Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Sergio Spagnolo

Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 4 (1967), p. 657-699

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_657_0>

SUL LIMITE DELLE SOLUZIONI DI PROBLEMI DI CAUCHY RELATIVI ALL'EQUAZIONE DEL CALORE

Sergio Spagnolo

Introduzione.

Scopo del presente lavoro è lo studio della convergenza delle soluzioni $\{u_k(t, x)\}$ dei problemi di Cauchy:

$$(\mathrm{I})_k \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(k)} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) & (t > 0) \\ \lim\limits_{t \to 0+} u_k(t, x) = \varphi(x) \text{ in } L^2 & \end{cases}$$

dove i coefficienti $a_{ij}^{(k)}$ sono delle funzioni misurabili e limitate della variabile $x \in \mathbb{R}^n$, tali che $(\lambda_0 > 0)$:

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \\ \lambda_0 \,|\, \xi \,|^2 \leq \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}^{(k)}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leq \Lambda_0 \,|\, \xi \,|^2 \quad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Due tipi di convergenza si possono considerare:

$$(\alpha) \qquad \{u_k(t, x)\} \xrightarrow{k} u(t, x) \text{ in } L^2, \text{ per ogni } t > 0,$$

$$(\beta) \qquad \{u_k(t, x\} \xrightarrow{k} u(t, x) \text{ in } H^1, \text{ uniform. per } t \text{ limitati};$$

per ogni fissato dato iniziale $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Pervenuto in Redazione il 13 Luglio 1967.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la matematica del C. N. R.

La (β) implica la convergenza puntuale in $L(H^1, H^{-1})$ della successione di operatori

$$A_k = \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

verso un operatore

$$A = \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

che genera un problema del tipo (I) avente per soluzione $u(t, x)$. Ciò porta alla convergenza delle $\{a_{ij}^{(k)}\}$ verso a_{ij}, debolmente in ogni L^p_{loc}.

Nel caso della più debole convergenza (α), può invece accadere che $\{A_k\}$ converga debolmente verso un operatore

$$\tilde{A} = \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

la cui soluzione corrispondente $\tilde{u}(t, x)$ è diversa da $u(t, x)$.

È quanto si verifica nell'Esempio del § 1, che mi è stato indicato da E. de Giorgi.

Ciò che tuttavia anche nel caso (α) si mantiene, è che $u(t, x)$ risolve sempre un problema di tipo (I) (i cui coefficienti possono differire dai limiti deboli in L^p_{loc} degli $\{a_{ij}^{(k)}\}$). In modo più vago ma espressivo, si può dire che l'insieme dei problemi $\{(I)_k\}$ che soddisfano la $(*)$ è chiuso rispetto alla convergenza (α) delle soluzioni.

Per giungere a tale risultato, si effettua (§ 2) uno studio sul semigruppo $\{T_t\}$ di operatori, su uno spazio di Hilbert X, risolvente il problema di Cauchy astratto:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} aT_t x + bT_t' x = 0 & (t > 0) \\ \lim\limits_{t \to 0+} T_t x = x \end{cases}$$

dove a (risp. b) è un operatore lineare e continuo su X, la cui forma bilineare associata è simmetrica coercitiva (risp.: strettamente positiva).

La formulazione del Probl. (II) sarebbe riconducibile alla teoria classica dei semigruppi (C_0) (vedi ad ex. [7])

$$\begin{cases} AT_t x = T_t' x & (t > 0) \\ \lim\limits_{t \to 0+} T_t x = x \end{cases}$$

ponendo $A = -b^{-1} a$.

Tuttavia, considerando separatamente gli operatori a e b, si hanno risultati più direttamente applicabili al caso concreto del Probl. (I).

Si è preferito pertanto dare le dimostrazioni dirette dei vari risultati dei §§ 2, 3, 4 anche se alcuni di questi si potrebbero ottenere indirettamente dalla teoria classica dei semigruppi (C_0).

Il § 3 è dedicato al modo di ricostruire il generatore a, essendo noti il semigruppo risolvente $\{T_t\}$ e l'altro generatore b.

Il § 4 è lo studio della convergenza di successioni di problemi (II) (con b fisso ed a variabile) che corrisponde, nel caso concreto, alla (α).

Si mostra che il limite di soluzioni (II) così convergenti, è ancora soluzione di un problema del tipo (II).

Il § 5 contiene un rapido confronto con la teoria classica dei semigruppi (C_0).

Nel § 6 si passa al caso particolare del problema (I):

$$X = H^1(\mathbb{R}^n)$$

$$(b\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi \, dx$$

$$(a\varphi, \psi) = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \, dx.$$

Si ottiene il risultato principale (Teor. 6): il problema limite, nella convergenza (α), dei problemi $(I)_k$ è ancora di tipo (I). Per provare ciò, viene utilizzata una caratterizzazione in termini di località (tipo quella di Peetre) degli operatori $\sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, stabilita in [6].

Il § 7 mostra i rapporti fra i vari tipi di convergenza che si possono considerare sulle soluzioni $\{u_k(t, x)\}$ di problemi (I).

Desidero ringraziare il prof. E. de Giorgi per le utili conversazioni sull'argomento.

Notazioni. Tutti gli spazi vettoriali che si incontreranno, sono da considerarsi sul *corpo reale*.

X indicherà sempre un spazio di Hilbert reale di prodotto scalare $(\ ,\ )$ e di norma $\|\ \|$.

Se $l: X \longrightarrow X$ è un operatore lineare continuo ed autoaggiunto positivo, si porrà:

$$(x, y)_l = (lx, y)$$

$$\| x \|_l^2 = (x, x)_l .$$

Un altro operatore lineare L su X sarà detto essere una *l-contrazione* qualora

$$\| Lx \|_l \leq \| x \|_l \qquad \forall\, x \in X.$$

Il termine *funzione* sarà riservato alle applicazioni a valori in $\mathbb{R}$ (corpo dei *numeri reali*) e a quelle a valori in X.

Se u, v sono funzioni a valori in X, ed l è un operatore su X, si possono introdurre le funzioni reali:

$$(u, v) : t \rightsquigarrow (u(t), v(t))$$

$$\| u \| : t \rightsquigarrow \| u(t) \|$$

e la funzione a valori in X:

$$lu : t \rightsquigarrow lu(t).$$

Considereremo i seguenti spazi lineari, dotati delle usuali strutture topologiche (Ω è un aperto di R^n):

$\mathcal{D}'(\Omega, X)$ *distribuzioni* su Ω a valori in X

$C(\Omega, X)$ *funzioni continue* (su Ω, a valori in X)

$C^\infty(\Omega, X)$ *funzioni indefinitivamente derivabili*

$\mathcal{D}(\Omega, X)$ *funzioni C^∞ aventi supporto compatto*

$L^p(\Omega, X)$ (p intero ≥ 1) funzioni u per cui

$$\| u \|^p_{L^pX} = \int_\Omega \| u \|^p \, dx < +\infty.$$

Quest'ultimo spazio è dotato della norma $\| \ \|_{L^pX}$ che, per $p = 2$, è indotta dal prodotto scalare

$$(u, v)_{L^2X} = \int_\Omega (u, v)\, dt.$$

$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, X)$ *funzioni di p-ma potenza sommabile sui compatti di Ω.*

Da queste notazioni può venire omesso X, se $X = \mathbb{R}$, ed Ω se $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Altri spazi che considereremo:

$L^\infty(\Omega)$ *funzioni reali misurabili ed (essenzialm.) limitate su Ω*

$H^1(\mathbb{R}^n)$ *funzioni reali di quadrato sommabile con le derivate prime*

$$H^{-1}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \varphi = \psi + \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} \,;\ \psi_0, \psi_j \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

§ 1. Esempio.

Fissati due numeri $\alpha, \beta > 0$, consideriamo le funzioni $(j = 1, 2, 3, \dots)$

$$a_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x \in \mathbb{R} - (0, 1) \\ \alpha & \text{per} \quad \dfrac{2k}{2j} < x \leq \dfrac{2k+1}{2j} \qquad (k = 0, 1, \dots, j-1) \\ \beta & \text{per} \quad \dfrac{2k+1}{2j} < x \leq \dfrac{2k+2}{2j}. \end{cases}$$

Si ottiene allora facilmente:

$$\lim_j \sup_{\varphi \in \mathcal{K}} \left[\int_0^1 a_j \varphi \, dx - \frac{\alpha + \beta}{2} \int_0^1 \varphi \, dx \right] = 0 \tag{1}$$

per ogni parte compatta $\mathcal{K} \subseteq L^1(0, 1)$,

e in modo analogo:

$$\lim_j \sup_{\varphi \in \mathcal{K}} \left[\int_0^1 \frac{\varphi}{a_j} \, dx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \int_0^1 \varphi \, dx \right] = 0 \tag{2}$$

per ogni parte compatta $\mathcal{K} \subseteq L^1(0, 1)$.

Se $\mathcal{K}$ ha un solo elemento, la (1) diventa:

$$\lim_j \left[\int_0^1 a_j \varphi \, dx \right] = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_0^1 \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^1(0, 1). \tag{3}$$

Consideriamo inoltre le funzioni:

$$\tilde{a}_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{su} \quad \mathbb{R} - (0, 1) \\ \dfrac{\alpha + \beta}{2} & \text{su} \quad (0, 1) \end{cases}$$

$$a_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{su} \quad \mathbb{R} - (0, 1) \\ \left[\dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} \right) \right]^{-1} & \text{su} \quad (0, 1) \end{cases}$$

e indichiamo $\{T_t^{(j)}\}$ il semigruppo ([1]) su $L^2(\mathbb{R})$ generato dall'operatore

$$A_j = \frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d}{dx}\right) \qquad (j = 0\,;\,1, 2, \ldots).$$

Proveremo allora che, posto $\widetilde{A}_0 = \dfrac{d}{dx}\left(\widetilde{a}_0 \dfrac{d}{dx}\right)$, :

$$(a) \qquad \{A_j \psi\} \xrightarrow{j} \widetilde{A}_0 \psi \ \text{ debolm. in } H^{-1} \qquad \forall\, \psi \in H^1(\mathbb{R})$$

$$(b) \qquad \lim_j \| T_t^{(j)} \psi - T_t^{(0)} \psi \|_{L^2} = 0 \qquad \forall\, \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

La (a) è facile conseguenza della (3).

La (b) segue, applicando il Teor. di Trotter-Kato, dalla:

$$(b)' \qquad \lim_j \| (\lambda I - A_j)^{-1} \varphi - (\lambda I - A_0)^{-1} \varphi \|_{L^2} = 0 \qquad \forall\, \lambda > 0, \qquad \forall\, \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

PROVA DI $(b)'$.
Posto

$$\psi_j = (\lambda I - A_j)^{-1} \varphi \qquad (j = 0\,;\,1, 2, 3, \ldots)$$

cominciamo coll'osservare che $\{\psi_j\}$ è limitata in $H^1(\mathbb{R})$: da

$$\lambda \psi_j - \frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx}\right) = \varphi$$

segue infatti

$$c \| \psi_j \|_{H^1}^2 \leq \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi \psi_j \, dx \right| \leq \| \varphi \|_{H^{-1}} \| \psi_j \|_{H^1} \qquad \text{se} \quad 0 < c < \{\lambda, \alpha, \beta, 1\}$$

Per il Teor. di Rellich, si ha allora che le restrizioni delle $\{\psi_j\}$ all'intervallo $(0, 1)$ costituiscono una successione rel. compatta in $L^2(0, 1)$.

([1]) Per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $T_t^{(j)} \psi$ è tale che:

$$\frac{d}{dt} T_t^{(j)} \psi = A_j \psi$$

$$\lim_{t \to 0+} \| T_t^{(j)} \psi - \psi \|_{L^2} = 0.$$

Da ciò e dalla definizione delle ψ_j segue che le successioni $\left\{\frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx}\right)\right\}$ e $\left\{a_j \frac{d\psi_j}{dx}\right\}$ sono rel. compatte in $L^2(0, 1)$.

D'altra parte, moltiplicando i due membri della precedente eguaglianza per $\frac{a_0}{a_j} w$ ($w \in \mathcal{D}$) ed integrando, si ha

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0}{a_j} \psi_j w \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0}{a_j} \frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx}\right) w \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0}{a_j} \varphi w \, dx.$$

Ora, per la (2), $\left\{\frac{a_0}{a_j}\right\} \xrightarrow{j} 1$ uniformemente sui compatti di $L^1(0, 1)$, mentre le successioni $\{\psi_j w\}$, $\{\varphi w\}$, $\left\{\frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx} w\right)\right\} = \left\{\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx}\right) \frac{dw}{dx} + \frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx}\right) w\right\}$ sono rel. compatte in $L^1(0, 1)$.

Si ha allora

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j w \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a_0 \frac{d\psi_j}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi w \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(a_j \frac{d\psi_j}{dx} w\right) dx + \varepsilon_j = \varepsilon_j \text{ ove } \lim_j \varepsilon_j = 0.$$

Ne segue che per ogni punto limite ψ_0 di $\{\psi_j\}$ in L^2 si ha $\lambda\psi_0 - \frac{d}{dx}\left(a_0 \frac{d\psi_0}{dx}\right) = \varphi$ cioè $\psi_0 = (\lambda I - A_0)^{-1} \varphi$.
In tal modo si è provato $(b)'$.

§ 2. L'equazione $au + bu' = f$.

1. Sia X uno spazio di Hilbert, a e b due operatori lineari, continui e autoaggiunti su X, verificanti le proprietà

$$0 < \lambda_0 \| x \|^2 \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2$$

$$0 < (bx, x) \qquad \forall x \in X, \quad x \neq 0.$$

Le espressioni

$$(x, y)_a = (ax, y)$$

$$(x, y)_b = (bx, y)$$

definiscono su X due altri prodotti scalari.

Il primo di essi induce su X una norma equivalente a quella di partenza, quanto al secondo, dalla diseguaglianza di Schwarz e dalla continuità di b, segue (posto $(bx, x) = \| x \|_b^2$) :

$$\| bx \|^2 \leq \| b \| \, \| x \|_b^2 \leq \| b \|^2 \, \| x \|^2 \qquad \forall x \in X.$$

In particolare l'immersione

$$j : X \longrightarrow \widehat{X}_b$$

di X nel completamento $\widehat{X}_b$ di X rispetto a $\| \, \|_b$ è continua.

2. Riportiamo alcuni risultati, che ci saranno utili nel seguito, in merito alla regolarizzazione di distribuzioni vettoriali.

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si definisce la distribuzione vettoriale

$$u * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}, X).$$

Una successione di funzioni scalari non-negative $\{\varphi_j\}$ si dice *regolarizzante* se

$$\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\varphi_j(t) = 0 \quad \text{per } t \notin \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(t) \, dt = 1 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si ha allora

$$\{\langle u * \varphi_j, v \rangle\} \xrightarrow{j} \langle u, v \rangle \qquad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X), v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X).$$

Se poi $u \in L^2(\mathbb{R}, X)$ si ha $u * \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}, X)$ e

$$\{u * \varphi_j\} \xrightarrow{j} u \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}, X).$$

Si ha anzi il seguente risultato che si dimostra in maniera analoga al caso scalare :

PROPOSIZIONE 1. « Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $\alpha < \beta$, $\{\varphi_j\}$ una successione regolarizzante.

Allora si ha

$$u \in L^2_{\text{loc}}((\alpha, \beta), X) <==> \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} \| u * \varphi_j \|^2 \, dt \leq C_\varepsilon, \qquad \forall j, \forall \varepsilon > 0 ».$$

PROPOSIZIONE 2. « Sia $l : X \longrightarrow X$ un operatore lineare, continuo, autoaggiunto e strett. positivo $((lx, x) > 0, \forall x \neq 0)$ Sia $\widehat{X_l}$ il completamento di X rispetto alla norma $\| x \|_l = (lx, x)^{1/2}$; $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $\alpha < \beta$. Allora:

$$u,\ lu' \in L^2((\alpha, \beta), X) \Longrightarrow u \in C([\alpha, \beta], \widehat{X_l}) \text{ ».}$$

PROVA. Si può sostituire, senza alterarne i valori su (α, β), la u con una $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}, X)$ tale che $l\tilde{u}' \in L^2(\mathbb{R}, X)$ (vedi ad es. [2] pag. 11).

Proviamo che $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}, \widehat{X_l})$.

Osserviamo preliminarmente che, per ogni $v \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$, si ha

$$\| v(t) \|_l^2 = \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{ds} \| v(s) \|_l^2 \, ds = 2 \int_{-\infty}^{t} (lv'(s), v(s)) \, ds \leq 2 \int_{-\infty}^{t} \| lv'(s) \| \, \| v(s) \| \, ds$$

da cui

$$\operatorname*{Sup}_{t \in \mathbb{R}} \| v(t) \|_l \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \| lv' \|^2 \, ds \right]^{1/2} + \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \| v \|^2 \, ds \right]^{1/2}.$$

Ora sia $\{\varphi_j\}$ una successione regolarizzante. Si ha allora

$$\{\tilde{u} * \varphi_j\} \xrightarrow{j} \tilde{u} \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}, X).$$

$$\{l(\tilde{u} * \varphi_j)'\} \xrightarrow{j} l\tilde{u}' \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}, X).$$

Dalla precedente maggiorazione, ove si ponga $v = \tilde{u} * \varphi_r - \tilde{u} * \varphi_s$ si ottiene allora che $\{\tilde{u} * \varphi_j\}$ è una successione di Cauchy in $C(\mathbb{R}, \widehat{X_l})$ e pertanto converge, uniformemente su $\mathbb{R}$, ad $\tilde{u}$.

Ne segue

$$\tilde{u} \in C(\mathbb{R}, \widehat{X_l}).$$

Se nella Proposizione 2 si sceglie per l l'operatore identità su X, si ricava immediatamente la

PROPOSIZIONE 3. « Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $\alpha < \beta$.

$$u \text{ è } C^\infty \text{ su } (\alpha, \beta) \Longleftrightarrow D^k u \in L^2_{\text{loc}}((\alpha, \beta), X) \qquad \forall k \text{ ».}$$

Infine richiamiamo il seguente risultato che si prova in modo del tutto analogo al caso scalare:

PROPOSIZIONE 4. « Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$, $\alpha < \beta$.
u è analitica su $(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow$

$$\left[\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} \| D^k u \|^2 \, dt\right]^{1/2} \leq A_\varepsilon^k \, k\,! \qquad \forall\, k, \forall\, \varepsilon > 0 ».$$

3. Per lo studio dell'operatore differenziale

$$u \rightsquigarrow au + bu'$$

sono essenziali alcune *maggiorazioni a priori*, che ora dimostriamo.

LEMMA 1. « Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}, X), f = au + bu'$. Se $u, f \in L^2(\mathbb{R}, X)$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| u \|^2 \, dt \leq \frac{1}{\lambda_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \| f \|^2 \, dt \quad ». \tag{4}$$

PROVA. Essendo $(bu', u) = \frac{1}{2} D(bu, u)$, si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} (bu', u) \, dt = 0$.

Ma allora

$$\lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \| u \|^2 \, dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (au, u) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f, u) \, dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \| f \| \, \| u \| \, dt \leq$$

$$\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \| f \|^2 \, dt\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \| u \|^2 \, dt\right]^{1/2}$$

da cui la (4).

La (4) vale anche se u non è regolare: detta $\{\varphi_j\}$ una successione regolarizzante, si osserva che $a(u * \varphi_j) + b(u * \varphi_j)' = f * \varphi_j$ e si scrive la (4) per $u * \varphi_j, f * \varphi_j$, infine si passa al limite per $j \to +\infty$:

PROPOSIZIONE 5. « Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $f = au + bu'$. Se $u, f \in L^2(\mathbb{R}, X)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| u \|^2 \, dt \leq \frac{1}{\lambda_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \| f \|^2 \, dt \quad ». \tag{4}$$

Un'altra importante maggiorazione è enunciata nel seguente:

LEMMA 2. « Sia $u \in C^\infty((\alpha, \beta), X)$, $\alpha < \beta$, $f = au + bu'$. Allora si ha:

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} \| u' \|^2 \, dt \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{3 + \Lambda_0}{\lambda_0} \int_\alpha^\beta (\| u \|^2 + \| f \|^2 + \| f' \|^2 + \| f'' \|^2) \, dt. \tag{5}$$

$\forall \; \varepsilon \in (0, 1)$ ».

PROVA. La (5) segue facilmente dalle due diseguaglianze seguenti:

$$\int_{\alpha+\varepsilon/2}^{\beta-\varepsilon/2} (bu', u') \, dt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\alpha^\beta (au, u) \, dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_\alpha^\beta |(f, u)| \, dt + \int_\alpha^\beta |(f', u)| \, dt \tag{6}$$

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} (au', u') \, dt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha+\varepsilon/2}^{\beta-\varepsilon/2} (bu', u') \, dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\alpha+\varepsilon/2}^{\beta-\varepsilon/2} |(f', u)| \, dt + \int_{\alpha+\varepsilon/2}^{\beta-\varepsilon/2} |(f'', u)| \, dt \tag{7}$$

$(\forall \; \varepsilon > 0)$.

Per convincersene, basta sostituire la (6) nella (7) ed osservare che

$$\lambda_0 \| u' \|^2 \leq (au', u'), \; (au, u) \leq \Lambda_0 \| u \|^2,$$

$$|(g, u)| \leq \| g \| \, \| u \| \leq \frac{1}{2} (\| g \|^2 + \| u \|^2) \qquad [g = f, f', f''].$$

Proviamo la (6):
da $au + bu' = f$ segue

$$(au, u') + (bu', u') = (f, u') \qquad \text{su } (\alpha, \beta).$$

Moltiplicando i due membri di tale eguaglianza per la funzione scalare non negativa $\varphi \in C(\alpha, \beta)$ definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\varepsilon}(t - \alpha) & t \in (\alpha, \alpha + \varepsilon/2) \\ 1 & t \in [\alpha + \varepsilon/2, \beta - \varepsilon/2] \\ \dfrac{2}{\varepsilon}(\beta - t) & t \in (\beta - \varepsilon/2, \beta), \end{cases}$$

ed integrando su (α, β), si ottiene

$$\int_\alpha^\beta \varphi \, (au, u') \, dt + \int_\alpha^\beta \varphi \, (bu', u') \, dt = \int_\alpha^\beta \varphi \, (f, u') \, dt.$$

Da qui, osservando che

$$(au, u') = \frac{1}{2} D(au, u)$$

$$(f, u') = D(f, u) - (f', u),$$

con un'integrazione per parti $(\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0)$ si ricava

$$\int_\alpha^\beta \varphi(bu', u')\, dt = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \varphi' \cdot (au, u)\, dt - \int_\alpha^\beta \varphi' \cdot (f, u)\, dt - \int_\alpha^\beta \varphi(f', u)\, dt.$$

Infine essendo

$$\int_\alpha^\beta \varphi(bu', u')\, dt \geq \int_{\alpha+\varepsilon/2}^{\beta-\varepsilon/2} \varphi(b u', u')\, dt = \int_{\alpha+\varepsilon/2}^{\beta-\varepsilon/2} (bu', u')\, dt$$

e $|\varphi| \leq 1, |\varphi'| \leq \dfrac{2}{\varepsilon}$, si arriva alla (6).

La (7) si prova in modo analogo, partendo dall'eguaglianza

$$(au', u') + (bu'', u') = (f', u') \text{ su } \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ed utilizzando una funzione scalare non negativa del tipo della φ, relativa agli intervalli $\left(\alpha + \dfrac{\varepsilon}{2}, \beta - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ ed $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$.

4. Con l'aiuto della (5) possiamo ora ricavare le proprietà di regolarizzazione dell'operatore $u \rightsquigarrow au + bu'$.

Un primo risultato (che segue direttamente dalla Prop. 2) è il seguente:

PROPOSIZIONE 6. « Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $f = au + bu'$, $\alpha < \beta$. Allora: $u, f \in L^2((\alpha, \beta), X) \Longrightarrow u \in C([\alpha, \beta], \widehat{X}_b)$ ».

PROVA. Poichè $au \in L^2((\alpha, \beta), X)$, dall'ipotesi segue $bu' \in L^2((\alpha, \beta) X)$. Applicando la Prop. 2 con $l = b$, si ricava l'asserto.

PROPOSIZIONE 7. (Regolarizzazione C^∞).
« Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $f = au + bu'$, $\alpha < \beta$. Allora: $u \in L^2_{\text{loc}}(\alpha, \beta), X), f \in C^\infty((\alpha, \beta), X) \Longrightarrow u$ è C^∞ su (α, β) ».

PROVA. Detta $\{\varphi_j\}$ una successione regolarizzante, applichiamo la (5) alle funzioni $u * \varphi_j$. Si ottiene allora:

$$\int_{\alpha+2\varepsilon}^{\beta-2\varepsilon} \| u' * \varphi_j \|^2 \, dt \leq M_\varepsilon \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} (\| u * \varphi_j \|^2 + \| f * \varphi_j \|^2 + \| f' * \varphi_j \|^2 + \| f'' * \varphi_j \|^2) \, dt$$

$$\forall j, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Per la Prop. 1, essendo $u, f, f', f'' \in L^2_{\mathrm{loc}}((\alpha, \beta), X)$, il 2º membro di questa diseguaglianza si maggiora con una cost. C_ε, quindi:

$$\int_{\alpha+2\varepsilon}^{\beta-2\varepsilon} \| u' * \varphi_j \|^2 \, dt \leq C_\varepsilon \qquad \forall j, \forall \varepsilon > 0.$$

Per la stessa Prop. 1 si ha allora

$$u' \in L^2_{\mathrm{loc}}((\alpha, \beta), X).$$

Iterando il procedimento $[a(D^k u) + b(D^k u)' = D^k f, \forall k]$ si ricava

$$D^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}((\alpha, \beta), X) \qquad \forall k$$

e quindi (Prop. 3) la tesi.

PROPOSIZIONE 8. (Regolarizzazione *analitica*).
« Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, $\alpha < \beta$, $f = au + bu'$. Allora:
$u \in L^2_{\mathrm{loc}}((\alpha, \beta), X)$ ed f è analitica su $(\alpha, \beta) \Longrightarrow u$ è analitica su (α, β) ».

PROVA. Fissato ε in modo che $0 < \varepsilon < 1$, l'analiticità di f, f' ed f'' su (α, β) comporta l'esistenza di una costante B_ε tale che (Prop. 4):

$$\left[\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} (\| D^j f \|^2 + \| D^{j+1} f \|^2 + \| D^{j+2} f \|^2) \, dt \right]^{1/2} \leq B_\varepsilon^j j! \qquad \forall j.$$

Da questa diseguaglianza e dalla (5) relativa a $D^j u$, si ricava

$$\left[\int_{\alpha_0+\eta}^{\beta_0-\eta} \| D^{j+1} u \|^2 \, dt \right]^{1/2} \leq \frac{C}{\eta} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \| D^j u \|^2 \, dt \right]^{1/2} + B_\varepsilon^j j! \tag{8}$$

$\forall j$, $\forall \eta \in (0,1)$, $\forall \alpha_0, \beta_0$ tali che $(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$, dove $C = \left(\dfrac{3 + \Lambda_0}{\lambda_0} \right)^{1/2}$.

Fissato ora un intero $k > 0$, applichiamo la (8) con i valori:

$$\alpha_0 = (\alpha + \varepsilon) + h\left(\frac{\varepsilon}{k}\right), \quad \beta_0 = (\beta - \varepsilon) - h\left(\frac{\varepsilon}{k}\right), \quad \eta = \frac{\varepsilon}{k}, \qquad j = h$$

ed h che assume successivamente i valori $0, 1, 2, \dots, k-1$:

$$(8)_h \qquad \left[\int\limits_{\alpha+\varepsilon+(h+1)\frac{\varepsilon}{k}}^{\beta-\varepsilon-(h+1)\frac{\varepsilon}{k}} \| D^{h+1} u \|^2 \, dt\right]^{1/2} \leq k \frac{C}{\varepsilon} \left[\int\limits_{\alpha+\varepsilon+h\frac{\varepsilon}{k}}^{\beta-\varepsilon-h\frac{\varepsilon}{k}} \| D^h u \|^2 \, dt\right]^{1/2} + B_\varepsilon^h \, h\,!\,.$$

Sostituendo la $(8)_0$ nella $(8)_1$, la $(8)_1$ nella $(8)_2, \dots,$ la $(8)_{k-2}$ nella $(8)_{k-1}$ si perviene alla formula seguente:

$$\left[\int\limits_{\alpha+2\varepsilon}^{\beta-2\varepsilon} \| D^k u \|^2 \, dt\right]^{1/2} \leq k^k \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^k L_\varepsilon + \sum_{1}^{k-1}{}_r \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^r k^r B_\varepsilon^{k-r} (k-r)\,!$$

posto

$$L_\varepsilon^2 = \int\limits_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} \| u \|^2 \, dt.$$

Poichè

$$(k-r)\,! \leq (k-r)^{(k-r)} \leq k^{(k-r)}\,,$$

il 2^0 membro di questa diseguaglianza, si maggiora con

$$k^k (1 + L_\varepsilon) \left[\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^k + \sum_{0}^{k-1}{}_r \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^r B_\varepsilon^{k-r}\right] = k^k (1 + L_\varepsilon) \left(\frac{C}{\varepsilon} + B_\varepsilon\right)^k.$$

Per la formula di Stirling, esiste allora una costante A_ε per cui:

$$(9) \qquad \left[\int\limits_{\alpha+2\varepsilon}^{\beta-2\varepsilon} \| D^k u \|^2 \, dt\right]^{1/2} \leq A_\varepsilon^k \, k\,! \qquad \forall\, k$$

Ne segue (Prop. 4) l'analiticità della u su (α, β).

OSSERVAZIONE 1. Una valutazione per eccesso della costante A_ε che compare nella (9) è la seguente

$$(10) \qquad A_\varepsilon \leq C(\lambda_0, \Lambda_0, \varepsilon, f) \left\{1 + \left[\int\limits_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} \| u \|^2 \, dt\right]^{1/2}\right\}.$$

5. Possiamo ora risolvere il Problema di Cauchy relativo all'operatore $u \rightsquigarrow au + bu'$, di dato iniziale nullo.

Per dimostrare l'unicità della soluzione, ci serviamo del

LEMMA 3 (unicità) « Siano $u_1, u_2 \in L^2((0, \varrho), X)$ tali che

$$\begin{cases} au_1 + bu_1' \equiv au_2 + bu_2' \text{ su } (0, \varrho) \\ \lim\limits_{t \to 0+} \| u_1(t) - x \|_b = \lim\limits_{t \to 0+} \| u_2(t) - x \|_b = 0 \quad (x \in X). \end{cases}$$

Allora

$$u_1 \equiv u_2 \text{ su } (0, \varrho) ».$$

PROVA. Posto $w = u_2 - u_1$ si ha

$$\begin{cases} aw + bw' = 0 \text{ su } (0, \varrho) \\ \lim\limits_{t \to 0+} (bw, w) = 0. \end{cases}$$

In particolare (Prop. 8) w è analitica su $(0, \varrho)$. Inoltre essendo

$$D(bw, w) = 2(bw', w) = -2(aw, w) \leq 0$$

la funzione reale ≥ 0

$$t \rightsquigarrow (bw(t), w(t))$$

è decrescente su $(0, \varrho)$.

Poichè tale funzione tende a zero per $t \to 0+$, essa è identicamente nulla. Ne segue

$$w \equiv 0.$$

TEOREMA 1. « Sia $f \in L^2_{\text{loc}}((0, +\infty), X)$.

Esiste allora una ed una sola $u \in L^2_{\text{loc}}((0, +\infty), X)$ tale che

$$\begin{cases} au + bu' = f & \text{su } (0, +\infty) \qquad (11) \\ \lim\limits_{t \to 0+} (bu(t), u(t)) = 0. & \qquad (12) \end{cases}$$

Se f è C^∞ (risp. analitica) su un aperto di $(0, +\infty)$, anche u è C^∞ (risp. analitica) su tale aperto ».

PROVA. Resta solo da provare l'esistenza di una tale u.

Cominciamo a provarla in un caso particolare:

(i) $$f \in L^2((0, +\infty), X)$$

Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, X)$ ed il suo sottospazio chiuso

$$L^2_+(\mathbb{R}, X) = \{u \in L^2(\mathbb{R}, X) : u \equiv 0 \text{ su } (-\infty, 0)\}.$$

L'operatore lineare

$$P : u \leadsto au + bu'$$

è certo continuo se considerato come agente su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$, quindi (teor. del grafico chiuso) la sua restrizione ad $L^2_+(\mathbb{R}, X)$, che indicheremo ancora P, è un operatore chiuso.

Il dominio di tale operatore è

$$D_P = \{u \in L^2_+(\mathbb{R}, X) : bu' \in L^2(\mathbb{R}, X)\}.$$

Ora dalla (4) (Prop. 1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| u \|^2 \, dt \leq \frac{1}{\lambda_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \| Pu \|^2 \, dt$$

segue immediatamente che P ha immagine chiusa in $L^2_+(\mathbb{R}, X)$. Mostriamo che tale immagine è anche densa in $L^2_+(\mathbb{R}, X)$:

Sia $g \in L^2_+(\mathbb{R}, X)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Pu, g) \, dt = 0 \qquad \forall\, u \in D_P.$$

Poichè $\mathcal{D}(\mathbb{R}, X) \subseteq D_P$ si ha, limitandoci agli $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$, :

$$ag - bg' = 0.$$

Ne segue

$$a(g * \psi) = b(g * \psi)' \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

e quindi [$(b(g * \psi), g * \psi)$ è una funzione scalare ≥ 0, crescente e sommabile]

$$g * \psi = 0 \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ma allora, pur di scegliere per ψ una success. regolarizzante, si ha

$$g = 0.$$

In conclusione

$$\operatorname{Im}(P) = L^2_+(\mathbb{R}, X).$$

In corrispondenza di una $f \in L^2((0, +\infty), X)$, basta allora considerare l'estensione $\tilde{f} \in L^2_+(\mathbb{R}, X)$ ottenuta ponendo $\tilde{f} \equiv 0$ su $(-\infty, 0)$; ed osservare che, se $\tilde{u} \in D_P$ è tale che $P\tilde{u} = \tilde{f}$, si ha (Prop. 6) che la funzione scalare $(b\tilde{u}, \tilde{u})$ è continua su $\mathbb{R}$, cosicchè la restrizione u di $\tilde{u}$ a $(0, +\infty)$ verifica (11) e (12).

(ii) $$f \in L^2_{\text{loc}}((0, +\infty), X).$$

Consideriamo per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots$ la funzione $f_j \in L^2((0, +\infty), X)$ che coincide con la f su $(0, j)$ ed è nulla su $(j, +\infty)$.

Per la prima parte della prova, esiste una $u_j \in L^2_{\text{loc}}((0, +\infty), X)$ tale che $au_j + bu_j' \equiv f_j$ su $(0, +\infty)$, $\lim_{t \to 0+} (bu_j(t), u_j(t)) = 0$.

In particolare si ha

$$au_j + bu_j' \equiv f \qquad \text{su } (0, j)$$

e quindi, per il Lemma 3, u_j è la restrizione di u_{j+1}.

Ma allora si può definire una funzione globale $u \in L^2_{\text{loc}}((0, +\infty), X)$ ponendo

$$u \equiv u_j \qquad \text{su } (0, j)$$

ed è ovvio che tale funzione verifica (11) e (12).

6. Il problema di Cauchy di arbitrario dato iniziale $x \in X$:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} au(t) + bu'(t) = f(t) & (t > 0) \\ \lim_{t \to 0+} \| u(t) - x \|_b = 0 \end{cases}$$

si riconduce al caso del dato iniziale nullo, ponendo

$$v(t) = u(t) - x.$$

Se infatti $u(t)$ verifica la (I), si ha

$$\begin{cases} av(t) + bv'(t) = f(t) - ax & (t > 0). \\ \lim_{t \to 0+} \| v(t) \|_b = 0. \end{cases}$$

Ci occuperemo esclusivamente del caso particolare $f = 0$.

In tal caso la soluzione del Probl. I, che dipende solo da x, sarà indicata

$$t \rightsquigarrow T_t x :$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} a\, T_t x + b \dfrac{d}{dt} T_t x = 0 & (t > 0) \\ \lim\limits_{t \to 0+} \| T_t x - x \|_b = 0. \end{cases}$$

Per la Proposizione 8, la funzione $v(t) = T_t x - x$ è analitica per $t > 0$, e quindi anche la $t \rightsquigarrow T_t x$ è ivi analitica.

Proveremo che tale funzione è continua per $t = 0$, cioè che

$$\lim_{t \to 0+} \| T_t x - x \| = 0 \qquad \forall\, x \in X.$$

Questo risultato seguirà da uno studio dettagliato della famiglia di applicazioni

$$\{T_t : X \to X\}_{t > 0} .$$

TEOREMA 2. « Sia, per $t > 0$, $x \in X$, $T_t x$ la soluzione di (II). $\{T_t\}$ è un semigruppo (²) di operatori lineari e continui su X. Ogni T_t è autoaggiunto ed ha norma ≤ 1, rispetto ai prodotti scalari $(\ ,\ )_a$ e $(\ ,\ )_b$.

T_t è inoltre iniettivo ed ha immagine densa in X.

Valgono infine le formule seguenti ($\forall\, x \in X$, $\forall\, s, t > 0$)

$$\text{(13)} \qquad \| T_t x \| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}}\, \| x \|$$

$$\text{(14)} \qquad \lim_{t \to 0+} \| T_t x - x \| = 0$$

$$\text{(15)} \qquad \frac{1}{t} (\| T_s x \|_b^2 - \| T_{s+t} x \|_b^2) \begin{cases} \leq 2\, \Lambda_0 \| T_s x \|^2 & (t > 0) \\ \geq 2\, \lambda_0 \| T_s x \|^2 & (-s < t < 0) \text{ ».} \end{cases}$$

PROVA. Cominciamo con l'osservare che, fissato $x \in X$, dalla relazione

$$a T_t x + b \frac{d}{dt} T_t x = 0$$

(²) Il termine *semigruppo* è usato qui nel significato puramente algebrico:

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s .$$

seguono le eguaglianze

$$\frac{d}{dt}(bT_t x, T_t x) = -2(aT_t x, T_t x) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}(aT_t x, T_t x) = -2\left(b\frac{d}{dt}T_t x, \frac{d}{dt}T_t x\right) \leq 0$$

e quindi le funzioni reali della t, $(bT_t x, T_t x)$, $(aT_t x, T_t x)$, sono decrescenti sulla semiretta $(0, +\infty)$.

I) *T_t è lineare.* $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ $(t, s > 0)$.
Verifica immediata.

II) *T_t è iniettiva* $(t > 0)$
Da $T_t x = 0$, segue per (I): $T_{s+t} x = T_s(T_t x) = 0$, $\forall\, s > 0$, cioè $T_\xi x = 0$ per $\xi \geq t$. Per l'analiticità della funzione $\xi \leadsto T_\xi x$, si ha allora $T_\xi x = 0$, $\forall\, \xi > 0$. Utilizzando la condizione al contorno, si ottiene $\|x\|_b = 0$, cioè $x = 0$.

III) $(bT_t x, T_t x) \leq (bx, x)$ $(t > 0, x \in X)$.
Segue subito dalla decrescenza della funzione $t \leadsto (bT_t x, T_t x)$ e dalla condizione al contorno.

IV) *T_t: $X \to X$ è un operatore continuo* $(t > 0)$.
Segne da (III) applicando il Teorema del grafico chiuso.

V) $(aT_t x, y) = (ax, T_t y)$ $(t > 0, x, y \in X)$.
Fissati x, y, t, consideriamo le due funzioni, definite per $0 < \xi < t$,

$$v(\xi) = T_\xi x$$

$$w(\xi) = T_{t-\xi}\, y.$$

Si ha allora, sull'intervallo $(0, t)$:

$$av + bv' = 0\,;\; aw - bw' = 0,$$

da cui

$$(av, w') + (bv', w') = 0\,;\; (aw, v') - (bw', v') = 0.$$

Sommando queste due eguaglianze, si ricava $D(av, w) = 0$, da cui

$$(av(\xi), w(\xi)) = \text{costante}, \quad 0 < \xi < t.$$

In particolare

$$\lim_{\xi \to t-}(av(\xi), w(\xi)) = \lim_{\xi \to 0+}(av(\xi), w(\xi))$$

da cui anche

$$-\lim_{\xi \to t-} (v'(\xi), bw(\xi)) = \lim_{\xi \to 0+} (bv(\xi), w'(\xi)).$$

Calcoliamo il valore di questi due limiti:

$$\lim_{\xi \to t} v'(\xi) = v'(t) = \frac{d}{dt} T_t x \qquad \text{(continuità della } v(\xi) \text{ per } \xi > 0)$$

$$\lim_{\xi \to t-} bw(\xi) = \lim_{\eta \to 0+} bT_\eta y = by \qquad \text{(condizione al contorno),}$$

cosicchè

$$-\lim_{\xi \to t-} (v'(\xi), bw(\xi)) = -\left(\frac{d}{dt} T_t x, by\right) = (aT_t x, y).$$

D'altra parte si ottiene, con analogo procedimento:

$$\lim_{\xi \to 0+} bv(\xi) = bx; \quad \lim_{\xi \to 0+} w'(\xi) = -\frac{d}{dt} T_t y$$

e quindi

$$\lim_{\xi \to 0+} (bv(\xi), w'(\xi)) = -\left(bx, \frac{d}{dt} T_t y\right) = (x, aT_t y).$$

Eguagliando i due valori trovati, si ha la (V).

VI) $(bT_t x, y) = (bx, T_t y)$ $(t > 0, \ x, y \in X)$

Basta osservare che le due funzioni reali della variabile t: $(bx, T_t y)$ e $(bT_t x, y)$ hanno la stessa derivata prima (per (V)) ed hanno lo stesso limite, (bx, y), per $t \longrightarrow 0+$.

VII) T_t *ha immagine densa in* X $(t > 0)$.

Basta provare questo fatto nella topologia, equivalente a quella iniziale, indotta su X dal prodotto scalare $(\ ,\ )_a$. Ora, in tale topologia, (VI) discende subito dal fatto che T_t è iniettivo ed autoaggiunto.

VIII) $(aT_t x, T_t x) \leq (ax, x)$ $(t < 0, \ x \in X)$.

Data la continuità di ogni T_t, basta provare questa diseguaglianza per i soli x di un sottospazio denso di X.

Ora per $x \in T_s(x)$, $s > 0$, la (VIII) segue subito dalla decrescenza della funzione $\xi \rightsquigarrow (aT_\xi x, T_\xi x)$ per $\xi > 0$.

D'altra parte abbiamo provato (VII) che $T_s(X)$ è denso in X.

La (13) segue immediatamente da (VIII).

La (14) è certamente valida per $x \in T_s(X)$, $s > 0$,:

$$\| T_t(T_s y) - T_s y \| = \| T_{t+s} y - T_s y \| \longrightarrow 0, \text{ per } t \longrightarrow 0.$$

Ma $T_s(X)$ è denso in X e $\{T_t\}$ è una famiglia equicontinua di operatori su X (a causa della (13)), quindi tale relazione si estende per continuità ad ogni $x \in X$.

Proviamo infine la (15).

Se $s > 0$, $t > -s$, $t \neq 0$, si ha:

$$(bT_s x, T_s x) - (bT_{s+t} x, T_{s+t} x) = -\int_s^{s+t} \frac{d}{d\xi} (bT_\xi x, T_\xi x)\, d\xi = 2\int_s^{s+t} (aT_\xi x, T_\xi x)\, d\xi .$$

Per la decrescenza della funzione $\xi \rightsquigarrow (aT_\xi x, T_\xi x)$, si ha

$$\int_s^{s+t} (aT_\xi x, T_\xi x)\, d\xi \begin{cases} \leq t\,(aT_s x, T_s x) & \text{per } t > 0 \\ \geq t\,(aT_s x, T_s x) & \text{per } t < 0 . \end{cases}$$

La (15) segue allora facilmente.

§ 3. **Costruzione del generatore** *a*.

Nel § 2 abbiamo associato a due operatori lineari, continui e autoaggiunti a, b su una spazio di Hilbert X (tali che $(ax, x) \geq c \,\|x\|^2 > 0$, $(bx, x) > 0$ per ogni $x \in X$ diverso da 0) un semigruppo $\{T_t\}_{t>0}$ di operatori su X:

$$\begin{cases} aT_t x + b \dfrac{d}{dt} T_t x = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0+} \| T_t x - x \| = 0 \end{cases} \qquad (t > 0)$$

$\{T_t\}$ sarà chiamato il *semigruppo generato* da $\{a, b\}$.

Individueremo ora un insieme di proprietà del generatore b e del semigruppo $\{T_t\}$, che consenta di ricostruire l'altro generatore a.

Teorema 3. « Sia $b : X \to X$ un operatore lineare, continuo, autoaggiunto e strettamente positivo; sia $\{T_t\}$ una famiglia di operatori lineari e continui su X, con le seguenti proprietà:

(i) $T_{t+s} = T_t \circ T_s \qquad \forall\, t, s > 0$

(ii) $t \rightsquigarrow T_t x$ è analitica su $(0, +\infty) \qquad \forall\, x \in X$

(iii) $\| T_t \| \leq M_\eta$ $\qquad \forall\, t \in (0, \eta), \forall\, \eta > 0$

(iv) $\lim_{t \to 0+} (bT_t x, y) = (bx, y)$ $\qquad \forall\, x, y \in X$

(v) $(bT_t x, y) = (bx, T_t y)$ $\qquad \forall\, t > 0, \forall\, x, y \in X$

(vi) esistono due numeri λ_0, $\Lambda_0 > 0$, per cui $\forall\, s > 0, \forall\, x \in X$:

$$\frac{1}{t}\left[(bT_s x, T_s x) - (bT_{s+t} x, T_{s+t} x)\right] \begin{cases} \leq 2\Lambda_0 \| T_s x \|^2 & (t > 0) \\ \geq 2\lambda_0 \| T_s x \|^2 & (-s < t < 0). \end{cases}$$

Esiste allora uno ed un solo operatore lineare e continuo a su X per cui

$$aT_t x + bT'_t x = 0 \text{ [3]} \qquad \forall\, t > 0, \forall\, x \in X. \tag{16}$$

Tale operatore risulta poi autoaggiunto e verifica la

$$\lambda_0 \| x \|^2 \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \| x^2 \| \qquad \forall\, x \in X. \tag{17}$$

In particolare, $\{T_t\}$ è il semigruppo generato da $\{a, b\}$. »

PROVA. Cominciamo con l'osservare che, nelle precedenti ipotesi, si ha:

$$\lim_{t \to 0+} (T_t x, y) = (x, y) \qquad \forall\, x, y \in X. \tag{18}$$

Infatti, per la (iv), la (18) vale per $x \in X$, $y \in bX$, e allora si estende per continuità ad ogni $y \in X$, a causa della (iii) e del fatto che bX è denso in X.

Osserviamo inoltre che ogni T_t è iniettivo ed ha immagine densa in X:

T_t *iniettivo*: da $T_t x = 0$ segue, per la (i), $T_\xi x = 0$, $\forall\, \xi \geq t$ e allora ((ii)) $T_\xi x = 0$, $\forall\, \xi > 0$; passando al limite per $\xi \to 0+$ ed utilizzando la (18), si arriva ad $x = 0$.

$T_t(X)$ *è denso in* X: da $(T_t x, y) = 0$, $\forall\, x \in X$, si conclude, procedendo come sopra, $(x, y) = 0$, $\forall\, x \in X$, cioè $y = 0$.

Passiamo ora alla definizione dell'operatore a.

Perchè valga la (16) occorre che

$$a(T_t x) = -b(T'_t x) \qquad x \in X, t > 0. \tag{19}$$

---

[3] Qui e nel seguito si porrà:

$$T'_t x = \frac{d}{d\xi} T_\xi x \Big|_{\xi = t}.$$

In tal modo il valore di a sul sottospazio $T_t X$ è fissato in maniera univoca, data l'iniettività di T_t.

Ma se $0 < s < t$ e $y = T_t x = T_s(T_{t-s}x)$, perchè $a(y)$ sia ben definito occorre che:

$$T'_t x = T'_s(T_{t-s}x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Ora ciò si può provare nel modo seguente:

$$T'_t x = \frac{d}{d\xi}(T_{\xi+t-s}x)\Big|_{\xi=s} = \frac{d}{d\xi}(T_\xi(T_{t-s}x))\Big|_{\xi=s} = T'_s(T_{t-s}x).$$

Pertanto la (19) definisce senza ambiguità l'operatore a sul sottospazio, denso in X, :

$$X_0 = \bigcup_{t>0}\{T_t(X)\}.$$

Tale operatore è poi lineare ed autoaggiunto su X_0:

La linearità consegue subito dalla linearità degli operatori T'_t, di immediata verifica.

L'autoaggiunzione si esprime attraverso la formula (osservando che $\{T_t(X)\}_{t>0}$ è una catena di sottospazi) seguente:

$$(bT'_s x, T_s y) = (bT'_s y, T_s x)$$

che si ottiene, utilizzando la (v), nel modo seguente:

$$(bT'_s x, T_s y) = \frac{d}{d\xi}(bT_\xi x, T_s y)\Big|_{\xi=s} = \frac{d}{d\xi}(bx, T_{\xi+s}y)\Big|_{\xi=s} =$$

$$= \frac{d}{d\xi}(bT_s x, T_\xi y)\Big|_{\xi=s} = (bT_s x, T'_s y) = (bT'_s y, T_s x).$$

Proviamo ora la (17) limitatamente al sottospazio X_0, cioè:

$$\lambda_0 \| T_s x \|^2 \leq -(bT'_s x, T_s x) \leq \Lambda_0 \| T_s x \|^2 \qquad s > 0, x \in X.$$

Essa discende facilmente dall'osservazione che

$$-(bT'_s x, T_s x) = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(bT_s x, T_s x) - (bT_{s+t} x, T_{s+t} x)]$$

e dall'ipotesi (vi).

Dalla (17) e dall'autoaggiunzione di a (limitatamente ad X_0) si ricava in modo classico

$$|(ax, y)| \leq \Lambda_0 \| x \| \| y \|$$

per ogni $x, y \in X_0$, e quindi anche per ogni $x \in X_0$ ed ogni $y \in X$.

Ma allora $\| ax \| \leq \Lambda_0 \| x \|$, $\forall x \in X_0$, cosicchè l'operatore a si estende con continuità a tutto X.

Allo stesso tempo si estendono a tutto X la (17) e la proprietà di autoaggiunzione.

OSSERVAZIONE 2. Un'importante espressione di a è la seguente:

$$ax = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(bx - bT_t x) \qquad (x \in X) \tag{20}$$

Essa si ottiene notando che

$$\left\| \frac{1}{t}(bx - bT_t x) - ax \right\| = \left\| \frac{1}{t}\int_0^t (-bT'_s x)\, ds - ax \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{t}\int_0^t (aT_s x - ax)\, ds \right\| \leq \operatorname*{Sup}_{0 \leq s \leq t} \| aT_s x - ax \|$$

e passando al limite.

§ 4. Successioni di problemi.

Se a, b sono due operatori lineari e continui su uno spazio di Hilbert X, si può considerare il problema $(x \in X)$:

$$P(a, b)\, x \quad \begin{cases} au(t) + bu'(t) = 0 & (t > 0) \\ \lim_{t \to 0+} \| u(t) - x \| = 0. \end{cases}$$

Si è visto nel § 2 che, qualora $a = a^*$, $b = b^*$, $(bx, x) > 0$ e $(ax, x) \geq$ $\geq c \| x \|^2 > 0$ per $x \neq 0$, $P(a, b)\, x$ ammette sempre una ed una sola soluzione $u(t) = T_t x$.

T_t è stato chiamato il semigruppo generato da $\{a, b\}$.

Fissiamo ora un operatore b_0 su X, lineare, continuo, autoaggiunto e strettamente positivo, e due numeri λ_0, $\Lambda_0 > 0$.

Proveremo allora che l'insieme di problemi

$$\mathcal{P}(b_0, \lambda_0, \Lambda_0) = \{P(a, b) : b = b_0, a = a^*, \lambda_0 \| x \|^2 \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2 \ \forall\, x \in X\}$$

è completo rispetto alla convergenza *puntuale* (cioè per ogni fissato $t > 0$, $x \in X$) delle soluzioni $\{T_t x\}$ nello spazio $\widehat{X}_b$.

Vale precisamente il

TEOREMA 4. « Siano a_j, b $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ operatori lineari, continui ed autoaggiunti su X, tali che, $\forall\, x \neq 0$, $\forall\, j$:

$$\lambda_0 \| x \|^2 \leq (a_j x, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2 \qquad (\lambda_0 > 0)$$

$$0 < (bx, x)$$

e sia $\{T_t^{(j)}\}$ il semigruppo generato da $\{a_j, b\}$.

Supponiamo che $\forall\, t > 0$, $\forall\, x \in X$, la successione

$$\{T_t^{(j)} x\}_j$$

sia di Cauchy rispetto alla norma $\| x \|_b = (bx, x)$, e indichiamo $T_t x$ il limite di tale successione in $\widehat{X}_b$.

Esiste allora un operatore lineare, continuo e autoaggiunto $a : X \to X$ verificante la condizione

$$\lambda_0 \| x \|^2 \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2 \qquad \forall\, x \in X,$$

e tale che $\{T_t\}$ è il semigruppo generato da $\{a, b\}$ ».

PROVA. Basta mostrare che $\{T_t\}$ verifica le ipotesi (i) — (vi) del Teor. 3.

Osserviamo anzitutto che si ha, per $t > 0$, $x \in X$:

(α) $T_t x \in X$

(β) $\{T_t^{(j)} x\} \xrightarrow{j} T_t x$ debolmente in X

(γ) $T_t : X \to X$ è lineare.

(α): per la (13) si ha

$$\| T_t^{(j)} x \| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}} \| x \| \qquad t > 0, \quad x \in X. \tag{21}$$

Quindi, fissati t ed x, dalla successione limitata $\{T_t^{(j)} x\}_j$ si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente in X verso un elemento x_0

di X. Ma allora, $\forall\ y \in X$:

$$(T_t\, x, y)_b = \lim_j\, (T_t^{(j)}\, x, y)_b = \lim_j\, (T_t^{(j)}\, x, by) = (x_0\,, by) = (x_0\,, y)_b$$

da cui (X è denso in $\widehat{X_b}$) $T_t x = x_0$ e quindi la (α).

(β) equivale alla formula

$$\lim_j\, (T_t^{(j)}\, x, y) = (T_t x, y) \qquad t > 0, \quad x, y \in X. \tag{22}$$

Ora la (22) vale per ipotesi se $x \in X$ ed $y \in bX$ e quindi si estende ad ogni $y \in X$ a causa della (21) e del fatto che bX è denso in X.

(γ) è di immediata verifica.

Proviamo ora che sono verificate le (i) — (vi) del Teor. 3:

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s \qquad \forall\ t, s > 0. \tag{i}$$

Utilizzando il fatto che ogni $T_t^{(j)}$ è una b-contrazione (Teor. 2) si ha

$$\| T_{t+s} x - T_t (T_s x) \|_b \leq$$

$$\leq \| T_{t+s} x - T_{t+s}^{(j)} x \|_b + \| T_t^{(j)} (T_s^{(j)} x - T_s x) \|_b + \| T_t^{(j)} (T_s x) - T_t (T_s x) \|_b$$

$$\leq \| T_{t+s} x - T_{t+s}^{(j)} x \|_b + \| T_s^{(j)} x - T_s x \|_b + \| T_t^{(j)} (T_s x) - T_t (T_s x) \|_b\,.$$

Passando al limite per $j \longrightarrow + \infty$ si ha la (i).

(ii) $t \longrightarrow T_t x$ è analitica per $t > 0$, $\forall\ x \in X$.

Fissato $x \in X$, le funzioni

$$u_j :\ t \longrightarrow T_t^{(j)}\, x$$

sono analitiche per $t > 0$. Più precisamente (vedi (9) e (10)):

$$\left[\int_\alpha^\beta \| D^k u_j \|^2\, dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq A^k\, k\,! \qquad \forall\ j, k, \quad 0 < \alpha < \beta \tag{23}$$

dove la costante A (tenendo conto della (21)) dipende solo da x, α, β.

Dalla (23) segue in particolare che le successioni di funzioni $\{D^k u_j\}_j$ sono tutte limitate in $L^2((\alpha, \beta), X)$.

Si può allora, cominciando da $k = 0$, trovare una successione crescente di interi (j_r) ed una funzione $u_0(t)$ appartenente allo spazio $L^2((\alpha, \beta), X)$

insieme a tutte le derivate, in modo che sia, per ogni k, :

(24) $$\{D^k u_{jr}\} \xrightarrow{r} D^k u_0 \qquad \text{debolmente in } L^2((\alpha, \beta), X).$$

Dalla (23), passando al limite con j, si ottiene quindi

$$\left[\int_\alpha^\beta \| D^k u_0 \|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq A^k k! \qquad \forall k$$

di modo che la $u_0(t)$ è analitica su (α, β).

D'altra parte la (22) comporta, applicando il Teor. di Lebesgue, :

$$\{u_j(t)\} = \{T_t^{(j)} x\} \xrightarrow{j} T_t x \quad \text{debolmente in } L^2((\alpha, \beta), X)$$

e quindi $T_t x = u_0(t)$, per $t \in (\alpha, \beta)$, da cui la (ii).

(iii) $$\| T_t \| \leq M_\eta \qquad \forall t \in (0, \eta) \qquad \forall \eta > 0.$$

Dalle (21), (22) segue di più :

$$\| T_t x \| \leq \sqrt{\frac{A_0}{\lambda_0}} \| x \|$$

(iv) $$\lim_{t \to 0+} (b T_t x, y) = (bx, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Si ha :

$$bx - b T_t^{(j)} x = -\int_0^t b \frac{d}{d\xi} T_\xi^{(j)} x \, d\xi = \int_0^t a_j T_\xi^{(j)} x \, d\xi$$

da cui ricordando che ogni $T_t^{(j)}$ è una a_j-contrazione (Teor. 2)

$$|(bx - b T_t^{(j)} x, y)| \leq \int_0^t |(a_j T_\xi^{(j)} x, y)| \, d\xi \leq A_0 \| x \| \| y \| t.$$

Passando al limite con j, si ricava la formula

$$|(bx - b T_t x, y)| \leq A_0 \| x \| \| y \| t$$

da cui la (iv).

Infine la (v) e la (vi) relative a $\{T_t\}$ si ottengono passando al limite con j le corrispondenti formule relative ad ogni $\{T^{t(j)}\}$.

OSSERVAZIONE 3. Siano $a, b : X \to X$ due operatori lineari, continui, autoaggiunti tali che, per ogni $x \in X$ diverso da 0 ($\lambda_0 > 0$; $0 \leq \varrho \leq \sigma$)

$$0 < (bx, x)$$

$$\lambda_0 \| x \|^2 - \varrho (bx, x) \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2 - \sigma (bx, x). \tag{25}$$

Per l'operatore

$$\tilde{a} = a + \varrho b$$

si ha allora

$$\lambda_0 \| x \|^2 \leq (\tilde{a}x, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2 .$$

Lo studio del problema generato da $\{a, b\}$

$$\begin{cases} au(t) + bu'(t) = f(t) & (t > 0) \\ \lim\limits_{t \to 0+} \| u(t) - x \| = 0 \end{cases}$$

può quindi ricondursi a quello del problema

$$\begin{cases} \tilde{a}\, w(t) + b\, w'(t) = f(t)\, e^{-\varrho t} & (t > 0) \\ \lim\limits_{t \to 0+} \| w(t) - x \| = 0 \end{cases}$$

attraverso il cambiamento dell'incognita

$$w(t) = u(t)\, e^{-\varrho t} .$$

Così tutti i risultati dei §§ 2, 3, con qualche modifica, continuano ad essere validi per a verificante la (25). In particolare:

Il Teor. 1 è interamente valido.

Il Teor. 2 (dove $\{T_t\}$ indica sempre il semigruppo generato da $\{a, b\}$) richiede qualche variazione: T_t può non essere una b-contrazione; la formula (13) diventa la

$$\| T_t x \| \leq e^{\varrho t} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}}\, \| x \| \tag{26}$$

e la (15) si modifica nella

$$\frac{1}{t} \left(\| T_s x \|_b^2 - \| T_{s+t} x \|_b^2 \right) \begin{cases} \leq 2\Lambda_0 \| T_s x \|^2 - 2\sigma \| T_s x \|_b^2 & (t > 0) \\ \geq 2\lambda_0 \| T_s x \|^2 - 2\varrho \| T_s x \|_b^2 & (-s < t < 0). \end{cases} \tag{27}$$

Il Teor. 3 viene ad essere così modificato: se l'ipotesi (vi) è sostituita dalla (27), allora l'operatore a verifica la (25).

Il Teor. 4 è interamente valido.

Si noti che sono ancora validi (in quanto derivano direttamente dalle espressioni $aT_t x + bT_t' x = 0$, $\lim_{t \to 0+} \| T_t x - x \| = 0$, e dalla stretta positività di b) la formula (20) e il fatto che T_t è una a-contrazione:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(bx - bT_t x) = ax$$

$$(aT_t x, \; T_t x) \leq (ax, x).$$

Un importante caso particolare è quello in cui l'operatore a, oltre a verificare la (25), è positivo.

In tal caso si ha ancora che T_t è una b-contrazione; poichè $\varrho > 0$, si ha anche che T_t è una $(a + \varrho b)$-contrazione e quindi la (26) viene così migliorata:

$$\| T_t x \| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}} \, \| x \| . \tag{28}$$

Il caso concreto che ci interessa (equazione del calore) rientra in questo caso particolare:

$$\varrho = \lambda_0 \, ; \qquad \sigma = \Lambda_0 \, ; \qquad (bx, x) \leq \| x \|^2 \, ;$$

quindi, $\forall \, x \in X$, $x \neq 0$:

$$0 < \lambda_0 \left(\| x \|^2 - \| x \|_b^2 \right) \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \left(\| x \|^2 - \| x \|_b^2 \right) . \tag{25$'$}$$

§ 5. Confronto con la classica teoria dei semigruppi (C_0).

Siano a, b due operatori lineari, continui e autoaggiunti su uno spazio di Hilbert X, tali che per ogni $x \in X$ non-nullo:

$$0 < (bx, x)$$

$$0 \leq (ax, x)$$

$$\lambda_0 \| x \|^2 - \varrho \, (bx, x) \leq (ax, x) \leq \Lambda_0 \| x \|^2 - \sigma \, (bx, x) \qquad (\lambda_0 > 0 \, ; \; 0 \leq \varrho \leq \sigma). \tag{29}$$

Indichiamo (vedi § 3) $\{T_t\}$ il semigruppo generato da $\{a, b\}$.

Abbiamo visto che $\{T_t\}$ gode delle seguenti proprietà ($\forall\, t, s > 0$; $\forall\, x \in X$)

$$T_{t+s} = T_t \circ T_s$$

$$\lim_{t \to 0+} \| T_t x - x \| = 0$$

$$(b T_t x, T_t x) \leq (bx, x)$$

$$(a T_t x, T_t x) \leq (ax, x)$$

(30) $$\| T_t x \| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}}\, \| x \|$$

(31) $$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (b T_t x - bx) = - ax.$$

In particolare ogni T_t si estende ad una contrazione

$$\widehat{T}_t : \ \widehat{X}_b \to \widehat{X}_b .$$

Per la teoria classica dei semigruppi (C_0) (vedi ad es. [7] pag. 249) si ha allora che $\{\widehat{T}_t\}$ (risp. $\{T_t\}$) è un semigruppo equicontinuo su $\widehat{X}_b$ (risp. X), il cui generatore è l'operatore chiuso (4)

$$- \widehat{b}^{-1} a : \ \widehat{D} \to \widehat{X}_b$$

$$(\text{risp.} \ - b^{-1} a : \ D \to X)$$

di dominio

$$\widehat{D} = a^{-1} (\widehat{b}\, \widehat{X}_b) \qquad\qquad (\text{risp. } D = a^{-1} (bX)).$$

Sia ora a_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) una successione di operatori lineari continui autoaggiunti e positivi, verificanti uniformemente la (29), e sia $\{T_t^{(j)}\}$ il semigruppo generato da $\{a_j, b\}$.

---

(4) Con $\widehat{b} : \widehat{X}_b \to X$, indichiamo l'estensione continua dell'operatore b al completamento $\widehat{X}_b$.

Possiamo allora considerare i due seguenti tipi di convergenza per la successione dei problemi generati da $\{a_j, b\}$:

(α) $\{\widehat{T}_t^{(j)} x\}_j$ converge in $\widehat{X}_b$, uniformem. per t limitati, $\forall\, x \in \widehat{X}_b$

(β) $\{T_t^{(j)} x\}_j$ converge in X, uniformem. per t limitati, $\forall\, x \in X$.

Per il Teor. di Trotter-Kato ([7] pag. 269) la (α) e la (β) equivalgono rispettivamente alle:

$(\alpha)'$ Esiste un $\lambda > 0$ ed un operatore $J(\lambda)\colon \widehat{X}_b \longrightarrow \widehat{X}_b$ per cui

(i) $J(\lambda)$ ha immagine densa in $\widehat{X}_b$

(ii) $\lim\limits_j \| J(\lambda)\, x - \widehat{(b^{-1} a_j + \lambda I)^{-1}}\, x \|_b = 0,$ $\qquad \forall\, x \in \widehat{X}_b$.

$(\beta)'$ Esiste un $\lambda > 0$ ed un operatore $J(\lambda)\colon X \longrightarrow X$ per cui

(i) $J(\lambda)$ ha immagine densa in X

(ii) $\lim\limits_j \| J(\lambda)\, x - (b^{-1} a_j + \lambda I)^{-1} x \| = 0,$ $\qquad \forall\, x \in X$.

Inoltre, detto $\widehat{T}_t x$ (risp. $T_t x$) il limite di $\{\widehat{T}_t^{(j)} x\}_j$ (risp. di $\{T_t^{(j)} x\}_j$), $\{\widehat{T}_t\}$ e $\{T_t\}$ sono a loro volta semigruppi equicontinui su $\widehat{X}_b$ ed X rispettivamente, i cui generatori hanno per risolvente in λ $\widehat{J}(\lambda)$ e $J(\lambda)$ rispettivamente.

La convergenza studiata nel § 4 è la seguente:

$(\widetilde{\alpha})$ $\{T_t^{(j)} x\}_j$ converge in $\widehat{X}_b$, $\qquad \forall\, t > 0, \quad \forall\, x \in X$.

E' ovvio che $(\alpha) \Longrightarrow (\widetilde{\alpha})$.

Proviamo che in realtà sussiste l'equivalenza:

PROPOSIZIONE 9.

$$\text{«}\, (\alpha) \Longleftrightarrow (\widetilde{\alpha}) \,\text{»}.$$

PROVA. Sia a l'operatore lineare, continuo, autoaggiunto positivo e verificante la (29) che genera, insieme con b, il semigruppo $\{T_t\}$, limite secondo la $(\widetilde{\alpha})$ dei $\{T_t^{(j)}\}_j$ (Teor. 4).

Si ha allora, per la (31):

$$-\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (b T_t^{(j)} x - b T_t x) = a_j x - a x \qquad \forall\, x \in X$$

da cui per la condizione al contorno:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (b (T_t^{(j)} x - T_t x),\ T_t^{(j)} x - T_t x) = 0.$$

Quindi

$$\| T_t^{(j)} x - T_t x \|_b \leq t \qquad \text{per} \quad t \in (0, t_0),$$

e infine, per la (30), si ha, per ogni $x \in X$, :

$$\| T_t^{(j)} x - T_t x \|_b \leq C_\eta t \quad \text{per} \quad t \in (0, \eta), \quad \forall \eta > 0.$$

Questa formula si estende poi per continuità ad ogni $x \in \widehat{X}_b$, dal momento che T_t è, del pari di ogni $T_t^{(j)}$, una b-contrazione.

Da ciò è dal fatto che $t \leadsto \| T_t^{(j)} - T_t x \|_b$ hanno derivate prime equilimitate su $t > 0$, segue (α).

Poichè $(\beta) \Longrightarrow (\tilde{\alpha})$, si ha anche $(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$.

Per chiarire la sostanziale differenza fra (α) e (β), mostreremo che quest'ultima implica la convergenza dei generatori:

PROPOSIZIONE 10. « Supponiamo che $\{T_t^{(j)}\}$ converga, nel senso di (β), verso il semigruppo $\{T_t\}$, di generatori $\{a, b\}$.

Si ha allora:

(32) $$\lim_j \| a_j x - a x \| = 0 \qquad \forall x \in X \text{ ».}$$

PROVA. Partiamo anzichè dalla (β) dalla equivalente $(\beta)'$; sia allora $\lambda > 0$ tale che

$$\lim_j \| (b^{-1} a_j + \lambda I)^{-1} x - (b^{-1} a + \lambda I)^{-1} x \| = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Ora, dalle ipotesi fatte su a, b, si ricava facilmente che ogni $(a_j + \lambda b)$ è un isomorfismo su X e

$$\| a_j + \lambda b \| \leq M ; \qquad \| (a_j + \lambda b)^{-1} \| \leq L \qquad \forall j.$$

Inoltre:

$$(b^{-1} a_j + \lambda I)^{-1} = (a_j + \lambda b)^{-1} b.$$

Si ha pertanto:

$$\lim_j \| (a_j + \lambda b)^{-1} bx - (a + \lambda b)^{-1} bx \| = 0$$

da cui

$$\lim_j \| (a_j + \lambda b)^{-1} x - (a + \lambda b)^{-1} x \| = 0, \qquad \forall x \in X$$

e di qui la (32).

OSSERVAZIONE 4. Indicato $\widetilde{X}_b$ il completamento di X rispetto alla norma

$$x \leadsto \| bx \|$$

e

$$\tilde{b} : \quad \widetilde{X}_b \to X$$

l'isometria che estende ad $\widetilde{X}_b$ l'operatore b, la (32) equivale a

$$\{(\widetilde{b}^{-1} a_j)\, x\} \xrightarrow{j} (\widetilde{b}^{-1} a)\, x \qquad \forall\, x \in X, \quad \text{in} \quad \widetilde{X}_b . \tag{32$'$}$$

OSSERVAZIONE 5. L'esempio del § 1, mostra che la (α) non comporta in generale la (32)$'$ cosicchè la (β) è *strettamente più fine* della (α).

§ 6. L'equazione del calore.

Una particolare classe di problemi di Cauchy è quella dei problemi relativi ad equazioni paraboliche del 2^0 ordine, che diremo *problemi del calore*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \psi \, dx + \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \qquad \forall\, \psi \in H^1(\mathbb{R}^n) \tag{33}$$

$$\lim_{t \to 0+} \| u(t, x) - \varphi(x) \|_{H^1(\mathbb{R}^n_x)} = 0$$

dove il *dato iniziale* φ appartiene ad $H^1(\mathbb{R}^n)$ ed i *coefficienti* a_{ij} sono funzioni misurabili e limitate tali che ($\lambda_0 > 0$):

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} & \forall\, ij \\ \lambda_0 \,|\, \xi \,|^2 \leq \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 \,|\, \xi \,|^2 & \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{34}$$

Dalla (34) si ricava facilmente la

$$\lambda_0 (\| \varphi \|^2_{H^1} - \| \varphi \|^2_{L^2}) \leq \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx \leq \Lambda_0 (\| \varphi \|^2_{H^1} - \| \varphi \|^2_{L^2}) . \tag{35}$$

Questo problema rientra quindi, previa l'Osservazione 3, fra quelli studiati nei §§ precedenti, ove si ponga:

$$X = H^1(\mathbb{R}^n)$$

$$(a\varphi, \psi)_{H^1} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx \tag{36}$$

$$(b\varphi, \psi)_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \psi \, dx \qquad (\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^n)).$$

Viceversa, sia $X = H^1(\mathbb{R}^n)$, $b : X \to X$ definito da

$$(b\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi \, dx$$

ed $a : X \to X$ un operatore lineare, continuo ed autoaggiunto che verifica la $(25)'$.

Allora una condizione necessaria e sufficiente affinchè il problema generato da $\{a, b\}$ sia del tipo problema del calore (cioè il generatore a si esprima tramite la (36)) è che a sia *D-locale* (vedi [6], Teor. 1 e 2), cioè:

(37) se $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sono tali che $\varphi \equiv$ cost. in un intorno di supp (ψ), allora $(a\varphi, \psi) = 0$.

Se tale condizione è verificata, si ha inoltre che i coefficienti che compaiono nell'espressione (36) di a verificano le (34).

Ci proponiamo di rafforzare ora il Teor. 4, provando che la sottoclasse dei problemi del calore è chiusa rispetto alla convergenza L^2 delle soluzioni.

Basterà mostrare, per quanto si è detto, che la proprietà (37) è stabile rispetto a tale convergenza; e questo risulterà immediatamente da una caratterizzazione (Teor. 5) di tale proprietà in termini del semigruppo risolvente.

Premettiamo il seguente Lemma, che ci dà informazioni sulla decrescenza all'infinito della soluzione del problema del calore nel caso di dato iniziale avente supporto compatto:

LEMMA 4. « Sia $u(t, x)$ la soluzione del problema del calore di dato iniziale $\varphi(x)$ e di coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ verificanti le (34).

Supponiamo che $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\theta(x) = \text{dist.}(x, \text{supp}(\varphi)) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Si ha allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 e^{\lambda\theta(x)} \, dx \leq \frac{n^3 \Lambda_0}{2\lambda_0} e^{\lambda^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 \, dx, \qquad \forall \lambda, t > 0. \tag{38}$$

Inoltre, per ogni $t > 0$: $u(t, x) \in L^1(\mathbb{R}^n_x)$ e si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx \qquad \forall t > 0 \text{ ».} \tag{39}$$

PROVA 1. Proviamo la (38).

Sia

$$\vartheta_k(x) = \operatorname{Min}\{\vartheta(x), k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

e fissiamo $\lambda > 0$.

Allora, essendo $\left|\dfrac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j}\right| \leq 1$, si ha:

$$u(t, x)\, e^{\lambda \vartheta_k(x)} \in H^1(\mathbb{R}^n_x) \qquad \forall\, t < 0.$$

Consideriamo ora la funzione non-negativa, continua per $t \geq 0$ e derivabile per $t > 0$, così definita:

$$\begin{cases} \mu_k(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2\, e^{\lambda \vartheta_k(x)}\, dx & \text{per} \quad t > 0 \\ \mu_k(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2\, dx. \end{cases}$$

Si ha per ogni k:

$$\mu_k'(t) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}\, u e^{\lambda \vartheta_k}\, dx = -\, 2 \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u e^{\lambda \vartheta_k})\, dx =$$

$$= -\, 2 \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{\lambda \vartheta_k}\, dx - 2 \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \lambda u \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} e^{\lambda \vartheta_k}\, dx\,.$$

Utilizzando la (34), che implica in particolare $|a_{ij}| \leq \Lambda_0$, si ha

$$\mu_k'(t) \leq 2 \sum_{1}^{n}{}_{j} \left[-\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 e^{\lambda \vartheta_k}\, dx + n\Lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| e^{\lambda/2\, \vartheta_k}\, |\lambda u|\, e^{\lambda/2\, \vartheta_k}\, dx \right]$$

da cui, applicando la diseguaglianza di Schwarz-Hölder al 2^0 integrale, :

$$\mu_k'(t) \leq 2 \sum_{1}^{n}{}_{j} \left[-\lambda_0 (\alpha_j(t))^2 + n\Lambda_0\, \alpha_j(t)\, \beta(t) \right]$$

dove si è posto

$$\alpha_j(t)^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 e^{\lambda \vartheta_k}\, dx\,; \qquad \beta(t)^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u|^2\, e^{\lambda \vartheta_k}\, dx\,.$$

Dalla formula

$$-\varrho^2 + 2\varrho\sigma \leq \sigma^2 \qquad (\varrho, \sigma \in \mathbb{R})$$

segue allora

$$-\lambda_0 \alpha_j^2 + n\Lambda_0 \alpha_j \beta \leq \frac{n^2 \Lambda_0^2}{4\lambda_0} \beta^2$$

e quindi

$$\mu_k'(t) \leq \frac{n^3 \Lambda_0^2}{2\lambda_0} \lambda^2 \mu_k(t) \tag{40}$$

da cui, integrando, :

$$\mu_k(t) \leq \mu_k(0) \frac{n^3 \Lambda_0^2}{2\lambda_0} e^{\lambda^2 t}. \tag{41}$$

Ora, osservando che

$$|u(t, x)|^2 e^{\lambda\vartheta_k(x)} \leq |u(t, x)|^2 e^{\lambda\vartheta_{k+1}(x)}$$

$$\operatorname*{Sup}_k \{ |u(t, x)|^2 e^{\lambda\vartheta_k(x)} \} = |u(t, x)|^2 e^{\lambda\vartheta(x)},$$

e applicando il Teorema di B. Levi, si ottiene

$$\operatorname*{Sup}_k \{\mu_k(t)\} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 e^{\lambda\vartheta(x)} dx.$$

Ma allora la (38) consegue subito dalla (41).

2. Proviamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) e^{\lambda\vartheta(x)} \in L^2(\mathbb{R}_x^n) \qquad \forall \lambda, t > 0, \forall j. \tag{42}$$

Per far ciò, consideriamo la diseguaglianza :

$$\lambda_0 \sum_1^n{}_j \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 e^{\lambda\vartheta_k} \leq \sum_1^n{}_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{\lambda\vartheta_k} =$$

$$= \sum_1^n{}_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u e^{\lambda\vartheta_k}) - \sum_1^n{}_{ij} a_{ij} \lambda \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} u e^{\lambda\vartheta_k}.$$

Da questa, integrando nella x ed osservando che

$$\left| \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u e^{\lambda \vartheta_k})\, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}\, u e^{\lambda \vartheta_k}\, dx \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2} \| u e^{\lambda \vartheta_k} \|_{L^2}$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \left| \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \lambda \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, u e^{\lambda \vartheta_k}\, dx \right| \leq \sum_{1}^{n}{}_{j} \Lambda_0\, \lambda n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \| u e^{\lambda \vartheta_k} \|_{L^2},$$

si ricava, utilizzando la (38),

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 e^{\lambda \vartheta_k}\, dx \leq C$$

dove la costante C è indipendente da k.

Ma allora passando al limite con k, si ha la (42).

Ora si noti che, da $\vartheta(x) \geq |x| -$ cost., segue:

$$e^{-\lambda \vartheta(x)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \forall \lambda > 0.$$

Quindi si ha per la (38):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|\, e^{\lambda/2\, \vartheta(x)} e^{-\lambda/2\, \vartheta(x)}\, dx < +\infty$$

cioè

$$u(t, x) \in L^1(\mathbb{R}^n_x) \qquad \forall t > 0.$$

Analogamente dalla (42) segue

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \in L^1(\mathbb{R}^n_x) \qquad \forall t > 0, \forall j$$

e quindi anche

$$a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \in L^1(\mathbb{R}^n_x) \qquad \forall t > 0,\ \forall i, j. \tag{43}$$

Possiamo ora provare la (39):

Sia $\{\psi_r\}$ una successione di funzioni C^∞ tali che, per ogni r intero, $\psi_r \geq 0$, $\psi_r(x) = 1$ per $|x| \leq r$, $\psi_r(x) = 0$ per $|x| \geq r + 1$, e $\left| \dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_j} \right| \leq M$.

Si ha allora per la (43), avendo posto $Q_r = \{x : r \leq |x| \leq r+1\}$, :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \psi_r \, dx \right| = \left| \sum_{ij}^{n} {}_1 \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_j} dx \right| \leq M \sum_{ij}^{n} {}_1 \int_{Q_r} \left| a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| dx \xrightarrow{r} 0 .$$

Ora, essendo $\dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u\psi_r \, dx\right] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \psi_r \, dx$, si ha integrando fra 0 e t

$$\lim_r \left[\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) \psi_r(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi_r(x) \, dx \right] = 0$$

e poichè il primo termine in parentesi ha limite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) \, dx$, ed il secondo ha limite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx$, si è provata la (39).

TEOREMA 5. « Sia b l'operatore sullo spazio $H^1(\mathbb{R}^n)$ definito dalla formula

$$(b\varphi, \psi)_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi \, dx$$

ed a un altro operatore lineare continuo e autoaggiunto su $H^1(\mathbb{R}^n)$ tale che (per certi $\lambda_0, \Lambda_0 > 0$):

$$\lambda_0 (\| \varphi \|_{H^1}^2 - \| \varphi \|_{L^2}^2) \leq (a\varphi, \varphi) \leq \Lambda_0 (\| \varphi \|_{H^1}^2 - \| \varphi \|_{L^2}^2), \qquad \forall\, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n) .$$

Sia $\{T_t\}$ il semigruppo generato da $\{a, b\}$.

Allora i fatti seguenti sono equivalenti:

(i) a è *D-locale* (cioè verifica la (37))

(ii) per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che φ è costante in un intorno di supp(ψ), esiste un numero $\varrho > 0$ per cui:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi T_t \psi \, dx \right| \leq C(\varphi, \psi, \lambda_0, \Lambda_0) \, e^{-\varrho/\sqrt{t}} \tag{44}$$

$0 < t < 1$ ».

PROVA. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sia $\vartheta(x) = \text{dist}(x, \text{supp}(\psi))$, e siano M e $\varrho > 0$, tali che $\varphi \equiv M$ sull'insieme $K_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^n : \vartheta(x) \leq \varrho\}$.

Si ha allora per la (39):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi T_t \psi\, dx = M \int_{\mathbb{R}^n} \psi\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi T_t \psi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (M-\varphi)\, T_t \psi\, dx.$$

Ma

$$M - \varphi \equiv 0 \quad \text{su} \quad K_\varrho$$

$$e^{\lambda(\vartheta-\varrho)} \geq 1 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^n - K_\varrho$$

Quindi si ha:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi T_t \psi\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n - K_\varrho} |(M-\varphi)\, T_t \psi|\, e^{\lambda(\vartheta-\varrho)}\, dx \leq$$

$$\leq 2 \operatorname*{Max}_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \cdot e^{-\lambda\varrho} \int_{\mathbb{R}^n - K_\varrho} |T_t \psi|\, e^{\lambda\vartheta}\, dx \leq$$

$$\leq 2 \operatorname*{Max}_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \cdot e^{-\lambda\varrho}\, \| e^{-\lambda\vartheta} \|_{L^2}\, \| (T_t \psi)\, e^{2\lambda\vartheta} \|_{L^2} \leq \qquad \text{(per la (38))}$$

$$\leq \tilde{C}(\varphi, \psi, \lambda_0, \Lambda_0)\, e^{-\lambda\varrho + 8\lambda^2 t}$$

$\forall\, \lambda > 1$.

Scegliendo $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, si ha allora la (44).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Dalla (31)

$$a\psi = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (b\psi - bT_t \psi)$$

segue

$$|(a\varphi, \psi)| \leq C \lim_{t \to 0+} \frac{e^{-\varrho/\sqrt{t}}}{t} = 0$$

e quindi la (37).

Con l'aiuto di questo risultato è facile ottenere il seguente:

TEOREMA 6. « Siano $a_{ij}^{(k)}$ funzioni misurabili e limitate ($i, j = 1, \dots n$; k intero) tali che ($\lambda_0 > 0$):

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \qquad \forall\, i, j$$

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}^{(k)}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 |\xi|^2 \qquad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e sia $\{T_t^{(k)}\}$ il semigruppo risolvente il problema del calore di coeff. $a_{ij}^{(k)}$.

Se, per ogni $t > 0$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, esiste $T_t \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\lim_k \| T_t^{(k)} \varphi - T_t \varphi \|_{L^2} = 0,$$

allora $\{T_t\}$ è il semigruppo risolvente il problema del calore relativo a certi coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, per cui

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall\, i, j$$

$$\lambda_0 \, | \xi |^2 \leq \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 \, | \xi |^2, \qquad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ ».}$$

PROVA. Basta, per quanto si è detto, mostrare che la (44) è stabile per il passaggio al limite

$$\{T_t^{(k)} \varphi\} \xrightarrow{k} T_t \varphi.$$

Ora ciò è immediato.

§ 7. Confronto con altri tipi di convergenza.

Assegnate le funzioni misurabili e limitate $a_{ij}^{(k)}$, verificanti uniformemente le (34), indichiamo $\{T_t^{(k)}\}$ il semigruppo risolvente il problema del calore relativo ai coefficienti $a_{ij}^{(k)}$.

Abbiamo considerato nel § 6 la convergenza

$$(\alpha) \qquad \{T_t^{(k)} \varphi\}_k \text{ converge in } L^2, \qquad \forall\, t > 0, \quad \forall\, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Un altro importante tipo di convergenza, considerato in generale nel § 5, è il seguente:

$$(\beta) \qquad \{T_t^{(k)} \varphi\}_k \text{ converge in } H^1, \text{ uniformemente per } t \text{ limitati}, \qquad \forall\, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Indicati a_{ij} i coefficienti del problema limite (vedi Teor. 6), la (β) implica (Proposizione 10):

$$\text{(45)} \qquad \lim_k \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \right\} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \qquad \forall\, \varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Dalla (45), dando a φ, ψ i seguenti valori (in relazione ad una $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)

$$\varphi = \frac{w}{r} \operatorname{sen}(r x_i), \qquad \psi \equiv \frac{1}{r} \operatorname{sen}(r x_j) \quad \text{su} \quad \operatorname{supp}(\varphi)$$

$$\varphi = \frac{w}{r} \cos(r x_i), \qquad \psi \equiv \frac{1}{r} \cos(r x_j) \quad \text{su} \quad \operatorname{supp}(\varphi),$$

e facendo tendere $r \to +\infty$, si ricava (dapprima per le $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$):

$$\lim_k \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}^{(k)} w \, dx \right\} = \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij} w \, dx \qquad \forall \, w \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall \, i, j.$$

Dalla precedente formula (che ovviamente equivale alla (45)) segue che la successione $\{a_{ij}^{(k)}\}_k$ converge verso a_{ij} debolmente in ogni L^p_{loc}.

L'esempio del § 1 mostra che ciò può non verificarsi nell'ipotesi della (α)-convergenza.

La (α) si può esprimere, sempre nel caso particolare del problema del calore, attraverso altre formulazioni equivalenti.

Già si è visto (prova del Teor. 4) che (α) implica

$(\alpha)_1$ $\quad \{T_t^{(k)} \varphi\}_k$ converge debolmente in $H^1(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall \, t > 0, \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proviamo ora che vale anche il viceversa:

PROPOSIZIONE 11.

$$\text{«}(\alpha) \Longleftrightarrow (\alpha)_1\text{»}.$$

PROVA. Basta provare che le successioni

$$\{T_t^{(k)} \varphi\}_k \qquad\qquad t > 0, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

sono relativamente compatte in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Infatti in tal caso è facile constatare che anche le $\{T_t^{(k)} \varphi\}_k$ con $t > 0$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, sono relativamente compatte in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e di qui con argomenti di compattezza segue la tesi: $(\alpha)_1 \Longrightarrow (\alpha)$.

Sia dunque $t > 0$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, e poniamo:

$$\varphi_k = T_t^{(k)} \varphi$$

$$\vartheta(x) = \text{dist}(x, \text{supp}(\varphi)) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Utilizzando la (38) con $\lambda = 1$ si ottiene, $\forall \, k, \ \forall \, r > 0$:

$$\int_{\vartheta(x) \geq r} |\varphi_k(x)|^2 \, dx \leq e^{-r} \int_{\vartheta(x) \geq r} |\varphi_k(x)|^2 e^{\vartheta(x)} \, dx \leq C e^{-r}$$

la costante C essendo indipendente da k.

Passando al limite per $r \longrightarrow +\infty$, si ha allora che, $\forall\, \varepsilon > 0$, esiste un limitato K_ε di $\mathbb{R}^n$ per cui

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - K_\varepsilon} |\varphi_k|^2\, dx \leq \varepsilon \qquad \forall\, k.$$

Da questo e dal Teor. di Rellich (che assicura la compattezza locale, in quanto $\{\varphi_k\}$ è limitata in H^1), segue che la successione $\{\varphi_k\}$ è relativamente compatta in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Si noti che, essendo $\{T_t^{(k)}\varphi\}_k$ limitata in H^1, basta per ragioni di debole compattezza che tale successione converga in una qualche topologia confrontabile con quella debole su H^1, perchè si abbia la $(\alpha)_1$ e quindi la (α).

In particolare, considerate le convergenze seguenti:

$(\alpha)_2$ $\quad \{T_t^{(k)}\varphi\}_k$ converge debolmente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall\, t > 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$(\alpha)_3$ $\quad \{T_t^{(k)}\varphi\}_k$ converge debolmente in $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall\, t > 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

si ha:

$$(\alpha) \Longleftrightarrow (\alpha)_2 \Longleftrightarrow (\alpha)_3 .$$

D'altra parte il Teor. di Nash ([4], [5]) assicura che le soluzioni $\{(T_t^{(k)}\varphi)(x)\}_k$ sono uniform. holderiane nelle variabili t, x e quindi costituiscono in particolare una famiglia di funzioni, in (t, x), equicontinua ed equilimitata sui compatti.

Allora, utilizzando il Teor. di Ascoli, si vede che (α) equivale a

$(\alpha)_4$ $\quad \{(T_t^{(k)}\varphi)(x)\}_k$ converge uniform. per t ed x limitati, $\quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Da questa, tenendo conto della rapida e uniforme decrescenza all'infinito di ogni $T_t^{(k)}\varphi$ (quando $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; vedi la (38)) si ottiene un'ulteriore formulazione equivalente della (α):

$(\alpha)_5$ $\quad \{T_t^{(k)}\varphi\}_k$ converge in ogni L^p, $\quad \forall\, t > 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] LIONS, J. L. « *Equations différentielles - operationelles* » Springer - Verlag. 1961.

[2] LIONS, J. L. « *Equations différentielles operationelles dans les espaces de Hilbert* », Corso C.I.M.E. (1963) 1-73.

[3] MOSER, J. « *A Harnack inequality for parabolic differential equations* », Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XVII 1 (1964) 101-134.

[4] NASH, J. « *Parabolic equations* », Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 43 (1957) 754-758.

[5] NASH, J. « *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations* », American J. of Math. Vol. 80 (1958) 931-954.

[6] SPAGNOLO, S. « *Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2⁰ ordine a coefficienti misurabili e limitati* », Rend. Sem. Padova Vol. XXXVIII. (1967) 56-64.

[7] YOSIDA, K. « *Functional Analysis* », Springer - Verlag. 1965.

Scuola Normale Superiore
Pisa