

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

OSCAR MONTALDO

**Sull'esistenza dell'estremo per gli integrali di Fubini-Tonelli
in forma parametrica nel senso di Weierstrass**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 20,
n° 2 (1966), p. 443-452*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_2_443_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL'ESISTENZA DELL'ESTREMO
PER GLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI
IN FORMA PARAMETRICA
NEL SENSO DI WEIERSTRASS

di OSCAR MONTALDO (*)

§ 1. — P R E M E S S E.

1. Introduzione.

In una Nota dal titolo « Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli in forma parametrica nel senso di Weierstrass » in questo stesso fascicolo, ho studiato l'integrale

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) = \iint_{\mathcal{C}} F(x, y, dx, dy)$$

e ho dato delle condizioni necessarie e sufficienti per la sua semicontinuità.

In questa Nota ne proseguo lo studio dimostrando alcuni teoremi che assicurano l'esistenza del suo estremo assoluto⁽¹⁾.

2. Richiami.

È opportuno per intendere chiaramente questa Nota richiamare alcune definizioni e risultati della mia Nota precedente.

Pervenuto alla Redazione il 12 Maggio 1966.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerche matematiche n° 31 del C. N. R.

(1) Per la bibliografia relativa a questa Nota vedasi la mia precedente più su richiamata.

Siano :

$A_1[A_2]$ un insieme chiuso di punti dello spazio euclideo \mathcal{E}_n :

$x = (x_1, \dots, x_n)$ [$y = (y_1, \dots, y_n)$];

A l'insieme dei punti $P(x, y)$ di \mathcal{E}_{2n} prodotto topologico $A_1 \times A_2$;

\bar{A} un insieme limitato e chiuso costituito da punti interni di A ;

B l'insieme $(P; x', y')$ con $P \in A$ e $x' = v(x'_1, \dots, x'_n)$, $y' = v(y'_1, \dots, y'_n)$ due vettori non nulli di \mathcal{E}_n ;

\bar{B} l'insieme limitato e chiuso $(P; x', y')$ con $P \in A$ e $|x'| = |y'| = 1$.

$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ una curva (che diremo *ordinaria*) appartenente ad A , di componenti continue e rettificabili $\mathcal{C}_1 \equiv (x = x(t), a \leq t \leq b)$, $\mathcal{C}_2 \equiv (y = y(\tau), c \leq \tau \leq d)$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $y(\tau) = (y_1(\tau), \dots, y_n(\tau))$.

$F(P; x', y')$ una funzione :

- a) definita per ogni $P \in A$ e per ogni coppia di vettori x', y' di \mathcal{E}_n ;
- b) continua nel complesso delle sue variabili e positivamente omogenea di grado 1 in x' e y' separatamente; cioè tale che

$$(1) \quad F(P; hx', ky') = hk F(P; x', y')$$

per ogni coppia di numeri positivi h e k ;

- c) positivamente convessa rispetto a x' e y' separatamente in ogni punto P interno ad A ; cioè tale che

$$(2) \quad F(P; a_1 x'_1 + a_2 x'_2, b_1 y'_1 + b_2 y'_2) \leq \\ b_1 [a_1 F(P; x'_1, y'_1) + a_2 F(P; x'_2, y'_1)] + b_2 [a_1 F(P; x'_1, y'_2) + a_2 F(P; x'_2, y'_2)]$$

qualunque siano le due coppie di vettori x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 e con a_1, a_2, b_1, b_2 costanti positive.

$\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$ l'integrale di Weierstrass della F esteso alla curva \mathcal{C} di componenti \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} F(x, y, dx, dy).$$

Diremo che :

F è quasi regolare positiva (q. r. p.) se in ogni punto P interno ad A vale la (2);

F è regolare positiva se in ogni punto interno ad A vale la (2) col solo segno $<$.

Si ha il seguente

TEOREMA. Se F è q. r. p., $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ esiste finito ed è semicontinuo inferiormente in ogni classe di curve \mathcal{C} ordinarie con componenti di lunghezza superiormente limitata.

OSSERVAZIONE. Si noti che i risultati ottenuti nella mia Nota citata nell'introduzione, e qui richiamati, come quelli relativi a questa Nota, si riferiscono sempre a curve effettive, cioè a quelle le cui componenti non si riducono ad un punto.

§ 2. — IL MINIMO DI $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$.

1. Teoremi di esistenza dell'estremo di $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ in insiemi limitati.

In questo n° considereremo sempre A limitato.

TEOREMA 1. Sia \mathcal{H} una famiglia completa di curve ordinarie $\mathcal{C}=(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in A$ tale che, dette L_1, L_2 le lunghezze delle componenti $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ di \mathcal{C} , risulti $\text{Inf. } L_i \geq \Lambda > 0$.

\mathcal{H}
Sia F q. r. p. e supponiamo che esista una funzione $\Phi(\alpha)$, continua, non negativa e non decrescente tale che qualunque sia la curva $\mathcal{C} \in \mathcal{H}$ si abbia

$$(1) \quad L_1 \cdot L_2 \leq \Phi(\mathcal{J}_w(\mathcal{C})).$$

Allora esiste il minimo di $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ in \mathcal{H} .

Sia

$$(2) \quad \{\mathcal{C}_1\}, \{\mathcal{C}_2\}, \dots \{\mathcal{C}_n\}, \dots$$

una successione minimizzante per $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ in \mathcal{H} , cioè tale che sia

$$(3_1) \quad \mathcal{J}_w(\mathcal{C}_n) \leq i + \frac{1}{n},$$

$$(3_2) \quad \mathcal{J}_w(\mathcal{C}_n) \leq -n$$

a seconda che l'estremo inferiore i di $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ in \mathcal{H} sia finito o no. Mostriamo che nel nostro caso i è finito.

Infatti, in caso contrario, dovendo valere la (3₂), si avrebbe per la (1)

$$L_{1n} \cdot L_{2n} \leq \Phi(\mathcal{J}_w(\mathcal{C}_n)) \leq \Phi(-n) \leq \Phi(-1),$$

avendo indicato con L_{1n}, L_{2n} le lunghezze delle componenti $\mathcal{C}_{1n}, \mathcal{C}_{2n}$ della \mathcal{C}_n . D'altra parte si può scrivere

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}_n) \geq -M \int_{\mathcal{C}_{1n} \times \mathcal{C}_{2n}} |dx| |dy| = -M L_{1n} \cdot L_{2n}$$

dove M è il massimo di $|F|$ in \bar{B} ; si avrebbe dunque

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}_n) \geq -M \Phi(-1)$$

che contraddice la (3₂).

Quindi i è finito e, qualunque sia la curva \mathcal{C}_n dell'insieme $\{\mathcal{C}_n\}$, sussiste la (3₁) e per la (1)

$$L_{1n} \cdot L_{2n} \leq \Phi(i + 1).$$

Avendo pertanto tutte le curve degli insiemi $\{\mathcal{C}_n\}$ componenti di lunghezza superiormente limitata, la successione (2) ammette almeno una curva di accumulazione \mathcal{C}_0 ordinaria⁽¹⁾ appartenente ad A e $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ è semicontinuo inferiormente nella classe \mathcal{H} .

Pertanto, applicando il noto ragionamento di Tonelli, si ha che

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}_0) = i.$$

TEOREMA 2. *Sia \mathcal{H} una famiglia completa di curve ordinarie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in A$ con $\text{Inf.}_{\mathcal{H}} \text{lung. } \mathcal{C}_i \geq A > 0$.*

Allora, se F è q. r. p. e positiva su \bar{B} , esiste il minimo di $\mathcal{J}_w(\mathcal{C})$ in \mathcal{H} . Si ha

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}) \geq m \int_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} |dx| |dy| = m L_1 \cdot L_2$$

dove è $m > 0$ il minimo di $F(P; x', y')$ su \bar{B} e L_1, L_2 sono le lunghezze di $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

⁽¹⁾ v. TONELLI, *Fond. di. Cal. delle Variaz.*, vol. I, a pag. 87.

Dalla relazione precedente si ricava

$$L_1 \cdot L_2 \leq \frac{1}{m} \mathcal{I}_w(\mathcal{C})$$

e, ponendo

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 0 \\ \alpha/m & \text{,, } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

risulta soddisfatta la condizione del Teor. 1 e la proposizione attuale riesce provata.

Sia $F \geq 0$ e q. r. p.. Uno zero P_0 di F si dirà *ordinario* per F se è possibile determinare n^2 costanti $a_{i,j}^{(0)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, tali che la funzione

$$F^{(0)}(P; x', y') = F(P; x', y') + \sum_{i,j} a_{i,j}^{(0)} x'_i y'_j$$

sia tale che

$$\frac{F^{(0)}(P; x', y')}{|x'| |y'|} > 0$$

per tutti i punti $P \in A$ di un intorno sufficientemente piccolo di P_0 .

TEOREMA 3. *Sia $F \geq 0$ e q. r. p. in \bar{B} , avente soltanto un numero finito di zeri in A e tale che ogni zero sia ordinario.*

Allora in ogni classe completa \mathcal{H} di curve ordinarie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in A$ e tale che $\inf_{\mathcal{H}} L_i \geq \Lambda > 0$, dove $L_i = \text{lung. } \mathcal{C}_i$, esiste il minimo di $\mathcal{I}_w(\mathcal{C})$.

L'ipotesi che gli zeri di F siano tutti ordinari e in numero finito permette anzitutto di concludere che esiste $r > 0$ con la proprietà seguente: Siano $P_s = (P_{s1}, P_{s2})$, $s = 1, 2, \dots, p$, gli zeri di F ; allora per ogni s è possibile determinare n^2 costanti $a_{ij}^{(s)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, in modo che la funzione

$$F^{(s)}(P; x', y') = F(P; x', y') + \sum_{i,j} a_{ij}^{(s)} x'_i y'_j$$

con $|x'| = |y'| = 1$, risulti (strettamente) positiva nei punti $P = (P_1, P_2)$, con $P_1 \in A_1$, $P_2 \in A_2$ e appartenenti rispettivamente agli interni

$$R_{s1} : |P_1^{(h)} - P_{s1}^{(h)}| < r, \quad R_{s2} : |P_2^{(h)} - P_{s2}^{(h)}| < r, \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Supponiamo r così piccolo che gli interni R_{s1} [e analogamente gli interni R_{s2}] non si sovrappongano ed introduciamo i nuovi interni

$$R'_{s1} : |P_i^{(h)} - P_{s1}^{(h)}| < r/2, \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

$$R'_{s2} : |P_2^{(h)} - P_{s2}^{(h)}| < r/2, \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Poniamo

$$m = \min. \frac{F(P; x', y')}{|x'| |y'|},$$

dove il minimo è preso per P nel chiuso

$$A_1 \times A_2 - \bigcup_{s=1}^p (R'_{s1} \times R'_{s2}),$$

$$M = \max_{i,j,s} |a_{ij}^{(s)}|,$$

$$m' = \min_s \min_{R_{s1} \times R_{s2}} \frac{F^{(s)}(P; x', y')}{|x'| |y'|}.$$

Per le ipotesi fatte avremo $m > 0$, $m' > 0$.

Prendiamo una qualsiasi curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \in \mathcal{H}$ e portiamo per il momento la nostra attenzione sui soli archi di $\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_2]$ che sono contenuti in $R_{s1}[R_{s2}]$ e che contengono punti di $R'_{s1}[R'_{s2}]$; tali archi, se esistono, verranno indicati con $\alpha_{s\mu}[\beta_{s\nu}]$ e si intende che essi siano archi di lunghezza massima di $\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_2]$ oventi la proprietà considerata.

Ogni arco $\alpha_{s\mu}$ dovrà avere un estremo in un punto della frontiera di R_{s1} , a meno che esso sia tutto contenuto in R_{s1} , nel qual caso coinciderà con la curva connessa \mathcal{C}_1 . Ne segue che il numero degli archi $\alpha_{s\mu}$ è finito poichè o si ha un solo arco, la curva \mathcal{C}_1 , oppure ciascuno di questi archi possiede un punto sulla frontiera di R_{s1} ed un punto interno a R'_{s1} e quindi avrà lunghezza $\geq r/2$.

Lo stesso discorso si può ripetere per ogni arco $\beta_{s\nu}$.

La curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ verrà adesso decomposta in $\sum_1^p \sum_\mu \sum_\nu \alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}$ ed in una parte rimanente, che chiameremo $\bar{\mathcal{C}}$ che consisterà di un numero finito di curve ordinarie. Si osservi che nessun punto della parte $\bar{\mathcal{C}}$ è contenuto in $\bigcup_{s=1}^p (R'_{s1} \times R'_{s2})$; dunque $\bar{\mathcal{C}}$ è contenuta in $(A_1 \times A_2) - \bigcup_{s=1}^p (R'_{s1} \times R'_{s2})$.

Ne segue, per la definizione di m :

$$\mathcal{I}_w(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F \geq \int_{\bar{\mathcal{C}}} F \geq m \int_{\bar{\mathcal{C}}} |dx| |dy|,$$

cioè

$$(4) \quad \int_{\bar{e}} |dx| |dy| \leq \frac{1}{m} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}).$$

Si ha ancora

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} F \geq \sum_1^p \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} F = \\ &= \sum_1^p \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} F^{(s)} - \sum_1^p \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} \sum_{ij} \alpha_{ij}^{(s)} dx_i dy_j. \end{aligned}$$

Per la definizione di m' ricaviamo

$$(6) \quad \sum_1^p \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} F^{(s)} \geq m' \sum_1^p \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} |dx| |dy| = m' \int_{e-\bar{e}} |dx| |dy|.$$

Poichè le curve $\alpha_{s\mu}$ si svolgono tutte in R_{s1} avremo $\left| \int_{\alpha_{s\mu}} dx_i \right| \leq 2r$, e allo

stesso modo $\left| \int_{\beta_{s\nu}} dy_j \right| \leq 2r$. Dunque $\left| \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} dx_i dy_j \right| \leq 4r^2$ e poichè $|a_{ij}^{(s)}| \leq M$

ne segue

$$(7) \quad \left| \sum_1^p \sum_{\mu} \sum_{\nu} \int_{\alpha_{s\mu} \times \beta_{s\nu}} \sum_{ij} a_{ij}^{(s)} dx_i dy_j \right| \leq 4n^2 Mr^2 \sum_1^p N_s N'_s,$$

dove abbiamo posto N_s = numero degli archi $\alpha_{s\mu}$ e N'_s = numero degli archi $\beta_{s\nu}$. Dunque per le (5), (6), (7) si ha

$$(8) \quad \int_{e-\bar{e}} |dx| |dy| \leq \frac{1}{m'} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}) + \frac{4}{m'} n^2 Mr^2 \sum_1^p N_s N'_s$$

e combinando questa disuguaglianza con la (4) ricaviamo

$$L_1 L_2 = \int_{\mathcal{C}} |dx| |dy| \leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \mathcal{J}_w(\mathcal{C}) + \frac{4}{m'} n^2 Mr^2 \sum_1^p N_s N'_s,$$

dove, come si è già detto, N_s è il numero degli archi $\alpha_{s\mu}$ e N'_s quello degli archi β_{sv} .

Resta da dare una stima per il numero di questi archi. A tale scopo ricordiamo che, tranne il caso in cui $\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_2]$ sia tutta contenuta in $R_{s1}[R_{s2}]$, ogni arco $\alpha_{s\mu}[\beta_{sv}]$ contiene un subarco $\alpha_{s\mu}^*[\beta_{sv}^*]$ che è contenuto in $R_{s1} - R'_{s1}[R_{s2} - R'_{s2}]$ e che ha lunghezza non inferiore a $r/2$.

Si presentano adesso i seguenti casi:

- (I) ambedue le curve \mathcal{C}_i sono contenute in intorni R_{si} ;
- (II) una sola delle curve \mathcal{C}_i è contenuta in intorni R_{si} ;
- (III) nessuna delle curve \mathcal{C}_i è contenuta in intorni R_{si} .

Nel primo caso avremo immediatamente

$$\sum_1^p N_s N'_s \leq 1.$$

Nel secondo caso, supponiamo che la curva \mathcal{C}_1 sia contenuta in R_{s1} . Allora

$$\sum_1^p N_s N'_s \leq \sum_1^p N'_s.$$

Avremo, osservando che $\mathcal{C}_1 \times \beta_{sv}^*$ sta in $(A_1 \times A_2) - \bigcup_{s=1}^p (R'_{s1} \times R'_{s2})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}) &\geq \sum_1^p \Sigma_v \int_{\mathcal{C}_1 \times \beta_{sv}^*} F \geq m \sum_1^p \Sigma_v \int_{\mathcal{C}_1 \times \beta_{sv}^*} |dx| |dy| \geq \\ &\geq m \sum_1^p \Sigma_v L_1 r/2 = \frac{r}{2} m L_1 \sum_1^p N'_s. \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte sulla famiglia \mathcal{H} , si ha $\text{Inf. } L_i = A_1 > 0$, dunque

$$(9) \quad \sum_1^p N_s N'_s \leq \frac{2}{rm A_1} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}).$$

Analogamente si ragiona se è la curva \mathcal{C}_2 che è contenuta in R_{s2} , dunque

$$A = \min_i \text{Inf. } L_i$$

avremo

$$\sum_1^p N_s N'_s \leq \frac{2}{rm A} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}).$$

Nel terzo caso risulta

$$\mathcal{J}_w(\mathcal{C}) \geq \sum_1^p \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}^* \times \beta_{s\nu}^*} F \geq m \sum_1^p \Sigma_\mu \Sigma_\nu \int_{\alpha_{s\mu}^* \times \beta_{s\nu}^*} |dx| |dy| \geq \frac{mr^2}{4} \sum_1^p N_s N'_s,$$

poichè

$$\int_{\alpha_{s\mu}^* \times \beta_{s\nu}^*} |dx| |dy| \geq r^2/4$$

e poichè $\alpha_{s\mu}^* \times \beta_{s\nu}^*$ sta in

$$(A_1 \times A_2) - \bigcup_{s=1}^p (R'_{s1} \times R'_{s2}).$$

Dunque in questo caso

$$\sum_1^p N_s N'_s \leq \frac{4}{mr^2} \mathcal{J}_w(\mathcal{C}).$$

Abbiamo perciò dimostrato che in ogni famiglia \mathcal{H} di curve $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ con $\text{Inf. } L_i \geq \Lambda > 0$, nella ipotesi del Teorema 3, vale la disuguaglianza

$$L_1 L_2 \leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + \frac{8n^2 Mr}{mm' \Lambda} + \frac{16n^2 M}{mm'} \right) \mathcal{J}_w(\mathcal{C}) + \frac{1}{m'} 4n^2 Mr^2.$$

Le ipotesi del Teorema 1 sono pertanto soddisfatte e il Teorema 3 è completamente dimostrato.

Esempio.

La funzione

$$F(P; x', y') = 2|x'| |y'| + (|x'| y'_1 + |y'| x'_1) (1 + \overline{PO^2})^{-1}$$

soddisfa a tutte le ipotesi del Teor. 3.

Infatti:

è continua in ogni insieme A limitato, omogenea di grado 1 e convessa, separatamente rispetto a x' e y' .

Per ogni coppia di vettori $x', y' \neq 0$ [$x' = v(x'_1, \dots, x'_n)$, $y' = v(y'_1, \dots, y'_n)$] è

$$F > 0,$$

per le stesse coppie di vettori x', y' e per ogni punto $P \neq 0$ (origine) è

$$F > 0,$$

in 0 è

$$F = |x'| |y'| \left(2 + \frac{x'_1}{|x'|} + \frac{y'_1}{|y'|} \right)$$

ed è $F > 0$ tranne che per $x'_1/|x'| = y'_1/|y'| = -1$.

Dunque la F ha un solo zero (nell'origine) che è ordinario (secondo la definizione che abbiamo dato a pag. 5) in quanto la funzione

$$F^{(1)} = F + x'_1 y'_1$$

soddisfa alla disuguaglianza

$$F^{(1)} \geq |x'| |y'|,$$

come si vede dall'identità

$$\begin{aligned} F^{(1)}(P, x', y') &= |x'| |y'| + \frac{\overline{PO}^2}{1 + \overline{PO}^2} (|x'| |y'| + x'_1 y'_1) + \\ &+ \frac{(|x'| + x'_1)(|y'| + y'_1)}{1 + \overline{PO}^2}. \end{aligned}$$

Al contrario, $F = \overline{PO}^2 |x'| |y'|$ è q. r. p. e ≥ 0 , ma ha uno zero nell'origine che non è ordinario.

Università di Cagliari