ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIULIO MATTEI

Su una classe di moti magnetofluidodinamici di un fluido viscoso

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 3 (1965), p. 429-441

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_429_0>

SU UNA CLASSE DI MOTI MAGNETOFLUIDODINAMICI DI UN FLUIDO VISCOSO (*)

GIULIO MATTEI (1)

1. Introduzione.

Si studia, nell'ambito dello schema del continuo della Magnetofluidodinamica (m. f. d.), il moto di un fluido viscoso, elettricamente conduttore, nel caso in cui il campo di velocità e il campo magnetico sono indipendenti dalla coordinata z di una terna cartesiana di riferimento; le traiettorie delle particelle fluide non sono situate in piani paralleli al piano $x\,y$, come accadrebbe per un moto piano, e il campo magnetico presenta una componente non nulla anche lungo z. Il fluido, sottoposto a forze di massa conservative di potenziale U per unità di massa, è supposto omogeneo, incomprimibile e di conducibilità elettrica tanto grande da potersi considerare infinita. Il coefficente di viscosità cinematica ν e la permeabilità magnetica μ sono ritenuti costanti e l'azione delle correnti di spostamento trascurabile rispetto a quella delle correnti di conduzione.

Limitatamente al caso idrodinamico questo tipo di moto è stato ampiamente trattato da R. Berker (cfr. [1]) che l'ha denominato moto pseudopiano di seconda specie.

Nel N. 2 della presente nota si danno le condizioni per il realizzarsi dei moti m. f. d. in esame; esse si traducono in quattro equazioni differenziali alle derivate parziali cui devono soddisfare le quattro funzioni incognite fondamentali del problema: $\psi(x, y, t)$ funzione di corrente, $\psi_B(x, y, t)$ funzione del campo magnetico, $v_z(x, y, t)$ e $B_z(x, y, t)$. L'interazione fra il moto m. f. d.

Pervenuto alla Redazione il 22 Maggio 1965.

(1) Ist. Mat. Applicate Fac. Ingegneria Università, Pisa.

(*) Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 7 per la Matematica del C. N. R.

piano e quello lungo z appare solo in due di queste quattro equazioni. Nel N. 3, supponendo preesistente un campo magnetico uniforme diretto come l'asse x (o y) e mettendosi nel caso di moto lento e debole campo magnetico indotto, si applica al problema l'approssimazione lineare, indicando soluzioni di noto significato fisico. In questa approssimazione scompare completamente, per quanto riguarda il problema indefinito, l'interazione fra il moto m. f. d. piano e quello lungo z.

Ritornando alle equazioni non approssimate, ai N. 4 e 5 si esamina il problema nell'ipotesi di stazionarietà. Si trovano alcune soluzioni particolari che sono sembrate di interesse. Una di esse è un moto per eliche circolari di Strakhovitch con una opportuna distribuzione spaziale del campo magnetico.

2. Equazioni caratteristiche del problema.

Per il fluido in questione, col solito significato dei simboli, l'equazione di moto è:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta_2 \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\varrho} - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}, \tag{2.1}$$

e l'equazione del campo magnetico:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \tag{2.2}$$

Nel moto in esame è:

$$\mathbf{v} = v_x(x, y, t)\, \mathbf{i} + v_y(x, y, t)\, \mathbf{j} + v_z(x, y, t)\, \mathbf{k} = \mathbf{v}_e(x, y, t) + v_z(x, y, t)\, \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_e(x, y, t) + B_z(x, y, t)\, \mathbf{k}.$$

Essendo $\operatorname{div} v_z \mathbf{k} = 0$, l'equazione di continuità di massa implica l'esistenza di una funzione di corrente $\psi(x, y, t)$, definita a meno di una arbitraria funzione additiva del tempo, tale che:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{ovvero } \mathbf{v}_e = \operatorname{grad} \psi \wedge \mathbf{k}. \tag{2.3}$$

Analogamente dall'equazione di solenoidalità di $\mathbf{B}$ discende:

$$\mathbf{B}_e = \operatorname{grad} \psi_B \wedge \mathbf{k}. \tag{2.4}$$

Si riconosce da (2.3) e (2.4) che ψ e ψ_B sono legate a $\mathbf{v}_e$ e $\mathbf{B}_e$ da relazioni della stessa forma di quelle che si avrebbero nel caso di un moto m. f. d. piano. Cerchiamo, come prima cosa, le equazioni differenziali esatte a cui devono soddisfare le quattro funzioni ψ, ψ_B, v_z e B_z. Queste infatti sono le incognite fondamentali del problema perchè, una volta note, la pressione si ha, come si vedrà (cfr. (2.7)), per quadrature e il campo elettrico è dato da $\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}/c$. Essendo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} v_z \wedge \mathbf{k} - \Delta_2 \psi \, \mathbf{k},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = - \Delta_2 \psi \cdot \operatorname{grad} \psi - \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} \mathbf{k} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} v_z^2 ,$$

dove D è simbolo di determinante funzionale, calcolando $\operatorname{rot} \Delta_2 \mathbf{v}$ e $\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v})$ quindi prendendo il rotore di ambo i membri di (2.1) e proiettando su $\mathbf{k}$ si ha:

$$\frac{\partial (\Delta_2 \psi)}{\partial t} = \nu \Delta_4 \psi + \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, \Delta_2 \psi_B)}{D(x, y)}; \tag{2.5}$$

proiettando su $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v_z}{\partial t} - \nu \Delta_2 v_z - \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, B_z)}{D(x, y)}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_z}{\partial t} - \nu \Delta_2 v_z - \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, B_z)}{D(x, y)}\right] = 0,$$

che forniscono l'integrale:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \nu \Delta_2 v_z - \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, B_z)}{D(x, y)} = c(t), \tag{2.6}$$

con $c(t)$ funzione arbitraria del tempo.

Per il calcolo della pressione, tenuto conto delle precedenti relazioni e posto $\Pi = U - p/\varrho - v^2/2$, si ha direttamente da (2.1) $\operatorname{grad} \Pi$ da cui integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{x_0}^{x} \Bigg[& \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \, \partial y} - \nu \Delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - \Delta_2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2}{\partial x} + \frac{\Delta_2 \psi_B}{4\pi\mu\varrho} \frac{\partial \psi_B}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{8\pi\mu\varrho} \frac{\partial B_z^2}{\partial x} \Bigg] dx + \int_{y_0}^{y} \Bigg[- \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \, \partial x} + \nu \Delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Delta_2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2}{\partial y} + \\ & + \frac{\Delta_2 \psi_B}{4\pi\mu\varrho} \frac{\partial \psi_B}{\partial y} + \frac{1}{8\pi\mu\varrho} \frac{\partial B_z^2}{\partial y} \Bigg]_{x = x_0} dy + c(t) z + f(t), \end{aligned} \tag{2.7}$$

dove x_0 e y_0 sono due costanti fissate ad arbitrio e $f(t)$ una funzione arbitraria del tempo. Assegnato U la (2.7), una volta note ψ, ψ_B, v_z e B_z, fornisce la pressione p per quadrature. Se si fa l'ipotesi che, oltre a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$, anche $U - p/\varrho$ sia indipendente da z, ciò comporta $c(t) = 0$ e, per conseguenza, la (2.6) assume la forma:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \Delta_2 v_z + \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, B_z)}{D(x, y)}. \tag{2.8}$$

Da (2.7) abbiamo poi $f(t) = \Pi(x_0, y_0, t)$ e quindi questa funzione è nota assegnando il valore di Π in (x_0, y_0) ad ogni istante.

Da (2.2) si ha poi:

$$(2.2') \quad \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}_e), \qquad (2.2'') \quad \frac{\partial B_z}{\partial t}\mathbf{k} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}_e \wedge B_z \mathbf{k}) + \mathrm{rot}(v_z \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_e).$$

Proiettando (2.2') su $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \psi_B}{\partial t} - \frac{D(\psi, \psi_B)}{D(x, y)}\right] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \psi_B}{\partial t} - \frac{D(\psi, \psi_B)}{D(x, y)}\right] = 0,$$

che forniscono l'integrale:

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = \frac{D(\psi, \psi_B)}{D(x, y)} + g(t),$$

con $g(t)$ funzione arbitraria del tempo sulla quale possiamo fare l'ipotesi che sia nulla dato che ψ e ψ_B sono definite a meno di una funzione additiva arbitraria del tempo; per cui:

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = \frac{D(\psi, \psi_B)}{D(x, y)}. \tag{2.9}$$

Svolgendo (2.2'') si giunge infine a:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{D(v_z, \psi_B)}{D(x, y)} + \frac{D(\psi, B_z)}{D(x, y)}. \tag{2.10}$$

Le (2.5), (2.8), (2.9) e (2.10) sono le quattro equazioni differenziali cercate. Si osservi che nelle (2.5) e (2.9) compaiono solo ψ e ψ_B: quindi queste due equazioni sono le stesse che si otterrebbero nella ipotesi $v_z = B_z = 0$, cioè nel caso m. f. d. piano (2). Nelle (2.8) e (2.10) invece appare l'interazione fra

(2) Per il caso non stazionario piano, relativamente ad un fluido incomprimibile non viscoso e sotto l'assunzione che $\Delta_2 \psi_B$ sia funzione arbitraria di ψ_B, due soluzioni particolari per il caso di conducibilità elettrica σ infinita e due per σ finita sono state trovate da MAHINDER S. UBEROI in [2].

il moto piano e quello lungo z. Se si conoscono ψ e ψ_B, la determinazione di v_z e B_z equivale alla integrazione del sistema delle due equazioni differenziali alle derivate parziali (2.8) e (2.10); con tale integrazione si associa ad ogni soluzione del moto m. f. d. piano una soluzione del moto spaziale. È poi immediata l'osservazione che, essendo le (2.8) e (2.10) soddisfatte, qualunque siano ψ e ψ_B, da $v_z = \text{cost}$ e $B_z = \text{cost}$, la sovrapposizione ad un qualunque moto m. f. d. piano di un moto uniforme e di un campo magnetico uniforme nella direzione dell'asse z conduce ad un moto ancora possibile [3].

3. Approssimazione lineare.

Supponiamo, limitatamente a questo N.°, che il campo magnetico risulti dalla somma di un campo preesistente costante nel tempo, omogeneo nello spazio e diretto come l'asse x [4] di induzione B_0 e del campo magnetico indotto il cui vettore induzione (incognito) indichiamo con $\mathbf{b}$. Supponiamo poi di trovarci nelle condizioni di applicabilità della approssimazione lineare; cioè il moto sia sufficentemente lento e il campo magnetico indotto sufficentemente debole in modo da poter trascurare i termini non lineari in $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ e nelle loro derivate. In queste condizioni la (2.5) diventa:

$$\frac{\partial (\Delta_2 \psi)}{\partial t} = \nu \Delta_4 \psi + \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho} \frac{\partial (\Delta_2 \psi_B)}{\partial x}, \tag{3.1}$$

la (2.8):

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \Delta_2 v_z + \frac{B_0}{4\pi\mu\varrho} \frac{\partial b_z}{\partial x}, \tag{3.2}$$

e la (2.10):

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_z}{\partial x}. \tag{3.3}$$

Se di (2.2′) si prende il rotore di ambo i membri e si proietta su $\mathbf{k}$ si ha:

$$\Delta_2 \left(\frac{\partial \psi_B}{\partial t} - \frac{D(\psi, \psi_B)}{D(x, y)} \right) = 0$$

---

(3) Cfr. per l'analoga situazione idrodinamica: R. Berker [1] N. 52 e N. 27.

(4) Analoghe conclusioni si traggono nel caso $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{j}$.

che linearizzata diventa:

$$\frac{\partial(\Delta_2 \psi_B)}{\partial t} = B_0 \frac{\partial(\Delta_2 \psi)}{\partial x}. \tag{3.4}$$

Le (3.1) e (3.4) sono le stesse equazioni che si otterrebbero se il moto fosse piano. Nelle (3.2) e (3.3) non compaiono più ψ e ψ_B e quindi nella approssimazione lineare scompare, per quanto riguarda il problema indefinito, l'interazione fra il moto m.f.d. piano e quello lungo z. Inoltre le (3.2) e (3.3) sono della stessa forma delle (3.1) e (3.4) rispettivamente e possono ottenersi da esse scambiando v_z con $\Delta_2\psi$ e b_z con $\Delta_2 \psi_B$.

Da (3.1) e (3.4) si ricava:

$$\frac{\partial^2(\Delta_2 \psi)}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial(\Delta_4 \psi)}{\partial t} + v_A^2 \frac{\partial^2(\Delta_2 \psi)}{\partial x^2}, \tag{3.5}$$

con $v_A = B_0/(4\pi\mu\varrho)^{1/2}$ velocità di Alfvén; da (3.2) e (3.3):

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial(\Delta_2 v_z)}{\partial t} + v_A^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}. \tag{3.6}$$

In corrispondenza ad ogni soluzione v_z di (3.6) e $\Delta_2\psi$ di (3.5), da (3.2) e (3.3) e da (3.1) e (3.4) si hanno per quadrature rispettivamente b_z e $\Delta_2 \psi_B$ a meno di una arbitraria funzione additiva di y per la cui determinazione occorrerà tener conto delle condizioni al contorno. Tale arbitrarietà si rifletterà poi sulla determinazione di ψ e ψ_B dalla conoscenza di $\Delta_2\psi$ e $\Delta_2\psi_B$.

Nel caso particolare di fluido non viscoso la dipendenza da x e t delle quattro funzioni v_z, b_z, $\Delta_2\psi$, $\Delta_2\psi_B$ è regolata dall'equazione delle corde vibranti.

Osserviamo infine che se si richiedono di (3.6) e (3.5) per v_z e ψ le soluzioni di ben noto significato fisico:

$$(3.7) \quad v_z(x) = A_1 e^{i(\omega t - kx)}, \qquad (3.8) \quad \psi(x) = A_2 e^{i(\omega t - kx)},$$

per (3.7) si ha la relazione di dispersione:

$$k^2(i\nu\omega + v_A^2) - \omega^2 = 0, \tag{3.9}$$

e per (3.8):

$$k^2[k^2(i\nu\omega + v_A^2) - \omega^2] = 0,$$

cioè ($k \neq 0$) ancora la (3.9). La (3.9) per $\nu = 0$ dà la ben nota onda di Alfvén per fluidi incomprimibili non viscosi perfettamente conduttori e per $v_A = 0$ coincide con la relazione nota dall'idrodinamica dei fluidi viscosi (cfr. [3] pag 120). Se si richiedono anche per b_z e ψ_B soluzioni del tipo (3.7) e (3.8) si ha da (3.3) e (3.4):

$$b_z = -A_1 B_0 \frac{k}{\omega} e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{e} \quad \psi_B = -A_2 B_0 \frac{k}{\omega} e^{i(\omega t - kx)}.$$

4. Caso stazionario.

Nell'ipotesi di stazionarietà, cioè nell'ipotesi in cui gli elementi del moto e del campo magnetico non dipendono esplicitamente dal tempo, esaminiamo in questo n.° le equazioni (2.5) e (2.9), rimandando l'esame delle (2.8) e (2.10) al n.° successivo.

La (2.9) indica che ψ_B deve essere funzione di ψ:

$$\psi_B = \psi_B(\psi). \tag{4.1}$$

Da questa, posto $\psi'_B = \dfrac{d\psi_B}{d\psi}$, si deduce:

$$B_x = \psi'_B \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi'_B v_x\,; \quad By = -\psi'_B \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi'_B v_y$$

cioè:

$$\mathbf{B}_e = \psi'_B \mathbf{v}_e, \tag{4.2}$$

quindi $\mathbf{B}_e$ e $\mathbf{v}_e$ sono paralleli fra loro e ψ'_B è costante sulle linee di flusso di $\mathbf{v}_e$ per essere $\operatorname{div} \mathbf{v}_e = \operatorname{div} \mathbf{B}_e = 0$. Si ha poi da (4.1):

$$\Delta_2 \psi_B = \psi'_B \Delta_2 \psi + \psi''_B (\operatorname{grad} \psi)^2. \tag{4.3}$$

Sviluppando la (2.5) con l'uso di (4.1) e (4.3), posto:

$$\Phi = \Delta_2 \psi \left(1 - \frac{\psi'^2_B}{4\pi\mu\varrho}\right) - \frac{\psi'_B \psi''_B}{4\pi\mu\varrho} (\operatorname{grad} \psi)^2,$$

si giunge a:

$$\nu \Delta_4 \psi = \frac{D(\Phi, \psi)}{D(x, y)}. \tag{4.4}$$

Assegnata ψ'_B, la (4.4) è l'equazione differenziale cui deve soddisfare ψ. Nota ψ e quindi $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{B}_e$ è dato dalla (4.2). La pressione si ricava poi da (2.7) per quadrature.

Appaiono di interesse le seguenti soluzioni particolari:

1) Riferiamoci a coordinate polari r e θ. Abbiamo:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

e la (4.4) diventa:

$$\nu \Delta_4 \psi = \frac{1}{r}\frac{D(\Phi, \psi)}{D(r, \theta)}.$$

Di questa cerchiamo eventuali soluzioni per cui ψ sia funzione solo di r : $\psi = G(r)$. In tal caso, qualunque sia ψ'_B, il secondo membro della precedente si annulla e abbiamo per G l'equazione differenziale:

$$\frac{d^4 G}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 G}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dG}{dr} = 0$$

il cui integrale generale è:

$$G(r) = a_1 r^2 \log r + a_2 \log r + a_3 r^2 + a_4. \tag{4.5}$$

Per la velocità abbiamo conseguentemente:

$$v_r = 0;\ v_\theta = v = \frac{\alpha}{r} + \beta r + \gamma r \log r \,(\alpha = -a_2,\ \beta = -2a_3 - a_1,\ \gamma = -2a_1). \tag{4.6}$$

Per la pressione si trova, detta $\bar{p} = p + B^2/8\pi\mu$ ($B^2/8\pi\mu$ pressione magnetica):

$$\frac{\bar{p}}{\varrho} - U = 2\gamma\nu\theta + \int \frac{v^2}{r}\left(1 - \frac{\psi_B'^2}{4\pi\mu\varrho}\right) dr. \tag{4.7}$$

Se U è una funzione uniforme del posto, per evitare polidromia in $\bar{p}$ rispetto a cammini circondanti l'asse z (il fluido è supposto in un dominio dove θ può variare da 0 a 2π), porremo $\gamma = 0$. Conseguentemente:

$$v = \alpha/r + \beta r \tag{4.6'}$$

e

$$\frac{\bar{p}}{\varrho} - U = -\frac{\alpha^2}{2r^2} + 2\alpha\beta \log r + \beta^2 \frac{r^2}{2} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\int \frac{\psi_B'^2}{r}\left(\frac{\alpha}{r^2} + \beta^2 r^2 + 2\alpha\beta\right) dr. \tag{4.7'}$$

In definitiva possiamo dire che è compatibile con le equazioni in esame un moto per cerchi concentrici descritto da (4.6) o (4.6') (in particolare una rotazione uniforme rigida attorno all'asse z se si vuole regolarità su tale asse) con un $\mathbf{B}_e$, parallelo a $\mathbf{v}_e$, il cui modulo si ottiene prendendo per ψ_B una funzione arbitraria della ψ data da (4.5). La pressione è poi data da (4.7) o (4.7').

2) La (4.4) può, per qualsiasi ψ'_B, soddisfarsi con una ψ funzione della sola y (o, equivalentemente, della sola x) e ne discende:

$$\psi(y) = c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4 \tag{4.8}$$

da cui:

$$v_y = 0, \; v_x = 3c_1 y^2 + 2c_2 y + c_3 ,$$

cioè è compatibile un moto per rette lungo l'asse x (o y) con ψ_B arbitraria funzione della (4.8).

3) Fluido non viscoso. (5)

Da (4.4), detta F una arbitraria funzione di ψ, si ha:

$$\Delta_2 \psi \left(1 - \frac{\psi_B'^2}{4\pi\mu\varrho}\right) - \frac{\psi_B' \psi_B''}{4\pi\mu\varrho} (\operatorname{grad} \psi)^2 = \frac{dF}{d\psi} \tag{4.4'}$$

e conseguentemente per la pressione:

$$\frac{p}{\varrho} = U + F - \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \psi)^2 + \text{cost.}$$

È da notare che la (4.5) e la (4.8) oltrechè di (4.4) sono soluzioni di (4.4') e quindi le precedenti soluzioni 1) e 2) competono sia al fluido viscoso che a quello non viscoso.

OSSERVAZIONE. Ci si può chiedere se, con ψ'_B qualsiasi, siano compatibili moti m. f. d. stazionari in cui il campo di velocità $\mathbf{v}_e$ sia irrotazionale (6), cioè sia:

$$\Delta_2 \psi = 0. \tag{4.9}$$ (7)

(5) Per un fluido non viscoso in condizioni adiabatiche il problema è stato trattato da C. AGOSTINELLI in [4] dove vengono esaminati vari casi particolari notevoli.

(6) Nel caso non stazionario le condizioni per la realizzazione di moti piani m.f.d. irrotazionali per un fluido non viscoso a σ infinita e in condizioni adiabatiche sono state date da G. S. GOLITSYN in [5] a pag. 473-474.

(7) Si noti che una generica ψ armonica soddisfa la:

$$\nu \Delta_4 \psi + \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} = 0$$

che è l'equazione che caratterizza il moto piano stazionario puramente idrodinamico.

Sia che ci si riferisca ad un fluido viscoso che a uno non viscoso da (4.4) o (4.4′) discende:

$$(\mathrm{grad}\,\psi)^2 = f(\psi), \tag{4.10}$$

con f arbitraria funzione di ψ.

Poichè le (4.9) e (4.10) sono in generale incompatibili, i moti in questione saranno possibili solo in casi assai particolari; due di essi si hanno per: $\psi(x, y) = A_1 x + A_2 y$ e per $\psi(r) = A_3 \log r + A_4$, il cui significato idrodinamico è ben noto (A_1, A_2, A_3, A_4 costanti arb.).

5. Tenendo conto dei risultati ottenuti al N. 4 esaminiamo in questo N.⁰ le (2.8) e (2.10) nell'ipotesi di stazionarietà.

La (2.10) diventa:

$$\frac{D(B_z, \psi)}{D(x, y)} = \psi'_B \frac{D(v_z, \psi)}{D(x, y)}, \tag{5.1}$$

che fornisce subito l'integrale: $B_z - \psi'_B v_z = M(\psi)$ con $M(\psi)$ arbitraria funzione di ψ. La (2.8), usando la (5.1), diventa:

$$\nu \Delta_2 v_z + \left(1 - \frac{\psi'^2_B}{4\pi\mu\varrho}\right) \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} = 0. \tag{5.2}$$

Mi sembrano di interesse i seguenti casi particolari:

1) Assunta per le (2.5) e (2.9) la soluzione 1) del N. 4, riferendoci a coordinate cilindriche r, ϑ, z, la (5.2) diventa:

$$\nu \Delta_2 v_z + (1 - \psi'^2_B / 4\pi\mu\varrho) \left(2a_1 \log r + a_1 + \frac{a_2}{r^2} + 2a_3\right) \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} = 0; \tag{5.3}$$

da essa, richiedendo per v_z una soluzione dipendente solo da r, si ha, per qualsiasi $\psi'_{B'}$:

$$v(r) = A' \log r + A''.$$

Se si fosse usata la (2.6) invece della (2.8) avremmo avuto una costante c a secondo membro di (5.3) e conseguentemente per la precedente soluzione:

$$v_z(r) = A' \log r + A'' + cr^2 / 4\nu. \tag{5.4}$$

Le (4.6) e (5.4) rappresentano il moto per eliche circolari di Strakhovitch (cfr. [1] (30.1)).

Assunta per v_z la precedente soluzione, la (5.1) è soddisfatta prendendo per B_z una arbitraria funzione di ψ. Quindi abbiamo il seguente risultato: è compatibile col problema m. f. d. in esame il suddetto moto di Strakhovitch con $B_r = 0$, $B_\vartheta = \psi'_B v_\vartheta$ e $B_z =$ funzione arbitraria della ψ data dalla (4.5). L'espressione della pressione si ricava poi nel solito modo.

2) Se si assume per le (2.5) e (2.9) la soluzione 2) del N.º 4, la (5.2) diventa:

$$\nu \Delta_2 v_z = (1 - \psi_B'^2 / 4\pi\mu\varrho)(3c_1 y^2 + 2c_2 y + c_3) \frac{\partial v_z}{\partial x},$$

da cui, se si richiede per v_z una soluzione dipendente solo da y, si ha, per qualsiasi ψ'_B,:

$$v_z = h_1 y + h_2 . \tag{5.5}$$

Quindi è compatibile il moto (4.8) - (5.5) con $B_y = 0$, $B_x = \psi'_B v_x$ e B_z (cfr. (5.1)) funzione arbitraria di (4.8).

3) Se si soddisfa la (4.1) con:

$$\psi_B = k\psi \qquad (k \text{ costante}) \tag{4.1'}$$

le (4.4) e (5.2) diventano:

$$\nu \Delta_4 \psi + \left(1 - \frac{k^2}{4\pi\mu\varrho}\right) \frac{D(\psi, \Delta_2 \psi)}{D(x, y)} = 0, \tag{4.4'}$$

$$\nu \Delta_2 v_z + \left(1 - \frac{k^2}{4\pi\mu\varrho}\right) \frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)} = 0. \tag{5.2'}$$

Per $k^2 / 4\pi\mu\varrho < 1$ [8] le (4.4′) e (5.2′) sono le equazioni idrodinamiche caratteristiche del moto stazionario di un fluido (fittizio) incomprimibile di densità $\varrho^* = \varrho - k^2 / 4\pi\mu$ e con campo di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e(x, y) + v_z(x, y)\,\mathbf{k}$. Di esse nella letteratura sono note varie soluzioni esatte (cfr. [1] N. 27). Note quindi v_z e ψ, $\mathbf{B}_e = k\mathbf{v}_e$ e B_z si ricava dalla (5.1). Per es. prendendo $\Delta_2 \psi = 0$, con che è soddisfatta (4.4′), e riferendosi al sistema di coordinate φ, ψ, con φ funzione armonica coniugata di ψ tale che $\varphi + i\psi$ sia una funzione analitica di $x + iy$ (φ è il potenziale di velocità del moto piano), la (5.2′), posto, $\varrho^* / \nu\varrho = 1 / \alpha$, diventa:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial \psi^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0$$

---

(8) Se è $k^2 = 4\pi\mu\varrho$, v_z deve essere una funzione armonica e ψ una funzione biarmonica.

che ammette per es. la soluzione (cfr. [1] pag. 91):

$$v_z = (A e^{\varphi/a} + B)(C\psi + D) \tag{5.6}$$

con A, B, C, D costanti. La (5.1) nello stesso sistema di coordinate diventa:

$$k \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial B_z}{\partial \varphi}.$$

In corrispondenza alla (5.6):

$$B_z = kA\,(C\psi + D)\,e^{\varphi/a} + w(\psi)$$

con $w(\psi)$ funzione arbitraria di ψ.

OSSERVAZIONE. Si noti che tutti i risultati dei N.[i] 4 e 5 sono subordinati in modo essenziale all'ipotesi di conducibilità elettrica σ infinita. Infatti per σ finita non sussiste più la (4.1) bensì la:

$$\frac{D(\psi, \psi_B)}{D(x, y)} = -\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 \psi_B.$$

A questo proposito va tuttavia tenuto presente che per σ finita con riferimento a un fluido *non* viscoso incomprimibile e trascurando le correnti di spostamento C. Agostinelli in [5] ha dimostrato che è compatibile la soluzione:

$$v_z = v_r = 0, \; v_\vartheta = \omega r \;\; (\omega = \text{cost})$$

$$B_r = 0, \; B_z = \text{cost}, \; B_\vartheta = \text{cost}.\; v_\vartheta,$$

cioè un moto rotatorio uniforme attorno all'asse z con l'esistenza di un campo magnetico avente una componente costante secondo l'asse di rotazione e una componente trasversa proporzionale alla velocità.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Berker - « *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visquex incompressible* ». Handbuch der Physik VIII/2 (1963).

[2] Mahinder S. Uberoi - « *Some exact solutions of Magnetohydrodynamics* ». Phy. of Fluids Vol. 6 N. 10 (1963) p. 1379-1381.

[3] Shih - I. Pai - « *Magnetogasdynamics and plasma dynamics* ». Wien Springer-Verlag 1962.

[4] C. Agostinelli - « *Sui moti magnetofluidodinamici stazionari in due coordinate* ». Boll. U. M. I. Serie III, Anno XV, N. 3 (Sett. 1960) p. 414-423.

[5] G. S. Golitsyn - « *Plane problems in Magnetohydrodynamics* ». Soviet Physics J E T P Vol. 34 (7) N. 3 (Sett. 1958) p. 473.

[6] C. Agostinelli - « *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magnetoidrodinamica interessanti la Cosmogonia* ». Atti Acc. Lincei Rend. Serie 8, Vol. XVII p. 216-221 (1954).