_i, v \in \widetilde{L}.$$

Si è già provato nella (1) che $\widetilde{\eta}_{i,j}(\alpha_i(x)) = \alpha_j(\widetilde{\eta}_{i,j}(x))$; per la (2) si ha: $\widetilde{g}_{i,j}(\alpha_i(x)) = \alpha^*(\widetilde{g}_{i,j}(x))$ e quindi per la definizione di complessificata della coppia L, L^* risulta:

$$\widetilde{g}_{i,j}(\alpha_i(x)) \cdot \widehat{\alpha}(v) = \alpha^*(\widetilde{g}_{i,j}(x)) \cdot \widehat{\alpha}(v)) = \widehat{\alpha}(\widetilde{g}_{i,j}(x) \cdot v)$$

e la (4) risulta così provata.

Dalla (4) segue che i morfismi $(\sigma_i, '\sigma_i)$ definiscono un'antiinvoluzione $(\sigma, '\sigma) . (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}}) \longrightarrow (\widetilde{F}, O_{\widetilde{F}})$ che soddisfa alle proprietà richieste, cioè ha (F, O_F) contenuto nella parte fissa e risulta $(\alpha, '\alpha) \circ (\widetilde{\pi}, '\widetilde{\pi}) = (\widetilde{\pi}, '\widetilde{\pi}) \circ (\sigma, '\sigma)$.

γ) Rimane da dimostrare l'unicità del germe del complessificato.

Siano $\widetilde{F}_1 \xrightarrow{\widetilde{\pi}_1} \widetilde{V}_1$, $\widetilde{F}_2 \xrightarrow{\widetilde{\pi}_2} \widetilde{V}_2$ due complessificati di $F \xrightarrow{\pi} V$ $\alpha_i : \widetilde{V}_i \longrightarrow \widetilde{V}_i$, $\sigma_i : \widetilde{F}_i, \longrightarrow \widetilde{F}_i$, $i = 1, 2$ le antiinvoluzioni associate.

L'applicazione identica $i : (V, O_V) \longrightarrow (V, O_V)$ si prolunga ad un isomorfismo $(\psi, '\psi) : (\widetilde{V}'_1, O_{\widetilde{V}'_1}) \longrightarrow (\widetilde{V}'_2, O_{\widetilde{V}'_2})$ di un intorno aperto di V in $\widetilde{V}_1$ su un intorno aperto $\widetilde{V}'_2$ di V in $\widetilde{V}_2$ ed inoltre si può supporre $\alpha_2 \circ \psi = \psi \circ \alpha_1$ (vedi teorema 17 di [10] e proposizione 1 di [11]).

Per la proprietà iv) del complessificato di un fibrato esiste un ricoprimento $\{\widetilde{W}_i\}_{i \in I}$ di V con aperti di $\widetilde{V}'_1$ tali che $\alpha_1(\widetilde{W}_i) = \widetilde{W}_i$ ed inoltre esistono degli isomorfismi di fibrati:

$$(\varrho_i^1, '\varrho_i^1) : (\widetilde{\pi}_1^{-1}(\widetilde{W}_i), O_{\widetilde{F}_1 | \widetilde{\pi}_1^{-1}(\widetilde{W}_i)}) \longrightarrow (\widetilde{W}_i \times \widetilde{L}, O_{\widetilde{W}_i} \times O_{\widetilde{L}})$$

$$(\varrho_1^2, '\varrho_1^2) : (\widetilde{\pi}_2^{-1}(\psi(\widetilde{W}_i)), O_{\widetilde{F}_2 | \widetilde{\pi}_2^{-1}(\psi(\widetilde{W}_i))}) \longrightarrow (\psi(\widetilde{W}_i) \times \widetilde{L}, O_{\psi(\widetilde{W}_i)} \times O_{\widetilde{L}})$$

tali che:

$$\sigma' \circ \varrho_i^1 = \varrho_i^1 \circ \sigma_1 , \; \sigma'' \circ \varrho_i^2 = \varrho_i^2 \circ \sigma_2 \tag{5}$$

ove

$$\sigma'(x, l) = (\alpha_1(v), \widehat{\alpha}(l)), \quad \sigma''(y, l') = (\alpha_2(y), \widehat{\alpha}(l'))$$

$$\forall\, x \in \widetilde{W}_i, \; y \in \psi(\widetilde{W}_i), \; l, l' \in \widetilde{L}.$$

Siano $\{\widetilde{g}^1_{i,j}\}_{i, j \in I}$, $\{\widetilde{g}^2_{i,j}\}_{i, j \in I}$ i cocicli di $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$ sui ricoprimenti $\{W_i\}_{i \in I}$, $\{\psi(\widetilde{W}_i)\}_{i \in I}$ rispetto alle banalizzazioni $(\varrho_i^1, '\varrho_i^1)$, $(\varrho_i^2, '\varrho_i^2)$.

Risulta per la (5):

$$\widehat{\alpha}(\widetilde{g}^r_{i,j}(x) \cdot l) = \alpha^*(\widetilde{g}^r_{i,j}(x)) \cdot \widehat{\alpha}(l) = \widetilde{g}^r_{i,j}(x)\, \widehat{\alpha}(l), \qquad \text{per} \quad r = 1, 2, \tag{6}$$

$$\forall\, x \in \widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j \cap V, \qquad \text{oppure} \qquad x \in \psi(\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j) \cap V, \quad l \in \widetilde{L}.$$

Si supponga che $\widetilde{L}^*$ operi effettivamente su $\widetilde{L}$, ed L^* sia il luogo dei punti fissi di α^* allora dalla (6) segue $\widetilde{g}^r_{i,j}(x) \in L^*$ per $r = 1, 2$, $\forall\, x \in V$.

I cocicli $\{\widetilde{g}^r_{i,j}\}_{i,j \in I}$, $r = 1, 2$, ristretti a V sono dunque associati al fibrato F, esistono perciò dei morfismi: $(h_i, 'h_i): \widetilde{W}_i \cap V \longrightarrow L^*$ tali che $\widetilde{g}^1_{i,j\,|\,V} = h_i \widetilde{g}^2_{i,j\,|\,V}\, h_j^{-1}$.

I morfismi $(h_i, 'h_i)$ si estendono a dei morfismi $(\widetilde{h}_i, '\widetilde{h}_i): (\psi(\widetilde{W}_i'), O_{\widetilde{V}_2\,|\,\psi(\widetilde{W}_i')}) \longrightarrow \widetilde{L}^*$, definiti su degli intorni $\psi(\widetilde{W}_i')$ di $\psi(\widetilde{W}_i) \cap V$ in $\psi(\widetilde{W}_i)$ (si ricordi che $\psi: (\bigcup_{i \in I} \widetilde{W}_i) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} \psi(\widetilde{W}_i)$ è un omeomorfismo), tali che: $\alpha^* \circ \widetilde{h}_i = \widetilde{h}_i \circ \alpha_2$, $\forall\, i \in I$, (vedi teorema 17 di [10] e proposizione 1 di [11]).

Essendo $\widetilde{V}_1$ un complessificato di V_1 esistono degli intorni $\widetilde{W}_i''$ di $W_i = \widetilde{W}_i \cap V$ tali che $\alpha_1(\widetilde{W}_i'') = \widetilde{W}_i''$ e si abbia:

$$\widetilde{g}^1_{i,j\,|\,\widetilde{W}_i'' \cap \widetilde{W}_j''} = (\widetilde{h}_i \circ \widetilde{g}^2_{i,j} \circ \widetilde{h}_j^{-1})_{|\,\psi(\widetilde{W}_i'' \cap \widetilde{W}_j'')} \circ \psi, \qquad \forall\, i, j \in I \tag{7}$$

ove per semplicità non si sono indicati i fasci strutturali.

La (7) mostra che il fibrato $\widetilde{F}_1$, ristretto alla base $\widetilde{V}_1'' = \bigcup_{i \in I} \widetilde{W}_i''$, è isomorfo, come complessificazione di F, al fibrato $\widetilde{F}_2$ ristretto alla base $\widetilde{V}_2'' = \bigcup_{i \in I} \psi(\widetilde{W}_i'')$.

La dimostrazione del teorema è così completa.

COROLLARIO 1. *Sia (F, π, V, L^*, L^*) un fibrato analitico reale principale avente per base l'$\mathbb{R}$-spazio (V, O_V) e per fibra il gruppo di Lie L^*. Se L^* è un gruppo di Lie compatto, od in generale un gruppo di Lie complessificabile, allora esiste un complessificato $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}^*, \widetilde{L}^*)$ di $F \xrightarrow{\pi} V$.*

PROVA. Per quanto provato in [13] se L^* è compatto esiste un complessificato $\widetilde{L}^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ di L^* e quindi una complessificazione della coppia L^*, L^*.

Si può quindi applicare il teorema 1 ed il corollario è provato.

OSSERVAZIONE 1. Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale in cui V ed L sono spazi analitici reali coerenti, allora F è uno spazio analitico coerente.

In queste ipotesi, se la coppia L, L^* ammette una complessificazione $\widetilde{L}, \widetilde{L}^*$ allora esiste una complessificazione $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ del fibrato $F \longrightarrow V$ in cui $\widetilde{F}, \widetilde{V}$ sono complessificati di F, V considerati come spazi analitici reali.

Sia (V, O_V) un $\mathbb{R}$-spazio, $(\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$ una complessificazione di (V, O_V) ed $(\alpha, '\alpha): (\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}}) \longrightarrow (\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$ un'antiinvoluzione che ha (V, O_V) come parte fissa.

Sia $\{\widetilde{U}_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $\widetilde{V}$, diremo che $\{\widetilde{U}_i\}_{i \in I}$ è α-invariante se per ogni $i \in I$ esiste $\alpha'(i) \in I$ tale che: $\alpha(\widetilde{U}_i) = \widetilde{U}_{\alpha'(i)}$. Sia L^* un gruppo di Lie, $\widetilde{L}^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ un suo complessificato e $\widetilde{g}_{i,j}: \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{L}^*$ un cociclo definito sul ricoprimento α-invariante $\{\widetilde{U}_i\}_{i \in I}$; diremo che il cociclo $\{\widetilde{g}_{i,j}\}_{i,j \in I}$ è α-invariante se:

$$\alpha^*(\widetilde{g}_{i,j}(x)) = \widetilde{g}_{\alpha'(i),\, \alpha'(j)}(\alpha(x)), \qquad \forall\, x \in \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j, \quad i, j \in I.$$

Il cociclo $\widetilde{g}_{i,j}: \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{L}^*$ si dice prolungamento del cociclo $g_{i,j}: \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \cap V \longrightarrow L^*$ e $\{g_{i,j}\}$ restrizione di $\{\widetilde{g}_{i,j}\}$ se $\widetilde{g}_{i,j\,|\,\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \cap V} = g_{i,j}\ \forall\, i, j \in I$.

COROLLARIO 2. *Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale definito sull'$\mathbb{R}$-spazio (V, O_V), $(\widetilde{V}, O_{\widetilde{V}})$ una complessificazione di (V, O_V) ed $(\alpha, '\alpha)$ un'antiinvoluzione che abbia (V, O_V) come parte fissa. Sia $\widetilde{L} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \widetilde{L}$, $\widetilde{L}^* \xrightarrow{\alpha^*} \widetilde{L}^*$ una complessificazione della coppia L, L^* ed $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ un fibrato olomorfo.*

Supponiamo esista un ricoprimento $\{\widetilde{U}_i\}_{i \in I}$ di V con aperti di $\widetilde{V}$, con $U_i = \widetilde{U}_i \cap V \neq \emptyset$, $\forall\, i \in I$, ed un cociclo $\widetilde{g}_{i,j}: \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{L}^*$ tale che $\{\widetilde{g}_{i,j}\}_{i,j \in I}$, ristretto a V sia associato al fibrato F e $\{\widetilde{g}_{i,j}\}$ individui su $\widetilde{U}' = \bigcup_{i \in I} \widetilde{U}_i$ il fibrato $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}') \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{U}'$. In queste ipotesi esistono degli intorni $\widetilde{U}_i'$ di U_i in $\widetilde{U}_i$ tali che: $\alpha(\widetilde{U}_i') = \widetilde{U}_i'$, $\{\widetilde{g}_{i,j}\}$ ristretto al ricoprimento $\{\widetilde{U}_i'\}_{i \in I}$ è α-invariante e il fibrato olomorfo a cui è associato è una complessificazione di F (e quindi $\widetilde{F}$ ristretto ad un opportuno intorno di V è un complessificato di F).

Viceversa supponiamo che $\widetilde{L}^*$ operi effettivamente su $\widetilde{L}$, L^* coincida con il luogo dei punti fissi di α^* ed esista un intorno $\widetilde{U}$ di V in $\widetilde{V}$ tale che $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{U}$ sia un complessificato di F.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di V, e $\pi^{-1}(U_i)$ sia analiticamente banale per ogni $i \in I$; esistono allora degli intorni $\widetilde{U}_i'$ di U_i in $\widetilde{V}$ ed un cociclo α-invariante $\widetilde{g}_{i,j}: \widetilde{U}_i' \cap \widetilde{U}_j' \longrightarrow \widetilde{L}^*$ che è associato al fibrato

$$(\widetilde{\pi}^{-1}(\bigcup_{i \in I} \widetilde{U}_i')) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bigcup_{i \in I} \widetilde{U}_i'.$$

PROVA. Supponiamo esista un cociclo $\widetilde{g}_{i,j} : \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{L}^*$ che ristretto a V sia associato ad F; ne segue $\widetilde{g}_{i,j}(U_i \cap U_j) \subset L^*$. Le applicazioni $\widetilde{g}_{i,j}$ estendono le $g_{i,j}: U_i \cap U_j \longrightarrow L^*$, quindi per la proposizione 1 di [11], esistono degli intorni $\widetilde{U}_i'$ di U_i in $\widetilde{U}_i$ tali che $\alpha(\widetilde{U}_i') = \widetilde{U}_i'$ e $\{\widetilde{g}_{i,j}\}_{i,j \in I}$ ristretto al ricoprimento $\{\widetilde{U}_i'\}_{i \in I}$, è α-invariante.

Per la costruzione fatta nella parte β) del teorema 1, dalla α-invarianza del cociclo $\{\widetilde{g}_{i,j \mid \widetilde{U}_i' \cap \widetilde{U}_j'}\}_{i,j \in I}$ segue che esso è associato ad un fibrato olomorfo su $\widetilde{U}'$ che è una complessificazione di F.

Viceversa supponiamo che $\widetilde{F}$ ristretto ad $\widetilde{U}$ sia un complessificato di F.

Premettiamo le seguenti osservazioni:

1) Un fibrato è banale (topologicamente od analiticamente) se e solo sè il fibrato principale associato ha sezioni globali (continue od analitiche).

2) Ogni sezione analitica di F su U_i è un morfismo $\gamma_i: U_i \longrightarrow F$ tale che $\pi \circ \gamma_i = id.$ quindi, essendo $\widetilde{V}$ un complessificato di V, ogni sezione analitica su U_i è restrizione di una sezione olomorfa di $\widetilde{F}$ su un intorno $\widetilde{U}_i$ di U_i in $\widetilde{V}$.

3) Applicando l'osservazione 2) al fibrato principale associato ad F, che ha certamente un complessificato per il corollario 1, si ha, in virtù dell'osservazione 1), che esistono degli intorni $\widetilde{U}_i^*$ di U_i in $\widetilde{V}$ tali che $\widetilde{F}$ ristretto ad $\widetilde{U}_i^*$ è analiticamente banale.

Per quanto provato nella parte γ) del teorema 1, esiste un ricoprimento $\{\widetilde{U}_i''\}_{i \in I}$ di V, $\widetilde{U}_i''$ aperto di $\widetilde{V}$, $\widetilde{U}_i'' \subset \widetilde{U}_i^*$ per ogni $i \in I$, ed un cociclo $\widetilde{g}_{i,j}: \widetilde{U}_i'' \cap \widetilde{U}_j'' \longrightarrow \widetilde{L}^*$ associato ad $\widetilde{F}$ ristretto a $\bigcup_{i \in I} \widetilde{U}_i''$, che ristretto a V induce il fibrato F.

Si ha dunque $\widetilde{g}_{i,j}(U_i \cap U_j) \subset L^*$ e quindi, per la proposizione 1 di [11], esistono degli intorni $\widetilde{U}_i'$ di U_i in $\widetilde{U}_i''$ tali che $\{\widetilde{g}_{i,j}\}$ ristretto al ricoprimento $\{\widetilde{U}_i'\}$ è α-invariante.

c) *Osservazioni sulle sezioni del complessificato di un fibrato.*

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale sull'$\mathbb{R}$-spazio (V, O_V) ed $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ un suo complessificato.

Notiamo, come sempre, con $\sigma, \alpha, \widehat{\alpha}, \alpha^*$ le antiinvoluzioni di $\widetilde{F}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*$.

Sia U un insieme di $\widetilde{V}$, notiamo con $\Gamma_U(\widetilde{F})$ (e $\Gamma_U(F)$) l'insieme delle sezioni analitiche di $\widetilde{F}$ (di F) su U (su $V \cap U$). Indicheremo con $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$ (e $\Gamma_U^c(F)$) l'insieme delle sezioni continue di $\widetilde{F}$ (di F) su U (su $U \cap V$).

Se $F \xrightarrow{\pi} V$ è un fibrato di gruppi gli insiemi $\Gamma_U(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(F)$, $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U^c(F)$ hanno struttura di gruppo ed $\widetilde{L}^*$ opera su $\Gamma_U(\widetilde{F})$, $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$ mentre L^* opera su $\Gamma_U(F)$, $\Gamma_U^c(F)$.

Se $\alpha(U) = U$ l'antiinvoluzione σ induce un'applicazione involutoria $\sigma_* : \Gamma_U^c(\widetilde{F}) \longrightarrow \Gamma_U^c(\widetilde{F})$ definita da

$$(\sigma_* \gamma)(x) = \sigma(\gamma(\alpha(x))), \qquad \forall\, x \in U, \qquad \gamma \in \Gamma_U^c(\widetilde{F}).$$

Risulta inoltre $\sigma_*(\Gamma_U(\widetilde{F})) = \Gamma_U(\widetilde{F})$ e se $\widetilde{F}$ è un fibrato di gruppi σ_* è un omomorfismo.

Diremo che $\gamma \in \Gamma_U^c(\widetilde{F})$ è σ-invariante se $\gamma = \sigma_*(\gamma)$. In particolare una funzione $f : \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ è detta σ-invariante se $f(\alpha(x)) = \overline{f(x)}$.

I sottoinsiemi delle sezioni σ-invarianti di $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$ saranno notati con ${}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U(\widetilde{F})$.

Osserviamo che se $U \subset V$ allora $\gamma \in {}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$ se, $\gamma \in \Gamma_U^c(F)$. Se $\widetilde{F}$ è un fibrato di gruppi allora ${}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U(\widetilde{F})$ sono sottogruppi di $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$.

Un esempio.

Di notevole interesse per il seguito è il caso dei fibrati analitici vettoriali. Sia $(F, \pi, V, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$ un fibrato analitico vettoriale (cioè di fibra $\mathbb{R}^n$ e gruppo strutturale il gruppo lineare completo $GL(n, \mathbb{R})$), avente per base un $\mathbb{R}$-spazio $(V, \mathcal{O}_V)$.

Nel seguito assumeremo sempre come complessificato della coppia $\mathbb{R}^n$, $GL(n, \mathbb{R})$ la coppia $\mathbb{C}^n$, $GL(n, \mathbb{C})$ con le antiinvoluzioni indotte dal coniugio.

Nel caso di un fibrato vettoriale F potremo dunque parlare di un complessificato del fibrato F, senza specificare quale complessificazione della coppia $\mathbb{R}^n$, $GL(n, \mathbb{R})$ si è scelta. Con questa convenzione il complessificato $\widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{V}$ di un fibrato vettoriale $F \xrightarrow{\pi} V$ è ancora un fibrato vettoriale.

Nel caso dei fibrati vettoriali l'antiinvoluzione $\sigma : \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{F}$ definisce delle applicazioni antilineari $\sigma_x : \widetilde{\pi}^{-1}(x) \longrightarrow \widetilde{\pi}^{-1}(\alpha(x))$ definite da $\sigma_x(v) = \sigma(v)$, per ogni $v \in \widetilde{\pi}^{-1}(x)$.

Sia $U \subset \widetilde{V}$, gli insiemi $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$, $\Gamma_{U \cap V}^c(F)$, $\Gamma_{U \cap V}(F)$ hanno struttura di spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$ rispettivamente.

Se $\alpha(U) = U$ ad ogni $\gamma \in \Gamma_U^c(\widetilde{F})$ si può associare l'elemento σ-invariante ${}^\sigma\gamma$ così definito:

$${}^\sigma\gamma(x) = \frac{1}{2}(\gamma(x) + \sigma(\gamma(\alpha(x)))).$$

Sia $\widetilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{V}$ un fibrato vettoriale complesso, $\sigma : \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{F}$ un'antiinvoluzione su $\widetilde{F}$ e $\| \ \|$ una norma su $\widetilde{F}$; diremo che $\| \ \|$ è una norma σ-invariante se: $\| v \| = \| \sigma(v) \|$, $\forall \, v \in \widetilde{F}$.

Se $U \subset \widetilde{V}$ noteremo, come solito : $\| \gamma \|_U = \sup_{x \in U} \| \gamma(x) \|$, per ogni $\gamma \in \Gamma_U^c(\widetilde{F})$.

A proposito delle norme σ-invarianti vale il seguente

LEMMA 1. *Sia $(F, \pi, V, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$ un fibrato analitico vettoriale definito sull'$\mathbb{R}$-spazio (V, O_V) ed $\widetilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{V}$ una complessificazione di F.*

Se $\sigma : \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{F}$ è l'antiinvoluzione di $\widetilde{F}$ esiste su $\widetilde{F}$ una norma $\| \ \|$ che è C^∞ e σ-invariante.

Per ogni insieme U di V e per ogni coppia di sezioni $\gamma \in \Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\gamma' \in {}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$ vale $\| \gamma - \gamma' \|_U \geq \| {}^\sigma\gamma - \gamma' \|_U$.

PROVA. È noto che su $\widetilde{F}$ esiste una norma C^∞ (vedi ad esempio [4]), notiamo con $\| \ \|'$, tale norma.

La norma $\| \ \|$ definita da: $\| v \| = \frac{1}{2} (\| v \|' + \| \sigma(v) \|')$ risulta C^∞ e σ-invariante.

Sia $x \in U$, risulta :

$$\| \gamma(x) - \gamma'(x) \| = \frac{1}{2} (\| \gamma(x) - \gamma'(x) \| + \| \sigma(\gamma(x)) - \sigma(\gamma'(x)) \|) =$$

$$= \frac{1}{2} (\| \gamma(x) - \gamma'(x) \| + \| \sigma(\gamma(\alpha(x))) - \sigma(\gamma'(\alpha(x))) \|) \geq \| {}^\sigma\gamma(x) - \gamma'(x) \|$$

ed il lemma risulta così completamente dimostrato.

Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato vettoriale analitico ed $\widetilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{V}$ un suo complessificato su cui sia definita una norma $\| \ \|$.

Se $U \subset \widetilde{V}$ sugli spazi vettoriali $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U(\widetilde{F})$ si considererà definita la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Con tale topologia detti spazi risultano spazi vettoriali topologici.

Si ha di più

LEMMA 2. *Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato vettoriale analitico reale, V uno spazio analitico reale coerente ed $\widetilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{V}$ una complessificazione di F.*

Per ogni aperto U di $\widetilde{V}$ tale che $\alpha(U) = U$ gli spazi vettoriali topologici $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U(\widetilde{F})$ sono spazi di Frechet.

PROVA. In [4] è provato che gli spazi $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$ sono di Frechet, è immediato che ${}^\sigma\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, ${}^\sigma\Gamma_U(\widetilde{F})$ sono chiusi in $\Gamma_U^c(\widetilde{F})$, $\Gamma_U(\widetilde{F})$ quindi anch'essi sono di Frechet.

§ 3. Teoremi di approssimazione per le sezioni di un fibrato analitico reale.

In questo paragrafo ci occuperemo soltanto di fibrati analitici di gruppi.

Ricordiamo, per comodità del lettore, alcune proprietà dei gruppi di Lie (reali o complessi) che useremo nel seguito.

Sia L un gruppo di Lie di dimensione n ed e l'identità di L, esiste un intorno $U(e)$ di e su cui si possono assegnare delle coordinate $x_1, \dots, x_n$, dette coordinate normali, tali che $e \equiv (0, \dots, 0)$ e se $g' \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $g'' \equiv (ax_1, \dots, ax_n)$, g', g'' sono abbastanza vicini ad e, allora $g' \cdot g'' \equiv (x_1 + ax_1, \dots \dots, x_n + ax_n)$.

I sottogruppi ad un parametro sono quindi rappresentati, nelle coordinate normali, da sottovarietà lineari di dimensione uno e dette coordinate sono determinate a meno di trasformazioni lineari. Segue infine che ogni automorfismo di L si esprime in esse con una trasformazione lineare.

Nel seguito supporremo fissato un intorno $U(e)$ di e in L omeomorfo ad un disco di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$) ed in $U(e)$ un sistema di coodinate normali assegnato una volta per tutte.

Se il gruppo di Lie L^* opera su L ogni elemento l di L^* individua una trasformazione $\beta(l)$ di un aperto contenente l'origine di $U(e)$ in $U(e)$ che è lineare nelle coordinate normali.

Si definisce dunque una rappresentazione $\beta : L^* \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ (oppure $\beta : L^* \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$).

Ad ogni fibrato analitico di gruppi (F, π, V, L, L^*) si associa in questo modo un fibrato vettoriale analitico $(\check{F}, \check{\pi}, V, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$ (oppure $(\check{F}, \check{\pi}, V, \mathbb{C}^n, GL(n, \mathbb{C}))$).

Più precisamente se il fibrato $F \xrightarrow{\pi} V$ è individuato sul ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di V dal cociclo $g_{i,j} : U_j \cap U_j \longrightarrow L^*$ il fibrato vettoriale associato ha il cociclo $\check{g}_{i,j} = \beta \circ g_{i,j}$ $\forall\, i, j \in I$.

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico di gruppi (reale o complesso) $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di V, $\varrho_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i' \times L$ una famiglia di banalizzazioni locali e $\{g_{i,j}\}_{i,j \in I}$ il cociclo dell'atlante.

È noto che lo spazio F è analiticamente isomorfo allo spazio analitico quoziente $(\bigcup_{i \in I} U_i' \times L)_{/\mathcal{R}}$ ove $q \overset{\mathcal{R}}{\sim} q' \Longleftrightarrow q' = (\varrho_j \circ \varrho_i^{-1})(q)$, per qualche coppia i, j di elementi di I. Si può quindi identificare F a tale quoziente e sia $p : \bigcup_{i \in I} U_i' \times L \longrightarrow F$ la proiezione naturale.

Fissato l'intorno $U(e)$ di e in L e l'atlante $\{\varrho_i, g_{i,j}\}_{i,j \in I}$ noteremo con $U(E)$ l'insieme $U(E) = p(\bigcup_{i \in I} U_i' \times U(e)) \subset F$.

Lo spazio totale $\check{F}$ del fibrato vettoriale associato ad $F \xrightarrow{\pi} V$ è analiticamente isomorfo allo spazio analitico quoziente $(\bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{R}^n)/\check{\mathcal{R}}$, ove $(x, v) \overset{\check{\mathcal{R}}}{\sim} (x', v') \Longleftrightarrow x' = (\eta_j \circ \eta_i^{-1})(x)$ e $v' = ((\beta \circ g_{i,j})(x))(v)$ per qualche coppia i, j di elementi di I con $\eta_i = \check{p}_i \circ \varrho_i$, $\check{p}_i : U_i' \times L \longrightarrow U_i'$ proiezione canonica. Si identifichi $\check{F}$ a tale quoziente e sia $\check{p} : (\bigcup_{i \in I} U_i' \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \check{F}$ la proiezione naturale.

In questo modo si associa ad ogni famiglia di banalizzazioni $\{\varrho_i\}_{i \in I}$ di F la famiglia $\check{\varrho}_i : \check{\pi}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i' \times \mathbb{R}^n$ di banalizzazioni di $\check{F}$ che sarà detta associata a $\{\varrho_i\}_{i \in I}$.

Se F è individuato dal cociclo $\{g_{i,j}\}_{i,j \in I}$ rispetto alle $\{\varrho_i\}_{i \in I}$ il fibrato $\check{F}$ è individuato, rispetto alle carte $\{\check{\varrho}_i\}_{i \in I}$, dal cociclo $\{\beta \circ g_{i,j}\}_{i,j \in I}$. Analogamente si fa nel caso complesso.

Nel caso degli spazi fibrati vettoriali l'identità di L si indica con o e si pone $U(O) = \check{p}(\bigcup_{i \in I} U_i' \times U(o))$, ove $U(o)$ è l'insieme dei punti $(x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$) tali che in $U(e)$ esiste un punto di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$.

Per ogni $l \in U(e)$ noteremo con $[l] \in \mathbb{R}^n$ (o di $\mathbb{C}^n$) l'insieme delle sue coordinate. Sono definite le applicazioni $\delta_i : U_i' \times U(o) \longrightarrow U_i \times U(e)$ ove $\delta_i(x, [l]) = (x, l)$, $\delta : U(O) \longrightarrow U(E)$ ove:

$$\delta(q) = \varrho_i^{-1}(\delta_i \check{\varrho}_i(q)) \quad \text{se} \quad q \in U(O) \tag{1}$$

e

$$\check{\varrho}_i : \check{\pi}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i' \times \mathbb{R}^n \quad (\text{oppure } U_i' \times \mathbb{C}^n).$$

Si verifica che δ è ben definita ed è un'applicazione analitica invertibile (vedi ad esempio [4]).

Siamo v_1, v_2 elementi di $U(O)$ tali che $\check{\pi}(v_1) = \check{\pi}(v_2)$ ed inoltre $v_1 = av_2$, $a \in \mathbb{R}$ (oppure $a \in \mathbb{C}$). Per le proprietà delle coordinate normali risulta $\delta(v_1 + v_2) = \delta(v_1) \cdot \delta(v_2)$.

Per ogni $x \in \check{F}$ esiste $n \in N$ tale che $\frac{x}{n} \in U(O)$.

Poniamo:

$$\hat{\delta}(x) = \left(\delta\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n. \tag{2}$$

L'applicazione $\hat{\delta}$ risulta ben definita, cioè non dipende dall'intero n, e definisce un'applicazione analitica $\hat{\delta} : \check{F} \longrightarrow F$ tale che $\pi \circ \hat{\delta} = \check{\pi}$.

OSSERVAZIONE 1. Sia L un gruppo di Lie reale, $\widetilde{L}$ un suo complessificato ed $\widehat{\alpha} : \widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{L}$ l'antiinvoluzione associata.

Notiamo le cose seguenti

a) Esiste un intorno $\widetilde{U}(e)$ dell'identità e di $\widetilde{L}$ su cui sono definite delle coordinate normali $z_1, \dots, z_n$ tali che:

i) $\widehat{\alpha}(\{z_j\}) = \{\bar{z}_j\}$

ii) le coordinate $z_1, \dots, z_n$ ristrette ad $L \cap \widetilde{U}(e)$ sono coordinate normali in L.

(Per i dettagli vedasi [13]).

b) Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi definito sull'$\mathbb{R}$-spazio (V, O_V) ed $\check{F} \xrightarrow{\check{\pi}} V$ il fibrato vettoriale associato.

Se $\widetilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{V}$ è un complessificato di $F \xrightarrow{\pi} V$ e $\check{\widetilde{F}} \xrightarrow{\check{\tilde{\pi}}} \widetilde{V}$ è il fibrato vettoriale associato ad $\widetilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{V}$ allora, se $\widetilde{L}^*$ opera effettivamente su $\widetilde{L}$ ed $L^* = \{l \in \widetilde{L}^* \mid \alpha^*(l) = l\}$, esiste un intorno $\widetilde{V}''$ di V in $\widetilde{V}$ tale che $\alpha(\widetilde{V}'') = \widetilde{V}''$ ed $\check{\widetilde{F}}$ ristretto a $\widetilde{V}''$ è un complessificato di $\check{F} \xrightarrow{\check{\pi}} V$.

Esiste infatti un ricoprimento $\{\widetilde{U}_i\}_{i \in I}$ di V con aperti di $\widetilde{V}$, $\alpha(\widetilde{U}_i) = \widetilde{U}_i$, per cui sono definite delle banalizzazioni

$$\varrho_i : \tilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}_i) \longrightarrow \widetilde{U}_i \times \widetilde{L} \text{ tali che } \varrho_i^{-1} \circ \sigma_i \circ \varrho_i = \sigma$$

ove

$$\sigma_i(x, l) = (\alpha(x), \widehat{\alpha}(l)), \quad \forall x \in \widetilde{U}_i, \quad l \in \widetilde{L}.$$

Per il corollario 2 del § 2 si può supporre che il cociclo $\{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j \in I}$ di $\widetilde{F}$ associato alle banalizzazioni $\{\varrho_i\}_{i \in I}$ sia tale che ristretto a V sia a valori in L^*.

Fissate in $\widetilde{L}$ le coordinate normali $z_1, \dots, z_n$ definite in *a*) e posto $\widetilde{V}' = \bigcup_{i \in I} \widetilde{U}_i$, $\widetilde{F}' = \tilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}')$, $\tilde{\pi}' = \tilde{\pi}_{|\widetilde{F}'}$ il fibrato vettoriale $\check{\widetilde{F}}'$ associato ad $\widetilde{F}'$ risulta individuato, rispetto a dette coordinate normali, dal cociclo $\{\check{\tilde{g}}_{i,j} = \tilde{\beta} \circ \tilde{g}_{i,j}\}_{i,j \in I}$ ove $\tilde{\beta} : \widetilde{L}^* \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ è la rappresentazione individuata dalle coordinate $z_1, \dots, z$ (ove $z_j = x_j + i y_j, j = 1, \dots, n$).

Per le proprietà i) ed ii) di dette coordinate il cociclo $\{\check{\tilde{g}}_{i,j}\}$ ristretto a V è associato al fibrato $\check{F} \xrightarrow{\check{\pi}} V$, quando si prendano le coordinate normali $x_1, \ldots, x_n$ di L.

Quanto provato, per il corollario 2 del § 2, dimostra l'asserto della nostra osservazione.

c) Sia $\check{\tilde{F}}'' \longrightarrow \tilde{V}''$ il fibrato definito nell'osservazione *b*) e $\widehat{\delta} : \check{\tilde{F}}'' \longrightarrow \check{\tilde{F}}'' = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{V}'')$, $\delta : \tilde{U}(O) \longrightarrow \tilde{U}(E)$ le applicazioni definite dalla (2) e dalla (1) rispettivamente.

Se $\{\varrho_i\}_{i \in I}$ è la famiglia di banalizzazioni di $\tilde{F}'$ definita in *b*) e $\{\check{\varrho}_i\}_{i \in I}$ è la famiglia delle banalizzazioni associate di $\check{\tilde{F}}'$ si ha per la (1) : $\delta(q) = (\check{\varrho}_i^{-1} \circ \delta_i \circ \check{\varrho}_i)(q)$, $\forall\, q \in \check{\tilde{\pi}}^{-1}(\tilde{U}_i)$: cioè l'applicazione δ si esprime sulle banalizzazioni tramite le δ_i.

Siano $\sigma_i, \check{\sigma}_i$ le antiinvoluzioni di $\tilde{U}_i \times \tilde{L}$, $\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^n$, per le proprietà i) ed ii) delle coordinate $z_1, \ldots, z_n$ risulta $\delta_i \circ \check{\sigma}_i = \check{\sigma}_i \circ \delta_i$.

Si deduce quindi $\delta \circ \check{\sigma} = \sigma \circ \delta$ ed anche, essendole fibre di $\check{\tilde{F}}'$ connesse, $\widehat{\delta} \circ \check{\sigma} = \sigma \circ \widehat{\delta}$.

Possiamo così riassumere i risultati trovati :

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi, (V, O_V) un $\mathbb{R}$-spazio ; sia $\tilde{L}, \tilde{L}^*$ una complessificazione della coppia L, L^* tale che $\tilde{L}^*$ operi effettivamente su $\tilde{L}$ ed $L^* = \{l \in \tilde{L}^* \mid \alpha^*(l) = l\}$.

Esiste un complessificato $\tilde{F}'' \longrightarrow \tilde{V}''$ di F tale che il fibrato vettoriale $\check{\tilde{F}}''$ associato ad $\tilde{F}''$ sia un complessificato del fibrato vettoriale $\check{F} \xrightarrow{\check{\pi}} V$ associato ad F. Si ha inoltre :

$\sigma \circ \widehat{\delta} = \widehat{\delta} \circ \check{\sigma}$ ove $\sigma, \check{\sigma}$ sono le antiinvoluzioni di $\tilde{F}'', \check{\tilde{F}}''$.

LEMMA 3. *Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato vettoriale analitico reale, V uno spazio analitico reale coerente, ed $\tilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{V}$ un complessificato di F tale che $\tilde{V}$ sia uno spazio di Stein.*

Sia $\dim V = n, \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^q$. *Esistono allora $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in {}^{\sigma}\Gamma_{\tilde{V}}(\tilde{F}), p = (n+1)q$, tali che per ogni $\gamma \in \Gamma_V(F)$ (oppure $\gamma \in \Gamma_V^c(F)$) esistono delle funzioni su V, analitiche reali (oppure continue) $f_1, \ldots, f_p$ per cui :*

$$\gamma(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, \gamma_i(x), \quad \textit{per ogni} \quad x \in V.$$

PROVA. Sia $\widetilde{\mathcal{F}}$ il fascio dei germi delle sezioni olomorfe di $\widetilde{F}$, $\mathcal{O}$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su $\widetilde{V}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_x$, $\mathcal{O}_x$ le spighe di $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\mathcal{O}$ in un punto $x \in \widetilde{V}$.

Il fascio $\widetilde{\mathcal{F}}$ è un $\mathcal{O}$ modulo ed è coerente su $\mathcal{O}$; per ogni $x \in \widetilde{V}$ $\widetilde{\mathcal{F}}_x$ ha un sistema di q generatori come $\mathcal{O}_x$ modulo.

Per quanto provato in [1] esistono degli elementi $'\gamma_1, \dots, '\gamma_p$ di $\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$ tali che le loro restrizioni ad $\widetilde{\mathcal{F}}_x$ generano $\widetilde{\mathcal{F}}_x$ come $\mathcal{O}_x$ modulo, $\forall\, x \in \widetilde{V}$.

Sia $\gamma \in \Gamma_V(F)$, nell'osservazione 2 del corollario 2 del § 2 si è provato che γ è restrizione di un elemento $\widetilde{\gamma}$ di $\Gamma_{\widetilde{V}'}(\widetilde{F})$, ove $\widetilde{V}'$ è un intorno di V in $\widetilde{V}$ e $\widetilde{V}'$ è di Stein.

Le restrizioni di $'\gamma_1, \dots, '\gamma_p$ generano $\widetilde{\mathcal{F}}_x$ come $\mathcal{O}_x$ modulo, per ogni $x \in \widetilde{V}'$, quindi, per un teorema di H. Cartan, esistono delle funzioni olomorfe $g_1, \dots, g_p$ definite su $\widetilde{V}'$ tali che

$$\widetilde{\gamma}(x) = \sum_{i=1}^{p} g_i(x)\, '\gamma_i(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \widetilde{V}'. \tag{1}$$

Si ha dalla (1):

$$^{\sigma}\widetilde{\gamma}(x) = \sum_{i=1}^{p} {}^{\sigma}g_i(x)\, \gamma_i(x) \quad \text{ove} \quad \gamma_i = {}^{\sigma\prime}\gamma_i$$

e perciò

$$\gamma(x) = \sum_{i=1}^{p} {}^{\sigma}g_i(x)\, \gamma_i(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in V$$

ove $^{\sigma}g_i$ sono funzioni analitiche reali e $\gamma_i \in {}^{\sigma}\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$, $i = 1, \dots, p$, e questo prova la prima parte del lemma.

Sia invece $\gamma \in \Gamma_V^c(F)$, per il teorema 12.2 di [9], γ è restrizione di una sezione continua $\widetilde{\gamma}$ definita su un intorno $\widetilde{V}'$ di V in $\widetilde{V}$.

Usando gli stessi argomenti di H. Grauert ([4] teorema 7 a) si prova che esistono delle funzioni continue $h_1^* \dots h_p^*$ tali che $\widetilde{\gamma}(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i^*(x)\, '\gamma_i(x)$ per $x \in \widetilde{V}'$; si ha dunque $\gamma(x) = \sum_{i=1}^{p} {}^{\sigma}h_i^*(x)\, \gamma_i(x)$ per ogni $x \in V$ ed il lemma è completamente dimostrato.

LEMMA 4. *Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato vettoriale analitico reale, V uno spazio analitico reale coerente ed $\widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{V}$ un complessificato di F tale che $\widetilde{V}$ sia uno spazio di Stein.*

Sia $\|\ \|$ una norma su $\widetilde{F}$.

Comunque si fissino un compatto $K \subset V$, una sezione continua $\gamma \in \Gamma^c_K(F)$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma' \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$ tale che: $\| \gamma - \gamma' \|_K < \varepsilon$.

PROVA. Per il teorema 12.2 di [9] possiamo considerare γ come la restrizione di una sezione definita su un intorno U di K in V. Per il lemma 3 esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$ e delle funzioni continue reali $f_1, \dots, f_p$ su U tali che $\gamma(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\gamma_i(x)$ per ogni $x \in U$.

In [12] si è provato che ogni f_i può essere approssimata uniformemente sui compatti con funzioni olomorfe σ-invarianti definite su $\widetilde{V}$.

Fissato $\varepsilon > 0$ si possono quindi trovare delle funzioni olomorfe su $\widetilde{V}$: $g_1, \dots, g_p$ tali che:

$$ {}^\sigma g_i = g_i, \qquad \| \gamma - \sum_{i=1}^{p} g_i \gamma_i \|_K < \varepsilon $$

e questo conclude la dimostrazione del lemma.

OSSERVAZIONE 2. Analogamente a quanto fatto per le funzioni olomorfe, vedi [12], anche per le sezioni di un fibrato vettoriale si può definire la ε-topologia. Dalla dimostrazione del lemma 4 segue che le sezioni continue di F si possono approssimare anche nella ε-topologia con elementi di ${}^\sigma\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$.

Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ uno spazio fibrato analitico vettoriale sullo spazio analitico reale V e $\| \ \|$ una norma su F.

Per ogni insieme U di V ed ogni funzione continua $\varepsilon: U \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$) poniamo: $W^U_{\varepsilon(x)} = \{\gamma \in \Gamma^c_U(F) \mid \| \gamma(x) \| < \varepsilon(x)\}$.

Al variare delle funzioni $\varepsilon(x)$ gli insiemi $W^U_{\varepsilon(x)}$ formano un sistema fondamentale di intorni della sezione nulla per una topologia che chiameremo W-topologia.

Notiamo che in generale $\Gamma^c_U(F)$ con la W-topologia non è uno spazio vettoriale topologico (il prodotto per gli scalari può non essere continuo) ma soltanto un gruppo topologico. Tale gruppo topologico non è metrizzabile se U non è compatto ed è uno spazio di Baire (vedi ad esempio [0]).

Ricordiamo il seguente teorema di approssimazione dovuto ad H. Whitney ([15]):

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon: U \to \mathbb{R}^+$, $g: U \to \mathbb{R}$ due funzioni continue; esiste allora un'applicazione analitica $f: U \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$, $\forall x \in U$.

Sia V un ($\mathbb{R}$)-spazio $\widehat{V}$ un sottospazio di dimensione n, esiste un omeomorfismo analitico $\varphi: \widehat{V} \to V'$, che è restrizione di una applicazione analitica $\psi: V \to \mathbb{R}^{2n+1}$, di $\widehat{V}$ su un insieme analitico V' di $\mathbb{R}^{2n+1}$ (vedi [12]).

Per ogni funzione continua f definita su un aperto U di $\widehat{V}$ esiste un aperto U' di $\mathbb{R}^{2n+1}$ ed una funzione continua $f' : U' \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f = f' \circ \psi_{|U}$.

Si può dunque concludere col seguente:

TEOREMA 2. *Sia V un $(\mathbb{R})$-spazio, $\widehat{V}$ un suo insieme analitico di dimensione finita, U un aperto di $\widehat{V}$, $\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue; esiste allora una funzione analitica definita su un intorno $\widetilde{U}$ di U in V:*

$$f : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } |f(x) - g(x)| < \varepsilon(x), \quad \forall\, x \in U.$$

Dal lemma 3 e dal teorema 2 segue il:

LEMMA 5. *Sia $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato vettoriale analitico reale e V uno spazio analitico reale coerente di dimensione finita.*

Sia D un chiuso di V e $p_D : \Gamma_V(F) \longrightarrow \Gamma_D^c(F)$ l'omomorfismo di restrizione.

Supponiamo sia fissata su F una norma e su $\Gamma_V(F)$, $\Gamma_D^c(F)$ si considerino le W-topologie corrispondenti; in queste ipotesi $p_D(\Gamma_V(F))$ è denso in $\Gamma_D^c(F)$.

Se invece $E \subset V$ è aperto allora $\Gamma_E(F)$ è denso in $\Gamma_E^c(F)$.

PROVA. Sia $\gamma \in \Gamma_D^c(F)$, per il teorema 12.2 di [9] γ è la restrizione di una sezione $'\gamma \in \Gamma_V^c(F)$.

Per il lemma 3 esistono delle funzioni, continue su V, a valori reali, $f_1, \dots, f_q$ e delle sezioni di $\Gamma_V(F) : \gamma_1, \dots, \gamma_q$ tali che

$$'\gamma(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\, \gamma_i(x), \qquad \forall\, x \in V.$$

Data una funzione continua $'\varepsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ =]\,0, +\infty\,[$) esiste un'applicazione continua $\varepsilon : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ che prolunga $'\varepsilon$.

Per il teorema 2 esistono delle funzioni analitiche su $V : h_1, \dots, h_q$ tali che:

$$\left\| \sum_{i=1}^{q} h_i(x)\, \gamma_i(x) - {}'\gamma(x) \right\| < \varepsilon(x), \qquad \forall\, x \in V;$$

si è così provata la prima parte del lemma.

La seconda parte è conseguenza immediata del lemma 3 e del teorema 2.

OSSERVAZIONE 3. H. Whitney dimostra in [15] il teorema seguente: sia K un chiuso di $\mathbb{R}^n$ ed $f; K \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ definita su un intorno di K; esiste allora una funzione $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ che coincide con f su K ed è analitica fuori di K.

Da questo risultato e dal lemma 3 si possono dedurre dei teoremi di prolungamento analitico di una sezione C^∞ di un fibrato vettoriale analitico.

Lasciamo i dettagli al lettore non essendo interessati nel seguito a questa questione.

Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico di gruppi (reale o complesso), U un insieme di V e $\gamma \in \Gamma_U^c(F)$. γ dicesi omotopa continuamente (od analiticamente) alla sezione identica e_U se esiste un'applicazione continua $\widehat{\gamma}: U \times I \longrightarrow F, I = [0, 1]$, tale che $\widehat{\gamma}_{|U\times\{0\}} = \gamma, \widehat{\gamma}_{|U\times\{1\}} = e_U$ e $\gamma_{|U\times\{t\}}$ è una sezione (analitica) per ogni $t \in I$.

La sezione γ dicesi localmente omotopa ad e_U se ristretta ad ogni compatto K di U è omotopa ad e_K.

Dato un fibrato analitico reale di gruppi (F, π, V, L, L^*), con V spazio analitico reale coerente, ed un suo complessificato $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ considereremo in questo paragrafo anche i due fibrati vettoriali associati $\check{F} \xrightarrow{\check{\pi}} V$, $\check{\widetilde{F}} \xrightarrow{\check{\widetilde{\pi}}} \widetilde{V}$ e supporremo che:

a) $\check{\widetilde{F}} \xrightarrow{\check{\widetilde{\pi}}} \widetilde{V}$ sia un complessificato di $\check{F} \xrightarrow{\check{\widetilde{\pi}}} V$ (condizione questa che può essere soddisfatta, per quanto provato nell'osservazione 1 di questo paragrafo, se $\widetilde{L}^*$ opera effettivamente su $\widetilde{L}$ ed $L^* = \{l \in \widetilde{L}^* \mid \alpha^*(l) = l\}$).

Considereremo nel seguito di questo paragrafo verificata la condizione *a*).

Supponiamo poi fissato su $\check{\widetilde{F}}$ una norma σ-invariante $\| \; \|$ (tale norma esiste per il lemma 1).

Si è definita l'applicazione analitica $\hat{\delta}: \check{\widetilde{F}} \longrightarrow \widetilde{F}$ e non è restrittivo supporre (vedi osservazione 1 di questo paragrafo), che si abbia:

b) $\sigma \circ \hat{\delta} = \hat{\delta} \circ \check{\sigma}$, ove $\check{\sigma}: \check{\widetilde{F}} \longrightarrow \check{\widetilde{F}}$ è l'antiinvoluzione di $\check{\widetilde{F}}$.

Chiameremo complessificazione adattata di F una complessificazione $\widetilde{F}$ per cui valga *a*) e *b*).

La norma assegnata su $\check{\widetilde{F}}$ induce la topologia della convergenza uniforme sui compatti, negli spazi $\Gamma_T^c(\check{\widetilde{F}})$, per ogni insieme T di V. L'applicazione $\delta: U(O) \longrightarrow U(E)$ definisce una corrispondenza biunivoca $\delta_*: \Gamma_T^c(U(O)) \longrightarrow \Gamma_T^c(U(E))$ fra le famiglie delle sezioni continue su T a valori in $U(O)$ ed in $U(E)$.

Sia $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema fondamentale di intorni della sezione nulla $\check{O}_T \in \Gamma_T(\widetilde{F})$; possiamo supporre $B_\lambda \subset \Gamma_T^c(U(O))$, per ogni $\lambda \in \Lambda$ se T è compatto.

La famiglia di insiemi $\{\delta_*(B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un sistema fondamentale di intorni dell'identità di $\Gamma_T^c(\widetilde{F})$ per una topologia che chiameremo topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Se invece $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un sistema fondamentale di intorni di O_T per la W-topologia gli insiemi $\{\delta_*(B_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ sono un sistema fondamentale di intorni dell'identità per una topologia su $\Gamma_T^c(\widetilde{F})$ che diremo W-topologia.

Dalla locale compattezza di $\widetilde{V}$ si deduce per ogni aperto T di $\widetilde{V}$ che le topologie ora definite su $\Gamma_T^c(\widetilde{F})$ non dipendono nè dalla norma scelta su $\check{\widetilde{F}}$ nè dalle coordinate normali adottate.

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico reale di gruppi, V uno spazio analitico reale coerente, $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}, \widetilde{L}^*)$ una complessificazione adattata di F e $\widetilde{V}$ uno spazio di Stein.*

Sia K un compatto di V e $\gamma \in \Gamma_K^c(F)$ una sezione continuamente omotopa alla sezione identica.

In queste ipotesi esiste una successione di sezioni $\{\gamma_n\}_{n \in N}$, $\gamma^n \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$ tali che $\gamma_{n|K} \to \gamma$ ed inoltre ogni γ_n è olomorficamente omotopa alla sezione identica.

PROVA. La dimostrazione consiste nelle seguenti osservazioni:

i) essendo γ continuamente omotopa alla sezione identica essa è nella componente connessa di e_K (rispetto alla topologia della convergenza uniforme sui compatti di $\Gamma_K^c(\widetilde{F})$).

Esiste quindi un numero finito $\widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_q$ di elementi di $\delta_*(\Gamma_K^c(U(O)))$ tali che $\gamma = \widehat{\gamma}_1 \cdot \widehat{\gamma}_2 \cdots \widehat{\gamma}_q$.

ii) Sia $'\gamma_i = \delta_*^{-1}(\widehat{\gamma_i})$, $i = 1, \dots, q$.

Per il lemma 4 esistono degli elementi $\gamma_n^i \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{V}}(\check{\widetilde{F}})$, $i = 1, \dots, q$ $n \in N$, tali che: $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_{n|K}^i = {}'\gamma_i$ ed i γ_n^i sono analiticamente omotopi all'identità.

iii) Gli elementi $\gamma_n = \delta_*(\gamma_n^1 \cdot \gamma_n^2 \cdots \gamma_n^q)$ sono analiticamente omotopi alla sezione identica e si ha $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_{n|K} = \gamma$.

L'applicazione δ_* commuta con le antiinvoluzioni quindi $\gamma_n \in {}^\sigma\Gamma_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$ per ogni $n \in N$ e la proposizione è provata

OSSERVAZIONE 4. Sia (F, π, V, L, L^*) un fibrato analitico di gruppi, V uno spazio analitico reale coerente di dimensione finita, H un insieme di V ed e_H la sezione identica di F su H.

Sia $\Gamma_H^c(F)$ dotato della m-topologia e $\gamma \in \Gamma_H^c(F)$ un elemento che sia nel sottogruppo generato da $\delta_*(\Gamma_H^c(U(O)))$.

In queste ipotesi se H è aperto $\gamma \in \overline{\Gamma_H(F)}$, ove la chiusura è fatta rispetto alla W-topologia. Se invece H è chiuso γ si può approssimare arbitrariamente, nella W-topologia, con elementi di $\Gamma_V(F)$.

Per dimostrare questi fatti basta ripetere gli argomenti i), ii) iii) della proposizione 1 sostituendo i risultati del lemma 4 con quelli del lemma 5.

§ 4. Classificazione degli spazi fibrati analitici reali.

Premettiamo alcune definizioni e fatti che sfrutteremo nel seguito.

Siano X, Y due spazi topologici $\mathcal{F}(X, Y)$ la famiglia delle applicazioni continue di X in Y ed $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza : $f \overset{\mathcal{R}}{\sim} g \Longleftrightarrow f$ è omotopa a g.

Noteremo con $\pi(X, Y)$ l'insieme $\mathcal{F}(X, Y)_{/\mathcal{R}}$ e con $p: \mathcal{F}(X, Y) \longrightarrow \pi(X, Y)$ la proiezione canonica.

Se X, Y sono spazi analitici (reali o complessi) ed $\mathcal{F}_a(X, Y)$ è la famiglia delle applicazioni analitiche di X in Y indicheremo con $\mathcal{R}_a$ la relazione di equivalenza : $f \overset{\mathcal{R}_a}{\sim} g \Longleftrightarrow$ esiste un'applicazione continua $\varphi: X \times \times I \longrightarrow Y$, $I = [0, 1]$, tale che $\varphi_{|t=0} = f$, $\varphi_{|t=1} = g$, $\varphi_{|X \times \{t\}}$ è analitica per ogni $t \in I$.

Noteremo con $\pi_a(X, Y)$ l'insieme quoziente $\mathcal{F}_a(X, Y)_{/\mathcal{R}_a}$ e con p_a la proiezione canonica.

L'inclusione $\mathcal{F}_a(X, Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X, Y)$ induce un'applicazione $h: \pi_a(X, Y) \longrightarrow \longrightarrow \pi(X, Y)$ che, in generale non è iniettiva nè surgettiva.

Diremo f, g omotope (od analiticamente omotope) se $p(f) = p(g)$ (oppure $p_a(f) = p_a(g)$).

Sia $(F_1, \pi_1, V_1, L, L^*)$ un fibrato topologico ed $f: V_2 \longrightarrow V_1$ un'applicazione continua dello spazio topologico V_2 nello spazio V_1. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di V_1 e $\{g_{i,j}: U_i \cap U_j \longrightarrow L^*\}_{i,j \in I}$ un cociclo che individua il fibrato F_1; $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di V_2 e $\{g^*_{i,j} = g_{i,j} \circ f\}_{i,j \in I}$ è un cociclo su V_2.

Il fibrato $(F_2, \pi_2, V_2, L, L^*)$ associato al cociclo $\{g^*_{i,j}\}_{i,j \in I}$ è detto immagine inversa del fibrato F_1 tramite f e verrà notato $f^*(F_1)$. Si prova che $f^*(F_1)$ non dipende dal cociclo $\{g_{i,j}\}$ scelto.

Ricordiamo i fatti seguenti :

a) un fibrato $(F_2', \pi_2', V_2, L, L^*)$ è equivalente ad $f^*(F_1)$ se, e solo se, esiste un'applicazione fibrata $g: F_2' \longrightarrow F_1$ tale che $\pi_1 \circ g = f \circ \pi_2'$.

b) se $f_1, f_2: V_2 \longrightarrow V_1$ sono omotope allora $f_1^*(F_1)$ è equivalente ad $f_2^*(F_1)$.

c) per ogni gruppo di Lie compatto L^* ed ogni $n \in N$ esiste un fibrato analitico reale $(B_n, \pi_n, X_n, L^*, L^*)$ tale che per ogni spazio triangolabile V, di dimensione al più n, la corrispondenza che associa ad $\{f\} \in \pi(V, X_n)$: $f^*(B_n)$ stabilisca un'applicazione bigettiva fra $\pi(V, X_n)$ e le classi di fibrati principali su V con gruppo strutturale L^*.

Il fibrato B_n si dice fibrato universale nella dimensione n per L^* e B_n, X_n sono varietà analitiche reali omogenee.

Se V è uno spazio paracompatto ed L^* è un gruppo di Lie esiste un fibrato topologico principale $B_U \xrightarrow{\pi_U} X_U$ di fibra L^* tale che $\pi(V, X_U)$ sia in corrispondenza biunivoca con le classi di fibrati principali su V aventi fibra L^*.

Il fibrato B è detto fibrato universale rispetto ad L^*.

d) Se L^* è un gruppo di Lie connesso ogni fibrato topologico avente base paracompatta e gruppo strutturale L^* ammette un fibrato topologico equivalente avente per gruppo strutturale un sottogruppo compatto di L^*.

Per la dimostrazione di questi fatti vedasi [9] e [7].

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio di dimensione n ed $f: V \longrightarrow X_n$ un morfismo, allora $f^*(B_n)$ è un fibrato analitico.

Non si può affermare, a priori, che per ogni fibrato analitico (F, π, V, L^*, L^*) esista un morfismo f tale che $F = f^*(B_n)$.

Diremo *fortemente analitici* i fibrati F per cui esiste tale morfismo.

Avremo bisogno nel seguito del seguente:

TEOREMA 3. *Sia V un $(\mathbb{R})$-spazio e $\widetilde{V}$ uno spazio di Stein su cui sia definita l'antiinvoluzione $\sigma: \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}$ tale che $V = \{x \in \widetilde{V} \mid \sigma(x) = x\}$. Esiste allora una triangolazione di $\widetilde{V}$ che ha V come sottocomplesso simpliciale; ne segue che V ha in $\widetilde{V}$ un sistema fondamentale di intorni contrattili su V.*

Il teorema 3 è conseguenza dei risultati di Giesecke (vedi [3]), oppure può essere dedotto, nel caso in cui $\dim \widetilde{V} < +\infty$, dai risultati di Lojasiewicz ([8]) mediante le seguenti osservazioni:

i) esiste un omeomorfismo analitico $\varphi: \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}'$ di $\widetilde{V}$ su un insieme analitico $\widetilde{V}'$ di $\mathbb{C}^m$, $m \in N$, tale che: $\overline{\varphi(x)} = \varphi(\sigma(x))$, $\forall\, x \in \widetilde{V}$.

ii) esiste un numero finito di funzioni olomorfe $f_1, \ldots, f_q$ definite su $\mathbb{C}^m$ tali che $\widetilde{V}' = \{y \in \mathbb{C}^m \mid f_1(y) = \ldots = f_q(y) = 0\}$

iii) da ii) segue che $\widetilde{V}'$ è decomponibile in un numero finito di insiemi semianalitici uno dei quali è $\widetilde{V}' \cap \mathbb{R}^m = \varphi(V)$.

Dai risultati di [8] segue ora l'asserto.

L'osservazione i) è provata in [10], per la ii) vedi ad esempio [1].

TEOREMA 4. *Sia V un* ($\mathbb{R}$)*-spazio di dimensione finita, X una varietà analitica reale; l'applicazione naturale $h : \pi_a(V, X) \longrightarrow \pi(V, X)$ è bigettiva.*

PROVA 1). Possiamo supporre (vedi [10]) che X sia una sottovarietà analitica chiusa di $\mathbb{R}^m$.

Sia B il fibrato normale di X, $X \subset \mathbb{R}^m$; la metrica di $\mathbb{R}^m$, ristretta ad X è analitica quindi B è un fibrato analitico. Esiste perciò un omeomorfismo bianalitico $\chi : B \longrightarrow U$, di B su un intorno aperto U di X in $\mathbb{R}^m$, tale che $\chi(\gamma_0) = X$, ove γ_0 è la sezione nulla di B.

Si può costruire un'applicazione continua $\psi : U \times I \longrightarrow U$ tale che: $\psi_{|\,t=0} = id$, $\psi(U \times \{1\}) = X$, $\psi_{|\,X \times \{t\}} = id$ e $\psi_{|\,U \times \{t\}}$ è analitica per ogni $t \in I$; basta infatti porre $\psi(x, t) = \chi((1 - t)(\chi^{-1}(x)))$, $\forall\, x \in U$, $t \in I$. Per ogni $x \in X$ esiste $\varepsilon(x) > 0$ tale che il disco $S(x, \varepsilon(x))$ di $\mathbb{R}^m$ di centro x e raggio $\varepsilon(x)$, rispetto alla metrica di $\mathbb{R}^m$, sia contenuto in U.

Sia W uno spazio analitico reale, vogliamo provare che, date due applicazioni continue $f, g : W \longrightarrow X$, tali che: $d(f(y), g(y)) < \varepsilon(f(y))$, per ogni $y \in W$, allora f è omotopa a g e, se f e g sono analitiche, esse sono analiticamente omotope.

Per ogni $y \in W$ il segmento che congiunge $f(y)$ con $g(y)$ è contenuto in U; si può perciò definire l'omotopia

$$\varphi(x, t) = \psi(((1 - t) f(x) + t \cdot g(x)) \times \{1\}), \quad \forall\, x \in W, \quad t \in I.$$

Ciò prova l'asserto.

2) Proviamo che $h : \pi_a(V, X) \longrightarrow \pi(V, X)$ è surgettiva. L'applicazione ψ, definita nel punto 1), è continua quindi per ogni $x \in X$ esiste $\varrho(x) > 0$, $\varrho(x) < \varepsilon(x)$, tale che:

$$d(x, y) < \varrho(x) \Longrightarrow d(x, \psi(y, \{1\})) < \varepsilon(x).$$

Sia $f : V \longrightarrow X$ un'applicazione continua; per il teorema 2 esiste un'applicazione analitica $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $d(f(x), g(x)) < \varrho(f(x))$, $\forall\, x \in V$.

Posto $g' = \psi_{|\,t=1} \circ g$ l'applicazione $g' : V \longrightarrow X$ è analitica ed inoltre $d(f(x), g'(x)) < \varepsilon(f(x))$, $\forall\, x \in V$; per quanto provato nel punto 1) di questo teorema g' è omotopa ad f e quindi h è surgettiva.

Dimostriamo che h è iniettiva.

Siano $f, g : V \longrightarrow X$ due applicazioni analitiche per cui esista un'applicazione continua $\eta : V \times I \longrightarrow X$ tale che $\eta_{|\,t=0} = f$, $\eta_{|\,t=1} = g$. Sia $I' =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$,

$W = V \times I'$; W è un ($\mathbb{R}$)-spazio di dimensione finita; $V \times I$ è un chiuso di W ed esiste un'estensione continua $\eta' : W \to X$ di η a W.

Per il teorema 2 esiste un'applicazione analitica $\eta'_a : W \to \mathbb{R}^m$ tale che: $d(\eta'(p), \eta'_a(p)) < \varrho(\eta'(p))$; $\forall p \in W$, da cui $d(\eta_a(p), \eta'(p)) < \varepsilon(\eta'(p))$, ove $\eta_a = \psi_{|t=1} \circ \eta'_a$.

Per la parte 1) di questo teorema si ha:

$$f \overset{\mathcal{R}_a}{\sim} \eta_{a\,|\,t=0} \overset{\mathcal{R}_a}{\sim} \eta_{a\,|\,t=1} \overset{\mathcal{R}_a}{\sim} g \text{ ove } \mathcal{R}_a \text{ è la relazione:}$$

« essere analiticamente omotopa ».

Il teorema è così completamente dimostrato.

COROLLARIO 1. *Sia V un ($\mathbb{R}$)-spazio ogni cui componente connessa abbia dimensione finita, L^* un gruppo di Lie sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie connesso* (2) *ed (F, π, V, L^*, L^*) un fibrato topologico.*

Esiste un fibrato fortemente analitico $(F^*, \pi^*, V, L^*, L^*)$ topologicamente equivalente ad F.

PROVA. Per quanto provato in [9] esiste un fibrato F'' topologicamente equivalente ad F avente per gruppo strutturale un gruppo di Lie compatto.

Evidentemente basta dimostrare il corollario nel caso in cui V sia connesso; sia $\dim V = n$. Per il teorema 3 V è triangolabile, quindi esiste un'applicazione $f : V \to X_n$ tale che $f^*(B_n) = F''$ (vedi c)).

Per il teorema 4 esiste un'applicazione analitica $g : V \to X_n$, omotopa ad f; il fibrato $g^*(B_n)$ è fortemente analitico ed è equivalente ad F. Il corollario è così provato.

Sia V uno spazio analitico reale coerente ed L^* un gruppo di Lie reale; indicheremo con $\mathcal{B}_c(V, L^*)$, $\mathcal{B}_a(V, L^*)$ le famiglie dei fibrati principali topologici, rispettivamente analitici di base V e gruppo strutturale L^*.

Noteremo con $\widehat{\mathcal{R}}_c$, $\widehat{\mathcal{R}}_a$ la relazione di equivalenza topologica ed analitica fra due fibrati e sia

$$\mathcal{B}^*_c(V, L^*) = \mathcal{B}_c(V, L^*)/\widehat{\mathcal{R}}_c, \; \mathcal{B}^*_a(V, L^*) = \mathcal{B}_a(V, L^*)/\widehat{\mathcal{R}}_a .$$

In generale è definita un'applicazione $\vartheta : \mathcal{B}^*_a(V, L^*) \to \mathcal{B}^*_c(V, L^*)$ che associa ad ogni classe di fibrati analitici la classe di fibrati topologici che la contiene.

---

(2) Ogni sottogruppo di Lie di un gruppo di matrici (e quindi ogni gruppo di Lie compatto) soddisfa questa condizione.

Indicheremo con $\mathcal{H}_c(V, L^*)$, $\mathcal{H}_a(V, L^*)$, od anche $\mathcal{H}_c(L^*)$, $\mathcal{H}_a(L^*)$ i fasci dei germi delle applicazioni continue od analitiche di V a valori in L^*.

È noto (vedi ad esempio [2]) che vi sono delle corrispondenze biunivoche:

$$\zeta_c : H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*)) \longrightarrow \mathcal{B}_c^*(V, L^*)$$

$$\zeta_a : H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) \longrightarrow \mathcal{B}_a^*(V, L^*).$$

Sia $\eta : H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) \longrightarrow H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*))$ l'applicazione indotta dall'inclusione $\mathcal{H}_a(L^*) \longrightarrow \mathcal{H}_c(L^*)$, vale allora:

$$\zeta_c \circ \eta = \vartheta \circ \zeta_a .$$

Dalla bigettività di ζ_a, ζ_c si deduce quindi:
η è iniettiva, surgettiva, bigettiva se e solo e ϑ è iniettiva, surgettiva, bigettiva.

PROPOSIZIONE 2. *Sia V uno spazio analitico reale coerente, L^* un gruppo di Lie reale per cui esista un complessificato $\widetilde{L}^*$. In queste ipotesi $\vartheta : \mathcal{B}_a^*(V, L^*) \longrightarrow \mathcal{B}_c^*(V, L^*)$ è iniettiva.*

PROVA. 1) Ripetendo la dimostrazione del teorema 11 di [5] si prova che basta dimostrare che ogni fibrato analitico (F, π, V, L^*, L^*) topologicamente banale è anche analiticamente banale.

Per ipotesi L^* ha un complessificato $\widetilde{L}^*$ quindi, per il corollario 1 del paragrafo 2, esiste un complessificato $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{L}^*, \widetilde{L}^*)$ di F.

Per la costruzione fatta nel teorema 1 $\widetilde{F}$ può essere preso in modo che esista un ricoprimento $\{\widetilde{U}_i\}_{i\in I}$ di V con aperti di $\widetilde{V}$, ed un cociclo σ-invariante $\widetilde{g}_{i,j} : \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \longrightarrow \widetilde{L}^*$ tale che $\{\widetilde{g}_{i,j}\}_{i,j\in I}$ individui il fibrato olomorfo $\widetilde{\pi}^{-1}(\bigcup_{i\in I} \widetilde{U}_i)$ e $\{\widetilde{g}_{i,j}\}_{i,j\in I}$, ristretto al ricoprimento $\{U_i = \widetilde{U} \cap V\}_{i\in I}$, individui F.

Per ipotesi F è topologicamente banale quindi esistono delle applicazioni continue $h_i : U_i \longrightarrow L^*$ tali che:

$$\widetilde{g}_{i,j \mid U_i \cap U_j} = h_i \circ h_j^{-1}, \quad \forall\, i, j \in I. \tag{1}$$

La (1) prova che $\widetilde{\pi}^{-1}(V) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} V$ è un fibrato topologicamente banale.

2) Per il teorema 3 esiste un intorno $\widetilde{V}'$ di V in $\widetilde{V}$ che è contrattile su V. Sia $B_U \xrightarrow{\pi_U} X_U$ il fibrato universale rispetto ad $\widetilde{L}^*$; esiste allora un'applicazione continua $f : \widetilde{V}' \longrightarrow X_U$ tale che $f^*(B_U)$ è topologicamente equivalente al fibrato $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}') = \widetilde{F}' \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{V}'$.

L'applicazione $\widehat{f} = f_{|V}$ induce il fibrato $\widehat{f}^*(B_U)$ che è topologicamente equivalente a $\widetilde{\pi}^{-1}(V)$ e quindi è banale. Il fibrato B_U è universale perciò dalla banalità di $\widetilde{\pi}^{-1}(V)$ segue che $\widehat{f}$ è omotopa ad un'applicazione costante. Si è provato che esistono delle applicazioni continue $\psi : \widetilde{V}' \times I \longrightarrow \widetilde{V}'$ con $\psi_{|t=0} = \text{id.}$, $\psi_{|V \times \{t\}} = id$, $\forall\, t \in I$, $\psi(\widetilde{V} \times \{1\}) = V$ $\varphi : V \times I \longrightarrow X_U$ con $\varphi_{|t=0} = \widehat{f}$, $\varphi(V \times \{1\}) = p \in X_U$.

Sia $\chi : \widetilde{V}' \times I \longrightarrow X_U$ definita da:

$$\chi(x, t) = \begin{cases} f(\psi(x, 2t)) \text{ per } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \varphi(\psi(x \times 1) \times (2t - 1)) \text{ per } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La χ stabilisce un'omotopia fra f ed un'applicazione costante; il fibrato $f^*(B_U)$ è dunque topologicamente banale.

3) Sia $\widetilde{V}''$ un intorno aperto di V in $\widetilde{V}'$ che sia uno spazio di Stein (tale intorno esiste, vedi [10]).

Il fibrato $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}')$ è topologicamente banale per quanto provato nel punto 2), quindi $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}'')$ è topologicamente banale. Per un noto risultato di H. Grauert [6]) il fibrato $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}'') \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{V}''$ risulta olomorficamente banale. Il fibrato F è principale quindi è analiticamente banale se, e solo se, la sezione identica è analitica. Essendo $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{V}'')$ olomorficamente banale la sua sezione identica γ'' è olomorfa su $\widetilde{V}''$; $\gamma''_{|V}$ è dunque analitica e ciò conclude la dimostrazione.

Siamo ora in grado di provare il

TEOREMA 5. *Sia V uno spazio analitico reale coerente ogni cui componente connessa abbia dimensione finita, L^* un gruppo di Lie reale e $\vartheta : \mathcal{B}_a^*(V, L^*) \longrightarrow \mathcal{B}_c^*(V, L^*)$ l'applicazione fra le classi di fibrati principali di base V e gruppo strutturale L^*.*

L'applicazione ϑ è iniettiva e se L^* è sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie connesso ϑ è bigettiva.

PROVA. La surgettività di ϑ è stata provata nel corollario 1 di questo paragrafo.

Come si è osservato prima della proposizione 2, dimostrare l'iniettività di ϑ equivale a provare l'iniettività di $\eta : H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) \longrightarrow H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*))$. Siano e_a, e_c gli elementi neutri di $H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)), H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*))$. Come visto nella proposizione 2 basta allora dimostrare che $\eta(\alpha) = e_c \Longrightarrow \alpha = e_a$.

Si può inoltre supporre V sia connesso di dimensione finita.

La proposizione 2 dimostra che η è iniettiva se L^* è complessificabile; proviamo che η è iniettiva se L^* è connesso.

Se L^* è un gruppo di Lie connesso esiste un sottogruppo discreto H, contenuto nel centro, tale che L^*/H sia complessificabile (vedi [13]).

Si ha il diagramma commutativo a righe esatte (vedi [2] pag. 182):

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\to \widehat{H}^0(V, \mathcal{H}_a(L^*/H)) & \xrightarrow{q_1} & H^1(V, \mathcal{H}_a(H)) & \xrightarrow{q_2} & H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) & \xrightarrow{q_3} & H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*/H)) \to \\
\downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle i_3} & & \downarrow{\scriptstyle i_4} \\
\to \widehat{H}^0(V, \mathcal{H}_c(L^*/H)) & \xrightarrow{q_1'} & H^1(V, \mathcal{H}_c(H)) & \xrightarrow{q_2'} & H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*)) & \xrightarrow{q_3'} & H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*/H)) \to
\end{array}
$$

ove $\widehat{H}^0(\ldots)$ indica l'insieme delle classi di sezioni (continue od analitiche) a meno di omotopia (continua od analitica (nel senso di [2])) [3].

Valgono i fatti seguenti:

I) i_1 è surgettiva per il teorema 4.

II) i_2 è bigettiva perchè H è discreto.

III) i_4 è bigettiva perchè L^*/H è complessificabile e si può applicare la proposizione 2.

Sia $\alpha \in H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*))$, $i_3(\alpha) = e_c$.

Per III) $q_3(\alpha)$ è l'elemento neutro, quindi esiste $\alpha_1 \in H^1(V, \mathcal{H}_a(H))$ tale che $q_2(\alpha_1) = \alpha$. Si ha $q_2'(i_2(\alpha_1)) = e_c$ quindi esiste $\alpha_2 \in \widehat{H}^0(V, \mathcal{H}_c(L^*/H))$ tale che $q_1'(\alpha_2) = i_2(\alpha_1)$.

Per I) esiste $\alpha_3 \in \widehat{H}^0(V, \mathcal{H}_a(L^*/H))$ tale che $\alpha_2 = i_1(\alpha_3)$.

Si ha allora, per II), $q_1(\alpha_3) = \alpha_1$ onde $\alpha = q_2(q_1(\alpha_3)) = e_a$ e ciò prova l'iniettività di i_3.

Dimostriamo ora che η è iniettiva qualsiasi sia L^*.

Sia L_0^* la componente connessa dell'identità di L^*; si ha la successione esatta $0 \to L_0^* \to L^* \to H^* \to 0$ ove H^* è discreto. Il sottogruppo L_0^* è normale, si ha perciò, (vedi [2]), il diagramma commutativo a righe esatte

$$
\begin{array}{ccccccc}
\to H^0(V, \mathcal{H}_a(H^*)) & \to & H^1(V, \mathcal{H}_a(L_0^*)) & \to & H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) & \to & H^1(V, \mathcal{H}_a(H^*)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow \\
\to H^0(V, \mathcal{H}_c(H^*)) & \to & H^1(V, \mathcal{H}_c(L_0^*)) & \to & H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*)) & \to & H^1(V, \mathcal{H}_c(H^*)).
\end{array}
$$

Ragionando come per il diagramma (1) si prova che η è iniettivo.

---

(3) Due sezioni sono analiticamente omotope in questa accezione se l'omotopia $\gamma : V \times I \to L^*/H$ fra le due sezioni è analitica sullo spazio $V \times I$.

Il teorema è dunque completamente dimostrato.

Diremo che un fibrato (F, π, V, L^*, L^*) soddisfa alla condizione $E)$ se V è uno spazio analitico reale coerente, ogni cui componente connessa ha dimensione finita, ed L^* è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie connesso.

COROLLARIO 2. *Sia* (F, π, V, L^*, L^*) *un fibrato principale analitico soddisfacente alla condizione* $E)$. *Valgono i fatti seguenti:*

1) *il gruppo* L^* *è analiticamente riducibile al sottogruppo* $\widehat{L^*}$ *se e solo se è topologicamente riducibile ad* $\widehat{L^*}$.

2) F *ha una sezione continua se e solo se ha una sezione analitica.*

3) *se* V *od* F *sono contrattili* F *è analiticamente banale*

4) *se* V *è contrattile su* $V', V' \subset V$, *ogni fibrato analitico* (F', π, V', L^*, L^*) *su* V' *si estende in modo unico, a meno di isomorfismi analitici, ad un fibrato analitico* (F, π, V, L^*, L^*).

Istituto Matematico
Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[0] A. ANDREOTTI, « *Lezioni sugli spazi vettoriali topologici* ». Note ciclostilate, Pisa 1965-66.
[1] S. COEN, « *Sul rango dei fasci coerenti* ». Boll. U.M.I. s. III, v. XXII (1967) pp. 373-382.
[2] J. FRENKEL, « *Cohomologie non abelienne et espaces fibrés* ». Bull. Soc. Math. France 85 (1957) pp. 136-220.
[3] B. GIESECKE, « *Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume* ». Math. Zeitsch. 83 (1964) pp. 177-213.
[4] H. GRAUERT, « *Approximationssätz fur holomorphe Funktionen mit Werten in Komplexen Räumen* ». Math. Annalen 133 (1957) pp. 139-159.
[5] H. GRAUERT, « *Holomorphe Funktionen mit Werten in Komplexen Lieschen Gruppen* ». Math. Annalen 133 (1957) pp. 450-472.
[6] H GRAUERT, « *Analytische Faserungen uber holomorph-vollstandingen Räumen* ». Math. Annalen 135 (1958) pp. 263-273.
[7] F. HIRZEBRUCH, «*Topological methods in algebraic geometry*». Springer Verlag, Berlino 1966.
[8] S. LOJASIEWICZ, « *Triangulation of semi-analytic sets* » Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XVIII (1964) pp. 449-474.
[9] N. STEENROD, « *The topology of fibre bundles* ». Princeton Univ. Press 1951.
[10] A. TOGNOLI, « *Proprietà globali degli spazi analitici reali* ». Annali di Matematica LXXV (1967) pp. 143-218.
[11] A. TOGNOLI, « *Immagine di un insieme analitico reale per un'applicazione analitica* » (In corso di stampa).
[12] A. TOGNOLI-G. TOMASSINI, « *Teoremi di immersione per gli spazi analitici reali* ». Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XXI (1997) pp.
[13] G. TOMASSINI, « *Complessificazione dei gruppi di Lie* ». (In corso di stampa).
[14] H. WHITNEY-F. BRUHAT, « *Quelques proprieties fondamentales des ensembles analytique reel* ». Com. Math. Helvetici 33 (1959) pp. 132-160.
[15] H. WHITNEY, « *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets* ». Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934) pp. 63-89.