ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

IACOPO BARSOTTI

Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva. Capitolo 7

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 2 (1966), p. 331-362

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_2_331_0>

METODI ANALITICI PER VARIETÀ ABELIANE IN CARATTERISTICA POSITIVA. CAPITOLO 7.

IACOPO BARSOTTI (1)

I capitoli 1 e 2 sono pubblicati in questi stessi Annali, vol. 18, 1964, pp. 1-25; i capitoli 3 e 4 nel vol. 19, 1965, pp. 277-330; il capitolo 5 nel vol. 19, 1965, pp. 481-512; il capitolo 6 nel vol. 20, 1966, pp. 101-137; la numerazione prosegue quella dei capitoli precedenti; i numeri in parentesi quadra rimandano alla bibliografia posta alla fine di questo capitolo.

CAPITOLO 7.

Varietà di Picard e forma di Riemann.

69. In questo capitolo dovremo fare uso frequente della varietà di Picard di una varietà abeliana; sia A varietà abeliana sul corpo c, e sia k una chiusura algebrica di c (qui non occorre che k abbia caratteristica p); come definizione della varietà di Picard (B, Δ) di A useremo quella data come Teorema 9, p. 116, di [7], adattata alla nostra nomenclatura; la definizione è la seguente: sia B una varietà abeliana su c, e sia Δ un divisore su $A \times B$; allora (B, Δ) è una *varietà di Picard* di A se sono verificate le condizioni seguenti:

1. Sia F un qualsiasi sottocorpo proprio di $c(B)$ contenente c; allora non esiste nessun divisore Y su A_F tale che $Y_{c(B)} \backsim \Delta\{B\}$;

2. Se Y è un qualsiasi divisore su A_k e $Y \equiv 0$, esiste un solo $P \in B_k$ tale che $Y \backsim \Delta_k(P) - \Delta_k(O_k)$.

Pervenuto alla Redazione il 10 Novembre 1965.
(1) Lavoro parzialmente finanziato dal grant AFEOAR 65-42.

Le notazioni sono qui quelle di [4], eccetto che scriviamo $\Delta\{?\}$ in luogo di $\Delta\{?\}^*$; $\Delta\{V\}$, per una sottovarietà irriducibile V di B, è la «specializzazione» su V del divisore Δ' che si ottiene da Δ trascurando le componenti di Δ che non operano su tutta B; è quindi un divisore su $A_{c(B)}$. Se poi $P \in B_k$, $\Delta_k(P)$ è $(\Delta_k\{B_k\})\{v\}$ per qualsiasi valutazione zero-dimensionale v di $k(B_k)$ avente centro P su B_k; in altre parole, $\Delta_k(P) \times P$ è l'intersezione di Δ'_k col ciclo $A_k \times P$.

Si sa allora che se (B, Δ) è varietà di Picard di A, e F è prolungamento di c, (B_F, Δ_F) è varietà di Picard di A_F; e si sa pure (cfr. le (1) e (2) a p. 114 di [7]) che se F è un sottocorpo di k che contiene c, il punto P della condizione 2 è estensione, su k, di un punto di A_F se e solo se $\mathbf{Y}$ è linearmente equivalente ad un divisore che è estensione su k di un divisore di A_F. Diremo spesso che B è *varietà di Picard* di A, e che Δ è un *divisore di Poincaré* su $A \times B$. L'asserzione (3) a p. 115 di [7] assicura che:

7.1 *Se (B, Δ) e (B', Δ') sono varietà di Picard di A, allora $B \cong B'$; e se B, B' sono identificate mediante questo isomorfismo, allora $\Delta' \backsim \Delta + \mathbf{Y} \times B + A \times \mathbf{Z}$ per opportuni divisori $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ su A, B rispettivamente.*

Si può quindi dire «la» varietà di Picard di A. Sia (B, Δ) varietà di Picard di A, e sia $\mathbf{Y}$ un divisore su A; nel n^0 2 di [8] si è definito un omomorfismo $\lambda_{\mathbf{Y}}$ di A su B dato da:

7.2 $$\sigma_P \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k \backsim \Delta_k(\lambda_{\mathbf{Y}} P) - \Delta_k(O_k)$$

per ogni $P \in A_k$; qui si è indicato con $\lambda_{\mathbf{Y}}$ anche l'estensione di $\lambda_{\mathbf{Y}}$ ad un omomorfismo di A_k su B_k. Il $\lambda_{\mathbf{Y}}$ è indicato con $\varphi_{\mathbf{Y}}$ in [7]. La proprietà 2 che definisce la varietà di Picard mostra (dato che $\Delta_k(P) - \Delta_k(O_k) \equiv 0$ per ogni $P \in A_k$) che vi è un isomorfismo fra il gruppo dei punti di B_k e il gruppo dei sistemi lineari (completi) $|\mathbf{Y}|$, quando $\mathbf{Y}$ percorre i divisori di A_k algebricamente equivalenti ($\equiv$) a zero; l'unicità di B e Δ, come descritta in 7.1, assicura che l'isomorfismo è indipendente dalla scelta di B e Δ. Quindi elementi che si corrispondono in questo isomorfismo possono essere identificati, ossia si può scrivere, nella proprietà 2,

$$|\mathbf{Y}| = |\Delta_k(|\mathbf{Y}|) - \Delta_k(|0|)|;$$

il 7.2 diviene:

$$|\sigma_P \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k| = |\Delta_k(\lambda_{\mathbf{Y}} P) - \Delta_k(O_k)|,$$

che confrontato con la precedente dà

7.3 $$\lambda_{\mathbf{Y}} P = |\sigma_P \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k|.$$

Il (9) di [8] assicura che:

7.4 $$\begin{cases} \lambda_{Y+Z} = \lambda_Y + \lambda_Z\,; \\ \lambda_Y = 0 \ \textit{se e solo se} \ \mathbf{Y} \equiv 0. \end{cases}$$

Il nucleo di λ_Y, come omomorfismo di A_k, è l'insieme dei $P \in A_k$ tali che $\sigma_P \mathbf{Y}_k \sim \mathbf{Y}_k$; se $\mathbf{Y}$ è positivo (o, come si usava dire, effettivo) il (10) di [8], ripetuto nel Teorema 3 a p. 94 di [7], assicura che la dimensione di tale nucleo uguaglia la dimensione della sottovarietà di A_k formata dai P tali che $\sigma_P \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_k$; un $\mathbf{Y}$ per cui questa dimensione sia 0, ossia tale che $\sigma_P \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_k$ solo per un numero finito di P, dicesi *non degenere*, e l'esistenza di divisori positivi non degeneri è nota da [9] o [7] (essa è alla base di quasi tutte le dimostrazioni dell'immergibilità proiettiva delle varietà gruppali); quindi per un tale $\mathbf{Y}$ il λ_Y è una isogenia di A su $\lambda_Y A$; si ha anzi $\lambda_Y A = B$, ossia λ_Y è isogenia su B (cfr. (13) di [8]).

Sia α un omomorfismo della varietà abeliana A su A'; se B, B' sono le varietà di Picard di A, A' rispettivamente, $\operatorname{div}\alpha$ definisce un omomorfismo del gruppo astratto B' sul gruppo astratto B, omomorfismo che indicheremo con $\tilde{\alpha}$ e chiameremo *duale* di α; esso è un omomorfismo di varietà abeliane, ossia un'applicazione razionale, come è dimostrato nel § 1, p. 123, di [7].

70. Siano A, B varietà abeliane su k (che d'ora in poi torna ad essere algebricamente chiuso, di caratteristica p), e sia α una isogenia di A su B; il trasposto $k(\alpha)$ di $k(B)$ su $k(A)$ verrà considerato come un'immersione, ossia supporremo $k(B) \subseteq k(A)$. Se $\mathbf{Y}$ è un divisore su A, ci occorrono condizioni per decidere quando sia $\mathbf{Y} = (\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Z}$, oppure $\mathbf{Y} \sim (\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Z}$, per un opportuno divisore $\mathbf{Z}$ su B. È ben noto che:

7.5 Lemma. *Nelle notazioni precedenti, se* $\operatorname{ins}\alpha = 1$, *si ha* $\mathbf{Y} = (\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Z}$ *per qualche divisore* $\mathbf{Z}$ *su* B *se e solo se* $\sigma_P \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$ *per ogni* P *appartenente al nucleo di* α; *e* $\mathbf{Y} \sim (\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Z}$ *se e solo se* $\sigma_P \mathbf{Y} \sim \mathbf{Y}$ *per ogni* P *descritto.*

Nel caso in cui $k(A)$ è puramente inseparabile su $k(B)$ vale il seguente risultato dovuto a Cartier (Proposizioni 13 e 14 del n° 7, cap. 4 di [11]); la dimostrazione che diamo è essenzialmente quella di Cartier, ma fa uso dell'operatore $\mathbf{Y} \to d\mathbf{Y}$, qui indicato con $\mathbf{Y} \to \partial\mathbf{Y}$, introdotto nel 3.2 di [3]; tale $\partial\mathbf{Y}$ non è che la prima approssimazione nella costruzione di φ_Y, e giuoca un ruolo centrale, sotto altra forma, nella dimostrazione di Cartier.

7.6 Lemma. *Nelle notazioni precedenti, se* $k(A)$ *è puramente inseparabile su* $k(B)$, *ma* $\pi k(A) \subseteq k(B)$, *sia* D *il* k*-modulo delle derivazioni invarianti* d *su* A *tali che* $dk(B) = 0$; *allora:*

1. $\mathbf{Y} = (\operatorname{div} \alpha) \mathbf{Z}$ *per uno* $\mathbf{Z}$ *di* B *se e solo se* $(\partial \mathbf{Y}) d = 0$ *per ogni* $d \in D$;

2. $\mathbf{Y} \backsim (\operatorname{div} \alpha) \mathbf{Z}$ *per uno* $\mathbf{Z}$ *di* B *se e solo se* $(\partial \mathbf{Y}) d \backsim 0$ *per ogni* $d \in D$.

DIM. Ci si può ridurre al caso in cui $[k(A) : k(B)] = p$; in tal caso D consiste dei multipli di un elemento $d \neq 0$ tale che o $\pi d = 0$, ovvero $\pi d = d$.

1. Sia $\mathbf{Y} = (\operatorname{div} \alpha) \mathbf{Z}$, e $\mathbf{Z}$ sia dato da $\mathbf{Z} X = x(X)\, U(X/B)$, onde $\mathbf{Y}$ è dato da $\mathbf{Y} X = x(\alpha X)\, U(X/A)$; allora $[(\partial \mathbf{Y}) d] X = [x(\alpha X)]^{-1} d [x(\alpha X)] + Q(X/A) = Q(X/A)$, ossia $(\partial \mathbf{Y}) d = 0$, come voluto. Reciprocamente, sia $\mathbf{Y}$ dato da $\mathbf{Y} X = x(X)\, U(X/A)$, ma suppongasi che

$$x^{-1} dx + Q(X/A) = [(\partial \mathbf{Y}) d] X = Q(X/A);$$

allora $x^{-1} dx \in Q(X/A)$ per ogni X (si intende che $x = x(X)$ dipende da X). Se z è un parametro regolare di $Q(X/A)$, sarà $x = z^r u$, con $u \in U(X/A)$, e $x^{-1} dx = r z^{-1} dz + u^{-1} du$, onde $r z^{-1} dz \in Q(X/A)$. Questo significa che o $r = 0$ (ossia che r è multiplo di p), ovvero che $dz \in M(X/A)$; la prima condizione comporta che $z^r \in k(B)$, e che quindi $\mathbf{Y}$ ha in X un rappresentante che appartiene a $k(B)$; la seconda condizione comporta invece che d induce una derivazione d' in $k(B)$, certamente non nulla (perchè altrimenti $dQ(P/A) \in M(P/A)$ per ogni $P \in X$, e quindi per ogni $P \in A$, assurdo); si ha $d' k(\alpha X) = 0$, e perciò $[k(X) : k(\alpha X)] = p$; ma allora, per la formula di ramificazione, il divisore primo αX non è ramificato, e lo z può essere scelto in $Q(\alpha X/B)$; in tal caso z^r è di nuovo un rappresentante di $\mathbf{Y}$ in X appartenente a $k(B)$, come voluto.

2. Se $\mathbf{Y} \backsim (\operatorname{div} \alpha) \mathbf{Z}$, è $(\partial \mathbf{Y}) d \backsim [\partial (\operatorname{div} \alpha) \mathbf{Z}] d = 0$ per 1. Viceversa, sia $(\partial \mathbf{Y}) d \backsim 0$; ciò significa che, nelle notazioni precedenti, esiste un $y \in k(A)$ tale che $(\partial \mathbf{Y}) d = \operatorname{cl} y$, ossia tale che $x^{-1} dx - y \in Q(X/A)$ per ogni X e per $x = x(X)$; e si può supporre (dopo aver eventualmente sostituito $\mathbf{Y}$ con un divisore ad esso linearmente equivalente) che $y \in M(O/A)$. Usiamo la formula $x^{-1} d^p x = (x^{-1} dx)^p + d^{p-1}(x^{-1} dx)$ (contenuta nella dimostrazione del 3.2 di [3]), e la $d^p = ad$, ove a eguaglia o 0 o 1; si ha successivamente:

$$x^{-1} dx \equiv y \mod Q(X/A)$$

$$(x^{-1} dx)^p \equiv y^p$$

$$x^{-1} d^p x \equiv ay$$

$$d^{p-1}(x^{-1} dx) \equiv d^{p-1} y,$$

onde $ay \equiv y^p + d^{p-1} y \mod Q(X/A)$ per ogni X, ossia $ay - y^p - d^{p-1} y \in k$; ma si può modificare y con una costante additiva (il che è permesso), ed ottenere $ay = y^p + d^{p-1} y$. Usiamo ora l'operazione sui differenziali $\omega \to \omega^{1/p}$ del n⁰ 4 di [3], o del n⁰ 6, cap. 2, di [11]; essa è indicata con $\omega \to C\omega$ da Cartier, e sarà qui denotata con $\omega \to t\omega$ in quanto trasposta del π sulle derivazioni. Il differenziale ω del corpo $k(A)$, avente $k(B)$ come corpo delle costanti, e tale che $\omega d = y$ (onde $\omega\pi d = ay$) si è visto che soddisfa la

$$\omega(\pi d) = \pi(\omega d) + d^{p-1}(\omega d);$$

poichè il $t\omega$ è dato dalla (29) del n⁰ 6, cap. 2, di [11], ossia dalla $\omega(\pi d) = \pi[(t\omega) d] + d^{p-1}(\omega d)$, la precedente significa che $t\omega = \omega$; essendo ω chiuso, la Proposizione 7, n⁰ 6, cap. 2 di [11] comporta che $\omega = z^{-1}\,\partial z$ (usiamo ∂ come simbolo di costruzione di differenziale esatto) per qualche $z \in k(A)$, ossia che $y = z^{-1} dz$. Ma allora il divisore $\mathbf{Z}' = \mathbf{Y} - \operatorname{div} z$ soddisfa la $(\partial\mathbf{Z}')\, d = 0$, onde, per 1, $\mathbf{Z}' = (\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Z}$ per uno $\mathbf{Z}$ di B, e infine $\mathbf{Y} \sim (\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Z}$, C. V. D..

Sia A varietà abeliana su k, sia B la sua varietà di Picard, e sia Δ un divisore di Poincaré su $A \times B$; si consideri il φ_Δ del 6.28, che è un omomorfismo di $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}A)^0 \oplus \widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}B)^0$ su $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0 \oplus \mathcal{C}'(\mathcal{R}B)^0$; per maggiore chiarezza, nel seguito le somme dirette verranno scritte come matrici ad una colonna, ed i loro omomorfismi verranno perciò scritti come matrici; così, ad esempio, l'elemento $d \oplus d'$ di $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}A)^0 \oplus \widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}B)^0$ verrà scritto $\begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$. Si avrà allora $\varphi_\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & \varphi_A \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$, ove α è omomorfismo di $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}A)^0$ su $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$, φ_A è omomorfismo di $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}B)^0$ su $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$, ecc.; la formula precedente definisce φ_A; questo è indipendente dalla scelta di Δ, perchè se Δ viene sostituito con $\Delta' \sim \Delta + \mathbf{Y} \times B + A \times \mathbf{Z}$ (cfr. 7.1), per 6.30 e 6.29 possono cambiare, nella formula precedente, soltanto α e β. Si noti anche che φ_A applica $\widetilde{\mathcal{C}}'RB$ su $\mathcal{C}'RA$.

7.7 Teorema. *Nelle notazioni precedenti, la restrizione di φ_A a $\widetilde{\mathcal{C}}'RB$ è un isomorfismo di questo K-modulo canonico su tutto il K-modulo canonico $\mathcal{C}'RA$; quindi φ_A è un isomorfismo del K'-modulo canonico $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}B)^0$ su tutto il K'-modulo canonico $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$.*

Dim. Basta dimostrare le seguenti due asserzioni:

1. Se $d \in \mathcal{C}'\widetilde{R}_\pi B$ e $td = d$, ma $d \notin \pi\mathcal{C}'\widetilde{R}_\pi B$, allora $\varphi_A d \notin \pi\mathcal{C}' R_\pi A$;
2. Se $d \in \mathcal{C}'(\widetilde{R}_t B \,\overline{\times}\, \widetilde{R}_r B)$ ma $d \notin t\mathcal{C}'(\widetilde{R}_t B \,\overline{\times}\, \widetilde{R}_r B)$, allora $\varphi_A d \notin t\mathcal{C}'(R_t A \,\overline{\times}\, R_r A)$.

Dimostrazione di 1. Anzitutto, a d corrisponde un elemento di $\mathcal{C}'\,{}^t\widetilde{R}_\pi B$, che indicheremo ancora con d; posto $d' = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$, si costruisca $\mathbf{Z}(d', \Delta)$ come nel 6.27 : $\mathbf{Z}(d', \Delta) = (\delta^{p-1}\Delta - \Delta, \delta^{p-2}\Delta - \Delta, \ldots)$, ove $\{\delta\} = \exp d'$; da $d \notin \pi\,\mathcal{C}'\,{}^t\widetilde{R}_\pi B$, ossia da $(\pi^{-1}d_0)\,k(B) \neq 0$, segue che δ^{p-1} induce un automorfismo non identico di $k(B)$; però δ induce l'automorfismo identico, onde δ^{p-1} induce un automorfismo di $k(B)$ di periodo p, che coinciderà con σ_P per un $P \in A$ tale che $pP = O$. Ma allora $\{O, P, 2P, \ldots, (p-1)P\}$ è il nucleo di una isogenia separabile α di B su αB; dato che Δ, per la proprietà 1 del n^0 69 che definisce la varietà di Picard, non soddisfa a nessuna relazione $\Delta \backsim \operatorname{div}(\iota_A \times \alpha)\,\Delta'$, con Δ' divisore su $A \times \alpha B$, il 7.5 assicura che $\delta^{p-1}\Delta - \Delta = \sigma_P\Delta - \Delta$ non è linearmente equivalente a 0, cosicchè $\mathbf{Z}(d', \Delta) \notin \pi\,\mathcal{B}'(A \times B) + \mathcal{E}'(A \times B)$; quindi, per 6.27 e 6.19, ${}^\pi\varphi_\Delta\, d' \notin \pi\,\mathcal{C}'({}^\pi R_\pi A \mathbin{\overline{\times}} {}^\pi R_\pi B)$, o infine, tornando al significato di d come elemento di $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_\pi B$, $\varphi_\Delta\, d \notin \pi\,\mathcal{C}'\,R_\pi A$, come desiderato.

Dimostrazione di 2. In questo caso a d corrisponde un elemento di $\mathcal{C}'\,{}^\pi\widetilde{R}B$, che indicheremo ancora con d; se d' ha lo stesso significato della dimostrazione precedente, si costruisca $\mathfrak{b}(d', \Delta)$ come nel 6.26; la $d \notin t\mathcal{C}'\,{}^\pi\widetilde{R}B$ significa che $d_0\,k(B) \neq 0$, mentre la $d \in \mathcal{C}'\,{}^\pi\widetilde{R}B$ significa che $d_0\,\pi k(B) = 0$; si ha cioè che d_0 induce una derivazione, certo invariante, su $k(B)$. Esiste allora una isogenia puramente inseparabile α, di B su αB, che divide t_B, e tale che il k-modulo D delle derivazioni invarianti di $k(B)$ che si annullano su $k(\alpha B)$ (quest'ultimo considerato immerso in $k(B)$ come prescritto da $k(\alpha)$) sia generato da $d_0, \pi d_0, \pi^2 d_0, \ldots$ La proprietà 1 del n^0 69 assicura che non è soddisfatta nessuna relazione $\Delta \backsim \operatorname{div}(\iota_A \times \alpha)\,\Delta'$, con Δ' divisore su $A \times \alpha B$; quindi il 7.6 dà che $(\partial\Delta)\,d_0'$ non è linearmente equivalente a 0; ma $(\partial\Delta)\,d_0'$ non è altro che $\varrho_1\,\mathfrak{b}(d', \Delta)$, cosicchè si è trovato che $\mathfrak{b}(d', \Delta) \notin t\mathcal{B}(A \times B) + \mathcal{E}(A \times B)$. I 6.26 e 6.15 assicurano ora che ${}^t\varphi_\Delta\, d' \notin t\mathcal{C}'({}^tRA \mathbin{\overline{\times}} {}^tRB)$, od anche, tornando al primitivo significato di d, che $\varphi_\Delta\, d \notin t\mathcal{C}'(R_t A \mathbin{\overline{\times}} R_r A)$, C. V. D..

71.

7.8 TEOREMA. *Siano A, B varietà abeliane su k, e siano $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ le loro varietà di Picard; sia α un omomorfismo di A su B, e sia $\widetilde{\alpha}$ il duale di α, di $\widetilde{B}$ su $\widetilde{A}$; allora è commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}'\,\tilde{R}\tilde{B} & \xrightarrow{\varphi_B} & \mathcal{C}'\,RB \\
{\scriptstyle \mathcal{C}'\,\tilde{R}\tilde{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}'\,R\alpha} \\
\mathcal{C}'\,\tilde{R}\tilde{A} & \xrightarrow[\varphi_A]{} & \mathcal{C}'\,RA.
\end{array}$$

Dim. Consideriamo i divisori di Poincaré Δ_A su $A \times \tilde{A}$ e Δ_B su $B \times \tilde{B}$; poniamo $\Delta_1 = \operatorname{div}(\iota \times \tilde{\alpha})\,\Delta_A$, $\Delta_2 = \operatorname{div}(\alpha \times \iota)\,\Delta_B$, cosicchè Δ_1, Δ_2 sono divisori su $A \times \tilde{B}$. Se P è punto generico di $\tilde{B}$, e P è identificato col sistema lineare $|\mathbf{Y}|$ su B, ossia se $P = |\mathbf{Y}|$, si ha che $|\Delta_2(P) - \Delta_2(O)| = |(\operatorname{div}\alpha)[\Delta_B(P) - \Delta_B(O)]| = |(\operatorname{div}\alpha)\,\mathbf{Y}|$; invece $|\Delta_1(P) - \Delta_1(O)| = |\Delta_A(\tilde{\alpha}P) - \Delta_A(O)| = |\Delta_A(|(\operatorname{div}\alpha)\,\mathbf{Y}|) - \Delta_A(O)| = |(\operatorname{div}\alpha)\,\mathbf{Y}|$. Perciò $\Delta_2(P) \backsim \Delta_1(P) - \Delta_1(O) + \Delta_2(O)$, ossia $\Delta_2 \backsim \Delta_1 + \mathbf{Z} \times \tilde{B} + A \times \mathbf{X}$, con $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}$ divisori su A, $\tilde{B}$ rispettivamente; ne segue che

$$\varphi_{\Delta_2} = \varphi_{\Delta_1} + \begin{pmatrix} \varphi_{\mathbf{Z}} & 0 \\ 0 & \varphi_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}.$$

Ma da 6.29 si ha anche:

$$\varphi_{\Delta_1} = \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} \end{pmatrix} \varphi_{\Delta_A} \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & \varphi_A \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & \varphi_A\,\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} \\ ? & ? \end{pmatrix},$$

e analogamente

$$\varphi_{\Delta_2} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}'\mathcal{R}\alpha & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix} \varphi_{\Delta_B} \begin{pmatrix} \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\alpha & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{C}'\mathcal{R}\alpha & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & \varphi_B \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\alpha & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & (\mathcal{C}'\mathcal{R}\alpha)\,\varphi_B \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

Di qui, e dalla formula ottenuta prima, si ottiene appunto $\varphi_A\,\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} = (\mathcal{C}'\mathcal{R}\alpha)\,\varphi_B$, C. V. D..

È possibile dare un omomorfismo $\varkappa_A$ di A su $\tilde{\tilde{A}}$ (varietà di Picard di $\tilde{A}$) nel modo seguente: se Δ è il divisore di Poincaré su $A \times \tilde{A}$, per ogni $P \in A$ si porrà $\varkappa_A P = |\Delta(P) - \Delta(O)| \in \tilde{\tilde{A}}$. Il duale $\tilde{\varkappa}_A$ di $\varkappa_A$ è un omomorfismo di $\tilde{\tilde{A}}$ su $\tilde{A}$; l'ultimo diagramma a p. 129 di [7] asserisce che $\tilde{\varkappa}_A \varkappa_{\tilde{A}} = \iota_{\tilde{A}}$; pertanto $\varkappa_{\tilde{A}}$ e $\tilde{\varkappa}_A$ sono isomorfismi. Applichiamo allora il 7.8 ad $\alpha = \varkappa_A$; gli $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$ andranno sostituiti rispettivamente da $A, \tilde{A}, \tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{\tilde{A}}}$; essendo φ_A isomorfismo di $\mathcal{C}' \tilde{R}\tilde{A}$ su tutto $\mathcal{C}' RA$ (per 7.7), e analogamente per φ_B, dall'essere $\tilde{\varkappa}_A$ un isomorfismo seguirà che anche $\mathcal{C}' R\varkappa_A$ è un isomorfismo di $\mathcal{C}' R\tilde{\tilde{A}}$ su tutto $\mathcal{C}' RA$. Ma allora, per 6.20, $\varkappa_A$ è un isomorfismo di A su tutto $\tilde{\tilde{A}}$; si è così dimostrata parte del

7.9 TEOREMA DI DUALITÀ. *Sia A varietà abeliana sul corpo c, e sia $(\tilde{A}, \Delta)$ la varietà di Picard di A; allora (A, Δ) è la varietà di Picard di $\tilde{A}$. Se $\alpha \in \operatorname{End} A$, α ed $\tilde{\alpha}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico; se invece α è omomorfismo di A su una varietà abeliana B, si ha $\tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha$.*

DIM. Sia dapprima $c = k$; si è appena visto che $\tilde{\tilde{A}} \cong A$, cosicchè A ed $\tilde{\tilde{A}}$ possono essere identificati; ma si è anche visto che $\varkappa_A$ è un isomorfismo; la definizione di $\varkappa_A$ significa allora proprio che (A, Δ) è varietà di Picard di $\tilde{A}$. Passando al caso in cui c non è algebricamente chiuso, e dettane k (di caratteristica p) la chiusura algebrica, l'asserire che (A_k, Δ_k) è varietà di Picard di $\tilde{A}_k$ significa, per la condizione 1 del n⁰ 69, che se F è un sottocorpo proprio di $k(A_k)$ contenente k, non esiste nessun divisore Y su $\tilde{A}_F$ tale che $\mathrm{Y}_{k(A_k)} \backsim \Delta_k\{A_k\}$; suppongasi allora che esistano un sottocorpo proprio L di $c(A)$, contenente c, ed un Y su $\tilde{A}_L$, tali che $\mathrm{Y}_{c(A)} \backsim \Delta\{A\}$. Un composto F di L e k (in una chiusura algebrica di $k(A_k)$) è sottocorpo proprio di $k(A_k)$; e d'altra parte $(\mathrm{Y}_F)_{k(A_k)} = (\mathrm{Y}_{c(A)})_{k(A_k)} \backsim \Delta_k\{A_k\}$, assurdo. Ciò dimostra compiutamente la prima parte del teorema di dualità nel caso della caratteristica p; in caratteristica 0 essa è nota dal 1954 (cfr. [8]).

Per dimostrare la seconda asserzione dell'enunciato possiamo supporre senz'altro che A sia data su k (algebricamente chiuso); in caratteristica 0 essa è nota, e daremo quindi la dimostrazione in caratteristica p. Facendo $B = A$ nel 7.8, e sostituendovi α con $n\iota_A - \alpha$ (n intero non negativo) si ottiene $\mathcal{C}' \tilde{R}(n\iota_{\tilde{A}} - \tilde{\alpha}) = \varphi_A^{-1}(\mathcal{C}' R(n\iota_A - \alpha))\varphi_A$; l'asserto segue prendendo i determinanti di ambo i membri e tenendo presente il 6.21. Infine, l'ultima parte dell'enunciato è conseguenza di quanto precede e della Proposizione 8, p. 129 di [7], C. V. D..

D'ora in poi identificheremo sempre $\tilde{\tilde{A}}$ con A, ossia porremo $\varkappa_A = \iota_A$; ciò è lecito in quanto la formula $\tilde{\varkappa}_A \varkappa_{\tilde{A}} = \iota_{\tilde{A}}$, già vista, mostra che anche $\varkappa_{\tilde{A}} = \iota_{\tilde{A}}$, ossia che l'identificazione è canonica; la varietà di Picard di A sarà anche chiamata la *duale* di A, e indicata con $\tilde{A}$.

La dimostrazione del teorema di dualità, data in [8] per il caso della caratteristica 0, è stata esposta da Cartier, per la caratteristica p, in un seminario tenuto nel 1958; quella dimostrazione era basata su risultati che coincidono con quelli che si ottengono limitando i 7.7, 7.8 alle componenti di posto 0 dei vari bivettori che vi compaiono. Una successiva dimostrazione pubblicata (²) dallo stesso Cartier [10] usa metodi che, pur essendo generalizzazioni di quelli da lui precedentemente usati, non permettono di uscire dall'ambito della componente di posto 0.

72. Il 7.8 ha una facile conseguenza: se $\alpha = \pi_A$ si avrà $\mathcal{R}\alpha = t_{\mathcal{R}A}$, e perciò $\tilde{\mathcal{R}}\tilde{\alpha} = t_{\tilde{\mathcal{R}}\tilde{A}}$, onde $\tilde{\alpha} = t_{\tilde{A}}$; si ha cioè:

7.10 Lemma. *Se A è varietà abeliana su k, il duale di π_A è t_A; invece il duale di t_A è π_A.*

Consideriamo la definizione 7.2 dell'omomorfismo $\lambda_{\mathbf{Y}}$ di A su $\tilde{A}$: $\sigma_P \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \backsim \Delta(\lambda_{\mathbf{Y}} P) - \Delta(O)$; consideriamo poi il divisore $\mathbf{D} = (\operatorname{div} \mu(\iota \times \varrho))\,\mathbf{Y}$ su $A \times A$, ove ϱ è l'inversione $P \to -P$ su A; si vede subito che se P è un punto del secondo fattore, $\mathbf{D}(P) = \sigma_P \mathbf{Y}$, cosicchè $\mathbf{D}(P) - \mathbf{D}(O) \backsim \Delta(\lambda_{\mathbf{Y}} P) - \Delta(O)$, o anche, posto $\Delta' = (\operatorname{div}(\iota_A \times \lambda_{\mathbf{Y}}))\,\Delta$: $\mathbf{D}(P) - \mathbf{D}(O) \backsim \Delta'(P) - \Delta'(O)$. Perciò $\mathbf{D} \backsim \Delta' + \mathbf{Z} \times A + A \times \mathbf{X}$, con $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}$ divisori su A; ne segue

$$\varphi_{\mathsf{D}} = \varphi_{\Delta'} + \begin{pmatrix} \varphi_{\mathsf{Z}} & 0 \\ 0 & \varphi_{\mathsf{X}} \end{pmatrix}.$$

Ma per 6.29 si ha:

$$\varphi_{\mathsf{D}} = \begin{pmatrix} \iota \\ -\iota \end{pmatrix} \varphi_{\mathbf{Y}} (\iota \quad -\iota) = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathbf{Y}} & -\varphi_{\mathbf{Y}} \\ -\varphi_{\mathbf{Y}} & \varphi_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{\Delta'} = \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'\mathcal{R}\lambda_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & \varphi_A \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\lambda_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & \varphi_A \mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\lambda_{\mathbf{Y}} \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

(²) La prima pubblicazione del teorema di dualità in caratteristica p è però quella data, con altri metodi, da M. Nishi: *The Frobenius theorem and the duality theorem on an abelian variety*, Mem. Coll. Science, Univ. Kyoto, A, 32, 1959, p. 333.

Perciò :

7.11
$$\varphi_{\mathrm{Y}} = -\varphi_A(\mathcal{C}'\,\widetilde{\mathcal{R}}\,\lambda_{\mathrm{Y}}).$$

Sappiamo (7.4) che $\lambda_{\mathrm{Y}} = 0$ se e solo se $\mathrm{Y} \equiv 0$; quindi $\varphi_{\mathrm{Y}} = 0$ se e solo se $\mathrm{Y} \equiv 0$; si possono perciò completare il 6.30, ed il 3.3 di [3]:

7.12 TEOREMA DI PICARD-SEVERI. *Sia A una varietà abeliana su k, e sia Y un divisore su A; allora $\varphi_{\mathrm{Y}} = 0$ se e solo se $\mathrm{Y} \equiv 0$.*

Si può però dire di più, come conseguenza del 6.20:

7.13 TEOREMA. *Notazioni come nel 7.12; allora:*

1. *La nullità di φ_{Y} vale il doppio della dimensione della sottovarietà gruppale G di A formata dai P tali che $\sigma_P \mathrm{Y} \backsim \mathrm{Y}$.*

2. *Il grado di φ_{Y}, come omomorfismo di $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}A$ su $\mathcal{C}'\,RA$, eguaglia la potenza di p che divide esattamente il grado $\nu(\lambda_{\mathrm{Y}})$ di λ_{Y}.*

3. *Il grado della restrizione di φ_{Y} ad un omomorfismo di $\mathcal{C}'(\widetilde{R}_t \overline{\times} \widetilde{R}_r)$ su $\mathcal{C}'(R_t \overline{\times} R_r)$ (ossia il grado di ${}^t\varphi_{\mathrm{Y}}$) coincide con* ins λ_{Y}.

Applichiamo invece il 7.8 al caso $B = \widetilde{A}$, $\alpha = \lambda_{\mathrm{Y}}$, con Y divisore su A; poichè $\widetilde{\lambda}_{\mathrm{Y}} = \lambda_{\mathrm{Y}}$ (asserzione che precede la Proposizione 10, p. 130, di [7]) si ottiene:

7.14
$$(\mathcal{C}'\,\mathcal{R}\,\lambda_{\mathrm{Y}})\,\varphi_{\widetilde{A}} = \varphi_A(\mathcal{C}'\,\widetilde{\mathcal{R}}\,\lambda_{\mathrm{Y}}).$$

73. Se Y è non degenere, φ_{Y} dà un isomorfismo di $\mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}\,A)^0$ su tutto $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$, e quindi di $\widetilde{\mathcal{R}}A$ su tutto $\mathcal{R}A$; esso induce una isogenia di $\widetilde{R}\,A$ su RA; vale quindi il seguente

7.15 TEOREMA DI SIMMETRIA. *Condizione necessaria a che un bicampo $\mathcal{R}_0$ sia legato ad una varietà abeliana, ossia $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}A$ per una varietà abeliana A, è che $\mathcal{R}_0$ sia autoduale, ed abbia quindi la decomposizione descritta nel* 4.29. *Se questo è il caso, ad ogni divisore non degenere Y su A corrisponde un isomorfismo di $\widetilde{\mathcal{R}}A$ su tutto $\mathcal{R}A$, la cui restrizione ad $\widetilde{R}A$ è una isogenia di questo su RA. Infine, $\mathcal{R}\widetilde{A} \cong \widetilde{\mathcal{R}}A$ in un isomorfismo che induce un isomorfismo fra* (*tutto*) *$R\widetilde{A}$ e* (*tutto*) *$\widetilde{R}A$.*

Il 7.15 apre diversi problemi: (1) se la condizione sia anche sufficiente; (2) in che relazione stiano gli isomorfismi φ_A, $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{A}}$ di $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}\widetilde{A}$ su $\mathcal{C}'\,RA$; (3) se ogni isogenia di $\widetilde{R}_0$ (ipercampo legato ad $\widetilde{\mathcal{R}}_0$) su R_0 provenga da qualche divisore Y su qualche varietà abeliana A. Per il problema (2), vedremo che

$\varphi_A = -\widetilde{\varphi_{\tilde{X}}}$; quindi il (3), così posto, ha senz'altro risposta negativa; esso però può essere posto più precisamente: (3′) se ogni isogenia φ di $\mathcal{C}'\widetilde{R}_0$ su $\mathcal{C}' R_0$, tale che $\widetilde{\varphi} = -\varphi$, sia del tipo φ_Y per qualche Y su qualche A.

Per quanto riguarda il problema (1), Manin ha mostrato con esempi di jacobiane, in [12] (cfr. n⁰ 74), che ogni $\mathcal{R}_{r,s}$ è fattore tensoriale di $\mathcal{R}A$ per qualche A; nello stesso lavoro viene anche dimostrato il 7.15 limitatamente al caso in cui k sia assolutamente algebrico; si noti che quando $\mathcal{R}A = \mathcal{R}_r A$ non è escluso che questo sia il caso generale, dato che nessuno ha finora dato esempi di varietà abeliane di questo tipo che non siano isogene ad estensioni di varietà abeliane su corpi assolutamente algebrici.

In considerazione del 7.15 daremo la seguente definizione: se A è varietà abeliana su k, un *blocco* di $\mathcal{R}A$, legato alla coppia (r, s) con r, s interi positivi primi fra loro, ovvero $r = 0$ ed $s = 1$, ovvero $r = 1$ ed $s = 0$, sarà un fattore tensoriale $\mathcal{S}$ di $\mathcal{R}A$ che sia prodotto tensoriale completo di bicampi tutti isomorfi ad $\mathcal{R}_{r,s}$, e tale che se $\mathcal{R}A = \mathcal{S} \overline{\times} \mathcal{T}$, nessun sottobicampo di $\mathcal{T}$ sia isomorfo ad $\mathcal{R}_{r,s}$ [equivalentemente: e tale che ogni sottobicampo di $\mathcal{R}A$ isomorfo ad $\mathcal{R}_{r,s}$ sia sottobicampo di $\mathcal{S}$]; se $\mathcal{R}A$ contiene il blocco $\mathcal{S}$, per 7.15 esso contiene anche un blocco $\mathcal{S}' \cong \widetilde{\mathcal{S}}$; si ha $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ se $r = s = 1$, e $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = k$ negli altri casi; l'$\mathcal{S}'$ si chiamerà il blocco *duale* di $\mathcal{S}$. Osserviamo che la coppia (r, s) è completamente determinata dal numero razionale (≥ 0 e ≤ 1) $\alpha = r/(r + s)$, che nel n⁰ 54, se era $\neq 0$, è chiamato la pendenza degli elementi non nulli di $\mathcal{C}'\mathcal{S}^0$; diremo perciò anche che $\mathcal{S}$ è il blocco di *pendenza* α, anche se $\alpha = 0$; esso è in effetti l'insieme degli elementi di $\mathcal{R}A$ di pendenza α, oltre allo 0. La stessa nomenclatura verrà applicata a $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$, $\widetilde{\mathcal{R}}A$, $\mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$. Se β è un endomorfismo di A, ed $\mathcal{N}$ è un blocco di $\widetilde{\mathcal{R}}A$, la restrizione γ di $\widetilde{\mathcal{R}}\beta$ ad $\mathcal{N}$ è un endomorfismo di $\mathcal{N}$ ed ha, tramite $\mathcal{C}'\gamma$, un polinomio caratteristico e delle radici caratteristiche (ciascuna ripetuta tante volte quanta è la sua molteplicità), a priori in una chiusura algebrica Ω' di K'; si vede però subito che le radici caratteristiche di β, di nuovo contate con le loro molteplicità, nella chiusura algebrica Ω di $Q_p = \operatorname{biv} C_p$ in Ω' (per 6.12), sono tutte e sole le radici caratteristiche dei vari γ appartenenti ai vari blocchi. Data quindi una radice caratteristica ω di β in Ω, ha senso la frase « ω appartiene al blocco $\mathcal{N}$ », ferma restando la possibilità che due radici uguali appartengano a blocchi diversi.

Altra definizione: suppongasi che k sia assolutamente algebrico; una varietà abeliana A su k sarà estensione su k di una varietà abeliana B definita su qualche sottocorpo finito c di k, di cardinalità p^e; l'applicazione $x \longrightarrow \pi^e x$ di $c(B)$ in sè è un isomorfismo di c-algebre, ed è quindi estensibile ad un isomorfismo $k(\beta_e)$ della k-algebra $k(A)$ su se stessa; l'endomorfismo β_e di A trasposto di $k(\beta_e)$ è definito da: $x(\beta_e P) = [k(\beta_e)x](P) = (\pi^e x)(P) = = \pi^e[x(P)]$ per ogni $x \in c(B)$ ed ogni $P \in A$. Vale allora il risultato seguente, che per noi è conseguenza del teorema di simmetria 7.15, ma che Manin dimostra in [12] mediante la teoria della funzione zeta, ottenendo in tal modo il teorema di simmetria stesso (per k assolutamente algebrico) come conseguenza:

7.16 TEOREMA. *Nelle notazioni precedenti, sia* $n = \dim A$, *e siano* $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ *le radici del polinomio caratteristico di* β_e, *in una chiusura algebrica* Ω *di* $Q_p = \mathrm{biv}\, C_p$, *ciascuna ripetuta tante volte quanta ne è la molteplicità. Se* $\mathcal{N}$ *è un qualsiasi blocco di* $\tilde{\mathcal{R}}A$, *di pendenza* $1-\alpha$, *le radici caratteristiche di* β_e *appartenenti ad* $\mathcal{N}$ *hanno tutte v-valore* $e\alpha$; *se* ω *è una di esse, ed* $\tilde{\omega}$ *è una* ω_i *appartenente al blocco duale di* $\mathcal{N}$, *è* $\omega\tilde{\omega} = p^e$. *Di conseguenza, se* m *è il numero delle* ω_i *di v-valore* $e\alpha$, *e se* $\alpha = s/(r+s)$ *con* r, s *interi positivi primi fra loro, ovvero* $r = 1$ *ed* $s = 0$, *ovvero* $r = 0$ *ed* $s = 1$, *il numero di fattori tensoriali indecomponibili di* $\mathcal{N}$ *è* $m/(r+s)$.

DIM. La dimostrazione è basata sul fatto che $Q(\beta_e)$, come sotto-Q-algebra di $Q \otimes_I \mathrm{End}\, A$, è semisemplice, ossia somma diretta di corpi; questo è un fatto noto, ma piuttosto riposto; preferiamo quindi ridurci al caso in cui A è varietà abeliana semplice, poichè in tal caso $Q \otimes_I \mathrm{End}\, A$ è divisoria, e quindi $Q(\beta_e)$ è ovviamente un corpo.

Prima riduzione. La prima asserzione dell'enunciato è vera se è vera per una varietà abeliana A' isogena ad A: infatti A è estensione su k di una varietà abeliana B su un corpo finito c di cardinalità p^e, ed A' sarà estensione su k di una B' su un $c' \supseteq c$, di cardinalità $p^{e'}$; inoltre, per c' grande, vi sarà una isogenia ϑ di B' su $B_{e'}$, la cui estensione ad A', ancora indicata con ϑ, è l'isogenia di cui si è postulata l'esistenza; infine, A' sarà dotata di un $\beta'_{e'}$. Posto $\beta_{e'} = \vartheta \beta'_{e'} \vartheta^{-1}$, $\beta_{e'}$ è proprio il $\beta_{e'}$ di A; $\beta_{e'}$ e $\beta'_{e'}$ hanno le stesse radici caratteristiche (contate con le loro molteplicità); i blocchi di $\tilde{\mathcal{R}}A$, $\tilde{\mathcal{R}}A'$ sono in corrispondenza biunivoca, blocchi corrispondenti essendo isomorfi, e quindi una radice caratteristica di $\beta_{e'}$ appartiene ad $\mathcal{N}$ se e solo se essa appartiene al blocco corrispondente in $\tilde{\mathcal{R}}A'$, che continueremo ad indicare con $\mathcal{N}$. Poichè $\beta_e^{e'} = \beta_{e'}^{e}$, le potenze e'-esime delle radici caratteristiche di β_e coincidono, in qualche ordine, con le potenze e-esime delle radici caratteristiche di $\beta_{e'}$, e quindi di $\beta'_{e'}$: per esempio $\omega^{e'} = \omega'^{e}$, ove ω, ω' appartengono allo stesso blocco $\mathcal{N}$ di pendenza $1-\alpha$. Ma allora si ha $\alpha = e'^{-1} v(\omega') = (ee')^{-1} v(\omega'^{e}) = (ee')^{-1} v(\omega^{e'}) = e^{-1} v(\omega)$, come voluto.

Seconda riduzione. La prima asserzione dell'enunciato è vera se è vera per ogni varietà abeliana semplice: per dimostrare ciò, in base alla prima riduzione basta dimostrare che è vera per $A \times A'$ se è separatamente vera per A e per A'; qui, A' è una qualsiasi varietà abeliana su k. Ora, A' sarà estensione su k di una varietà abeliana B' definita su un corpo finito c', con $p^{e'}$ elementi; se $h = ee'$, A ed A' possiedono rispettivamente un β_h ed un β'_h; il risultato essendo vero per A e β_h, e per A' e β'_h, esso è ovviamente vero per $A \times A'$ e $\beta_h \times \beta'_h$; ma $\beta_h \times \beta'_h$ non è altro che il β_h di $A \times A'$. Ed allora lo stesso ragionamento usato nella prima riduzione mostra che l'asserto è valido per ogni β_l di $A \times A'$.

Dimostrazione. Basta ora dare la dimostrazione del primo asserto dell'enunciato sotto l'ipotesi che A sia semplice; porremo $\beta = \beta_e$ per semplicità. In questo caso $Q \otimes_I \operatorname{End} A$ è un'algebra divisoria su Q, e perciò $Q[\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\beta]$ è un corpo. Pongasi $N = \mathcal{C}'\mathcal{N}^0$; dato che $\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\beta$ è somma diretta di endomorfismi dei vari blocchi, sia γ la sua restrizione ad N; sia $f(\xi) \in I[\xi]$, con ξ indeterminata, tale che $f(\gamma)$ sia 0 o un divisore dello 0 nell'anello degli endomorfismi di N; allora $f(\gamma)N \subset N$, $\dim f(\beta) A < \dim A$, $f(\beta) = 0$, $f(\gamma) = 0$. Ciò mostra che $Q[\gamma]$ è un corpo; ed allora $Q_p[\gamma]$ (sotto-Q_p-algebra di $\operatorname{End} N$), che è immagine omomorfa di $Q_p \otimes_Q Q[\gamma]$, è una somma diretta di corpi. Se l'identità 1 di $Q_p[\gamma]$ è somma degli automoduli ortogonali $e_1, \dots, e_h$, primitivi in $Q_p[\gamma]$, ciò significa che γ applica in sè ciascuno dei «sottoblocchi» $e_i N$ di N, la cui somma diretta è N; la restrizione δ_i di γ, e quindi di $\mathcal{C}'\tilde{\mathcal{R}}\beta$, ad $e_i N$ è tale che $Q_p[\delta_i]$ (isomorfo a $Q_p[e_i\gamma]$) è un corpo. Ciascun $e_i N$ è a sua volta somma diretta di K'-moduli canonici isomorfi ad $\mathcal{N}_{r,s}$, ed in numero, per esempio, di q_i. Sia X una base (matrice ad una riga) di $e_i N$, formata di basi dei vari addendi diretti, ciascuna del tipo di quella descritta nel n⁰ 18; allora δ_i sarà rappresentato, rispetto a questa base, da una matrice M_i: $\delta_i X = X M_i$, di ordine $q_i(r+s)$, ad elementi a priori in K', anzi in K; poichè però $\delta_i \pi = \pi \delta_i$, e poichè $\pi X = XC$, con C matrice i cui elementi sono scelti fra i numeri 0, 1, p (formata con le trasposte delle C_π del n⁰ 18), si avrà $M_i^\pi = C^{-1} M_i C$; ma $C^{r+s} = p^r$, onde $M_i^{\pi^{r+s}} = M_i$, ed M_i ha in realtà i suoi elementi nel prolungamento non ramificato W, di grado $r+s$, di Q_p, avente come corpo residuo il corpo finito di cardinalità p^{r+s}.

Quando δ_i percorre $\operatorname{End} e_i N$, l'applicazione $\delta_i \to M_i$ dà una rappresentazione fedele di $\operatorname{End} e_i N$; pertanto il polinomio minimo di M_i su Q coincide col polinomio minimo di δ_i su Q, che è poi quello di γ su Q, ed anche di β su Q; le radici caratteristiche di M_i in Ω coincidono, a prescindere dalle molteplicità, con le radici del polinomio minimo di M_i su W; queste, a loro volta, sono da ricercarsi fra le radici del polinomio minimo di M_i su Q_p, che sono fra loro coniugate su Q_p perchè $Q_p[M_i]$ è un corpo; esse hanno perciò lo stesso v-valore, che indicheremo con $\alpha_i e$. Poichè il loro numero, questa volta contando le molteplicità come radici caratteristiche, è $q_i(r+s)$, si deve avere $q_i(r+s)\alpha_i e = v(\det M_i) = v(\det \delta_i)$; ma $(\mathcal{C}'R\beta)(\mathcal{C}'RA) = \pi^e \mathcal{C}'RA$, onde $(\mathcal{C}'\widetilde{R}\beta)(\mathcal{C}'\widetilde{R}A) = t^e \mathcal{C}'\widetilde{R}A$, e $\delta_i(e_i N) = t^e(e_i N)$, cosicchè $v(\det \delta_i) = v(\det t^e_{e_i N}) = seq_i$, e di conseguenza $\alpha_i = s/(r+s) = \alpha$, come voluto.

Conseguenze. Resta da dimostrare l'asserzione $\omega\widetilde{\omega} = p^e$; ora, che per ogni ω esista una radice caratteristica $\widetilde{\omega}$ con questa proprietà è un fatto noto, la cui dimostrazione ripetiamo più sotto per comodità del lettore; dall'esistenza di $\widetilde{\omega}$, e dall'essere $v(\widetilde{\omega}) = e - v(\omega) = e(1-\alpha)$, segue che $\widetilde{\omega}$ appartiene al blocco di pendenza α, che è appunto il blocco duale di $\mathcal{N}$.

La dimostrazione cui si è accennato è la seguente: per 7.10, il duale $\widetilde{\beta}$ di β è legato all'immersione $x \longrightarrow t^e_{\widetilde{B}} x$ di $c(\widetilde{B})$ in sè come β è legato alla $x \longrightarrow \pi^e x$ di $c(B)$; se Y è divisore non degenere su A, estensione su k di un divisore di B, pongasi $\beta' = \lambda_{\mathrm{Y}}^{-1}\widetilde{\beta}\lambda_{\mathrm{Y}}$; allora β' e $\widetilde{\beta}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico. D'altra parte $p^e\mathrm{Y} = (\operatorname{div}\beta)\mathrm{Y}$, onde $p^e\lambda_{\mathrm{Y}} = \lambda_{(\operatorname{div}\beta)\mathrm{Y}} = \widetilde{\beta}\lambda_{\mathrm{Y}}\beta$; questa, con la precedente, dà $p^e\iota_A = \lambda_{\mathrm{Y}}^{-1}\widetilde{\beta}\lambda_{\mathrm{Y}}\beta = \beta'\beta$; ciò mostra che se ω è radice caratteristica di β, $p^e\omega^{-1}$ lo è di β', e quindi di $\widetilde{\beta}$, e perciò anche di β per 7.9, C. V. D..

74. Il 7.16 permette di mostrare che ogni $\mathcal{R}_{r,s}$ è fattore tensoriale di qualche $\widetilde{\mathcal{R}}A$; la dimostrazione completa è data nel § 4 del Cap. 4 di [12], ed un suo schizzo è il seguente: la curva C, sul corpo finito c di cardinalità p^e, di equazione $y^p - y = x^{p^e - 1}$ $(e = 1, 2, \ldots)$ ha genere $n = (p-1)(p^e-2)/2$, come si vede considerando il differente di $k(x,y)$ su $k(y)$, e il divisore all'infinito rispetto a $k[y]$, ossia il polo di y; la sua jacobiana J ha quindi dimensione n, ed è definita su c; si sfrutta poi il fatto che le radici caratteristiche di β_e coincidono con i reciproci delle radici della funzione Z su C (p. 164 di [7]), e che tale funzione è stata calcolata da Davenport e Hasse, per trovare i v-valori delle radici; si trova che per ogni intero j, da 1 a p^e-2 inclusi, ci sono $p-1$ radici (contando le molteplicità) di v-valore $(p-1)^{-1}S(j)$, ove $S(j)$ ha il significato descritto nel n^0 1. In complesso, per h intero e tale che $1 \leq h < e(p-1)$ ci sono perciò delle radici di v-valore $(p-1)^{-1}h$; pertanto $\widetilde{\mathcal{R}}J$ possiede blocchi di tutte le pendenze $1-\alpha$, ove $\alpha = [e(p-1)]^{-1}h$, con $1 \leq h < e(p-1)$; dato p, ogni numero razionale fra 0 e 1, estremi esclusi, è esprimibile in questa forma, e quindi per ogni p esistono varietà abeliane con blocchi

di pendenza preassegnata qualsiasi, escluse al più 0 e 1. Quanto ai blocchi di pendenza 0 e 1, è ben noto che essi sono gli unici presenti in una curva ellittica non « supersingolare », per esempio la curva $y^2 - y = lx - x^{-1}$ per $p = 2$, o $y^2 = x(x-1)(x-l)$ per $p \neq 2$, con l assolutamente trascendente.

Il teorema di simmetria 7.15 ha varie conseguenze riguardanti End A, per una varietà abeliana A; qui non le investigheremo in dettaglio; esse discendono essenzialmente dalle considerazioni che ora esponiamo. Dal 2.12 di MC si sa che End $\mathcal{N}_{r,s}$ (cfr. n^0 18) è un'algebra centrale divisoria su $Q_p = \text{biv}\, C_p$, di grado $r+s$, avente come corpo regolatore (splitting field) un prolungamento non ramificato W di grado $r+s$ di Q_p; e che End $N_{r,s}$ è una schiera di tale algebra. D'altra parte, per mezzo di una base di $\mathcal{N}_{r,s}$, gli elementi di End $\mathcal{N}_{r,s}$ vengono rappresentati per mezzo di matrici quadrate di ordine $r+s$, ad elementi in W (cfr. la dimostrazione del 7.16), qualora naturalmente W venga considerato come sottocorpo di K'; in tal modo End $\mathcal{N}_{r,s}$ resta immerso nell'algebra, su K', delle applicazioni K'-lineari di $\mathcal{N}_{r,s}$ in sè. Da un confronto di dimensioni si ottiene subito il

7.17 Lemma. *Sia $E = \text{End}\, N$ (con N K-modulo canonico) immersa, come sopra descritto, nell'algebra E', su K, delle applicazioni K-lineari di N in sè; posto $Z = \text{vect}\, C_p \subset K$, si ha $E' = K \otimes_Z E$.*

Da questo, e dal Teorema 2, p. 183, di [7], segue:

7.18 Teorema. *Siano A, B varietà abeliane su k; sia F' il K-modulo delle applicazioni K-lineari di $\mathcal{C}'\tilde{R}A$ su $\mathcal{C}'\tilde{R}B$; sia F il sotto-K-modulo di F' generato dai $\mathcal{C}'\tilde{R}\alpha$ quando α percorre* Hom (A, B). *Allora $F = K \otimes_I \text{Hom}(A, B)$.*

Sia A varietà abeliana di dimensione n su k, e suppongasi che $\mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0$ sia somma di blocchi nel modo seguente:

$$\mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0 = (\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_1') \oplus \ldots \oplus (\mathcal{N}_h \oplus \mathcal{N}_h') \oplus \mathcal{N}_0 ,$$

ove: $\mathcal{N}_i$ ha dimensione n_i e pendenza $\alpha_i < 1/2$; $\mathcal{N}_i'$ è duale di $\mathcal{N}_i$, ed ha quindi dimensione n_i e pendenza $\alpha_i' = 1 - \alpha_i > 1/2$; $\mathcal{N}_0$ ha dimensione n_0 e pendenza $1/2$; e ove si suppone $n_0 = 0$ se $\mathcal{N}_0$ manca, e $h = 0$ se $\mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0 = \mathcal{N}_0$. Naturalmente $n_0 + 2\sum_1^h{}_i\, n_i = 2n$; la dimensione della K'-algebra $K' \otimes_{Q_p} \text{End}\, \mathcal{N}_i$ è n_i^2, e quella di $K' \otimes_{Q_p} \text{End}\, \mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0$ sarà $n_0^2 + 2\sum_1^h{}_i\, n_i^2$; questo è dunque un limite superiore per la dimensione della Q-algebra $Q \otimes_I \text{End}\, A$. In particolare, se A è « non speciale », ossia ha solo i blocchi di pendenze 0 e 1, tale limite superiore è $2n^2$, come nel caso della caratteristica 0; se invece vi sono blocchi di altre pendenze, ma non di pendenza $1/2$, tale limite è $< 2n^2$; i casi patologici in cui il limite in questione è $> 2n^2$ possono aversi solo quando sia presente il blocco di pendenza $1/2$; e si raggiunge il valore massimo $4n^2$ quando vi sia soltanto questo blocco (per esempio, caso della curva ellittica a modulo «supersingolare»); se l'algebra $Q \otimes_I \operatorname{End} A$ ha dimensione $4n^2$ essa è certamente centrale su Q, ed è prodotto tensoriale di un'algebra regolare (= algebra totale di matrici) per l'algebra dei quaternioni i cui soli primi ramificati sono p e il primo all'infinito. Se invece $h > 0$, e l'algebra $Q \otimes_I \operatorname{End} A$ ha la massima dimensione compatibile con i blocchi, ossia la dimensione $n_0^2 + 2 \sum_1^h i\, n_i^2$, tale algebra è certamente non centrale su Q, e il primo p ha certamente almeno due fattori primi nella schiera degli interi del centro.

75. Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del seguente risultato fondamentale:

7.19 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k, e sia Y un divisore su A; allora* $\varphi_{\widetilde{A}} = -\widetilde{\varphi}_A$, *e* $\widetilde{\varphi}_{\mathrm{Y}} = -\varphi_{\mathrm{Y}}$.

DIM. La seconda asserzione è conseguenza della prima, del 7.11, e del 7.8, facendo in questo $B = \widetilde{A}$ e ricordando che $\widetilde{B} = A$ e che $\widetilde{\lambda}_{\mathrm{Y}} = \lambda_{\mathrm{Y}}$ (cfr. l'asserzione che precede la Proposizione 10, p. 130 di [7]). Dobbiamo quindi dimostrare la prima asserzione; essa è equivalente alla

$$7.20 \qquad \widetilde{d}\cdot\varphi_{\widetilde{A}}\, d = -\, d\cdot\varphi_A\, \widetilde{d} \quad \textit{per ogni } d \in \mathcal{C}'\,\widetilde{R}A \textit{ ed ogni } \widetilde{d} \in \mathcal{C}'\,\widetilde{R}\,\widetilde{A};$$

è anzi sufficiente dimostrare queste relazioni quando d, $\widetilde{d}$ percorrano degli insiemi minimi di generatori di $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}A$ e $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}\,\widetilde{A}$ rispettivamente. Ora, se tali insiemi di generatori vengono costruiti mediante unione di insiemi di generatori di $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_t A$, $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_r A$, $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_\pi A$, e analogamente per $\widetilde{A}$, ambo i membri di 7.20 sono zero in tutti i casi eccettuati al più i seguenti (cfr. il diagramma nel n° 68):

Caso 1: $d \in \mathcal{C}'\,\widetilde{R}_r A$ *e* $\widetilde{d} \in \mathcal{C}'\,\widetilde{R}_r\,\widetilde{A}$;

Caso 2: $d \in \mathcal{C}'\,\widetilde{R}_\pi A$ e $\widetilde{d} \in \mathcal{C}'\,\widetilde{R}_t\widetilde{A}$, ovvero simmetricamente.

Prima di trattare questi due casi separatamente dobbiamo stabilire alcune notazioni; sia Δ un divisore di Poincaré su $A \times \widetilde{A}$, e pongasi $\Delta_1 = \operatorname{div}((p\iota)^l \times \iota)\,\Delta$, $\Delta_2 = \operatorname{div}(\iota \times (p\iota)^l)\,\Delta$, ove l è un intero positivo che verrà fissato volta per volta. Sia P un punto di $\widetilde{A}$, che si identificherà con un sistema lineare completo $|\mathbf{Y}|$ di divisori su A; si ha

$$\varDelta_1(P) - \varDelta_1(O) \backsim (\operatorname{div}(p\iota)^l)\,\mathbf{Y},$$

e

$$\varDelta_2(P) - \varDelta_2(O) = \varDelta(p^l P) - \varDelta(O) \backsim p^l\,\mathbf{Y}.$$

Poichè $\mathbf{Y} \equiv 0$, è $(\operatorname{div}(p\iota)^l)\,\mathbf{Y} \backsim p^l\,\mathbf{Y}$, onde $\varDelta_1(P) - \varDelta_2(P) \backsim \varDelta_1(O) - \varDelta_2(O)$, e pertanto

7.21 $$\varDelta_1 = \varDelta_2 + \operatorname{div} z + \mathbf{X} \times \widetilde{A} + A \times \widetilde{\mathbf{X}},$$

per un opportuno $z \in k(A \times \widetilde{A})$, e per divisori opportuni $\mathbf{X}$, $\widetilde{\mathbf{X}}$ su A, $\widetilde{A}$ rispettivamente. Trattiamo ora i due casi separatamente.

Caso 1. Se $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}A$ ed $\mathbf{m}$ è l'elemento di $\mathcal{M}A$ cui $\mathfrak{b}$ appartiene, dato un intero positivo n vogliamo anzitutto procurarci una ricetta per costruire $\varrho_n\, d \cdot {}^t\chi\,\mathbf{m}$, sotto l'ipotesi che ${}^t\chi\,\mathbf{m}$ appartega a $\mathcal{C}'\,{}^tR_r\,A$; supposto dapprima che nessun polo di $\mathfrak{b}$ interschi $\mathcal{G}A$, si cerchi, come nel 6.15, un $x \in \mathcal{X}\,A \cap \operatorname{vect}(S^\infty A \cap ({}^t\mathcal{R}A)^+)$ tale che, nelle notazioni del 6.12, $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{b}$; ossia tale che per ogni r si abbia $\operatorname{cl} t^r_{C\infty}\,\varrho_r\, x = \varrho_r(\operatorname{cl}\pi^r_A)\,\mathfrak{b}$. Si noti però che l'ipotesi che ${}^t\chi\,\mathbf{m} \in \mathcal{C}'\,{}^tR_r\,A$ comporta che per r elevato si abbia $\varrho_{n+r}(p\iota)^r x \in \operatorname{vect}_{n+r} C$, ove $C = k(A)$, e che pertanto

7.22 $$\operatorname{cl}(p\iota)^r\,\varrho_{n+r}\,x = \varrho_{n+r}(\operatorname{cl}(p\iota)^r)\,\mathfrak{b}.$$

I 6.14, 6.15 comportano che

$${}^t\chi\,\mathbf{m} = \xi = \lim_{r\to\infty} t^{-r}\,t^r_0\,x = \lim_{r\to\infty} p^{-r}(p\iota)^r x,$$

ove t_0 è il t di ${}^t\mathcal{R}A$, e lim significa t-lim; si ha pertanto $\varrho_n\, d\cdot\xi = \varrho_n\, d * \xi = \varrho_n \lim\limits_{r\to\infty} d * p^{-r}(p\iota)^r x$. Nella dimostrazione del 6.14 si è visto che $p^{-r-1}(p\iota)^{r+1}x - p^{-r}(p\iota)^r x = t^{-r-1}\,t^{r+1}_0\,x - t^{-r}\,t^r_0\,x \in t^{-r-1}\operatorname{vect} t^r_C\,C$; dato che $d \in \mathcal{C}'\,{}^t\widetilde{R}_r\,A$, per r elevato è $d_{n-1}\,t^r_C\,C = 0$, cosicchè $\varrho_n\, d\cdot\xi = \varrho_n\, d * p^{-r}(p\iota)^r x$ per r elevato, e infine

7.23 $$\varrho_n\, d\cdot\xi = \varrho_n\, p^{-r}(d * (p\iota)^r x) = p^{-r}\,\varrho_{n+r}\, d * (p\iota)^r x.$$

È ora chiaro che la 7.23 resta valida anche se i poli di $\mathfrak{b}$ intersecano $\mathcal{G}A$, e resta valida per qualsiasi $x \in \operatorname{vect} C^\infty$ che soddisfi la 7.22.

Si consideri il divisore di Poincaré $\varDelta$ su $A \times A$; nelle notazioni del 6.26, suppongasi che $\mathfrak{b}(\widetilde{d}, \varDelta) = \mathfrak{b} \times \widetilde{A} + A \times \widetilde{\mathfrak{b}} + \operatorname{cl} y$, con $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}A$ e $\widetilde{\mathfrak{b}} \in \mathcal{B}\widetilde{A}$, e $y \in \operatorname{vect} k(A \times \widetilde{A})$; in base alla definizione di $\varphi_A\,\widetilde{d}$ (n⁰ 70), questo non è altro che $\chi\mathbf{m}$, o, nelle nostre notazioni, ${}^t\chi\mathbf{m}$, se $\mathbf{m}$ è la classe di $\mathbf{b}$ in $\mathcal{M}A$. Si ha intanto, nelle notazioni del 7.21, e scrivendo r in luogo di l, che $\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_2) = \mathrm{cl}\,(\iota \times (p\iota)^r)\,\mathbf{b}(p^r\tilde{d}, \Delta)$, onde $\varrho_{n+r}\,\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_2) = 0$ per r elevato; quindi, per 7.21,

$$\varrho_{n+r}\,\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_1) = \varrho_{n+r}\,\mathbf{b}(\tilde{d}, \mathrm{div}\, z) + A \times \varrho_{n+r}\,\mathbf{b}(\tilde{d}, \tilde{\mathbf{X}}).$$

Ma è anche

$$\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_1) = \mathrm{cl}\,((p\iota)^r \times \iota)\,\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta) = (\mathrm{cl}\,(p\iota)^r)\,\mathbf{b} \times \tilde{A} + A \times \tilde{\mathbf{b}} + \mathrm{cl}\,((p\iota)^r \times \iota)\,y,$$

onde

$$\varrho_{n+r}\,(\mathrm{cl}\,(p\iota)^r)\,\mathbf{b} \times \tilde{A} = \varrho_{n+r}\,\mathrm{cl}\,\tilde{d} * \log\{z\} + A \times \varrho_{n+r}\,\mathbf{b}' - \varrho_{n+r}\,\mathrm{cl}\,((p\iota)^r \times \iota)\,y,$$

con $\mathbf{b}' \in \mathcal{B}\tilde{A}$. Se x è dato da 7.22, questa si scrive

$$\mathrm{cl}\,(p\iota)^r\,\varrho_{n+r}\,x \times \tilde{A} = \varrho_{n+r}\,\mathrm{cl}\,\tilde{d} * \log\{z\} + A \times \varrho_{n+r}\,\mathbf{b}' - \varrho_{n+r}\,\mathrm{cl}\,((p\iota)^r \times \iota)\,y,$$

che mostra che $\varrho_{n+r}\,\mathbf{b}'$ è esatta, e che pertanto

$$\varrho_{n+r}\,(p\iota)^r\,x = \varrho_{n+r}\,\tilde{d} * \log\{z\} + \varrho_{n+r}\,y' - \varrho_{n+r}\,((p\iota)^r \times \iota)\,y,$$

con $y' \in \mathrm{vect}\; k(\tilde{A})$. Applicando $d\,*$, e tenendo presente il 7.23:

$$\varrho_n\,d\cdot\varphi_A\,\tilde{d} = \varrho_n\,d\cdot{}^t\chi\mathbf{m} = \varrho_n\,d\cdot\xi = p^{-r}\,\varrho_{n+r}\,d * (p\iota)^r x = p^{-r}\,\varrho_{n+r} d * \tilde{d} * \log\{z\},$$

dato che $\varrho_{n+r}\,d * ((p\iota)^r \times \iota)\,y = 0$ per r elevato.

Ora, $\varrho_n\,\tilde{d}\cdot\varphi_{\tilde{A}}\,d$ si ottiene dall'espressione precedente scambiando d con $\tilde{d}$ (il che non produce nessuna modificazione), e sostituendo z con z^{-1}, in quanto Δ_1 e Δ_2 vanno scambiati; la 7.20 è quindi dimostrata nel caso 1.

Caso 2. In questo caso si può addirittura supporre che $td = d$ e $\pi\tilde{d} = \tilde{d}$; considereremo d e $\tilde{d}$ come elementi di $\mathcal{C}'\,\tilde{R}_\pi A$ e $\mathcal{C}'\,\tilde{R}_t A$ rispettivamente; porremo $\exp d = \{\delta\}$, ove δ è un automorfismo di $\tilde{\mathcal{R}}A$ come k-algebra (cfr. n° 55, caso 2); dovremo computare separatamente $d\cdot\varphi_A\,\tilde{d}$ e $\tilde{d}\cdot\varphi_{\tilde{A}}\,d$.

Computo di $d\cdot\varphi_A\,\tilde{d}$. Cominciamo col considerare un $\mathbf{b} \in \mathcal{B}A$, la cui classe $\mathbf{m}$ in $\mathcal{M}A$ abbia la proprietà $\pi\mathbf{m} = \mathbf{m}$; dato un intero positivo n, cerchiamo la ricetta per costruire $\varrho_n\,d\cdot\chi\mathbf{m}$; il $\chi\mathbf{m}$ si costruisce come nel

6.32 : si sceglie x per mezzo della 6.36

7.24 $$\varrho_n \,\mathrm{cl}\,(p\iota)^n x = \varrho_n (\mathrm{cl}\,(p\iota)^n)\mathbf{b},$$

e vale la 6.37 :

7.25 $$\xi = \lim_{r\to\infty} t^{-r} (p\iota)^r x.$$

Come si è visto nel caso 2 del n⁰ 55, è $d\cdot\xi = \delta\xi - \xi = \lim_{r\to\infty} t^{-r} [\delta (p\iota)^r x - (p\iota)^r x]$; ma δ induce l'automorfismo identico in $C = k(A)$, e pertanto, se a_r è l'espressione a primo membro nel 6.38, si ha $\delta a_r = a_r$ per $r = 0, 1, \ldots$; si conclude che $d\cdot\xi = \delta x - x$, e infine che

7.26 $$\varrho_n \, d\cdot\chi\mathfrak{m} = \varrho_n \, d\cdot\xi = \varrho_n (\delta x - x).$$

Questa resta vera senza ipotesi sui poli di $\mathbf{b}$, e per ogni $x \in \mathrm{vect}\, C^\infty$ che soddisfi la 7.24.

Torniamo alla considerazione di Δ e di

$$\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta) = \mathbf{b} \times \tilde{A} + A \times \tilde{\mathbf{b}} + \mathrm{cl}\, y,$$

come nel caso 1; il $\varphi_A \tilde{d}$ è di nuovo $\chi\mathfrak{m}$, se $\mathfrak{m}$ è la classe di $\mathbf{b}$ in $\mathcal{M}A$. Nelle notazioni del 7.21, e con $l = n$, si ha

$$\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_2) = \mathrm{cl}\,(\iota \times (p\iota)^n)\, \mathbf{b}(p^n \tilde{d}, \Delta) = \mathrm{cl}\,(\iota \times (p\iota)^n)\, \mathbf{b}(t^n \tilde{d}, \Delta),$$

onde $\varrho_n \mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_2) = 0$; la 7.21 dà quindi

$$\varrho_n \mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_1) = \varrho_n \mathbf{b}(\tilde{d}, \mathrm{div}\, z) + A \times \varrho_n \mathbf{b}(\tilde{d}, \tilde{\mathbf{X}}).$$

Ma è

$$\mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta_1) = \mathrm{cl}\,((p\iota)^n \times \iota)\, \mathbf{b}(\tilde{d}, \Delta) = (\mathrm{cl}\,(p\iota)^n)\, \mathbf{b} \times \tilde{A} + A \times \tilde{\mathbf{b}} + \mathrm{cl}\,((p\iota)^n \times \iota)\, y,$$

onde

$$\varrho_n (\mathrm{cl}\,(p\iota)^n)\, \mathbf{b} \times \tilde{A} = \varrho_n \,\mathrm{cl}\, \tilde{d} * \log\{z\} + A \times \varrho_n \mathbf{b}' - \varrho_n \,\mathrm{cl}\,((p\iota)^n \times \iota)\, y,$$

con $\mathbf{b}' \in \mathcal{B}\tilde{A}$. Se x è dato da 7.24, questa si scrive

$$\mathrm{cl}\,(p\iota)^n \varrho_n x \times \tilde{A} = \varrho_n \,\mathrm{cl}\, \tilde{d} * \log\{z\} + A \times \varrho_n \mathbf{b}' - \varrho_n (\mathrm{cl}\,(p\iota)^n \times \iota)\, y,$$

che mostra che $\varrho_n \mathfrak{b}'$ è esatta, e che pertanto

$$\varrho_n (p\iota)^n x = \varrho_n \widetilde{d} * \log \{z\} + \varrho_n y' - \varrho_n ((p\iota)^n \times \iota) y,$$

con $y' \in \operatorname{vect} k(\widetilde{A})$. A questa intendiamo applicare l'operatore $(p\iota)^{-n} = \pi^{-n} t_1^{-n}$, ove t_1 è il t di $k(A \times \widetilde{A})$; prima di farlo ricordiamo che dalla seconda fra le 5.19 si ricava

$$t_1^{-n} (\widetilde{d} * \log \{z\}) = \pi^n \widetilde{d} * t_1^{-n} \log \{z\} = \widetilde{d} * t_1^{-n} \log \{z\};$$

quindi

$$\varrho_n x = \pi^{-n} (\widetilde{d} * t_1^{-n} \log \{z\}) + \varrho_n (p\iota)^{-n} y' - \varrho_n (\iota \times (p\iota)^{-n}) y,$$

onde

$$\varrho_n (\delta x - x) = \varrho_n [\delta\pi^{-n} (\widetilde{d} * t_1^{-n} \log \{z\}) - \pi^{-n} (\widetilde{d} * t_1^{-n} \log \{z\})].$$

Infine, per 7.26,

$$\varrho_n d \cdot \varphi_A \widetilde{d} = \varrho_n d \cdot \xi = \pi^{-n} \varrho_n [\widetilde{d} * (\delta t_1^{-n} \log \{z\} - t_1^{-n} \log \{z\})];$$

l'espressione cui qui si applica π^{-n} appartiene a $\operatorname{vect}_n k$; quindi l'applicazione ad essa di π^{-n} dà lo stesso risultato dell'applicazione di t_1^n; per la seconda delle 5.19, e considerando che $\pi\widetilde{d} = \widetilde{d}$, si ha quindi

$$\varrho_n d * \varphi_A \widetilde{d} = \varrho_n [\widetilde{d} * t_1^n \delta t_1^{-n} \log \{z\} - \log \{z\}];$$

ma $t_1^n \delta t_1^{-n} \log \{z\} = \delta^{p^{-n}} \log \{z\}$; pertanto

7.27 $$\varrho_n d \cdot \varphi_A \widetilde{d} = \varrho_n [\delta^{p^{-n}} \log \{z\} - \log \{z\}].$$

Computo di $\widetilde{d} \cdot \varphi_{\widetilde{A}} d$ e conclusione. Considero un $\widetilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{B}' \widetilde{A}$ e la sua classe $\widetilde{\mathbf{M}}$ in $\mathcal{M}' A$; dato un intero n, cerco la ricetta per costruire $\varrho_n \widetilde{d} \cdot \chi\widetilde{\mathbf{M}}$. Il $\chi\widetilde{\mathbf{M}}$ si costruisce come nel 6.32: cerco $y \in \mathcal{Y}\widetilde{C}$ (con $\widetilde{C} = k(\widetilde{A})$) tale che (cfr. 6.33) $\operatorname{div} (p\iota)^r y_r = (\operatorname{div} (p\iota)^r) \widetilde{\mathbf{Y}}_r$ per ogni r, e tale inoltre che $y_r \in \mathcal{S}^\infty \widetilde{A}$, $y_r \equiv 1 \bmod (\mathcal{R}\widetilde{A})^+$; ciò sarà possibile se i poli e gli zeri di $\widetilde{\mathbf{Y}}$ soddisfano certe condizioni. Fatto questo, si costruisce, come in 6.34,

7.28 $$\eta = \lim_{r \to \infty} (p\iota)^r y_r,$$

e si ha $\chi\widetilde{\mathbf{M}} = \log\{\eta\}$. Ne segue $\widetilde{d}\cdot\chi\widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{d} * \chi\widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{d} * \log\{\eta\} = \lim_{r\to\infty} \widetilde{d} * \log\{(p\iota)^r y_r\}$; poiche $\widetilde{d}_{n-1}\,(p\iota)^n\,\widetilde{C} = 0$, la 6.35 comporta che

$$\varrho_n\,\widetilde{d}\cdot\chi\widetilde{\mathbf{M}} = \varrho_n\,\widetilde{d} * \log\{\eta\} = \varrho_n\,\widetilde{d} * \log\{(p\iota)^n\,y_n\}\,; \tag{7.29}$$

questa resta valida senza ipotesi su $\widetilde{\mathbf{Y}}$, e per ogni $y_n \in \widetilde{C}^\infty$ tale che

$$\operatorname{div}\,(p\iota)^n\,y_n = (\operatorname{div}\,(p\iota)^n)\,\widetilde{\mathbf{Y}}_n\,. \tag{7.30}$$

Torniamo a considerare Δ; nelle notazioni del 6.27, si avrà

$$\mathbf{Z}\,(d,\,\Delta) = \mathbf{Y}\times\widetilde{\Delta} + \Delta\times\widetilde{\mathbf{Y}} + \operatorname{div} x\,,$$

ove $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}'\,\Delta$, $\widetilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{B}'\,\widetilde{\Delta}$, $x \in \mathcal{Y}_0\,k\,(\Delta\times\widetilde{\Delta})$, e div x significa $(\operatorname{div} x_1, \operatorname{div} x_2, \ldots)$; per definizione, è $\varphi_{\widetilde{\Delta}}\,d = \chi\widetilde{\mathbf{M}}$, se $\widetilde{\mathbf{M}}$ è la classe di $\widetilde{\mathbf{Y}}$ in $\mathcal{M}'\,\widetilde{\Delta}$. Nelle notazioni del 7.21, e per $l = n$, vale la $\mathbf{Z}\,(d,\,\Delta_1) = \operatorname{div}\,((p\iota)^n\times\iota)\,\mathbf{Z}\,(p^n\,d,\,\Delta)$; osserviamo subito che le prime n componenti di $\mathbf{Z}\,(p^n\,d,\,\Delta)$ sono $\delta^{p^{n-1}}\Delta - \Delta$, $\delta^{p^{n-2}}\Delta - \Delta, \ldots, \delta\Delta - \Delta$, che sono tutte $= 0$ perchè δ induce l'identità in $\widetilde{C}$. Poi,

$$\mathbf{Z}\,(d,\,\Delta_2) = \operatorname{div}\,(\iota\times(p\iota)^n)\,\mathbf{Z}\,(d,\,\Delta) = \mathbf{Y}\times\widetilde{\Delta} + \Delta\times(p\iota)^n\,\widetilde{\mathbf{Y}} + \operatorname{div}\,(\iota\times(p\iota)^n)\,x,$$

onde, per 7.21,

$$\Delta\times(p\iota)^n\,\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Z}\,(d,\,\Delta_1) - \mathbf{Z}\,(d,\,\operatorname{div} z) - \mathbf{Z}\,(d,\,\mathbf{X})\times\widetilde{\Delta} - \mathbf{Y}\times\widetilde{\Delta} - \operatorname{div}\,(\iota\times(p\iota)^n)\,x;$$

in particolare,

$$\Delta\times(p\iota)^n\,\widetilde{\mathbf{Y}}_n = -\operatorname{div}(z^{-1}\delta^{p^{-n}}z) - (\delta^{p^{-n}}\mathbf{X} - \mathbf{X})\times\widetilde{\Delta} - \mathbf{Y}_n\times\widetilde{\Delta} - \operatorname{div}\,(\iota\times(p\iota)^n)\,x_n.$$

Tenendo presente la 7.30, questa mostra che $\delta^{p^{-n}}\mathbf{X} - \mathbf{X} + \mathbf{Y}_n$ è un divisore principale, cosicchè

$$(p\iota)^n\,y_n = -\,z^{-1}\,\delta^{p^{-n}}\,z - (\iota\times(p\iota)^n)\,x_n + x',$$

con $x' \in k\,(\Delta)$. Di conseguenza, e per 7.29,

$$\varrho_n\,\widetilde{d}\cdot\varphi_{\widetilde{\Delta}}\,d = \varrho_n\,\widetilde{d} * \chi\widetilde{\mathbf{M}} = \varrho_n\,\widetilde{d} * \log\{(p\iota)^n\,y_n\} = -\,\varrho_n\,d * [\log\{\delta^{p^{-n}}\,z\} - \log\{z\}].$$

Questa espressione, confrontata con 7.27, dà appunto la 7.20 per questo caso 2, C. V. D..

76. Il 7.19 permette certe semplificazioni di notazioni; sia A varietà abeliana su k; se $d \in \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ e $\widetilde{d} \in \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{A})^0$, porremo

7.31 $$\langle d, \widetilde{d} \rangle = d \circ \varphi_A \widetilde{d};$$

allora $\langle \widetilde{d}, d \rangle = \widetilde{d} \circ \varphi_{\widetilde{A}} d = d \circ \widetilde{\varphi}_{\widetilde{A}} \widetilde{d} = - d \circ \varphi_A \widetilde{d}$ per 7.19:

7.32 $$\langle \widetilde{d}, d \rangle = - \langle d, \widetilde{d} \rangle.$$

Dal 7.7 si ricava:

7.33 TEOREMA. *Dato* $\widetilde{d}$, *è* $\langle d, \widetilde{d} \rangle \in K$ *per ogni* $d \in \mathcal{C}' \widetilde{R}A$ *se e solo se* $\widetilde{d} \in \mathcal{C}' \widetilde{R}\widetilde{A}$.

Il 7.8 dà:

7.34 TEOREMA. *Se* α *è omomorfismo di* A *su* B, *e se* $d \in \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$, $\widetilde{\delta} \in \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}B)^0$, *si ha* $\langle \mathcal{C}' \widetilde{\mathcal{R}}\alpha\, d, \widetilde{\delta} \rangle = \langle d, \mathcal{C}' \widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{\alpha}\,\widetilde{\delta} \rangle$.

E dal 7.11:

7.35 TEOREMA. *Se* $\mathbf{Y}$ *è un divisore su* A, *per* $d, d' \in \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ *si ha* $d \circ \varphi_{\mathbf{Y}} d' = - \langle d, \mathcal{C}' \widetilde{\mathcal{R}} \lambda_{\mathbf{Y}} d' \rangle$.

Analogamente, porremo, per $x \in \mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$ ed $\widetilde{x} \in \mathcal{C}'(\mathcal{R}\widetilde{A})^0$:

7.36 $$\langle x, \widetilde{x} \rangle = \varphi_{\widetilde{A}}^{-1} x \circ \widetilde{x};$$

valgono le analoghe dei 7.32, 7.33, 7.34; la prima ed ultima si scrivono rispettivamente:

7.37 $$\langle \widetilde{x}, x \rangle = - \langle x, \widetilde{x} \rangle,$$

7.38 $$\langle \mathcal{C}' \mathcal{R}\alpha\, x, \xi \rangle = \langle x, \mathcal{C}' \mathcal{R}\widetilde{\alpha}\, \widetilde{\xi} \rangle \quad (x \in \mathcal{C}'(\mathcal{R}B)^0, \widetilde{\xi} \in \mathcal{C}'(\mathcal{R}\widetilde{A})^0).$$

Dato il divisore $\mathbf{Y}$ su A, si consideri l'omomorfismo

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{\mathbf{Y}} \\ -\varphi_{\mathbf{Y}} & 0 \end{pmatrix} \text{ di } \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}(A \times A))^0 = \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0 \oplus \mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0 \text{ su}$$

$\mathcal{C}'(\mathcal{R}(A \times A))^0 = \mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0 \oplus \mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$; esso è simmetrico, nel senso che $d \circ \beta d' = d' \circ \beta d$ per $d, d' \in \mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0 \oplus \mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0$; quindi, per i 5.50, 5.51, esiste un elemento $E_Y \in \mathcal{F}\mathcal{R}(A \times A) = \mathcal{F}\mathcal{R}A \otimes \mathcal{F}\mathcal{R}A$, omogeneo di grado 2, tale che $d \circ \beta d' = dd' \cdot E_Y$; esso soddisfa la $tE_Y = E_Y$, ed è dato da

7.39 $$E_Y = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} (d_i \circ \varphi_Y d_j)(x_i \otimes x_j),$$

ove $x_1, x_2, \ldots$ è una K'-base di $\mathcal{C}'(\mathcal{R}A)^0$, e $d_1, d_2, \ldots$ è la K'-base duale di $\mathcal{C}'(\tilde{\mathcal{R}}A)^0$. La E_Y sarà chiamata la *forma di Riemann* di Y; essa è antisimmetrica rispetto allo scambio dei fattori in $A \times A$. Per 5.51, 5.52 esiste un $\vartheta_Y \in \mathcal{R}(A \times A) = \mathcal{R}A \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}A$ tale che $E_Y = \log\{\vartheta_Y\}$; se α è l'applicazione identica del primo fattore sul secondo in $A \times A$, si ha

7.40 $$\varphi_Y d = \delta \cdot \log\{\vartheta_Y\} = \{\vartheta_Y\}^{-1}(\delta \cdot \{\vartheta_Y\}), \text{ ove } \delta = \mathcal{C}' \tilde{\mathcal{R}}\alpha\, d.$$

Non daremo per ora nessuna applicazione riguardante E_Y o ϑ_Y.

Appendice al capitolo 7

Con questi risultati termina l'esposizione dettagliata della teoria brevemente schizzata in [13] (cfr. anche l'introduzione al Cap. 1); essa promette, con ulteriori sviluppi, di poter divenire un metodo « trascendente » per poter trattare tutti i problemi sulle varietà abeliane in caratteristica p. Varie questioni connesse con stesure precedenti di questa teoria sono state da me enunciate in occasioni precedenti, o come congetture, o come asserzioni vere ma non dimostrate, e in un caso come asserzione falsa, e ovviamente non dimostrata. Le congetture e le asserzioni (vere) sono anche raccolte in [14], talora con cenni sulle dimostrazioni. È quindi opportuno passare ora in rassegna talune di queste questioni, per mostrare la loro interpretazione e dimostrazione nell'ambito di questa teoria.

1. Nell'introduzione di [1] si pone la questione se ogni varietà abeliana sia isogena ad una A per la quale $e + f = n$; qui $n = \dim A$, f è la codimensione separabile di A, ed e è la dimensione del k-modulo delle derivazioni invarianti d_0 su A tali che $\pi d_0 = 0$; la questione è riproposta come problema aperto 8.2 e 8.3 in [14]. Vedremo ora che la risposta è negativa, e dimostreremo il seguente risultato, già annunciato nel [14] in preparazione dell'8.2 di [14]:

7.41 TEOREMA. *Sia B una varietà abeliana su k; le due asserzioni seguenti sono equivalenti:*

1. *B è isogena a qualche A tale che $e+f=n$, ove: $n=\dim A$, f è la codimensione separabile di A, ed e è la dimensione del k-modulo delle derivazioni invarianti d_0 su A tali che $\pi d_0=0$.*

2. *Ogni blocco di $\mathcal{C}'(\mathcal{R}\tilde{} B)^0$ ha pendenza $0, 1$, o $1/2$.*

DIM. Le derivazioni invarianti sono le applicazioni $x \longrightarrow d_0 x$ di $k(A)$ in sè tali che d_0 sia la componente di indice 0 di una $d \in N = \mathcal{C}'\,{}^{\pi}\tilde{R}A$; la $\pi d_0 = 0$ significa che $\pi d \in tN$. Questa comporta intanto che $d \in N_r$; ricordando allora che N_r ha dimensione $n-f$ (cfr. 6.3), la condizione 1 comporta che, per qualche $A, \pi N_r \subseteq tN_r$, onde $\pi^2 N_r \subseteq pN_r$. Ma il grado del semiendomorfismo π^2 di N_r è $p^{2(n-f)}$, ossia è lo stesso del grado dell'endomorfismo $p\iota$ di N_r; pertanto $\pi^2 N_r = pN_r$, $\pi N_r = tN_r$. Il 5.9 di MC dice allora che N_r è isomorfo alla somma diretta di vari $N_{1,1}$; si è così visto che l'asserzione 2 discende dalla 1. Per dimostrare il reciproco basta osservare che se la 2 è verificata, esiste una A isogena a B tale che $\mathcal{C}'\,{}^{\pi}\tilde{R}A$ sia somma diretta di vari $N_{1,1}$ e di vari $N_{1,0}$; per tale A vale l'asserto 1, C. V. D..

Nel caso speciale in cui $n-f \leq 2$, $\mathcal{C}'\,{}^{\pi}\tilde{R}_r B$ può essere isogeno solo a k od a $N_{1,1}$ od a $N_{1,1} \oplus N_{1,1}$, in quanto $N_{r,s} \oplus N_{s,r}$ ha già dimensione $r+s>2$ negli altri casi; perciò se $n-f \leq 2$ si ha certamente che B è isogena ad una A per la quale $e+f=n$; resta così dimostrato l'asserto contenuto nelle ultime righe di [1]. Nel caso generale, l'esistenza di varietà abeliane A tali che $\mathcal{C}'(\mathcal{R}\tilde{} A)^0$ abbia blocchi di pendenza qualsiasi (n^0 74) mostra che la risposta al problema posto all'inizio di questo punto 1 è negativa.

2. Nell'introduzione di [2] ho asserito che, nelle notazioni attuali, se ${}^{\pi}\mathcal{R}_r A$ ha fattori diretti indecomponibili di dimensione >1, ha anche fattori diretti di tipo $\mathcal{R}_{1,r}$ con $r>1$; ciò è evidentemente falso, e l'errore derivava dall'aver correttamente congetturato il teorema di simmetria (primo asserto del 7.15), ma dall'aver anche erroneamente congetturato che i soli ipercampi indecomponibili di dimensione r fossero quelli isogeni ad $R_{r,1}$. Invece, sempre nell'introduzione di [2], l'asserzione che se $n-f \leq 2$ vi possono solo essere fattori diretti isogeni ad $R_{1,1}$ è esatta, come si è visto alla fine del precedente punto 1.

3. Sempre nell'introduzione di [2] si dice che la matrice $E_p(\mathbf{Y})$ ivi trovata « corrisponde grosso modo ai periodi secondari di funzioni intermediarie su A », ossia, con nomenclatura più moderna, alla matrice della forma di

Riemann legata ad $\mathbf{Y}$; ciò è confermato dal fatto che $E_p(\mathbf{Y})$ è, nelle notazioni attuali, la matrice della restrizione di $\varphi_{\mathbf{Y}}$ a $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_\pi\,A$; l'asserzione che riguarda il legame di $E_p(\mathbf{Y})$ con l'omomorfismo di A su $\widetilde{A}$, contenuta nell'introduzione di [2], è confermata dalla formula 7.11. Da notare che gli altri due pezzi di $\varphi_{\mathbf{Y}}$, ossia le matrici delle sue restrizioni a $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_r\,A$ e $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}_t\,A$, sono rispettivamente la $E_{pr}(\mathbf{Y})$ e la $E_{pl}(\mathbf{Y})$ introdotte nel n^0 7 di [14].

4. Nelle ultime righe di [2] si asserisce che il teorema (4.2) di [2] è valido in generale; tale teorema è infatti il 6.22 del presente lavoro, che asserisce che ogni varietà abeliana è isogena ad una A tale che End A sia una schiera massimale prefissata di $Q \bigotimes_I \mathrm{End}\, A$.

5. Nell'introduzione del [3] asserii che la matrice prodotta da $d\mathbf{Y}$ è la prima approssimazione di una matrice p-adica legata ad $\mathbf{Y}$; tale matrice p-adica è appunto la matrice di $\varphi_{\mathbf{Y}}$ (n^0 68). La teoria delle iperclassi annunciata nell'introduzione di [3] e schizzata in [14], insieme ai suoi usi principali, è quella sviluppata nel capitolo 6. La interpretazione « naturale » dell'applicazione $\omega \longrightarrow \omega^{1/p}$, di cui parla l'introduzione di [3], è l'applicazione $\xi \longrightarrow t\xi$ per $\xi \in \mathcal{C}'\,{}^\pi RA$; infatti i differenziali di prima specie su A sono legati a tali ξ nel modo seguente: ξ produce il differenziale ω tale che, per $d \in \mathcal{C}'\,{}^\pi\widetilde{R}A$, sia $\omega d_0 = (d \cdot \xi)_0$; ed allora $\omega^{1/p}$ è prodotto nello stesso modo da $t\xi$.

6. L'osservazione che chiude il [3], secondo la quale l'involuzione di Rosati su una jacobiana scambia il nucleo di un omomorfismo puramente inseparabile (fatto con le derivazioni) col conucleo (fatto con le classi di ripartizioni), significa ora che se l'omomorfismo α è descritto per mezzo di $\mathcal{C}'\,\widetilde{R}\alpha$, ciò permette subito di descrivere $\widetilde{\alpha}$ per mezzo di $\mathcal{C}'\,R\,\widetilde{\alpha}$ (cfr. 7.8), e che $\mathcal{C}'\,R\widetilde{\alpha}$ è a sua volta legato ad $\mathcal{M}\widetilde{\alpha}$ per mezzo di χ.

7. (modificato il 5-4-66). Per quanto riguarda gli sviluppi della teoria qui presentata, essi possono rivolgersi in varie direzioni: la forma di Riemann $E_{\mathbf{Y}}$ è legata alla « matrice principale » di una matrice di Riemann; si tratta di ricostruire questa matrice, e di usarla per costruire le funzioni abeliane. Per i blocchi di pendenze 0 e 1 di $\mathcal{R}A$, e sopra un corpo valutato completo, esiste già un lavoro di Morikawa [15] in cui si costruiscono funzioni theta e funzioni abeliane; si dovrebbe però trovare il modo di abolire la condizione riguardante il corpo. Per gli altri blocchi sono propenso a credere che la classificazione degli ipercampi radicali rispetto all'isomorfismo, data in [12], contenga già tutte le informazioni sulla varietà abeliana; in altre parole, i

« moduli » che parametrizzano gli ipercampi isogeni ad un dato, più forse degli altri invarianti discreti, dovrebbero essere sufficienti a parametrizzare le varietà abeliane da cui quegli ipercampi provengono (sempre nel caso di pendenze diverse da 0 e 1).

Un'altra direzione consiste nell'osservare che, nel linguaggio ora di moda, $\mathcal{C}' RA$ è il primo gruppo di coomologia $H^1(A)$ di un certo complesso legato ad A; nè sarebbe difficile trovare i vari $H^r(A)$; anzi, la struttura simmetrica di $\mathcal{C}' RA$ dà in modo naturale una bigraduazione dell'algebra di coomologia ($H^r = \sum_{i+j=r} H^{i,j}$). Vi sono buoni motivi per pensare che il metodo possa essere esteso a varietà V (non singolari?) qualsiansi: si tratta di definire un $\mathcal{C}' \widetilde{R} V$ per mezzo di iperderivazioni su V e di automorfismi di prolungamenti non ramificati di $k(V)$ (e qui la difficoltà sta nel fatto che le iperderivazioni su V, a differenza di quelle invarianti su A, non commutano fra loro), e di definire poi i vari $H^r(V)$ come i gruppi di coomologia di un complesso in cui il K-modulo di dimensione r è dato dalle applicazioni r-lineari alternanti di $\mathcal{C}' \widetilde{R} V$ su biv $k(V)$ che siano prive di poli. Vi sono indicazioni che la « coomologia » così ottenuta sia scevra dai vari fatti patologici che hanno fino ad ora scoraggiato tentativi del genere.

8. (aggiunto il 14-5-66). Il problema aperto 8.4 di [14] chiedeva, nel linguaggio attuale, se possano esistere varietà abeliane semplici aventi sia i blocchi di pendenza 0 e 1, sia altri blocchi. In una discussione con Grothendieck questi ha suggerito che un esempio dato da Manin per altro motivo [12, IV, § 5] risponde alla questione:

7.42 *Sia k un corpo algebricamente chiuso, di caratteristica $p \neq 0$, e di trascendenza assoluta 2; allora esistono varietà abeliane semplici, su k, di dimensione 2 e codimensione separabile 1.*

DIM. Occorre anzitutto procurarsi una curva Γ su k tale che: abbia genere 2; non sia birazionalmente equivalente all'estensione su k di qualche curva definita su un corpo di trascendenza assoluta 1; possieda un differenziale di prima specie esatto ed uno logaritmico (non nulli). Se $p = 2$, una tale Γ è quella di equazione $y^2 + y = x^3 + \xi x + \eta x^{-1}$, con $\{\xi, \eta\}$ base di trascendenza di k su C_2; il differenziale esatto è ∂x e quello logaritmico è $x^{-1}\partial x$ (∂ indica simbolo di differenziazione su k). Se $p \neq 2$, una tale Γ è quella di equazione $y^2 = F(x) = x(x-1)(x-\xi)(x-\eta)(x-\zeta)$, con $\{\xi, \eta\}$ come prima, e con $\zeta \in k$ tale che il suo polinomio minimo su $C_p(\xi, \eta)$ sia quello che andiamo a descrivere: suppongasi dapprima che ζ sia indeterminata su $C_p(\xi, \eta)$; due differenziali di prima specie su Γ, indipendenti sulla chiusura algebrica di $C_p(\xi, \eta, \zeta)$, sono allora $\omega_1 = y^{-1}\,\partial x$ e $\omega_2 = y^{-1}\,x\partial x$. Scrivasi $y^{p-1} = (F(x))^{(p-1)/2} = \sum_{i\,0}^{5(p-1)/2} b_i\,x^i$, con $b_i \in C_p[\xi, \eta, \zeta]$, onde $y^{-1} = y^{-p}(F(x))^{(p-1)/2}$; dal metodo per computare $t\omega\ (= \omega^{1/p})$ descritto nel n^0 4 di [3] si vede che $t\omega_1 = b_{p-1}^{1/p}\,\omega_1 + b_{2p-1}^{1/p}\,\omega_2$, e $t\omega_2 = b_{p-2}^{1/p}\,\omega_1 + b_{2p-2}^{1/p}\,\omega_2$; se $M = \begin{pmatrix} b_{p-1} & b_{2p-1} \\ b_{p-2} & b_{2p-2} \end{pmatrix}$, il polinomio minimo di ζ su $C_p(\xi, \eta)$ sarà det M; ciò assicura che un differenziale di prima specie non nullo su Γ è esatto, ed anche che un altro è logaritmico (altrimenti $MM^{\pi} = 0$, il che non segue da det $M = 0$).

In ambo i casi, sia A la jacobiana di Γ; essa ha dimensione 2, ed ha un differenziale non nullo di prima specie esatto ed uno logaritmico (cfr. il 4.2 di [3]); quindi A ha codimensione separabile 1. Inoltre A non è estensione su k di nessuna varietà abeliana B su un sottocorpo c di k di trascendenza assoluta 1: infatti, si consideri Γ canonicamente immersa in A; per ogni posto ν di k su c (valutazione su c con corpo residuo c), la $\Gamma\{\nu\}$ («specializzazione» di Γ) è una curva su B, e le varie $\Gamma\{\nu\}$ formano un sistema algebrico irriducibile di curve su B, onde le $(\Gamma\{\nu\})_k$ fanno parte di un sistema algebrico irriducibile di curve su A, cui appartiene anche Γ. Poichè Γ è il divisore theta su A, che è linearmente isolato, il massimo sistema algebrico irriducibile su A cui Γ appartiene è formato dalle $\sigma_P\,\Gamma$ quando P percorre A; quindi $(\Gamma\{\nu\})_k = \sigma_P\,\Gamma$ per qualche P, onde Γ è birazionalmente equivalente a $(\Gamma\{\nu\})_k$, ossia alla estensione su k di una curva sul corpo c, di trascendenza assoluta 1; ma ciò si è visto essere falso.

Si tratta ora di dimostrare che A è semplice; se non lo è essa è immagine, secondo una isogenia α, del prodotto $J_1' \times J_2'$ di due curve ellittiche, e necessariamente una di queste, per esempio J_1', sarà supersingolare (ossia col solo blocco di pendenza 1/2), e l'altra, J_2', non lo sarà, ossia avrà i soli blocchi di pendenze 0 e 1. Sia L il «nucleus» di α [1, n^0 2]: esso è l'ideale del trasposto D di ${}^{\pi}R(J_1' \times J_2')$ che è nucleo del trasposto di ${}^{\pi}R\alpha$; in virtù della diversità dei blocchi si dovrà avere, con ovvio significato dei simboli, $L = L_1 \otimes D_2 + D_1 \otimes L_2$; dato che L_i è «nucleus» di una isogenia puramente inseparabile α_i di J_i', si ha che $\alpha = \beta(\alpha_1 \times \alpha_2)$, ove β è isogenia separabile; è quanto dire che, posto $J_i = \alpha_i J_i'$, A è immagine di $J_1 \times J_2$ secondo β: $A \cong J_1 \times J_2/H$, con H sottogruppo finito di $J_1 \times J_2$. La J_2 è estensione su k di una J_2^* definita sulla chiusura algebrica c di $C_p(j)$, se j è l'invariante di J_2; e la J_1, essendo supersingolare, è certamente estensione su k di una J_1^* definita su c; perciò $J_1 \times J_2 = (J_1^* \times J_2^*)_k$. D'altra parte è certo $H = H_k^*$, con H^* sottogruppo finito di $J_1^* \times J_2^*$, onde A è estensione su k di $J_1^* \times J_2^*/H^*$; ma ciò si è visto essere falso, C. V. D..

Osservazione. Questo stesso esempio è usato da F. Oort (p. II. 15-10 di *Commutative group schemes*, Lecture notes in mathematics n^0 15, 1966) nella discussione di un enunciato tipo 7.42; Oort non raggiunge però nessuna conclusione, a causa di una interpretazione errata di risultati di J. I. Igusa.

E' uso porre le dediche all'inizio dei lavori, ma preferisco rompere la tradizione per dedicare questi sette capitoli a mia figlia Adriana, che nei primi suoi tre anni di vita mi ha brillantemente distratto dallo scriverli.

BIBLIOGRAFIA DEI CAPITOLI 6 e 7.

MC I. BARSOTTI, *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi*, Ann. Scuola Norm. Sup., 13, 1959, p. 303.

1. I. BARSOTTI, *Abelian varieties over fields of positive characteristic*, Rend. Circ. Matem. Palermo, 5, 1956, p. 145.
2. I. BARSOTTI, *Gli endomorfismi delle varietà abeliane su corpi di caratteristica positiva*, Ann. Scuola Norm. Sup., 10, 1956, p. 1.
3. I. BARSOTTI, *Repartitions on abelian varieties*, Illinois Journ. of Math., 2, 1958, p. 43.
4. I. BARSOTTI, *Local properties of algebraic correspondences*, Trans. Amer. Math. Soc., 71, 1951, p. 349.
5. A. WEIL, *Varietes abeliennes et courbes algebriques*, Parigi, 1948.
6. J. P. SERRE, *Quelques proprietes des varietes abeliennes en caracteristique p*, Amer. Journ. of Math., 80, 1958, p. 715.
7. S. LANG, *Abelian varieties*, New York, 1959.
8. I. BARSOTTI, *Il teorema di dualità per le varietà abeliane ed altri risultati*, Rend. di Mat. e Applic., 13, 1954, p. 98.
9. I. BARSOTTI, *A note on abelian varieties*, Rend. Circ. Matem. Palermo, 2, 1953, p. 236.
10. P. CARTIER, *Isogenies and duality of abelian varieties*, Ann. of Math., 71, 1960, p. 315.
11. P. CARTIER, *Questions de rationalite des diviseurs en geometrie algebrique*, Bull. Soc. Mathem. France, 86, 1958, p. 177.
12. IU. I. MANIN, *Teoria dei gruppi commutativi formali su corpi di caratteristica finita* (russo), Uspeki Matem. Nauk, 18, 1963, n^0 6 (114); tradotto in inglese in Russian Math. Surveys, 18, 1963, n^0 6.
13. I. BARSOTTI, *Analytical methods for abelian varieties in positive characteristic*, Coll. Thèorie Groupes Alg., CBRM, 5-7 Juin 1962, Bruxelles, 1962, p. 77.
14. I. BARSOTTI, *Risultati e problemi nella teoria delle varietà gruppali*, Rend. Sem. Matem. Messina, 4, 1958-59, p. 1.
15. H. MORIKAWA, *Theta functions and abelian varieties over valuation fields of rank one* I, Nagoya Math. Journ., 20, 1962, p. 1.

CONTENUTO DEI PRIMI 7 CAPITOLI

INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI

RELATIVO AL CAP. 7