

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

OSCAR MONTALDO

**Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli in forma  
parametrica nel senso di Weierstrass**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 20,  
n° 2 (1966), p. 317-329*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1966\\_3\\_20\\_2\\_317\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_2_317_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI IN FORMA PARAMETRICA NEL SENSO DI WEIERSTRASS

di OSCAR MONTALDO <sup>(1)</sup>

## Introduzione.

La teoria degli integrali di Fubini-Tonelli in forma ordinaria e con l'integrale inteso nel senso di Lebesgue è stata sviluppata da S. Faedo, E. Magenes e L. Lombardi, secondo l'indirizzo di L. Tonelli. Tale teoria, pure essendo giunta a risultati assai ampi, come il conseguimento di teoremi di esistenza dell'estremo e lo studio delle equazioni integro-differenziali di Eulero, non aveva però la completezza di quella sviluppata da L. Tonelli per gli integrali curvilinei. In questa infatti si sono potuti caratterizzare gli integrali semicontinui nella classe degli integrali quasi regolari, che si definiscono direttamente con proprietà della funzione integranda; invece nella teoria degli integrali di Fubini-Tonelli questa caratterizzazione è ben lungi dall'essere soddisfacente e in particolare la nozione integrale quasi-regolare è vincolata all'esistenza di un paraboloide opportuno, non univocamente determinato, che ne rende fittizia la definizione.

Recentemente S. Faedo ha ripreso su nuove basi la teoria considerando l'integrale non più nel senso di Lebesgue ma in quello di Weierstrass, analogamente a quanto era già stato fatto da L. Tonelli, da C. Menger e dalla sua scuola per gli integrali curvilinei; in tal modo si può giungere al concetto di integrale quasi-regolare con proprietà dirette della funzione integranda, dando alla teoria lo stesso armonico sviluppo di quella per gli integrali curvilinei.

---

Pervenuto alla Redazione il 20 Gennaio 1966.

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerche matematiche N. 31 del C. N. R..

In questo lavoro considero gli integrali di Fubini-Tonelli in forma parametrica nel senso di Weierstrass.

Il concetto di integrale regolare e quasi-regolare viene stabilito nel modo più naturale e così l'esistenza dell'integrale nel senso di Weierstrass su curve a componenti rettificabili. Mediante tali concetti si ottengono inoltre le condizioni necessarie e quelle sufficienti per la semicontinuità, che dimostrano che la definizione scelta di integrale quasi regolare è la più opportuna e naturale.

Confronto poi i risultati ottenuti con quelli che si ottengono applicando agli integrali di Fubini-Tonelli nel senso di Lebesgue la teoria classica.

In successivi lavori mi riprometto di sviluppare in modo completo la teoria degli integrali di Fubini-Tonelli in forma parametrica.

## P R E M E S S E

### 1. Definizioni.

Siano :

a)  $A_1[A_2]$  un insieme chiuso di punti dello spazio euclideo  $\mathcal{C}_n$   $x \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n)$  [ $y \equiv (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ] <sup>(1)</sup>;  $A$  l'insieme dei punti  $P(x, y)$  di  $\mathcal{C}_{2n}$  prodotto cartesiano di  $A_1$  e  $A_2$ ;  $\bar{A}$  un insieme limitato e chiuso costituito da punti interni di  $A$ ;  $B$  l'insieme  $(P; \xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_n)$  con  $P \in A$  e  $\xi'_1, \dots, \xi'_n; \eta'_1, \dots, \eta'_n$  due  $n$ -uple qualunque di numeri con i numeri di ciascuna  $n$ -upla non simultaneamente nulli;  $\bar{B}$  l'insieme limitato e chiuso di tutti i punti  $(P; \xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_n)$  con  $P \in \bar{A}$  e  $\xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_n$  verificanti le relazioni

$$\xi_1'^2 + \dots + \xi_n'^2 = 1, \quad \eta_1'^2 + \dots + \eta_n'^2 = 1.$$

b)  $F(P; x', y')$  una funzione definita e continua per ogni  $P \in A$  e per ogni coppia di vettori  $x = v(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ ,  $y = v(\eta'_1, \dots, \eta'_n)$  di  $\mathcal{C}_n$ , e omogenea positivamente di grado 1 in  $x'$ ,  $y'$  separatamente, cioè

$$F(P; hx', ky') = hkF(P; x', y')$$

per ogni coppia di numeri positivi  $h$  e  $k$ .

---

(<sup>2</sup>) Ci riferiremo sempre a un sistema di assi cartesiani ortogonali.

c)  $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  una curva appartenente ad  $A$  di componenti continue  
 $\mathcal{C}_1 \equiv (x = x(t), a \leq t \leq b)$ ,

$\mathcal{C}_2 \equiv (y = y(\tau), c \leq \tau \leq d)$   $[x(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)), y(\tau) = (\eta_1(\tau), \dots, \eta_n(\tau))]$ .

## 2. Integrali di Fubini-Tonelli (F. T.) nel senso di Weierstrass.

Consideriamo una partizione degli intervalli  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  in un numero finito qualsiasi di intervalli parziali mediante i punti di divisione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

$$c = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = d.$$

Diremo norma la massima delle lunghezze degli intervalli parziali così ottenuti. Indicato con  $\delta_{ij}$  l'intervallo a due dimensioni prodotto degli intervalli  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $(\tau_j, \tau_{j+1})$ , consideriamo la funzione di intervallo

$$\Phi(\delta_{ij}) = F[x(t_i), y(\tau_j), x(t_{i+1}) - x(t_i), y(\tau_{j+1}) - y(\tau_j)];$$

se esiste finito il limite della somma

$$S(\mathcal{C}) = \sum_0^{m-1} \sum_0^{n-1} \Phi(\delta_{ij})$$

nella classe di tutte le possibili partizioni di  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , al tendere a zero della loro norma, tale limite lo diremo *l'integrale di F. T. nel senso di Weierstrass* e lo indicheremo con

$$\mathcal{I}_W(\mathcal{C}) = \iint_{\mathcal{C}} F(x, y, dx, dy).$$

## 3. Convessità di $F$ .

Diremo che  $F(P; x', y')$  è in un punto  $P$ , interno ad  $A$ , *convessa positivamente* rispetto a  $x'$  se, qualunque siano i due vettori  $x'_1, x'_2$ , si ha

$$F(P; x'_1 + x'_2, y') \leq F(P; x'_1, y') + F(P; x'_2, y')$$

e, se teniamo conto della omogeneità di  $F$  rispetto a  $x'$

$$(1_1) \quad F(P; a_1 x'_1 + a_2 x'_2, y') \leq a_1 F(P; x'_1, y') + a_2 F(P; x'_2, y')$$

con  $a_1$  e  $a_2$  costanti qualunque positive.

Analogamente dalla positiva convessità rispetto a  $y'$  segue

$$(1_2) \quad F(P; x', b_1 y'_1 + b_2 y'_2) \leq b_1 F(P; x', y'_1) + b_2 F(P; x', y'_2)$$

con  $b_1, b_2 > 0$ .

Dalle  $(1_1)(1_2)$  segue, nell'ipotesi che  $F(P; x', y')$  sia in un punto  $P$ , interno ad  $A$ , convessa positivamente rispetto a  $x'$  e a  $y'$  (separatamente),

$$(2) \quad b_1 [a_1 F(P; x'_1, y'_1) + a_2 F(P; x'_2, y'_1)] + b_2 [a_1 F(P; x'_1, y'_2) + \\ + a_2 F(P; x'_2, y'_2)] \geq b_1 F(P; a_1 x'_1 + a_2 x'_2, y'_1) + b_2 F(P; a_1 x'_1 + a_2 x'_2, y'_2) \geq \\ \geq F(P; a_1 x'_1 + a_2 x'_2, b_1 y'_1 + b_2 y'_2).$$

Diremo che la  $F$  è *positivamente convessa in senso stretto* rispetto a  $x' [y']$  se vale la  $(1_1) [(1_2)]$  soltanto per il segno  $<$  qualunque siano i due vettori  $x'_1 \neq 0, x'_2 \neq 0$ , con  $\vartheta(x'_1) \neq \vartheta(x'_2)$  [ $y'_1 \neq 0, y'_2 \neq 0$  con  $\vartheta(y'_1) \neq \vartheta(y'_2)$ ] avendo indicato con  $0$  il vettore nullo di  $\mathcal{E}_n$  e con  $\vartheta(v)$  la direzione del vettore  $v$ .

Diremo che la  $F(P; x', y')$  è *quasi regolare positiva* (q. r. p.) se in ogni punto  $P$ , interno ad  $A$ , è positivamente convessa rispetto a  $x'$  e  $y'$  separatamente.

Se la  $F(P; x', y')$  è positivamente convessa in senso stretto rispetto a  $x'$  e  $y'$  separatamente in ogni punto  $P$ , interno ad  $A$ , diremo che essa è *regolare positiva*.

Diremo che l'integrale  $\mathcal{J}_W(\mathcal{C})$  (ove esista) è *quasi regolare positivo, regolare positivo* se lo è rispettivamente  $F(P; x', y')$  per ogni punto  $P$  interno ad  $A$ .

## § 1. — ESISTENZA DELL'INTEGRALE DI F. T. NEL SENSO DI WEIERSTRASS.

Per ogni punto  $P \in A$  consideriamo la funzione di intervallo  $\Phi(P; \delta_{ij})$  definita nella stessa famiglia di intervalli  $\delta_{ij}$  di  $\Phi(\delta_{ij})$

$$\Phi(P; \delta_{ij}) = F(P; x(t_{i+1}) - x(t_i), y(\tau_{j+1}) - y(\tau_j)),$$

dove  $P$  è indipendente da  $\delta_{ij}$ .

Si ha il

**TEOREMA** « Se  $F$  è q. r. p., la funzione  $\Phi(P; \delta_{ij})$  è per ogni  $P$ , interno ad  $A$ , una funzione di intervallo subadditiva ».

Per dimostrare l'asserto basterà provare che se si dividono gli intervalli  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $(\tau_j, \tau_{j+1})$  ciascuno in due parti rispettivamente col nuovo punto di divisione  $t'$  e  $\tau'$  [ $t_i < t' < t_{i+1}$ ,  $\tau_j < \tau' < \tau_{j+1}$ ] e si considerano i quattro intervalli prodotto di  $(t_i, t')$  e  $(t', t_{i+1})$  con  $(\tau_j, \tau')$  e  $(\tau', \tau_{j+1})$ , che indicheremo con  $\delta_{ij}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), si ha

$$(3) \quad \Phi(P; \delta_{ij}) \leq \sum_1^4 \Phi(P; \delta_{ij}^{(k)}).$$

Posto infatti

$$x'_1 = \frac{x(t_{i+1}) - x(t')}{t_{i+1} - t'}, \quad x'_2 = \frac{x(t') - x(t_i)}{t' - t_i},$$

$$y'_1 = \frac{y(\tau_{j+1}) - y(\tau')}{\tau_{j+1} - \tau'}, \quad y'_2 = \frac{y(\tau') - y(\tau_j)}{\tau' - \tau_j},$$

$$a_1 = t_{i+1} - t', \quad a_2 = t' - t_i, \quad b_1 = \tau_{j+1} - \tau', \quad b_2 = \tau' - \tau_j,$$

sostituendo queste espressioni nella (2) si ottiene la (3).

**TEOREMA** « Se  $F$  è q. r. p. allora  $\mathcal{I}_W(\mathcal{C})$  esiste finito sulle curve appartenenti ad  $A$  con componenti  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  rettificabili ».

Poniamo

$$S(\mathcal{C}) = \sum_0^{m-1} \sum_0^{n-1} F(x_i, y_j, \Delta x_i, \Delta y_j)$$

e osserviamo che, per l'omogeneità della  $F$ , si può scrivere

$$S(\mathcal{C}) = \sum_0^{m-1} \sum_0^{n-1} |\Delta x_i| |\Delta y_j| F(x_i, y_j, \vartheta(\Delta x_i), \vartheta(\Delta y_j)).$$

La  $F(x_i, y_j, \vartheta(\Delta x_i), \vartheta(\Delta y_j)) = F(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}, \eta_1^{(j)}, \dots, \eta_n^{(j)}, \gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)}, \delta_1^{(j)}, \dots, \delta_n^{(j)})$  dove  $\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)}, \delta_1^{(j)}, \dots, \delta_n^{(j)}$  sono i coseni direttori di  $\vartheta(\Delta x_i)$ ,  $\vartheta(\Delta y_j)$  rispettivamente, è calcolata in un punto dell'insieme chiuso e limitato  $\bar{B}$  ed è ivi continua. Detto  $M$  il massimo di  $|F|$  in  $\bar{B}$ , si ha

$$(4) \quad |S(\mathcal{C})| \leq M \sum_0^{m-1} |\Delta x_i| \sum_0^{n-1} |\Delta y_j|$$

dove  $\sum_0^{m-1} |\Delta x_i| \left[ \sum_0^{n-1} |\Delta y_j| \right]$  si mantiene sempre inferiore o uguale alla lunghezza della  $\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_2]$ .

Ora, per il teorema precedente e osservato che al tendere a zero della norma,  $\Phi(P, \delta_{ij}) \rightarrow 0$  in modo uniforme, essendo

$$|F| \leq M |\Delta x_i| |\Delta y_j|,$$

si conclude, tenuta inoltre presente la (4), che esiste finito il limite di  $S(\mathcal{C})$ , al tendere a zero, nella classe di tutte le possibili partizioni di  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , della loro norma.

## § 2. — CONDIZIONE NECESSARIA PER LA SEMICONTINUITÀ.

Si dirà che la curva  $\mathcal{C}$  appartiene ordinatamente all'intorno ( $\varrho$ ) di una curva  $\bar{\mathcal{C}}$  se è possibile porre almeno una corrispondenza  $\Omega$  <sup>(3)</sup> fra le due curve, in modo che i punti corrispondenti distino fra di loro non più di  $\varrho$ .

Si dirà che l'integrale  $\mathcal{I}_W(\mathcal{C})$  è *semicontinuo inferiormente* sulla curva  $\bar{\mathcal{C}}$  se, preso ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un  $\varrho > 0$  tale che per tutte le curve  $\mathcal{C}$  appartenenti ordinatamente all'intorno ( $\varrho$ ) di  $\bar{\mathcal{C}}$  risulti

$$\mathcal{I}_W(\mathcal{C}) > \mathcal{I}_W(\bar{\mathcal{C}}) - \varepsilon$$

supposto, naturalmente, che gli integrali  $\mathcal{I}_W(\mathcal{C})$  e  $\mathcal{I}_W(\bar{\mathcal{C}})$  esistano.

Se  $\mathcal{I}_W(\mathcal{C})$  è semicontinuo inferiormente su ogni curva per cui esiste, si dirà che esso è *semicontinuo inferiormente* su tale famiglia di curve.

Si ha il

**TEOREMA** « Condizione necessaria perchè  $\mathcal{I}_W(\mathcal{C})$  sia semicontinuo inferiormente è che la  $F$  sia q. r. p. »

Per la dimostrazione dell'asserto basta seguire un noto procedimento di Tonelli con convenienti adattamenti.

Supponiamo che in un punto  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ , interno ad  $A$ , non valga la (2); per la continuità di  $F$  rispetto a  $P$  si può determinare un  $\sigma > 0$  e un intorno di  $\bar{P}$   $E \subset A$  tale che in tutti i punti  $P \in E$  risulti, per certi valori positivi di  $a_1, a_2, b_1, b_2$  e per  $x', \bar{x}'$  e  $y', \bar{y}'$  fissati, con i vettori di ciascuna coppia non simultaneamente nulli,

$$(5) \quad \begin{aligned} & a_1 b_1 F(P; \vartheta(x'), \vartheta(y')) + a_2 b_1 F(P; \vartheta(\bar{x}'), \vartheta(y')) + a_1 b_2 F(P; \vartheta(x'), \vartheta(\bar{y}')) + \\ & + a_2 b_2 F(P; \vartheta(\bar{x}'), \vartheta(\bar{y}')) - F(P; \vartheta(a_1 x' + a_2 \bar{x}'), \vartheta(b_1 y' + b_2 \bar{y}')) < -\sigma. \end{aligned}$$

<sup>(3)</sup> Per la definizione della corrispondenza  $\Omega$  vedasi L. TONELLI, *Fond. di Calcolo delle Variazioni*, V. I, pag. 72.

Si consideri la curva  $\bar{\mathcal{C}} \equiv (\bar{\mathcal{C}}_1, \bar{\mathcal{C}}_2)$  costituita dal segmento  $\bar{\mathcal{C}}_1$  uscente da  $\bar{x}$  e di direzione  $\vartheta(a_1 x' + a_2 \bar{x}')$  e dal segmento  $\bar{\mathcal{C}}_2$  uscente da  $\bar{y}$  e di direzione  $\vartheta(b_1 y' + b_2 \bar{y}')$ ; ogni punto di  $\bar{\mathcal{C}}$  appartenga inoltre ad  $E$ .

Sia ora  $\mathcal{C}_1$  una poligonale di  $2n$  lati che ha gli estremi coincidenti con quelli di  $\bar{\mathcal{C}}_1$ , i lati aventi alternativamente la direzione  $\vartheta(x')$  e  $\vartheta(\bar{x}')$  e i vertici situati alternativamente su  $\bar{\mathcal{C}}_1$ ;  $\mathcal{C}_2$  sia una poligonale situata in modo analogo rispetto a  $\bar{\mathcal{C}}_2$  e con i lati aventi la direzione alternativamente  $\vartheta(y')$  e  $\vartheta(\bar{y}')$ . Prendiamo inoltre  $n$  sufficientemente grande in modo che la famiglia di curve  $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  appartenga ad  $E$ .

Se

$$\bar{x}(u) = \vartheta(a_1 x' + a_2 \bar{x}')(u - \bar{u}) + \bar{x} \quad u_0 \leq u \leq u_1,$$

$$\bar{y}(v) = \vartheta(b_1 y' + b_2 \bar{y}')(v - \bar{v}) + \bar{y} \quad v_0 \leq v \leq v_1,$$

rappresentano rispettivamente  $\bar{\mathcal{C}}_1$  e  $\bar{\mathcal{C}}_2$ , l'integrale  $\mathcal{J}_W(\bar{\mathcal{C}})$  è dato dall'integrale

$$(6) \quad \mathcal{J}_W(\bar{\mathcal{C}}) = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} F[\bar{x}(u), \bar{y}(v), \vartheta(a_1 x' + a_2 \bar{x}'), \vartheta(b_1 y' + b_2 \bar{y}')] du dv$$

essendo la funzione integranda una funzione continua di  $u$  e  $v$ .

Consideriamo ora una qualunque curva  $\mathcal{C} \equiv (x(u), y(v))$  della famiglia suddetta e calcoliamo su essa l'integrale  $\mathcal{J}_W(\mathcal{C})$ . Questo integrale riesce uguale alla somma di 4 integrali come (6) ciascuno dei quali è esteso a un complesso di intervalli del piano  $(u, v)$  e su essi  $x'(u)$  e  $y'(v)$  sono costanti. Applicando il teorema della media per gli integrali di funzioni continue, si trova che esiste in  $E$  un punto  $P^*$  per cui è, per la (5)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_W(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_W(\bar{\mathcal{C}}) &= (u_1 - u_0)(v_1 - v_0) \{a_1 b_1 F(P^*; \vartheta(x'), \vartheta(y')) + a_2 b_1 F(P^*; \vartheta(\bar{x}), \vartheta(y)) \\ &\quad + a_1 b_2 F(P^*; \vartheta(x'), \vartheta(\bar{y}')) + a_2 b_2 F(P^*; \vartheta(\bar{x}), \vartheta(\bar{y}')) \\ &\quad - F(P^*; \vartheta(a_1 x' + a_2 \bar{x}'), \vartheta(b_1 y' + b_2 \bar{y}'))\} < -(u_1 - u_0)(v_1 - v_0)\sigma. \end{aligned}$$

Su  $\bar{\mathcal{C}}$  manca pertanto la semicontinuità inferiore, essendo  $\bar{\mathcal{C}}$  di accumulazione per le curve  $\mathcal{C}$ .

### § 3. — CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA SEMICONTINUITÀ.

TEOREMA « Se  $F$  è q.r.p.,  $\mathcal{J}_W(\mathcal{C})$  è semicontinuo inferiormente nella classe  $\mathcal{H}$  di tutte le curve con componenti rettificabili e di lunghezza superiormente limitata ».

Sia  $\bar{C} \equiv (x = \bar{x}(t), a \leq t \leq b; y = \bar{y}(\tau), c \leq \tau \leq d)$  una curva della famiglia  $\mathcal{H}$  appartenente ad  $\bar{A}$ .

Preso ad arbitrio  $\varepsilon > 0$  e  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{N_1 N_2}$  con  $N_1 = \text{Sup. lung. } \mathcal{C}_1, N_2 = \text{Sup. lung. } \mathcal{C}_2$  dove  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  sono le componenti della generica curva  $\mathcal{C} \in \mathcal{H}$ , si determini un  $\sigma > 0$  in modo che se  $(P, x', y'), (\bar{P}, x, y') \in \bar{B}$  e  $|P\bar{P}| < \sigma$  risulti

$$(7) \quad |F(P, x', y') - F(\bar{P}, x, y')| < \delta.$$

Si determini ora una partizione di  $[a, b]$  e  $[c, d]$

$$(8) \quad \begin{aligned} a &= t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \\ c &= \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = d \end{aligned}$$

con norma minore di  $\sigma$  in modo che risulti

$$(9) \quad \bar{S}(\bar{C}) > \mathcal{J}_W(\bar{C}) - \varepsilon$$

avendo indicato con  $\bar{S}(\bar{C})$  la somma di Weierstrass relativa alla partizione suddetta

$$\sum_0^{m-1} \sum_0^{n-1} F(x_i, y_j, \Delta x_i, \Delta y_j).$$

Ricordiamo che la somma precedente si può scrivere

$$\sum_0^{m-1} \sum_0^{n-1} |\Delta x_i| |\Delta y_j| F(x_i, y_j, \vartheta(\Delta x_i), \vartheta(\Delta y_j)).$$

Essendo la  $F(x_i, y_j, \vartheta(\Delta x_i), \vartheta(\Delta y_j))$  calcolata nell'insieme chiuso e limitato  $\bar{B}$  e ivi continua, preso un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, è possibile determinare un  $\sigma_1 > 0$  con  $\sigma_1 \leq \sigma$  tale che se  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'), (x, y, x', y') \in \bar{B}$  per  $|x - \bar{x}| < \sigma_1, |y - \bar{y}| < \sigma_1, |x' - \bar{x}'| < \sigma_1, |y' - \bar{y}'| < \sigma_1$ , si abbia

$$|F(x, y, x', y') - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')| < \frac{\varepsilon}{mn}.$$

Sia  $\varrho$  un numero positivo  $< \frac{\sigma_1}{2}$  e  $\mathcal{C} \equiv (x(t), y(\tau), a \leq t \leq b, c \leq \tau \leq d)$  (4)

---

(4) Abbiamo preso gli intervalli base delle rappresentazioni di  $\mathcal{C}$  e  $\bar{\mathcal{C}}$  coincidenti per semplicità.

una qualunque curva di componenti rettificabili appartenente ordinatamente all'intorno ( $\varrho$ ) di  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Tra le corrispondenze  $\Omega_1[\Omega_2]$  esistenti fra i punti delle  $\mathcal{C}_1$  e  $\bar{\mathcal{C}}_1$  [delle  $\mathcal{C}_2$  e  $\bar{\mathcal{C}}_2$ ] e tali che la distanza fra i punti corrispondenti sia sempre non maggiore di  $\varrho$ , scegliamone una  $\Omega_1^*[\Omega_2^*]$  e indichiamo con  $x_1, \dots, x_m[y_1, \dots, y_n]$  i punti della  $\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_2]$  che vengono così a corrispondere ordinatamente ai punti  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  della  $\bar{\mathcal{C}}_1[\bar{\mathcal{C}}_2]$ . Per togliere ogni ambiguità intenderemo che, se in base alla corrispondenza scelta, a  $\bar{x}_i[\bar{y}_j]$  venissero a corrispondere sulla  $\mathcal{C}_1[\mathcal{C}_2]$  più punti,  $x_i[y_j]$ , sia il primo di essi, per  $i < m$  [ $j < n$ ] e l'ultimo di essi per  $i = m$  [ $j = n$ ].

Ciò posto, ne segue che

$$| [x(t_{i+1}) - x(t_i)] - [\bar{x}(t_{i+1}) - \bar{x}(t_i)] | \leq 2\varrho < \sigma_1$$

$$| [y(\tau_{j+1}) - y(\tau_j)] - [\bar{y}(\tau_{j+1}) - \bar{y}(\tau_j)] | \leq 2\varrho < \sigma_1$$

Si ha quindi

$$| F[x(t_i), y(\tau_j), x(t_{i+1}) - x(t_i), y(\tau_{j+1}) - y(\tau_j)] \\ - F[x(t_i), \bar{y}(\tau_j), \bar{x}(t_{i+1}) - \bar{x}(t_i), \bar{y}(\tau_{j+1}) - \bar{y}(\tau_j)] | < \frac{\varepsilon}{mn}.$$

Indicata con  $\bar{S}(\mathcal{C})$  la somma di Weierstrass di  $\mathcal{F}_W(\mathcal{C})$  relativa alla partizione (8) e alla curva  $\mathcal{C}$ , dalla relazione precedente segue

$$(10) \quad | \bar{S}(\mathcal{C}) - \bar{S}(\bar{\mathcal{C}}) | < \varepsilon.$$

Relativamente a  $\mathcal{F}_W(\mathcal{C})$  consideriamo una somma di Weierstrass  $S(\mathcal{C})$  successiva a  $\bar{S}(\mathcal{C})$ , cioè relativa a una partizione ottenuta dalla (8) intercalando in ogni intervallo  $(t_i, t_{i+1}), (\tau_j, \tau_{j+1})$  nuovi punti di divisione. Siano essi

$$t_i = t_0^i < t_1^i < \dots < t_{r_i}^i = t_{i+1}, \quad \tau_j = \tau_0^j < \tau_1^j < \dots < \tau_{s_j}^j = \tau_{j+1}$$

La parte di  $S(\mathcal{C})$  corrispondente a questa partizione di  $(t_i, t_{i+1}), (\tau_j, \tau_{j+1})$  è data da

$$S_{ij} = \sum_0^{r_i-1} \sum_0^{s_j-1} F[x(t_h^i), y(\tau_k^j), x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i), y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)].$$

Si ha

$$\begin{aligned}
 S_{ij}(\mathcal{C}) - F[x(t_i), y(\tau_j), x(t_{i+1}) - \alpha(t_i), y(\tau_{j+1}) - y(\tau_j)] &= \\
 &= \sum_0^{r_i-1} \sum_0^{s_j-1} \{F[x(t_h^i), y(\tau_k^j), x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i), y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)] \\
 &\quad - F[x(t_i), y(\tau_j), x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i), y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)]\} \\
 &+ \sum_0^{r_i-1} \sum_0^{s_j-1} F[x(t_i), y(\tau_j), x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i), y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)] \\
 &\quad - F[x(t_i), y(\tau_j), x(t_{i+1}) - x(t_i), y(\tau_{j+1}) - y(\tau_j)] \\
 &= S_{ij}^{(1)} + S_{ij}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Ora si ha per la (7)

$$\begin{aligned}
 |\sum_{ij} S_{ij}^{(1)}(\mathcal{C})| &\leq \sum_{ij} \sum_0^{r_i-1} \sum_0^{s_j-1} \{ |x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i)| |y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)| \cdot \\
 &\quad [ |F(x(t_h^i), y(\tau_k^j), x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i), y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)) - \\
 &\quad F(x(t_i), y(\tau_j), x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i), y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)) | ] : \\
 &\quad |x(t_{h+1}^i) - x(t_h^i)| |y(\tau_{k+1}^j) - y(\tau_k^j)| \} < \delta N_1 N_2 < \varepsilon;
 \end{aligned}$$

mentre, essendo  $F$  q.r.p., per il primo teorema del § 1, è

$$S_{ij}^{(2)}(\mathcal{C}) \geq 0.$$

Pertanto risulta, sommando rispetto agli indici  $i$  e  $j$ ,

$$(11) \quad S(\mathcal{C}) - \bar{S}(\mathcal{C}) = \sum_{ij} S_{ij}^{(1)} + S_{ij}^{(2)} > -\varepsilon.$$

Tenuto ora conto che si può trovare una  $S(\mathcal{C})$  con

$$S(\mathcal{C}) < \mathcal{J}_W(\mathcal{C}) + \varepsilon,$$

ne segue dalle (11), (10) e (9)

$$\mathcal{J}_W(\mathcal{C}) > S(\mathcal{C}) - \varepsilon > \bar{S}(\mathcal{C}) - 2\varepsilon > \bar{S}(\bar{\mathcal{C}}) - 3\varepsilon > \mathcal{J}_W(\bar{\mathcal{C}}) - 4\varepsilon$$

che prova la semicontinuità inferiore di  $\mathcal{J}_W(\mathcal{C})$ .

§ 4. — CONFRONTI CON LA TEORIA CLASSICA DI TONELLI.

Supponiamo che la  $F(P; \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$  sia definita per ogni  $P \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \in A$  e per tutte le coppie di  $n$ -uple  $(\xi'_1, \dots, \xi'_n) \neq (0, \dots, 0)$ ,  $(\eta'_1, \dots, \eta'_n) \neq (0, \dots, 0)$ , continua nel complesso delle variabili e ammetta le derivate seconde rispetto a  $\xi'_1, \dots, \xi'_n$  e  $\eta'_1, \dots, \eta'_n$  continue.

Introduciamo i due determinanti.

$$\begin{aligned} \Delta_1(P; x', y') &= \{F'_{\xi'_i \xi'_j}\} \\ \Delta_2(P; x', y') &= \{F'_{\eta'_i \eta'_j}\} \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, n$$

che risultano nulli per la positiva omogeneità della  $F$  rispetto a  $\xi'_1, \dots, \xi'_n$  e  $\eta'_1, \dots, \eta'_n$  e indichiamo con  $\Delta_1^{(k)}(P; x', y')$ ,  $\Delta_2^{(k)}(P; x', y')$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , i minori principali di  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  rispettivamente.

Posto

$$\begin{aligned} \Delta_1^*(P; x', y') &= \sum_1^n \Delta_1^{(k)}(P; x', y') \\ \Delta_2^*(P; x', y') &= \sum_1^n \Delta_2^{(k)}(P; x', y'), \end{aligned}$$

si ha il

TEOREMA « Condizione necessaria e sufficiente perchè  $F(P; x', y')$  sia positivamente convessa rispetto a  $x'$  e  $y'$  separatamente in un punto  $P$ , è che sia  $\Delta_1^*(P; x', y') \geq 0$ ,  $\Delta_2^*(P; x', y') \geq 0$  qualunque siano i due vettori  $x' \neq 0$ ,  $y' \neq 0$ . » <sup>(5)</sup>

Per  $n = 2$  si ha

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta_1^*(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) &= (\xi_1'^2 + \xi_2'^2) F_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) \\ \Delta_2^*(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) &= (\eta_1'^2 + \eta_2'^2) F_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) \end{aligned}$$

dove  $F_1$  e  $F_2$  sono le funzioni di Legendre relative ad  $F$  definite, per tutti gli  $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in A$ , da

$$F_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) = \begin{cases} F'_{\xi'_1 \xi'_1} / \xi_2'^2 = - F'_{\xi'_1 \xi'_2} / \xi_1' \xi_2' = F'_{\xi'_2 \xi'_2} / \xi_1'^2 & \text{se } \xi_1' \neq 0, \xi_2' \neq 0 \\ F'_{\xi'_1 \xi'_1} / \xi_2'^2 & \text{se } \xi_1' = 0, \xi_2' \neq 0 \\ F'_{\xi'_2 \xi'_2} / \xi_1'^2 & \text{se } \xi_1' \neq 0, \xi_2' = 0 \end{cases}$$

e analogamente per  $F_2$  con lo scambio di  $\xi'_1, \xi'_2$  con  $\eta'_1, \eta'_2$ .

<sup>(5)</sup> Questo teorema, nel caso di una  $F(x, x')$ , è stato dimostrato da M. Fenchel nel 1938.

Diremo secondo Tonelli che :

$F$  è q.r.p. in un punto  $P \in A$  se è  $F_1 \geq 0$ ,  $F_2 \geq 0$  ;

In forza al teorema precedente e alle (12) si ha che :

la q.r.p. di  $F$  nel senso di questa Nota equivale alla q.r.p. nel senso di Tonelli ;

Nella teoria di Tonelli all'integrale di F. T. nel senso di Weierstrass esteso alla curva  $\mathcal{C}$  di componenti rettificabili  $\mathcal{C}_1 \equiv (\xi_1 = \xi_1(u), \xi_2 = \xi_2(u))$  e  $\mathcal{C}_2 \equiv (\eta_1 = \eta_1(v), \eta_2 = \eta_2(v))$  corrisponde l'integrale nel senso di Lebesgue

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}) = \iint_{\mathcal{C}} F[\xi_1(u), \xi_2(u), \eta_1(v), \eta_2(v), \xi'_1(u), \xi'_2(u), \eta'_1(v), \eta'_2(v)] du dv ;$$

al teorema dimostrato in questa Nota al § 2 il seguente :

« Condizione necessaria affinché l'integrale  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  sia semicontinuo inferiormente è che sia

$$F_1(P; \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) \geq 0, \quad F_2(P; \xi'_1, \xi'_2, \eta'_1, \eta'_2) \geq 0$$

in tutti i punti  $P \in A$  e per tutte le coppie normalizzate  $(\xi'_1, \xi'_2)$  e  $(\eta'_1, \eta'_2)$ . »

Università di Cagliari

## BIBLIOGRAFIA

- S. FAEDO - *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali* - Annali di Matematica, Vol. XXIII, 1944, pp. 69-121 ;
- » » - *Un nuovo tipo di funzionali continui* - Rend. di Mat. e delle sue appl. Roma, (5), IV, fasc. III-IV, 1943 ;
- » » - *Sulle condizioni di Legendre e Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli* - Annali Scuola Normale Superiore Pisa, S. II, Vol. XV, pp. 127-135.
- » » - *Il calcolo delle variazioni e la semicontinuità* - Atti del convegno Lagrangiano, Acc. Sci. Torino, 1964, pp. 61-82 ;
- » » - *Semicontinuità e quasi-regolarità per gli integrali di Fubini-Tonelli* - Annali Scuola Normale Superiore Pisa, S. III, Vol. XVIII, 1964, pp. 361-383.
- E. MAGENES - *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli : 1° Condizioni sufficienti per la semicontinuità* - Annali Scuola Superiore Pisa, S. III, Vol. II, 1948, pp. 1-38 ;
- » » - *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli : 2° Teoremi di esistenza dell'estremo* - Annali Scuola Superiore Pisa, S. III, Vol. III, 1949, pp. 95-131 ;
- » » - *Sul minimo relativo degli integrali di F. T.* - Giornale di Battaglini, S. IV, Vol. 79, 1949-50, pp. 144-168 ;
- » » - *Un'osservazione sulle condizioni necessarie per la semicontinuità per gli integrali di Fubini-Tonelli* - Rend. Sem. Mat. Un. Padova, Vol. XIX, 1950, pp. 44-53 ;
- » » - *Sulle equazioni di Eulero relative ai problemi di Calcolo delle Variazioni degli integrali di Fubini-Tonelli* - Rend. Sem. Mat. Un. Padova, Vol. XIX, 1950, pp. 62-102 ;
- » » - *Sul minimo semiforte degli integrali di Fubini-Tonelli* - Rend. Sem. Un. Padova, Vol. XX, 1951, pp. 401-424.
- L. LOMBARDI - *Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli* - Annali Scuola Normale Superiore Pisa, S. III, Xol. XII, 1958, pp. 129-153.
- C. PAUC - *La méthode métrique en calcul des variations* - Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1941.
- L. TONELLI - *Fondamenti di calcolo delle variazioni* - Vol. I, II, Zanichelli, Bologna.