

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FRANCESCO GHERARDELLI

## **Deformazioni rigide all'infinito di varietà di Stein**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 20, n° 3 (1966), p. 583-588*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1966\\_3\\_20\\_3\\_583\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_3_583_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DEFORMAZIONI RIGIDE ALL'INFINITO DI VARIETÀ DI STEIN

di FRANCESCO GHERARDELLI <sup>(1)</sup>

1. Sia  $V_0$  uno spazio complesso. Una deformazione di  $V_0$  è l'insieme dei seguenti dati:

a) uno spazio complesso puntato  $(M, m_0)$ ; b) uno spazio complesso  $\mathcal{V}$ ; c) due applicazioni oloedriche

$$\omega: \mathcal{V} \rightarrow M, i: V_0 \rightarrow \mathcal{V}$$

tali che

1) l'applicazione  $i$  sia un isomorfismo di  $V_0$  su  $\omega^{-1}(m_0)$ ,

2) per ogni  $x \in \mathcal{V}$  esistano: un intorno  $W$  di  $x$  in  $\mathcal{V}$ , un intorno  $U$  di  $\omega(x)$  in  $M$ , un insieme analitico  $S$  contenuto in un aperto di uno spazio numerico  $\mathbb{C}^N$ , un isomorfismo  $\varphi: U \times S \rightarrow W$ , tale che  $\omega \circ \varphi$  sia la proiezione naturale di  $U \times S$  su  $U$ .

Per la condizione 2) l'applicazione  $\omega$  è aperta. Se  $\mathcal{V}$  ed  $M$  sono varietà complesse ed  $\omega$  è di rango massimo in ogni punto di  $\mathcal{V}$ , la condizione 2) è certo soddisfatta. Per la 1) si può identificare  $V_0$  con  $i(V_0) = \omega^{-1}(m_0)$ .

Due deformazioni  $(\mathcal{V}, \omega, M)$ ,  $(\mathcal{V}', \omega', M)$  dello stesso spazio  $V_0$  sulla stessa base  $(M, m_0)$  si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo  $\psi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  tale che  $\psi \circ i = i'$ . Si dice che una deformazione  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  è (localmente) banale o rigida se essa è (localmente) equivalente alla deformazione  $(M \times V_0, pr_M, M)$ .

**DEFINIZIONE 1** (cfr. [2] pag. 266) *Si dice che  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  è rigida all'infinito se esiste un compatto  $K_0 \subset V_0$  ed un isomorfismo*

$$g: (V_0 - K_0) \times M \rightarrow \mathcal{V}$$

---

Pervenuto alla Redazione il 20 Gennaio 1966.

<sup>(1)</sup> Durante la preparazione di questa nota l'A. ha usufruito del grant N.S.F.-GP 4022 della National Science Foundation.

su un aperto di  $\mathcal{V}$ , tale che

1) il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (V_0 - K_0) \times M & \xrightarrow{g} & \mathcal{V} \\ & \searrow p r_M & \swarrow \omega \\ & & M \end{array}$$

sia commutativo e

2)  $\omega|_{\mathcal{V} - \text{Im } g}$  sia un'applicazione compatta.

Lo scopo di questa nota è la dimostrazione del seguente

**TEOREMA.** *Una deformazione rigida all'infinito di una varietà di Stein  $V_0$ , di dimensione complessa  $n > 1$ , è localmente banale.*

**OSSERVAZIONE.** Il risultato è banalmente falso se  $\dim V_0 = 1$ . È noto infatti che per ogni superficie di Riemann  $V_0$  ogni deformazione  $V_t$  della struttura complessa di  $V_0$  si ottiene per deformazione della struttura all'interno di un intorno coordinato (cfr. [4]). Se la deformazione è rigida fuori di un dominio di coordinate il teorema è noto e vero qualunque sia la fibra (di  $\dim_{\mathbb{C}} > 1$ ) (cfr. [3] pag. 461); questo risultato è d'altra parte deducibile dal teorema precedente, almeno se il dominio di coordinate è di Stein.

2. Supponiamo ora che,  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  essendo una deformazione rigida all'infinito,  $\mathcal{V}$  ed  $M$  siano varietà complesse e che  $\omega$  sia ovunque di rango massimo.

Sia  $\mathcal{F}$  la famiglia di tutti i chiusi,  $F$ , di  $\mathcal{V}$  tali che la restrizione,  $\omega|_F$ , di  $\omega$  ad  $F$  sia un'applicazione compatta.

Poichè ci interessano qui soltanto deformazioni locali di  $V_0$  si può supporre che  $M$  sia un poldisco  $M_{r_0} \subset \mathbb{C}^m$  con centro  $m_0 = \{0\}$  e di raggio  $r_0$ :

$$M_{r_0} := \{t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m \mid |t_\alpha| < r_0, \alpha = 1, \dots, m\};$$

Per la definizione di deformazione, si può trovare un ricoprimento localmente finito di  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ , con aperti  $U_i$  dotati di coordinate e tali che la restrizione,  $\omega|_{U_i}$ , di  $\omega$  ad  $U_i$  sia data dalla:

$$\omega|_{U_i}: (z_{(i)}^1, \dots, z_{(i)}^{n+m}) \rightarrow (t_1 = z_{(i)}^{n+1}, \dots, t_m = z_{(i)}^{m+n})$$

e per ogni  $x \in U_i$  ( $z_{(i)}^1, \dots, z_{(i)}^n$ ) siano coordinate locali in  $x$  sulla varietà  $\omega^{-1}(\omega(x))$ . Poniamo  $(z_{(i)}, t) = (z_{(i)}^1, \dots, z_{(i)}^n, t_1, \dots, t_m)$  per le coordinate in  $U_i$ .

Se le

$$\begin{cases} z_{(j)}^\alpha = h_{ij}^\alpha(z_{(i)}, t), & \alpha = 1, \dots, n \\ t = t \end{cases}$$

danno il cambiamento di coordinate in  $U_i \cap U_j (\neq \emptyset)$  e se  $\vec{v} = \sum_{\mu=1}^m v_\mu(t) \frac{\partial}{\partial t}$  è un campo olomorfo di vettori su  $M_{r_0}$ , allora

$$\Theta_{ij}^\alpha(z_{(i)}, t) := \sum_{\mu=1}^m v_\mu(t) \frac{\partial h_{ij}^\alpha(z_{(i)}, t)}{\partial t_\mu}$$

sono le componenti di un campo olomorfo di vettori lungo le fibre in  $U_i \cap U_j$ . Sia  $\Theta$  il fascio dei germi dei campi di vettori olomorfi lungo le fibre di  $\mathcal{V}$ . Si verifica che  $\varrho(\vec{v}) := \{\Theta_{ij}^\alpha\}$  è un cociclo sul ricoprimento  $\mathcal{U}$  a valori in  $\Theta$ :  $\varrho(\vec{v}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Theta)$ .

Poichè  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  è rigida all'infinito si vede subito che il supporto di  $\varrho(\vec{v})$  appartiene alla famiglia  $\Psi$ , sopra definita. Se si cambiano le coordinate sul ricoprimento  $\mathcal{U}$ , il cociclo  $\varrho(\vec{v})$  si altera per un cobordo a supporto in  $\Psi$ . Quindi se  $\mathcal{C}$  è il fascio dei germi dei campi di vettori tangenti ad  $M$ , si ottiene un'applicazione  $\sigma_{r_0}: H^0(M_{r_0}, \mathcal{C}) \rightarrow H_{\Psi}^1(\mathcal{V}, \Theta)$ , che è lineare su  $H^0(M_{r_0}, \mathcal{O})$  ( $\mathcal{O}$  fascio dei germi delle funzioni olomorfe su  $M_{r_0}$ ). Se  $0 < r \leq r_0$  ed  $M_r := \{t \in M_{r_0} \mid |t_\alpha| < r\}$ ,  $\mathcal{V}_r := \omega^{-1}(M_r)$  l'argomentazione precedente può essere ripetuta con  $M_r$  e  $\mathcal{V}_r$  al posto di  $M_{r_0}$  e  $\mathcal{V}$ . Per  $0 < r' \leq r \leq r_0$  si ha il diagramma, evidentemente commutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^0(M_r, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\sigma_r} & H_{\Psi}^1(\mathcal{V}_r, \Theta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(M_{r'}, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\sigma_{r'}} & H_{\Psi}^1(\mathcal{V}_{r'}, \Theta) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono delle restrizioni e si sono indicate colla stessa lettera  $\Psi$  le famiglie dei supporti definite per  $\mathcal{V}_r$  e  $\mathcal{V}_{r'}$  come si è fatto per  $\mathcal{V}$ . Se si passa al limite per  $r \rightarrow 0$  si ottiene un'applicazione  $\sigma: \mathcal{C}_{\{0\}} \rightarrow R_{\Psi}^1 \omega(\Theta)_{\{0\}} (R^q \omega(\Theta)) := q$ -esimo fascio immagine diretta di  $\Theta$  mediante  $\omega$ .

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  una deformazione rigida all'infinito della varietà complessa  $V_0$ . Se  $\sigma = 0$ ,  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  è localmente rigida (e viceversa).*

La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Prop. 1 di [1].

Se si considera una famiglia differenziabile di varietà differenziabili allora il fascio  $\Theta$  è fine e dalla proposizione precedente si ottiene il

**COROLLARIO 1.** *Se  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  è una deformazione di  $V_0 = \omega^{-1}(0)$  rigida all'infinito allora essa è differenziabilmente localmente banale.*

**OSSERVAZIONE** Se  $\pi: \text{Im}(g) \rightarrow (V_0 - K_0) \times M$  è l'isomorfismo dato dalla rigidità all'infinito, il diffeomorfismo che dà la banalità di  $(\mathcal{V}_r, \omega, M_r)$  si può scegliere coincidente con  $\pi$  fuori di  $(U - K_0) \times M_r$ , dove  $U$  è un intorno arbitrario di  $K_0$  in  $V_0$  ed  $M_r$  un intorno di  $\{0\} \in M$ , abbastanza piccolo. Ciò risulta subito dal fatto che scrivendo che il cociclo di deformazione è un cobordo, dove esso è zero si può esprimere come « cobordo dello zero » (si usa, per es., una partizione dell'unità).

3. Sia ora  $(\mathcal{V}, \omega, M)$  una deformazione rigida all'infinito della varietà di Stein  $V_0$  di dimensione complessa  $n > 1$ . Si ha la

**PROPOSIZIONE 2.** *Se  $U$  è un polidisco abbastanza piccolo di  $M$ ,  $\{0\} \in U$ ,  $\omega^{-1}(U)$  è una varietà di Stein.*

**DM.** Siano  $p$  e  $q$  due funzioni fortemente plurisottraoniche (f. p. s. a.) positive su  $V_0$  ed  $U$  rispettivamente, le quali mettano in evidenza la convessità di  $V_0$  ed  $U$ .

Sia  $g: \omega^{-1}(V) \rightarrow V_0$  un'applicazione differenziabile, che dia la rigidità differenziabile di  $\omega^{-1}(U)$ ;  $p \circ g$  è allora una funzione f. p. s. a. su  $\omega^{-1}(U)$ . Si può scegliere una costante  $k > 0$  così grande che  $\varphi = p \circ g + kq \circ \omega$  sia f. p. s. a. e gli insiemi

$$B_c := \{x \in \omega^{-1}(U) \mid \varphi(x) < c, c \in \mathbb{R}\}$$

siano relativamente compatti in  $\omega^{-1}(U)$ : ne segue che  $\omega^{-1}(U)$  è di Stein.

**COROLLARIO 2.** *Per ogni  $t \in U$ ,  $\omega^{-1}(t) = V_t$  è una varietà di Stein.*

Per la proposizione 2 si può supporre che  $\mathcal{V}$  sia una varietà di Stein. Siano  $F_1(a), \dots, F_N(v) \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O})$  delle funzioni olomorfe su  $\mathcal{V}$  tali che

$$F := (F_1, \dots, F_N): \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^N$$

sia isomorfismo di  $\mathcal{V}$  su una sottovarietà chiusa di  $\mathbb{C}^N$ ;  $F_i \circ g$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sono allora funzioni olomorfe su  $(V_0 - K_0) \times M$  (essendo  $g: (V_0 - K_0) \times M \rightarrow \mathcal{V}$  l'applicazione olomorfa che dà la rigidità all'infinito). Poichè

$V_0$  è di Stein si può trovare un aperto di Stein  $A_0$ , relativamente compatto, a frontiera fortemente convessa e  $C^\infty$ , tale che  $A_0 \supset K_0$ .

Poniamo  $\varphi_{i,t} = F_i \circ g | (V_0 - A_0) \times t$ . Le funzioni  $\varphi_{i,t}$  si estendono univocamente a funzioni olomorfe su  $V_0 \times t$ . Infatti, nella successione esatta di coomologia relativa :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_k^0(A_0 \times t, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(V_0 \times t, \mathcal{O}) \xrightarrow{\beta_t} H^0((V_0 - A_0) \times t, \mathcal{O}) \rightarrow \\ \rightarrow H_k^1(A_0 \times t, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

( $H_k^*$  = coomologia a supporti compatti),  $H_k^0(A_0 \times t, \mathcal{O}) = 0$  perchè  $A_0$  è relativamente compatto e anche  $H_k^1(A_0 \times t, \mathcal{O}) = 0$  perchè  $\dim A_0 \geq 2$ ; quindi  $\beta_t$  è isomorfismo.

Siano  $\psi_{i,t}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) le estensioni a  $V_0 \times t$  delle  $\varphi_{i,t}$ . Proviamo che l'applicazione olomorfa

$$\psi_t := (\psi_{1,t}, \dots, \psi_{N,t}) : V_0 \times t \rightarrow \mathbb{C}^N$$

è biolomorfa sopra  $F(V_t)$ .

Osserviamo dapprima che  $\psi_t$  è propria; infatti se  $K$  è compatto di  $\mathbb{C}^N$ ,  $\psi_t^{-1}(K \cap \psi_t(V_0 - A_0) \times t)$  è compatto per l'ipotesi di rigidità all'infinito e  $\psi_t^{-1}(K \cap \psi_t(A_0 \times t)) \subset A_0 \times t \subset V_0 \times t$ .

$\psi_t$  è anche biunivoca come segue dalle seguenti considerazioni. Poniamo  $A_t := V_t - g((V_0 - A_0) \times t)$ ;  $A_t$  è aperto di Stein perchè è a frontiera fortemente convessa e  $V_t$  è di Stein. Come sopra, dalla successione esatta di coomologia relativa all'inclusione  $A_t \subset V_t$  segue che

$$\alpha_t := H^0(V_t, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(V_t - A_t, \mathcal{O})$$

è isomorfismo e, come  $\beta_t$ , isomorfismo topologico di algebre (per la topologia della convergenza uniforme sui compatti). Siano poi

$$g_t^* : H^0(V_t - A_t, \mathcal{O}) \rightarrow H^0((V_0 - A_0) \times t, \mathcal{O}), t \in M,$$

gli isomorfismi topologici dedotti dalla rigidità all'infinito. Per assurdo supponiamo  $\psi_t(x_0) = \psi_t(x_1)$ ,  $x_0 \neq x_1 \in V_0 \times t$ . Sia  $B \subset V_0 \times t$  un aperto di Stein, relativamente compatto, contenente  $x_0$  e  $x_1$ , a frontiera  $C^\infty$ , fortemente convessa e contenuta in  $(V_0 - A_0) \times t$ . Essendo  $V_0$  di Stein, esiste una funzione  $h \in H^0(V_0 \times t, \mathcal{O})$  tale che  $h(x_0) \neq h(x_1)$ . La funzione  $h_t := \alpha_t^{-1} \circ g_t^* \circ \beta_t \circ h$  è olomorfa in  $V_t$  e  $B_t := V_t \cap ((V_0 - B_0) \times t)$  è aperto di Stein in  $V_t$ . Poichè evidentemente,  $\alpha_t^{-1} \circ g_t^* \circ \beta_t \circ \psi_{i,t} = F_i |_{V_t} =: f_{i,t}$ , per

ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $P_\varepsilon(f_1, t, \dots, f_N, t)$  tale che  $\sup_{\partial\beta_t} |P_\varepsilon(f_1, t, \dots, f_N, t) - h_t| < \varepsilon$  e quindi anche  $\sup_{\partial\beta_t} |P_\varepsilon(\psi_1, t, \dots, \psi_N, t) - h| < \varepsilon$ . Ma allora per il principio del massimo  $|P_\varepsilon(\psi_1, t, \dots, \psi_N, t) - h| < \varepsilon$  in  $B$  e l'assurdo  $|h(x_0) - h(x_1)| < 2\varepsilon$ .

Essendo  $\psi_t$  propria,  $\psi_t(V_0 \times t)$  è sottoinsieme analitico di  $\mathbf{C}^N$  e poichè  $\dim \psi_t(V_0 \times t) = \dim(V_0 \times t)$  e  $\psi_t((V_0 - A_0) \times t) = F(V_t - A_t)$ , risulta  $\psi_t(V_0 \times t) = F(V_t)$ . Quindi  $\psi_t(V_0 \times t)$  è varietà e  $\psi_t$  è isomorfismo sopra  $F(V_t)$ .

Si è così provato che le  $\psi_i(x, t) := \psi_{i,t}(x)$  ( $x \in V_0, t \in M$ ) definiscono un'applicazione biunivoca di  $V_0 \times M$  sopra  $F(\mathcal{D})$ , che è biolomorfa sulle fibre. Verifichiamo che le  $\psi_i(x, t)$  sono continue rispetto a  $t$ . Poichè  $\psi_i|_{(V_0 - K_0) \times M} = F_i \circ g$ , ciò è ovvio in  $(V_0 - K_0) \times M$ . Ma di più, per l'uniforme continuità delle funzioni continue, qualunque siano  $\varepsilon > 0, K \subset V_0 - K_0$  compatto e  $t_0 \in M$ , esiste un intorno  $U$  di  $t_0$  in  $M$  tale che per  $t \in U$   $|\psi_i(x, t) - \psi_i(x, t_0)| < \varepsilon$  qualunque sia  $x \in K$ . Scegliendo  $K = F - A_0$ , con  $F$  compatto di  $V_0$  contenente  $A_0$ , dal principio del massimo segue subito che anche per  $x \in K_0$  le  $\psi_i(x, t)$  sono continue rispetto a  $t$ .

Per concludere la dimostrazione del teorema 1 basta provare che le  $\psi_i(x, t)$ , olomorfe in  $x$ , sono ovunque olomorfe anche in  $t$ ; per ogni  $m$ -cielo  $\gamma_t$  di  $M$  le funzioni  $h_i(x) =: \int_{\gamma_t} \psi_i(x, t) dt$  sono funzioni olomorfe su  $V_0$ , nulle in  $V_0 - A_0$ , dunque nulle su  $V_0$ : dal teorema di Morera segue che le  $\psi_i(x, t)$  sono olomorfe in  $t$ .

Università di Firenze

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDREOTTI A. e E. VESENTINI *On the pseudo-rigidity of Stein manifolds*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, v. 16, (1962) p.p. 213-223.
- [2] ANDREOTTI A. e E. VESENTINI *On deformations of discontinuous groups*, Acta Math. v. 112, (1964), p.p. 249-298.
- [3] KODAIRA K. and D. C. SPENCER: *On deformation of complex analytic structures I-II*, Ann. of Math., 67, (1958) p.p. 328-466.
- [4] SHIFFER M. and D. C. SPENCER: *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton, University Press, 1954.