Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Iacopo Barsotti

Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva. Capitoli 3, 4

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 3 (1965), p. 277-330

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_277_0>

METODI ANALITICI PER VARIETÀ ABELIANE IN CARATTERISTICA POSITIVA. CAPITOLI 3, 4.

Iacopo Barsotti [1]

I primi due capitoli sono pubblicati in questi stessi Annali, vol. 18, 1964, pp. 1-25; la numerazione prosegue quella dei primi due capitoli. Nel capitolo 3 si fa largo uso di MC, anche se in alcuni punti un riesame delle questioni ab ovo avrebbe potuto condurre ai risultati cercati ed a quelli di MC in maniera più elegante, ma più lunga.

Capitolo 3.

Gli ipercampi.

16. Sia k un corpo algebricamente chiuso di caratteristica p (vedasi n^0 1 per le convenzioni), e sia $K = \operatorname{vect} k$, $K' = QK =$ corpo quoziente di K. Un *K-modulo canonico* è un K-modulo (sinistro, unitario) M finito, libero, e dotato di un π semiendomorfismo π, e un π^{-1}-semiendomorfismo t, tali che $\pi t = = p = p\iota_M$; qui, ι_M, od anche ι, indica, come sempre nel seguito, l'applicazione identica, in questo caso di M. In un tale M, i $p^n M$, presi come sistema di intorni dello 0, definiscono una topologia K-lineare rispetto alla quale M è completo, in quanto la loro intersezione si riduce all'elemento 0. Si noti che in $M^* = K'M$ è $p^{-1}\pi = t^{-1}$, onde $t(p^{-1}\pi) = \iota$, e $t\pi = p\iota$. Il numero di generatori liberi di M si dirà il suo *ordine*. Le definizioni di T-modulo canonico e Π-modulo canonico sono come in MC (p. 317; usiamo solo il caso $\omega = p$); qui però tratteremo solo quelli equidimensionali, e quindi ometteremo in tutti i casi questo aggettivo. Sia $\varkappa$ un isomorfismo di K su K; un *$\varkappa$ semiomomorfismo* del K-modulo canonico M su un K-modulo canonico è un $\varkappa$ semiomomorfismo di K-moduli, necessariamente continuo, che commuti con π e t.

Pervenuto alla Redazione il 9 ottobre 1964.

(1) Ricerca svolta parzialmente sotto gli auspici dell'Office of Aerospace Research, grant AFEOAR 6329.

3.1 TEOREMA. *Sia M un K-modulo canonico, e si definisca :*

$$M_t = \bigcap_{1}^{\infty}{}_n\, \pi^n M \, ; \qquad M_\pi = \bigcap_{1}^{\infty}{}_n\, t^n M \, ;$$

$$M_r = \textit{insieme degli } x \in M \textit{ tali che } \lim_{n \to \infty} t^n x = \lim_{n \to \infty} \pi^n x = 0.$$

Allora M_t, M_π, M_r sono rispettivamente un T-modulo canonico logaritmico, un Π-modulo canonico logaritmico, e un T-modulo (e Π-modulo) canonico radicale, e si ha $M = M_t \oplus M_\pi \oplus M_r$. Questa è l'unica decomposizione di M come somma diretta di un T-modulo canonico logaritmico, un Π-modulo canonico logaritmico, e un T-modulo canonico radicale.

DIM. M_t è certamente libero e finito, perchè K è a ideali principali; inoltre $\pi M_t = M_t$, $t M_t \subseteq M_t$, onde M_t è K-modulo canonico. Esso è anche T-modulo, ossia ogni successione $i \longrightarrow x_i$ di suoi elementi, con $x_i \in t^i M_t$, è una zero successione, in quanto $t^n M_t = p^n M_t \subseteq p^n M$. Così M_t è T-modulo, certamente finito, e chiaramente soddisfa la condizione $tx = 0 \Longrightarrow x = 0$, in quanto da $tx = 0$ segue $px = 0$. Quindi M_t è T-modulo canonico, ed è logaritmico perchè $\pi M_t = M_t$ (questa è la definizione di logaritmico; cfr. p. 325 di MC). Analogamente si opera su M_π.

Si consideri ora M_r; intanto $t M_r \subseteq M_r$ e $\pi M_r \subseteq M_r$; poi, se $i \longrightarrow x_i$ è una successione di elementi di M_r tale che $x_i \in t^i M_r$, essa è una zero successione, in quanto $t^i M_r \subseteq p^m M$, per un dato m, quando i è elevato. Perciò M_r è un T-modulo finito, e di nuovo soddisfa la condizione $tx = 0 \Longrightarrow x = 0$, ossia è T-modulo canonico; analogamente esso è Π-modulo canonico.

Un elemento x di M_t, ma non di $t M_t$, è tale che $\pi x \notin t M_t$, chè altrimenti πx sarebbe in $p M_t$, ed x in $t M_t$. Se allora $x \in M_t \cap M_\pi$, ma per esempio $x \notin t^n M_t$, si ha $\pi^i x \notin t^n M_t$ per ogni $i > 0$; d'altra parte, da $x \in M_\pi$ segue $\lim_{i \to \infty} \pi^i x = 0$, che è una contraddizione. Si conclude che $M_t \cap M_\pi = 0$, ossia che la somma $M_t + M_\pi$ è diretta. Sia poi $x \in M_t$, $y \in M_\pi$, ed $x + y \in M_r$; allora $\lim_{i \to \infty} t^i (x + y) = 0$; poichè anche $\lim_{i \to \infty} t^i x = 0$, se ne deduce $\lim_{i \to \infty} t^i y = 0$; di qui, per l'argomento precedente, segue $y = 0$; analogamente $x = 0$. Quindi anche la somma $M_t + M_\pi + M_r$ è diretta; resta da controllare che essa coincida con M. Ciò verrà fatto per induzione sull'ordine di M, in quanto è certamente vero se tale ordine è 1.

Sia allora n l'ordine di M; se $M_t = M_\pi = 0$, per la definizione di questi due moduli si ha necessariamente $M = M_r$, e non vi è nulla da dimostrare. Suppongasi quindi che, per esempio, $M_t \neq 0$, e si ponga $N = M/M_t$. Dico intanto che N è K-modulo canonico, necessariamente di ordine $< n$; per dimostrarlo, basta dimostrare che è libero (il suo t ed il suo π sono definiti in modo ovvio). Ora, se $x \in M$ e $px \in M_t$, ossia $\pi t x \in M_t$, sarà intanto anche $tx \in M_t$, onde $\pi^{-m} t x$ esisterà in M_t per ogni m; allora gli elementi $\pi^{-m} x$ di $M^* = K'M$ apparterranno tutti a $t^{-1} M_t \subseteq M_t^*$; essendo questo un K-modulo finito, tali elementi saranno linearmente dipendenti su K: $\pi^{-m} x = = c_1 \pi^{-m+1} x + \ldots + c_r \pi^{-m+r} x$. L'applicazione di π^m ad ambo i membri dà $x = \pi y$, per un $y \in M$, ovviamente tale che $ty = \pi^{-1} t x \in M_t$; lo stesso ragionamento può essere applicato ad y, ecc.; si ottiene così che $\pi^{-m} x \in M$ per ogni m, onde $x \in M_t$, come voluto.

Stabilito che N è un K-modulo canonico, dimostriamo che non esiste nessun $y \in N$, non nullo, tale che $\pi y = y$. Se tale y esiste, ed è per esempio immagine di $x \in M$, si deve avere $x \notin {}_t M$, ma $\pi x - x \in M_t$, onde $x = \pi x_1$ per qualche $x_1 \in M$. Ma allora $\pi x_1 - x_1 \in M_t$, $x_1 = \pi x_2$, ecc., ossia $x \in M_t$, contro l'ipotesi. L'impossibilità per N di contenere un tale y dimostra, per il 2.11 di MC, che $N_t = 0$; ed allora, per la ricorrenza, sarà $N = N_r \oplus N_\pi$. Ciò comporta che se $x \in M$, per ogni intero positivo m esiste un i_m tale che $\pi^i x \in p^m M + M_t$ per $i > i_m$, ossia $\pi^i x - \pi^i y_m \in p^m M$ per un opportuno $y_m \in M_t$ e per $i > i_m$. Per i elevato si ha $\pi^i x - \pi^i y_{m+1} - (\pi^i x - \pi^i y_m) \in p^m M$, ossia $\pi^i (y_{m+1} - y_m) \in p^m M$, $y_{m+1} - y_m \in p^m M$ (dato che $y_{m+1} - y_m \in M_t$). Ciò significa che $y = \lim_{m \to \infty} y_m$ esiste in M_t, onde $\pi^i (x - y) \in p^m M$ per i elevato, od anche $\lim_{i \to \infty} \pi^i (x - y) = 0$.

Sia M' l'insieme degli $z \in M$ per cui $\lim_{i \to \infty} \pi^i z = 0$; M' è K-modulo canonico, e contiene $M_r \oplus M_\pi$; M' ha ordine $< n$, perchè ha intersezione 0 con M_t; quindi, per la ricorrenza, $M' = M_r' \oplus M_\pi' = M_r \oplus M_\pi$. Si è così dimostrato che $x \in M_t + M' = M_t \oplus M_r \oplus M_\pi$, come voluto. L'unicità di M_t, M_r, M_π è ora ovvia, C. V. D..

17. Nella dimostrazione del 3.1 è contenuta anche la dimostrazione del

3.2 Corollario. *Notazioni come nel* 3.1 *; sia* $x \in M$ *; allora:*
$x \in M_t \oplus M_r$ *se e solo se* $\lim_{n \to \infty} t^n x = 0$*;*
$x \in M_r \oplus M_\pi$ *se e solo se* $\lim_{n \to \infty} \pi^n x = 0$.

Saranno usate le seguenti locuzioni:
M_t = componente *separabile* di M;
M_π = componente *logaritmica* di M;
M_r = componente *radicale* di M;
$M_r + M_\pi$ = componente *inseparabile* di M.

Dai 2.11 e 3.1 di MC si ha poi che:

M_t è un T-modulo canonico logaritmico, che avrà, come tale, una certa dimensione c_t, uguale al suo ordine come K-modulo canonico;

M_π è un Π-modulo canonico logaritmico, che avrà, come tale, una certa dimensione d_π, uguale al suo ordine come K-modulo canonico;

M_r è un Π-modulo canonico radicale equidimensionale, che avrà, come tale, una certa dimensione d_r e una certa codimensione c_r, tali che il suo ordine come K-modulo canonico sia $d_r + c_r$.

Useremo allora (ma non troppo) le seguenti locuzioni:

$d_r + d_\pi =$ *dimensione* di M;

$c_t + c_r =$ *codimensione* di M;

$d_\pi =$ *dimensione logaritmica* di M;

$c_t =$ *codimensione separabile* di M;

$d_r =$ *dimensione radicale* di M;

$c_r =$ *codimensione inseparabile, o radicale,* di M;

$c_r + d_r =$ *ordine radicale* di M;

si intende, quando M si consideri come K-modulo canonico; la nomenclatura di MC per i Π-moduli e i T-moduli canonici resta invariata.

Sia σ un semiomomorfismo del K-modulo canonico M sul K-modulo canonico N; daremo le seguenti definizioni (che non coincidono con quelle di MC, in quanto qui si tratta di K-moduli):

nullità di σ è la differenza ord M — ord σM;

conullità di σ è la differenza ord N — ord σM.

Naturalmente, σM è un K-modulo canonico, e tale è il nucleo di σ; la nullità di σ è anche l'ordine del suo nucleo. Pongasi poi $Q = N \cap K'\sigma M$; Q è l'insieme degli $x \in N$ tali che $p^r x \in \sigma M$ per qualche intero non negativo r. Se l è la lunghezza di una catena massimale di K-moduli canonici fra Q e σM, p^l è il *grado* di σ; così, grado $\sigma = 1$ se e solo se $Q = \sigma M$. Con evidenti significati dei simboli, σ può essere decomposto in $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_\pi$, ed il grado di σ è il prodotto dei gradi di questi tre; in particolare, si porrà:

separabilità di $\sigma =$ grado di σ_t;

coseparabilità di $\sigma =$ grado di σ_π;

inseparabilità di $\sigma =$ grado di $\sigma_r \oplus \sigma_\pi$.

Dal 2.7 di MC, e previa decomposizione di M in $M_t \oplus M_r \oplus M_\pi$, si ha che la lunghezza l è anche la lunghezza di una catena massimale di K-moduli (non necessariamente canonici) fra Q e σM. Per la teoria dei divisori elementari, si può trovare una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ di Q, ed una $y_1, \dots, y_n$ di σM, tali che, indicate con x, y le matrici ad una colonna delle x_i e delle y_i, si abbia $y = Cx$, ove C è matrice diagonale della forma

$$\begin{pmatrix} p^{s_1} & & & & \\ & p^{s_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & p^{s_n} \end{pmatrix},$$

con $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$; allora $l = s_1 + \dots + s_n$, e grado $\sigma = \det C$.

Una *isogenia* (di K moduli canonici) è un omomorfismo la cui nullità e conullità siano 0; M ed N diconsi *isogeni* se vi è una isogenia dell'uno sull'altro; i risultati di MC mostrano che tale relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva, e che M, N sono isogeni se e solo se ciascuno è isomorfo ad un sotto-K-modulo canonico dell'altro. Poichè per i K-moduli liberi vale la teoria dei divisori elementari, si ha:

3.3 Teorema. *Sia M un K-modulo canonico, N un suo sotto-K-modulo canonico; allora N è nucleo di un omomorfismo fra K-moduli canonici se e solo se $N \cap pM = pN$.*

18. La definizione di $N_{r,s}$, per r, s interi primi fra loro, è data a p. 336 di MC; esso è il K-modulo canonico un cui insieme libero di generatori è dato da $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$, colle regole seguenti (cfr. la matrice a p. 323 di MC, e l'asserzione 2 del 3.1 di MC):

$$tx_i = x_{i-1}\,(i > 1)\,;\; tx_1 = py_s\,;\; ty_i = py_{i-1}\,(i > 1)\,;\; ty_1 = x_r\,;$$

e conseguentemente:

$$\pi x_i = px_{i+1}\,(i < r)\,;\; \pi x_r = py_1\,;\; \pi y_i = y_{i+1}\,(i < s)\,;\; \pi y_s = x_1\,.$$

Se si indica con X la matrice ad una colonna trasposta della $(x_1 \dots x_r\; y_1 \dots y_s)$, si può scrivere brevemente

$$tX = C_t\,X, \qquad \pi X = C_\pi\,X,$$

ove:

$$C_t = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & p \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & 1 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 0 & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & p & 0 & & \\ & & & & & p & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & p & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (r \text{ elementi uguali ad } 1 \\ \text{ed } s \text{ elementi uguali a } p) \end{matrix}$$

$$C_\pi = \begin{bmatrix} 0 & p & & & & & & \\ & 0 & p & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 0 & p & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (r \text{ elementi uguali a } p \\ \text{ed } s \text{ elementi uguali ad } 1). \end{matrix}$$

Per $r = s = 1$ queste divengono $C_t = C_\pi = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Definiamo poi $N_{m,0}$ per mezzo delle $C_t = 1$, $C_\pi = p$ (matrici scalari di ordine m); e definiamo $N_{0,n}$ per mezzo delle $C_t = p$, $C_\pi = 1$ (matrici scalari di ordine n).

Naturalmente, la $t\pi = \pi t = p\iota$ dà in tutti i casi:

3.4 $$C_\pi\, C_t^\pi = C_t^\pi\, C_\pi = p.$$

Dal 2.11 di MC si ricava:

3.5 TEOREMA. *Se M è K-modulo canonico di ordine n, tale che $M = M_t$, allora $M \cong N_{0,n} \cong N_{0,1} \oplus \ldots \oplus N_{0,1}$; inoltre $N_{0,1} \cong K$ come K modulo canonico.*

Se M è K-modulo canonico di ordine m, tale che $M = M_\pi$, allora $M \cong N_{m,0} \cong N_{1,0} \oplus \dots \oplus N_{1,0}$.

$N_{r,s}$ (r, s non nulli) è indecomponibile radicale, ed ha ordine $r + s$.

Se M è K-modulo canonico tale che $M = M_r$, allora M è isogeno ad una somma diretta di K-moduli canonici N_{r_i, s_i}, con r_i, s_i primi fra loro per ogni i, ed univocamente determinati.

Siano M, N K-moduli canonici; una *dualità* fra M ed N è un'applicazione K-bilineare $(x, y) \longrightarrow x \circ y$ di $M \times N$ su K, con le seguenti proprietà:

1. $\pi(x \circ ty) = \pi x \circ y$, e $\pi(tx \circ y) = x \circ \pi y$;
2. se $x \circ y = 0$ per ogni y (risp. per ogni x), allora $x = 0$ (risp. $y = 0$).

Una dualità è necessariamente un'applicazione continua di $M \times N$ su K, quest'ultimo dotato della topologia di schiera valutante completa. Diremo poi che M è *duale* di N, secondo la dualità data, se per ogni applicazione K-lineare σ di N su K (necessariamente continua), esiste un $x \in K$, certo unico, tale che $\sigma y = x \circ y$ per ogni $y \in N$. Dai 3.2, 3.3 di MC segue:

3.6 Teorema. *Sia N un K-modulo canonico, e sia M il K-modulo delle applicazioni K-lineari di N su K; se $x \in M$, l'applicazione sia denotata con $y \longrightarrow x \circ y$. Allora M, con le ovvie definizioni di t e π, è un K-modulo canonico duale di N, ed è l'unico a meno di isomorfismi. Inoltre N è il duale di M secondo la dualità $(x, y) \longrightarrow x \circ y$ ($y \in N, x \in M$). In particolare, $N_{1,0}, N_{0,1}, N_{r,s}$ sono duali di, rispettivamente, $N_{0,1}, N_{1,0}, N_{s,r}$.*

Per comodità, indicheremo talvolta con $N_{0,0}$ il K-modulo canonico ridotto al solo elemento 0.

Un *K'-modulo canonico* è un K'-modulo (spazio vettoriale) finito $\mathfrak{M}$, dotato di endomorfismi π e t tali che $\pi t = p\iota$ (ed allora $t\pi = p\iota$), e tale che esista un suo sotto-K-modulo M, stabile per π e t (ossia $\pi M \subseteq M$, $tM \subseteq M$), contenente una base di $\mathfrak{M}$. In tale caso M sarà un K-modulo canonico, e si avrà $\mathfrak{M} = K' M = K' \otimes_K M$; questa può essere presa come definizione. La topologia di M dà una topologia K-lineare di $\mathfrak{M}$, indipendente dalla scelta di M, rispetto alla quale $\mathfrak{M}$ è completo; un sistema di intorni dello 0 è dato dai $p^n M$. I semiomomorfismi dei K'-moduli canonici sono definiti in modo analogo a quelli dei K-moduli canonici; i semiomomorfismi dei K-moduli canonici sui K'-moduli canonici sono le applicazioni K-semilineari che commutano con π e t; essi sono necessariamente continui; la dimensione (come spazio vettoriale) di un K'-modulo canonico sarà chiamata il suo *ordine*; le altre definizioni (codimensione separabile, dimensione logaritmica, ecc.) sono trasferite direttamente dalle analoghe dei K-moduli canonici. Si ha ovviamente:

3.7 Teorema. *Siano M, N K-moduli canonici, e siano $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ K'-moduli* *canonici; si abbiano isomorfismi di M su $\mathcal{M}$ ed N su $\mathcal{N}$, di conullità 0 (ossia tali che le immagini di M, N contengano basi di $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$). Allora un omomorfismo σ di M su N è una isogenia se e solo se è un isomorfismo su tutto $\mathcal{N}$ il σ' che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\sigma'"] & \mathcal{N}. \end{tikzcd}$$

Si ha poi $\mathcal{M} = \mathcal{M}_t \oplus \mathcal{M}_r \oplus \mathcal{M}_\pi$ (con evidente significato dei simboli); inoltre $\mathcal{M}_t \cong \mathcal{N}_{0,n}$, e *$\mathcal{M}_\pi \cong \mathcal{N}_{m,0}$, per n, m opportuni. Gli $\mathcal{M}_t$, $\mathcal{M}_r$, $\mathcal{M}_\pi$ sono unicamente determinati; inoltre, $\mathcal{M}_r$ è isomorfo alla somma diretta di K'-moduli canonici del tipo $\mathcal{N}_{r_i, s_i}$, con r_i, s_i primi fra loro e unicamente determinati. Infine, gli $\mathcal{N}_{r,s}$, $\mathcal{N}_{0,1}$, $\mathcal{N}_{1,0}$ sono irriducibili, ossia privi di sotto-K'-moduli canonici propri.*

Le definizioni di *dualità* e *duale*, per i K'-moduli canonici, sono analoghe a quelle dei K-moduli canonici. Ovviamente, e da 3.6:

3.8 TEOREMA. *Per i K'-moduli canonici vale l'analogo di 3.6; siano poi $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ K'-moduli canonici duali l'uno dell'altro secondo la dualità $\circ$; sia M un sotto-K-modulo canonico di $\mathcal{M}$, contenente una base di $\mathcal{M}$, e sia N l'insieme degli $y \in \mathcal{N}$ tali che $x \circ y \in K$ per ogni $x \in M$. Allora N è un sotto-K-modulo canonico di $\mathcal{N}$ e contiene una base di $\mathcal{N}$; $\circ$ è una dualità fra M ed N che rende questi duali l'uno dell'altro. La $\circ$ è un'applicazione continua di $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ su K', quest'ultimo dotato della topologia di corpo valutato completo.*

19. Sia k un corpo di caratteristica p, e siano A, B k-moduli, certo liberi, completi rispetto a topologie k-lineari. Si consideri, nel k-modulo $A \otimes B = A \otimes_k B$, l'insieme dei sottomoduli del tipo $U \otimes B + A \otimes V$, ove U, V percorrono sistemi di intorni dello 0, del tipo descritto, in A, B rispettivamente. Questi insiemi hanno intersezione 0 (vedasi l'appendice a questo capitolo), cosicchè essi formano un sistema di intorni dello 0 per una topologia k-lineare di $A \otimes B$; il completamento di $A \otimes B$ in tale topologia sarà indicato con $A \mathbin{\overline{\times}}_k B$ o $A \mathbin{\overline{\times}} B$, e chiamato il *prodotto tensoriale completo di A per B* (*su k*); la topologia di $A \mathbin{\overline{\times}} B$ è ora data dagli $U \mathbin{\overline{\times}} B + A \mathbin{\overline{\times}} V$.

Suppongasi che A, B siano anche k algebre (commutative, unitarie, dotate di identità); si indichi con μ_A l'applicazione k-bilineare $(a, a') \rightarrow aa'$ di $A \times A$ su A, e analogamente per B (nel seguito si scriverà μ in luogo di μ_A quando l'A possa essere sottinteso); se A, B sono algebre topologiche, ossia se μ_A e μ_B sono applicazioni continue, anche $A \otimes B$ è k algebra topologica, se si identifica k con $k(1 \otimes 1)$, mediante il $\mu_{A \otimes B} = \mu_A \otimes \mu_B$; questo μ può essere esteso in modo unico, bilinearmente e continuamente, ad $A \mathbin{\overline{\times}} B$, e rende questa un'algebra topologica. Se le topologie di A, B erano A-lineare e B-lineare rispettivamente, quelle di $A \otimes B$ ed $A \mathbin{\overline{\times}} B$ risultano $A \otimes B$-lineare ed $A \mathbin{\overline{\times}} B$ lineare rispettivamente. Se A, B erano i completamenti di k-moduli (o k-algebre) A', B', allora $A \mathbin{\overline{\times}} B$ è il completamento di $A' \otimes B'$. Tutte le precedenti asserzioni sono di facile dimostrazione, e vertono sul fatto che i k-moduli sono liberi, e che le applicazioni $A' \otimes B' \longrightarrow A \otimes B$ sono isomorfismi.

Sia A come descritto all'inizio (ossia non necessariamente un'algebra). Diremo *coprodotto* in A un omomorfismo continuo $\mathbf{P}$, o $\mathbf{P}_A$, di k moduli, di A su $A \mathbin{\overline{\times}} A$, che soddisfi la seguente condizione di *coassociatività*: $(\iota \otimes \mathbf{P})\mathbf{P} = (\mathbf{P} \otimes \iota)\mathbf{P}$; più chiaramente, deve essere commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[d, "\mathbf{P}"] & & A \arrow[d, "\mathbf{P}"] \\
A \mathbin{\overline{\times}} A \arrow[d, shift right, "\iota"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{P}"] & & A \mathbin{\overline{\times}} A \arrow[d, shift right, "\mathbf{P}"'] \arrow[d, shift left, "\iota"] \\
(A \mathbin{\overline{\times}} A \mathbin{\overline{\times}} A) \arrow[rr, "\iota"] & & (A \mathbin{\overline{\times}} A \mathbin{\overline{\times}} A)
\end{tikzcd}$$

Il coprodotto $\mathbf{P}$ è *commutativo* se è simmetrico rispetto allo scambio dei fattori in $A \mathbin{\overline{\times}} A$. Una *coidentità* per $\mathbf{P}$ è un'applicazione k-lineare continua $\varepsilon = \varepsilon_A$ di A su k (k dotato della topologia discreta) tale che $(\varepsilon \otimes \iota)\mathbf{P} = (\iota \otimes \varepsilon)\mathbf{P} = \iota$; se un tale ε esiste, $\mathbf{P}$ è un isomorfismo di k moduli. Se A è anche k-algebra topologica, si identificherà k con $k 1_A \subseteq A$, ed ε verrà considerato come un'applicazione k-lineare continua di A su A, tale che $\varepsilon^2 = \varepsilon$, soddisfacente la

3.9 $$\mu_A(\iota \otimes \varepsilon)\mathbf{P} = \mu_A(\varepsilon \otimes \iota)\mathbf{P} = \iota .$$

(Tali ε vengono chiamati «augmentazioni» dai raffinati). Sempre se A è k-algebra topologica, diremo che un endomorfismo continuo ϱ di A, come k-algebra, è un'*inversione* rispetto a $\mathbf{P}$ ed ε se soddisfa la:

3.10 $$\mu_A(\iota \otimes \varrho)\mathbf{P} = \mu_A(\varrho \otimes \iota)\mathbf{P} = \varepsilon .$$

Sia R una k-algebra topologica e completa rispetto ad una topologia k-lineare numerabile; sia $\mathbf{P}$ un coprodotto in R, commutativo e dotato di una coidentità ε; diremo che R è una *iperalgebra* su k se tanto $\mathbf{P}$ quanto

ε sono omomorfismi di k-algebre, e se inoltre $\mathbf{P}1 = 1 \mathbin{\overline{\times}} 1$; l'esistenza di ε comporta, come si è visto, che $\mathbf{P}$ è un isomorfismo. Si noti che il richiedere che $\mathbf{P}$ sia omomorfismo di algebre è come richiedere che esso commuti con $\mu = \mu_R$, ossia che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
(R \mathbin{\overline{\times}} R) \arrow[rr, "\iota"] \arrow[d, "\mu"'] & & (R \mathbin{\overline{\times}} R) \arrow[d, "\mathbf{P}"] \\
R \arrow[d, "\mathbf{P}"'] & & R \mathbin{\overline{\times}} R \mathbin{\overline{\times}} R \mathbin{\overline{\times}} R \arrow[d, "\mu"] \\
(R \mathbin{\overline{\times}} R) \arrow[rr, "\iota"] & & (R \mathbin{\overline{\times}} R)
\end{tikzcd}$$

Analogamente, il richiedere che ε sia omomorfismo di algebre significa richiedere che ε commuti con $\mu : \mu(\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon\mu$. È poi facile vedere che ε, oltre a commutare con μ, commuta anche con $\mathbf{P}$, ossia $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\, \mathbf{P} = \mathbf{P}\varepsilon$; lo stesso dicasi per l'inversione ϱ, quando esiste. Il nucleo di ε in R sarà costantemente indicato con R^+, cosicchè $R = k \oplus R^+$. Il 3.9 comporta subito il

3.11 LEMMA. *Se $x \in R^+$, si ha $\mathbf{P}x = 1 \mathbin{\overline{\times}} x + x \mathbin{\overline{\times}} 1 +$ (elemento di $R^+ \mathbin{\overline{\times}} R^+$).*

Ci interesseranno in particolare, in questo capitolo, le iperalgebre *finite*, ossia a base finita su k, e necessariamente a topologia discreta; quelle *discrete*, ossia a topologia discreta e base numerabile; e quelle *linearmente compatte*; queste ultime sono le somme dirette complete, come k-moduli, di una infinità numerabile di k-moduli discreti isomorfi a k; esiste cioè una *pseudobase* numerabile $\{x_1, x_2, \ldots\}$ di R tale che ogni elemento di R possa porsi, in un sol modo, sotto la forma $\sum_1^\infty{}_i c_i x_i$, con $c_i \in k$; e tale che ogni serie di questo tipo sia elemento di R. Una R linearmente compatta può anche essere considerata come il limite inverso, con la sua topologia naturale di limite inverso, dei k-moduli finiti e discreti R_n di base $\{x_1, \ldots, x_n\}$, con gli omomorfismi $\sigma_{n,m} : R_n \longrightarrow R_m$ $(n > m)$ dati da $\sigma_{n,m}\, x_i = x_i$ se $i \leq m$; $= 0$ se $i > m$.

20. Sia $\varkappa$ un isomorfismo di k su k; un *$\varkappa$-semiomomorfismo* σ dell'iperalgebra R sull'iperalgebra S è un $\varkappa$ semiomomorfismo continuo di algebre che applichi 1 su 1 e che commuti con $\mathbf{P}$ ed ε: $\mathbf{P}_S\, \sigma x = (\sigma \otimes \sigma)\, \mathbf{P}_R\, x$; $\varkappa\varepsilon_R\, x = \sigma\varepsilon_R\, x = \varepsilon_S\, \sigma x$, per $x \in R$. Ciò vale, in particolare, per gli omomorfi-

smi; l'applicazione $\pi: x \longrightarrow \pi x = x^p$ è sempre un π-semiendomorfismo di un'iperalgebra.

Se σ, τ sono $\varkappa$-semiomomorfismi di R su S, la loro *somma* è il $\sigma + \tau$ definito da:

3.12 $$\sigma + \tau = \mu_S (\sigma \otimes \tau) \mathbf{P}_R ;$$

quando ha senso, è vera la relazione distributiva:

$$\nu (\sigma + \tau) = \nu\sigma + \nu\tau ; \qquad (\sigma + \tau)\nu = \sigma\nu + \tau\nu .$$

L'omomorfismo ε_R di R su $k \subseteq S$ è lo zero della somma 3.12; infatti

$$\varepsilon_R + \tau = \mu_S (\tau \otimes \tau) (\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P}_R = \tau\mu_S (\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P}_R = \tau\iota_R = \tau,$$

per 3.9. Invece il $-\sigma$ è dato da $\varrho_S \sigma = \sigma\varrho_R$ (se esiste ϱ_S o ϱ_R):

$$\sigma + \varrho_S \sigma = \mu_S(\iota \otimes \varrho_S) (\sigma \otimes \sigma) \mathbf{P}_R = \mu_S (\iota \otimes \varrho_S) \mathbf{P}_S \sigma = \varepsilon_S \sigma = 0$$

per 3.10, e

$$\sigma + \sigma\varrho_R = \mu_S (\sigma \otimes \sigma) (\iota \otimes \varrho_R) \mathbf{P}_R = \sigma\mu_R (\iota \otimes \varrho_R) \mathbf{P}_R = \sigma\varepsilon_R = 0 .$$

Quindi gli omomorfismi di R su S formano un gruppo additivo. Se ne deduce anche:

3.13 Teorema. *Se un'iperalgebra ha un'inversione ϱ, ne ha una sola; inoltre $\varrho^2 = \iota$.*

Dim. Intanto, la $\iota = -(-\iota)$ si scrive $\iota = (\iota\varrho)\varrho$, donde $\varrho^2 = \iota$. Se ϱ' è un'altra inversione, la relazione $-\iota = -\iota$ si scrive $\iota\varrho = \iota\varrho'$; quindi $\varrho' = \varrho$, C. V. D..

È ben noto che la teoria della dualità fra k-moduli finiti, o discreti, o linearmente compatti (gli ultimi due casi non necessariamente ristretti al caso numerabile) è perfettamente simmetrica, nel senso seguente: se M è k-modulo finito (discreto, linearmente compatto), e se N è l'insieme delle applicazioni k lineari continue di M su k, e se per $y \in N$ si indica con $x \longrightarrow y \circ x$ la corrispondente applicazione di M, allora: se M è finito, N è finito; se M è linearmente compatto, la topologia discreta di N è l'unica topologia k-lineare che rende tutte le $y \longrightarrow y \circ x$ continue; se M è discreto, la topologia linearmente compatta di N è la meno fina fra le k-lineari (contando la discreta come la più fina) che rende continue tutte le $y \longrightarrow y \circ x$. Ed in tutti i casi M è legato ad N come N ad M; inoltre, in questi casi, un diagramma commutativo può essere dualizzato, dando luogo ad un diagramma commutativo; la duale (o trasposta) di una successione esatta è esatta, ecc.. Infine, ed è importante, dato che uno dei moduli è discreto in ogni caso, la $(y, x) \longrightarrow y \circ x$ è un'applicazione continua di $N \times M$ su k. Nel Cap. 4 vedremo tipi di dualità più complicati. Si ha allora:

3.14 TEOREMA. *Sia R un'iperalgebra finita (risp. discreta, linearmente compatta); sia D il k-modulo duale di R; si definiscano $\mathbf{P}_D$ e μ_D come duali di μ_R, $\mathbf{P}_R$, ossia: $\mu_D (d \,\overline{\times}\, \delta) \circ x = (d \,\overline{\times}\, \delta) \circ \mathbf{P}_R x$, $\mathbf{P}_D d \circ (x \,\overline{\times}\, y) = d \circ \mu_R (x \,\overline{\times}\, y)$, per $x, y \in R$ arbitrari; si definisca poi ε_D mediante la $\varepsilon_D d = d \circ 1$. Allora D è un'iperalgebra, detta* duale *di R; ed R è duale di D. Se R ha l'inversione ϱ_R, D ha la ϱ_D duale di ϱ_R: $\varrho_D d \circ x = d \circ \varrho_R x$.*

DIM. Si controlla subito che $\mathbf{P}_D$ è un coprodotto commutativo e coassociativo, e μ_D un prodotto commutativo e associativo. Il diagramma del n^0 19, che esprime la commutatività di μ_R con $\mathbf{P}_R$, dà subito, per dualità, quella di $\mathbf{P}_D$ con μ_D.

Mostriamo che D possiede identità, e precisamente l' 1_D tale che $1_D \circ x = \varepsilon_R x$; è infatti $1_D d \circ x = (1 \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P} x = d \circ \mu_R (\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P} x$ per 3.9; quindi $1_D d = d$, come richiesto.

Mostriamo che $\mathbf{P}_D 1 = 1 \,\overline{\times}\, 1$; e infatti, $\mathbf{P}_D 1 \circ (x \,\overline{\times}\, y) = 1 \circ xy = \varepsilon_R (xy) = (1 \circ x)(1 \circ y) = (1 \,\overline{\times}\, 1) \circ (x \,\overline{\times}\, y)$. Passiamo a verificare le proprietà della ε_D definita all'enunciato: intanto $\varepsilon_D 1_D = 1_D \circ 1_R = \varepsilon_R 1_R = 1$, onde ε_D è su tutto k, ed è automodulo. Poi, $\varepsilon_D (dd') = dd' \circ 1 = (d \,\overline{\times}\, d') \circ \mathbf{P} 1 = (d \,\overline{\times}\, d') \circ (1 \,\overline{\times}\, 1) = (\varepsilon_D d)(\varepsilon_D d')$, ed ε_D è omomorfismo di algebre. Infine, la proprietà 3.9 per ε_D si verifica così: $\mu_D (\iota \otimes \varepsilon) \mathbf{P} d \circ x = \mathbf{P} d \circ (x \,\overline{\times}\, 1) = d \circ x$, donde la 3.9. Per il ϱ_D, basta dualizzare il 3.10, C. V. D..

Benchè il 3.14 si riferisca solo ad iperalgebre che siano finite, o discrete, o linearmente compatte, esso ovviamente dà informazioni anche per quelle iperalgebre che siano prodotti tensoriali completi di finite, discrete, e linearmente compatte (in numero finito). Da notare che finita $\overline{\times}$ finita = finita, finita $\overline{\times}$ discreta = discreta, finita $\overline{\times}$ linearmente compatta = linearmente compatta, discreta $\overline{\times}$ discreta=discreta, linearmente compatta $\overline{\times}$ linearmente compatta = linearmente compatta, cosicchè l'unico caso nuovo è il discreta $\overline{\times}$ linearmente compatta. La struttura del prodotto tensoriale completo di due iperalgebre, $R = S \,\overline{\times}\, V$ è: $\mu_R = \mu_S \,\overline{\times}\, \mu_V$, $\mathbf{P}_R = \mathbf{P}_S \,\overline{\times}\, \mathbf{P}_V$, ecc..

21. Sia R un'iperalgebra che sia prodotto tensoriale completo di iperalgebre finite, discrete, linearmente compatte, e sia D la sua duale; definiamo l'applicazione k-bilineare $(d, x) \longrightarrow dx$ di $D \times R$ su R per mezzo delle

$$3.15 \qquad \delta \circ dx = \delta d \circ x \quad \text{per ogni } \delta \in D.$$

Naturalmente vi è anche un'applicazione analoga $(x, d) \longrightarrow xd$ di $R \times D$ su D.

3.16 TEOREMA. *Nelle ipotesi precedenti, si ha :* $d'(dx) = (d'd)x$; $1_D x = x$; $d \in D^+$ *se e solo se* $d\,1_R = 0$; $d \circ x = \varepsilon_R(dx)$; $\mathbf{P}(dx) = (1 \,\overline{\times}\, d)\,\mathbf{P}\,x = (d \,\overline{\times}\, 1)\,\mathbf{P}\,x$.

DIM. Per la prima relazione: $\delta \circ d'(dx) = \delta d' \circ dx = \delta d'd \circ x = \delta \circ (d'd)x$. La seconda è conseguenza immediata di 3.15. Per la terza: se $d\,1_R = 0$, è $d \circ 1 = 1 \circ d\,1_R = 0$, onde $d \in D^+$; se poi $d \in D^+$, si ha $\delta d \in D^+$ per ogni $\delta \in D$, onde $\delta d \circ 1 = 0$, $\delta \circ d\,1_R = 0$. Per la quarta: $d \circ x = 1d \circ x = 1 \circ dx = \varepsilon_R(dx)$. Per la quinta, occorre intanto osservare bene il significato del secondo o terzo membro: nel secondo, $1 \,\overline{\times}\, d$ è un elemento dell'iperalgebra $D \,\overline{\times}\, D$, che è duale di $R \,\overline{\times}\, R$; quindi $(1 \,\overline{\times}\, d)\,\mathbf{P}\,x$ esiste in base alla 3.15; ciò non significa che se $\mathbf{P}\,x = \Sigma_i x_i \,\overline{\times}\, y_i$ si debba avere $(1 \,\overline{\times}\, d)\,\mathbf{P}\,x = \Sigma_i x_i \,\overline{\times}\, dy_i$: per poter asserire questo occorrerebbe sapere che la $z \longrightarrow (1 \,\overline{\times}\, d)\,z$ è continua, cosa che non sappiamo ancora. Passiamo alla dimostrazione dell'ultima relazione: $(\delta \,\overline{\times}\, \delta') \circ \mathbf{P}(dx) = \delta\delta' \circ dx = \delta\delta'd \circ x = (\delta \,\overline{\times}\, \delta'd) \circ \mathbf{P}\,x = (\delta \,\overline{\times}\, \delta')(1 \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}\,x = (\delta \,\overline{\times}\, \delta') \circ (1 \,\overline{\times}\, d)\,\mathbf{P}\,x$, C. V. D..

L'ultima delle 3.16 si esprime col dire che d, come applicazione k-lineare di R in sè, è *invariante*. La continuità della $(d, x) \longrightarrow dx$ non solo in x, ma in (d, x), ha luogo in un importante caso particolare che ora descriviamo, e quindi anche in tutti i casi ottenuti da esso mediante prodotti tensoriali completi:

3.17 LEMMA. *Suppongasi che quella, fra le D, R, che è discreta sia limite diretto di iperalgebre finite, mediante isomorfismi di iperalgebre; e che quindi quella che è linearmente compatta sia limite inverso di iperalgebre finite mediante omomorfismi di iperalgebre. Allora l'applicazione $(d, x) \longrightarrow dx$ di $D \times R$ su R è continua.*

DIM. Suppongasi dapprima che D sia linearmente compatta ed R discreta. L'applicazione è allora continua in x per ogni d, ed uniformemente rispetto a d, onde basta dimostrare che, per ogni x, essa è continua in d. Sia D limite inverso di $D_i \longleftarrow D_j$ $(j > i)$, cogli omomorfismi τ_{ji} di D_j su tutto D_i, e cogli omomorfismi τ_i di D su tutto D_i; sia R limite diretto di $R_i \longrightarrow R_j$ $(i < j)$, colle immersioni di R_i in R_j; e sia R_i duale di D_i. Sia x in un dato R_i; dimostreremo che $dx = 0$ non appena $\tau_i d = 0$; e infatti, $\delta \circ dx = \delta d \circ x = (\delta \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}x$; ora, $\mathbf{P}x \in R_i \otimes R_i$ per ipotesi, onde $(\delta \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}x = 0$.

Suppongasi ora invece che D sia discreta ed R linearmente compatta; si definiscano analogamente le $D_i \longrightarrow D_j$ $(i < j)$ ed $R_i \longleftarrow R_j$ $(i < j)$, e gli omomorfismi τ_{ji} di R_j su tutto R_i, e τ_i di R su tutto R_i. In questo caso basta dimostrare che l'applicazione è continua in x, per ogni d. Sia $d \in D_i$, e si scelga x nel nucleo J di τ_i; dico che anche $dx \in J$. Occorre quindi dimostrare che $\delta \circ dx = 0$ quando $\delta \in D_i$; ora, di nuovo si ha $\delta \circ dx = (\delta \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}\, x$, e questa volta $\mathbf{P}\, x \in R \,\overline{\times}\, J + J \,\overline{\times}\, R$, onde ancora $\delta \circ dx = 0$, C. V. D..

3.18 TEOREMA. *Si ha* $d\,(xy) = \mu_R\,(\mathbf{P}\, d)\;(x \,\overline{\times}\, y)$*; se poi* σ *è applicazione* k*-lineare continua di* R *su se stesso, che è invariante, ossia tale che* $\mathbf{P}\,\sigma\, x = (\sigma \otimes \iota)\, P\, x = (\iota \otimes \sigma)\,\mathbf{P}\, x$*, esiste una* $d \in D$ *tale che* $\sigma x = dx$ *per ogni* $x \in R$.

DIM. Si ha $\delta \circ d\,(xy) = \delta d \circ xy = \mathbf{P}\,(\delta d) \circ (x \,\overline{\times}\, y) = (\mathbf{P}\,\delta)\,(\mathbf{P}\, d) \circ (x \,\overline{\times}\, y) = \mathbf{P}\,\delta \circ (\mathbf{P}\, d)\,(x \,\overline{\times}\, y) = \delta \circ \mu_R\,(\mathbf{P}\, d)\,(x \,\overline{\times}\, y)$; ciò dimostra la prima asserzione. Per la seconda, dato σ, si trovi la $d \in D$ tale che $d \circ x = \varepsilon_R\, \sigma\, x$ per ogni $x \in R$; allora $\delta \circ dx = \delta d \circ x = (\delta \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}\, x = (\varepsilon \otimes \varepsilon)\;(\delta \,\overline{\times}\, d)\;\mathbf{P}\, x = (\varepsilon\delta \otimes \iota)(\iota \otimes \varepsilon d)\,\mathbf{P}\, x = (\varepsilon\delta \otimes \iota)(\iota \otimes \varepsilon\sigma)\,\mathbf{P} x = (\varepsilon\delta \otimes \varepsilon)(\iota \otimes \sigma)\,\mathbf{P} x = (\varepsilon\delta \otimes \varepsilon)\;\mathbf{P}\,\sigma\, x = (\delta \,\overline{\times}\, 1) \circ \mathbf{P}\,\sigma x = \delta \circ \sigma\, x$, onde $dx = \sigma x$, C. V. D..

L'utilità dell'applicazione $(d, x) \longrightarrow dx$ sta nel seguente risultato, che è l'analogo degli sviluppi in serie di Taylor e di Mac Laurin:

3.19 TEOREMA. *Sia* D *un'iperalgebra discreta* (*o finita*) *con base* $\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$*; sia* R *la duale di* D*, con la pseudobase* (*o base*) *duale* $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ (*ossia* $d_i \circ x_j = \delta_{ij}$). *Per* $y \in R$ *si ha allora*

$$\mathbf{P}\, y = \sum_i d_i\, y \,\overline{\times}\, x_i\,, \qquad y = \sum_i (\varepsilon_R\, d_i\, y)\, x_i\,.$$

DIM. Infatti $(d_r \,\overline{\times}\, d_s) \circ \sum_i d_i\, y \,\overline{\times}\, x_i = (\sum_i d_r \circ d_i\, y)\, \delta_{si} = d_r \circ d_s y = d_r\, d_s \circ y = (d_r \,\overline{\times}\, d_s) \circ \mathbf{P} y$, che è la prima relazione. La seconda è conseguenza della prima e di 3.9, C. V. D..

22.

3.20 LEMMA. *Sia* R *un'iperalgebra finita, o discreta, o linearmente compatta; sia* D *l'iperalgebra duale di* R*, e suppongasi che la* $(d, y) \longrightarrow dy$ *sia continua in* y *per ogni* $d \in D$. *Sia* S *una sottoiperalgebra di* R*, e sia* J *l'ideale chiuso di* R *generato da* S^+. *Per un* $d \in D$*, si ha allora* $d \circ J = 0$ *se e solo se l'applicazione* $y \longrightarrow dy$ *è* S*-lineare.*

DIM. Sia $d \circ J = 0$; si ha, per $\delta \in D$: $\delta \circ d\,(xy) = d\delta \circ xy = d \circ \delta\,(xy) = d \circ \mu_R\,(\mathbf{P}\,\delta)\,(x \,\overline{\times}\, y)$ per 3.18. Se per esempio $\mathbf{P}\,\delta = \Sigma_i\, \alpha_i \,\overline{\times}\, \beta_i$, sarà $\delta \circ d\,(xy) = d \circ \Sigma_i\,(\alpha_i x)\;(\beta_i y)$; supposto $x \in S$, sarà $\alpha_i x \equiv \alpha_i \circ x$ (mod S^+), onde $(\alpha_i x)\;(\beta_i y) \equiv (\alpha_i \circ x)\;(\beta_i y)$ (mod J), e pertanto $\delta \circ d\,(xy) = d \circ \Sigma_i(\alpha_i \circ x)\,(\beta_i y) = \Sigma_i(\alpha_i \circ x)\;(\beta_i \circ dy) = \mathbf{P}\,\delta \circ (x \,\overline{\times}\, dy) = \delta \circ x\, dy$, donde appunto $d\,(xy) = x\, dy$.

Reciprocamente, se questa è verificata, per $x \in S^+$ ed $y \in R$ si ha $d \circ xy = 1 \circ d(xy) = 1 \circ x\,dy = 0$, in quanto $x\,dy \in J \subseteq R^+$; perciò $d \circ J = 0$, C. V. D..

In un'iperalgebra R vi sono certe applicazioni per le sottoiperalgebre e per certi ideali. Anzitutto notiamo che un ideale chiuso J di R è nucleo di un omomorfismo di iperalgebre se e solo se

3.21 $$\varepsilon J = 0 \ (\textit{ossia}\ J \subseteq R^+) \ \textit{e}\ \mathbf{P} J \subseteq R \,\overline{\times}\, J + J \,\overline{\times}\, R\,;$$

invece una sottoalgebra chiusa S di R è sottoiperalgebra se e solo se $1 \in S$ e $\mathbf{P} S \subseteq S \,\overline{\times}\, S$. Sia S una sottoiperalgebra chiusa di R; l'ideale chiuso J generato da S^+ soddisfa alle 3.21; la chiusura dell'unione delle sottoiperalgebre U di R tali che $U^+ \subseteq J$ è una iperalgebra chiusa S^* contenente S, e univocamente determinata da S; S^* è la massima U con la proprietà descritta, ed S^{*+} genera ancora J; abbiamo così introdotto l'applicazione $S \longrightarrow S^*$.

Sia invece J dato a priori, chiuso, e con le proprietà 3.21; fra le sottoiperalgebre chiuse S di R tali che $S^+ \subseteq J$ ve ne è una massima, sia essa S; e l'ideale chiuso generato da S^+ è un $J^* \subseteq J$; questa è l'applicazione $J \longrightarrow J^*$. L'iperalgebra S, che coincide con S^*, sarà detta il *nocciolo* di J (e di J^*); è chiaro che $J = J^*$ se e solo se J è l'ideale chiuso generato da una S^+; la condizione acchè $S = S^*$ (a parte quella ovvia di essere il nocciolo di qualche J) è data nel prossimo 3.22. Si vede subito che $S^{**} = S^*$, $J^{**} = J^*$, e che la corrispondenza $S \longrightarrow J$ è biunivoca fra le S per le quali $S = S^*$ ed i J per i quali $J = J^*$.

Nell'enunciato seguente, occorre tenere presente che se D è l'iperalgebra duale di R, l'ortogonale di un J che soddisfi le 3.21 è una sottoiperalgebra chiusa E di D; mentre l'ortogonale di una sottoiperalgebra S di R è un ideale chiuso C di D che soddisfa le analoghe di 3.21. Ed allora, nell'enunciato seguente l'espressione $S \longrightarrow J$ sta ad indicare che J è l'ideale chiuso generato da S^+; invece la $A \dashv\!\longrightarrow B$ sta ad indicare che B è l'ortogonale di A.

3.22 LEMMA. *Siano R, D iperalgebre duali l'una dell'altra, ciascuna di esse essendo finita, o discreta, o linearmente compatta; allora, nelle notazioni ora introdotte:*

1. *Se S è sottoiperalgebra chiusa di R, vale la*

$$S \longrightarrow J \dashv\!\longrightarrow E \longrightarrow C \dashv\!\longrightarrow S^*;$$

2. *Se J è ideale chiuso di R, che soddisfi le 3.21, vale la*

$$J \dashv\!\longrightarrow E \longrightarrow C \dashv\!\longrightarrow S \longrightarrow J^*;$$

3. *Se* $J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E$, *si ha* $J = J^*$ *se e solo se* $E = E^*$;

4. *Nelle notazioni di* 1, E *è l'insieme delle* $d \in D$ *che, come applicazioni* k-*lineari di* R *in sè, sono* S-*lineari*; S^* *è l'insieme degli* $x \in R$ *tali che* $dx = 0$ *per ogni* $d \in E^+$.

DIM. La 4 è conseguenza di 1 e del 3.20. Dimostriamo la 3, supponendo vere le 1 e 2: se $J = J^*$, la 2 può essere così completata: $J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E$; ma la 1, partendo da E anzichè S, dà $E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E^*$; quindi $E = E^*$. Se invece $E = E^*$, la 2 può essere così completata, tenendo presente la 1 scritta per E: $E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J^*$, donde $J = J^*$.

Per dimostrare la 1: sia $S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S'$; allora S' è ortogonale ad E^+, onde $S'^+ \subseteq J$; se poi $S'^+ \subseteq S''^+ \subseteq J$, con S'' iperalgebra, vale la $S'' \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S'$; qui, S'' è ortogonale ad E^+, ed è iperalgebra; quindi S'' è ortogonale a C, ossia $S'' \subseteq S'$; ciò mostra che $S' = S^*$.

Per dimostrare la 2: sia $J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J'$; allora J' è generato da S^+, cosicchè per dimostrare che $J' = J^*$ basta dimostrare che S è la massima iperalgebra tale che $S^+ \subseteq J$; intanto S^+ è contenuta in J perchè è ortogonale ad E; poi, se $S'^+ \subseteq J$, S'^+ è ortogonale ad E e quindi a C, onde $S' \subseteq S$, C. V. D..

Il 3.22 mostra che se $J = J^*$, vale la

$$J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} \dots,$$

e la $E^* = E$, $C^* = C$, $S^* = S$; mentre se $S = S^*$ vale la

$$S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow C \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} S \longrightarrow J \mathrel{-\!|\!\!\longrightarrow} E \longrightarrow \dots,$$

e la $J^* = J$, $E^* = E$, $C^* = C$.

OSSERVAZIONE. Vedremo in seguito (cfr. 3.38) che è $J^* = J$ per le iperalgebre che a noi interessano; è stato però dimostrato da G. Gemignani che tale relazione vale per tutte le iperalgebre finite, o discrete, o linearmente compatte.

23. Si è osservato nel n⁰ 20 che ogni iperalgebra R possiede il π-semiendomorfismo π; pertanto, se R è discreta, o finita, o linearmente compatta, la sua duale D possiede il π^{-1}-semiendomorfismo $t = t_D$ definito da:

3.23 $$\pi\,(td \circ x) = d \circ \pi x\,;$$

naturalmente, scambiando i ruoli di D ed R si ottiene il $t = t_R$: $\pi\,(d \circ tx) = = \pi\, d \circ x$. Si ha intanto:

3.24 $$\pi\,[(td)\,x] = d\pi x, \quad t\,[(\pi d) x] = dtx\,;$$

infatti, per 3.15, $\delta \circ d\pi x = \delta d \circ \pi x = \pi [t(\delta d) \circ x] = \pi [t\delta \circ (td)\, x] = \delta \circ \pi [(td)\, x]$, e $\delta \circ dtx = \delta d \circ tx = \pi^{-1} [\pi (\delta d) \circ x] = \pi^{-1} [\pi\delta \circ (\pi d)\, x] = \delta \circ t [(\pi d)\, x]$. Poi :

3.25 TEOREMA. *Se R è iperalgebra finita, o discreta, o linearmente compatta, si ha $t_R \pi_R = \pi_R t_R = p\iota_R$.*

DIM. Pongasi $\mu^h = \mu (\iota \otimes \mu) (\iota \otimes \iota \otimes \mu) \ldots (\underbrace{\iota \otimes \iota \otimes \ldots \otimes \iota}_{h-1} \otimes \mu)$, e $\mathbf{P}^h = (\underbrace{\iota \otimes \iota \otimes \ldots \otimes \iota}_{h-1} \otimes \mathbf{P}) \ldots (\iota \otimes \iota \otimes \mathbf{P}) (\iota \otimes \mathbf{P})\, \mathbf{P}$; allora $p\iota = \mu^p\, \mathbf{P}^p$ per 3.12. Sia $\{y_i\}$ una base o pseudobase di R, e suppongasi scritto $\mathbf{P}^p x$ come combinazione lineare, finita o no, degli $y_{n_1} \,\overline{\times}\, \ldots \,\overline{\times}\, y_{n_p}$; è chiaro allora che i coefficienti di prodotti che differiscono solo per l'ordine dei fattori sono uguali; per un dato insieme $\{n_1, \ldots, n_p\}$, il numero di tali prodotti è o 1, quando $n_1 = \ldots = n_p$, ovvero è divisibile per p. Pertanto esistono dei $c_i \in k$ tali che $\mu^p\, \mathbf{P}^p x = \Sigma_i\, c_i\, x_i^p$, e che $(d \,\overline{\times}\, \ldots \,\overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}^p x = \Sigma_i\, c_i\, (d \circ x_i)^p$.

Ciò premesso, si ha : $d \circ t\pi x = \pi^{-1} (\pi d \circ \pi x) =$
$\pi^{-1} [(d \,\overline{\times}\, \ldots \,\overline{\times}\, d) \circ \pi\, \mathbf{P}^p x] = \pi^{-1}\, \Sigma_i\, c_i^p\, (d \circ \pi x_i)^p = \Sigma_i\, c_i\, d \circ x_i^p = d \circ \mu^p\, \mathbf{P}^p x =$ $d \circ p\iota x$, onde $t\pi = p\iota$. Analogamente, $d \circ \pi t x = (\mathbf{P}^p d) \circ (tx \,\overline{\times}\, \ldots \,\overline{\times}\, tx) =$ $\pi^{-1} [\pi \mathbf{P}^p\, d \circ (x \,\overline{\times}\, \ldots \,\overline{\times}\, x)] = \ldots = p\iota d \circ x = d \circ p\iota x$, C.V.D..

24. Studieremo in questo numero due iperalgebre, duali l'una dell'altra, sul corpo C_p. Sia $H = \operatorname{cov}\, C_p =$ insieme di tutti i covettori a componenti in C_p ; si può fare l'identificazione $H = Q / I_p$ (cfr. n^0 1 per le notazioni), onde H è un I_p-modulo ; esso è anche un $(\operatorname{vect}\, C_p)$-modulo ; e ricordiamo che $\operatorname{vect}\, C_p$ è il completamento p-adico di I_p.

La prima iperalgebra, D, è discreta, ed ha come base degli elementi f_h, $h \in H$, con le operazioni così definite ;

$$3.26 \qquad \begin{cases} f_h\, f_l = f_{h+l}\,, \ \text{onde } f_0 = 1 \\ \mathbf{P} f_h = f_h \,\overline{\times}\, f_h \\ \varepsilon f_h = 1 \\ \varrho f_h = f_{-h} \ (\text{è l'inversione}). \end{cases}$$

La seconda, R, è linearmente compatta, ed ha come pseudobase degli elementi e_h, $h \in H$, con le operazioni così definite :

$$3.27 \qquad \begin{cases} e_h\, e_l = \delta_{hl}\, e_h \ (\delta_{hl} \text{ simbolo di Kronecker}), \ \text{onde } 1 = \Sigma_h\ e_h \\ \mathbf{P} e_h = \sum\limits_{j+l=h} e_j \,\overline{\times}\, e_l \\ \varepsilon e_h = \delta_{0h} \\ \varrho e_h = e_{-h} \ (\varrho \text{ è l'inversione}). \end{cases}$$

La verifica dell'essere queste iperalgebre, duali l'una dell'altra nella dualità

3.28 $$f_h \circ e_l = \delta_{hl},$$

è banale; le e_h sono automoduli primitivi a due a due nullifici. Dalle 3.27, 3.26, 3.15 segue anche:

3.29 $$f_h e_l = e_{l-h}.$$

Si noti che R, D sono nella condizione voluta per l'applicabilità del 3.17. Dalle 3.23:

3.30 $$\begin{cases} \pi e_h = e_h, \ \pi f_h = f_{ph} \\ t f_h = f_h, \ t e_h = \sum\limits_{pl=h} e_l \\ p\iota f_h = f_{ph}, \ p\iota e_h = \sum\limits_{pl=h} e_l. \end{cases}$$

3.31 TEOREMA. *Pongasi $y_{-i} = \Sigma_h h_{-i} e_h$, ove h percorre H; allora $C_p[y_{-i}]$ ha per base, come C_p-modulo, l'insieme $\{1, y_{-i}, y_{-i}^2, \dots, y_{-i}^{p-1}\}$, e si ha $y_{-i}^p = y_{-i}$; inoltre $C_p[y_{-1}, \dots, y_{-n}]$, per n intero positivo qualsiasi, è isomorfo, come C_p-algebra, al prodotto tensoriale dei $C_p[y_{-i}]$ per $i = 1, \dots, n$; poi, $C_p[y_{-1}, y_{-2}, \dots]$ è denso in R. La topologia di R è quella definita, a norma dell'1.2, dalle seguenti pseudovalutazioni discrete w_h di R: $w_h(\Sigma_l c_l e_l) = 0$ se $c_h \neq 0$, e $= \infty$ se $c_h = 0$. La topologia di R è R-lineare ammessa numerabile, e si ha*

$$\mathbf{P} y_{-i} = \Phi(y_{-i} \,\overline{\times}\, 1, y_{-i-1} \,\overline{\times}\, 1, \dots; 1 \,\overline{\times}\, y_{-i}, 1 \,\overline{\times}\, y_{-i-1}, \dots) \text{ (cfr. 1.11)},$$

$$\varepsilon_R y_{-i} = 0, \ t y_{-i} = y_{-i-1}, f_h \circ y_{-i} = h_{-i}.$$

DIM. L'asserzione sulla natura della topologia è ovvia; l'essere poi ammessa è conseguenza dell'1.4. Si consideri $C_p[y_{-i}]$; è $y_{-i}^r = \Sigma_h h_{-i}^r e_h$, onde in particolare $y_{-i}^p = y_{-i}$. La combinazione lineare $\sum_{0}^{p-1}{}_j \, c_j y_{-i}^j$, con $c_j \in C_p$, è eguale a $\Sigma_h (\sum_{0}^{p-1}{}_j \, c_j h_{-i}^j) e_h$, ed è nulla se e solo se $\sum_{0}^{p-1}{}_j \, c_j h_{-i}^j = 0$ per ogni h; ciò comporta subito $c_j = 0$ per ogni j; e cioè, le $1, y_{-i}, \dots, y_{-i}^{p-1}$ sono linearmente indipendenti, come asserito. Nello stesso modo si dimostra che sono linearmente indipendenti su C_p i monomi monici nelle $y_{-1}, \dots, y_{-n}$, che abbiano in ciascun y_{-i} grado $< p$; e ciò prova l'asserzione dell'enunciato riguardante $C_p[y_{-1}, \dots, y_{-n}]$.

Le ultime tre formule discendono dalla definizione di y_{-i} e dalle 3.28, 3.30. La $\Phi(y_{-i} \,\overline{\times}\, 1, \dots; 1 \,\overline{\times}\, y_{-i}, \dots)$ esiste perchè le $-i \to y_{-i} \,\overline{\times}\, 1$ e

$-i \longrightarrow 1 \,\overline{\times}\, y_{-i}$ sono simultaneamente ammesse in $R \,\overline{\times}\, R$ per 1.4; ed allora

$$\mathbf{P} y_{-i} = \sum_{h,\,l} (h+l)_i\, e_h \,\overline{\times}\, e_l = \sum_{h,\,l} \Phi(h_{-i}, h_{-i-1}, \dots; l_{-i}, l_{-i-1}, \dots)\, e_h \,\overline{\times}\, e_l =$$

$$\sum_{h,\,l} \Phi(h_{-i}\, e_h \,\overline{\times}\, 1, \dots; l_{-i}\, 1 \,\overline{\times}\, e_l, \dots) = \Phi(y_{-i} \,\overline{\times}\, 1, \dots; 1 \,\overline{\times}\, y_{-i}, \dots),$$

come all'enunciato.

Resta solo da dimostrare che $C_p[y_{-1}, y_{-2}, \dots]$ è denso in R, e per questo basta esprimere le e_h come limiti di successioni di elementi di $C_p[y_{-1}, y_{-2}, \dots]$. Mostreremo precisamente che:

$$e_h = \prod_{1}^{\infty}{}_i \left[(y_{-i} - h_{-i} - 1)^2 (y_{-i} - h_{-i} - 2)(y_{-i} - h_{-i} - 3) \dots (y_{-i} - h_{-i} - p + 1)\right];$$

intanto si noti che per i elevato è $h_{-i} = 0$, onde l'i-esimo fattore di questo prodotto è $(y_{-i} - 1)^2 (y_{-i} - 2)(y_{-i} - 3) \dots (y_{-i} - p + 1) = 1 +$ (*polinomio in* y_{-i}, *privo di termine noto*); pertanto il prodotto infinito converge in R. Si noti poi che se φ è simbolo di funzione razionale intera a coefficienti in C_p, e se $z_1, \dots, z_n \in R$, si ha, per 3.30, 3.16, $f_l \circ \varphi(z_1, \dots, z_n) = \varphi(f_l \circ z_1, \dots \dots, f_l \circ z_n)$. Ed allora,

$$f_l \circ \prod_{1}^{\infty}{}_i [\dots] = \prod_{1}^{\infty}{}_i \left[(l_{-i} - h_{-i} - 1)^2 (l_{-i} - h_{-i} - 2) \dots (l_{-i} - h_{-i} - p + 1)\right] =$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_i\, \delta_{l_{-i},\, h_{-i}} = \delta_{l,\,h} = f_l \circ e_h, \text{ C.V.D.}.$$

25. Sia R un'iperalgebra su k, ed x un covettore a componenti in R; sia σ un semiomomorfismo dell'iperalgebra R su un'iperalgebra S; allora $(\dots, \sigma x_{-2}, \sigma x_{-1})$ è un covettore a componenti in S, che verrà indicato con σx; se in particolare σ è l'isomorfismo $y \longrightarrow 1 \,\overline{\times}\, y$ di R su $R \,\overline{\times}\, R$, si scriverà $1 \,\overline{\times}\, x$ in luogo di σx.

Un covettore x a componenti in R è *canonico* se $1 \,\overline{\times}\, x$ ed $x \,\overline{\times}\, 1$ sono simultaneamente ammessi, e se inoltre

$$\mathbf{P} x = 1 \,\overline{\times}\, x + x \,\overline{\times}\, 1.$$

3.32 Teorema. *Se x è un covettore canonico a componenti nell'iperalgebra R (finita, o discreta, o linearmente compatta), si ha $t_R x_i = x_{i-1}$. In altre parole, vale la $t_R x = tx$.*

Dim. Nelle notazioni della dimostrazione del 3.25, l'essere x canonico implica che $\mathbf{P}^p x = x \,\overline{\times}\, 1 \,\overline{\times}\, 1 \,\overline{\times} \dots \overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, x \,\overline{\times}\, 1 \,\overline{\times} \dots \overline{\times}\, 1 + \dots + 1 \,\overline{\times}\, 1 \,\overline{\times}\, 1 \,\overline{\times} \dots \overline{\times}\, 1 \,\overline{\times}\, x$; quindi $p\iota_R x = \mu^p \mathbf{P}^p x = px$. Questa dà anche $\mathbf{P}^p x_{-i} = x_{-i-1} \,\overline{\times}$

$\ldots \overline{\times}\, x_{-i-1} + \varphi$, ove φ è un polinomio nelle $y_{-i-j,1} = x_{-i-j} \overline{\times}\, 1 \overline{\times} \ldots \overline{\times}\, 1, \ldots$ $\ldots, y_{-i-j,p} = 1 \overline{\times} \ldots \overline{\times}\, 1 \overline{\times}\, x_{-i-j}$ $(j = 0, 1, \ldots)$, tale che se in esso compare un certo monomio, compaiono anche tutti i monomi ottenuti permutando fra loro le $y_{-i-j,h}$ (rispetto al secondo indice); e tale inoltre che nessun monomio che vi compare è invariante per tutte queste permutazioni.

Se d è elemento del duale di R, ciò dà $\pi d \circ x_{-i} = (d \overline{\times} \ldots \overline{\times}\, d) \circ \mathbf{P}^p x_{-i} =$ $(d \overline{\times} \ldots \overline{\times}\, d) \circ (x_{-i-1} \overline{\times} \ldots \overline{\times}\, x_{-i-1}) = (d \circ x_{-i-1})^p$; ma $\pi d \circ x_{-i} = (d \circ t_R\, x_{-i})^p$, donde $t_R\, x_{-i} = x_{-i-1}$, C.V.D..

Se R è un'iperalgebra su k, con topologia R-lineare ammessa, indicheremo con cov R l'insieme di tutti i covettori a componenti in R; se anche la topologia di $R \overline{\times} R$ è ammessa, indicheremo con $\mathcal{C}R$ l'insieme degli elementi canonici di cov R; poichè, per 1.13, cov R è completo, anche $\mathcal{C}R$ è completo; se k è perfetto e $K = \text{vect}\, k$, $\mathcal{C}R$ è un K modulo per 1.14 (che ovviamente è valido a maggior ragione quando la topologia di R è ammessa).

Ciò premesso, suppongasi che k sia algebricamente chiuso (ipotesi sempre mantenuta nel seguito); un *ipercampo* su k è un'iperalgebra R su k tale che:

1. la sua topologia sia R-lineare ammessa, e la topologia di $R \overline{\times} R$ sia ammessa;

2. $\mathcal{C}R$ sia un K-modulo libero finito, cosicchè esso sarà canonico rispetto a $\pi = \pi_R$ e $t = t_R$;

3. l'algebra su k generata dalle componenti degli elementi di $\mathcal{C}R$ sia densa in R.

Chiameremo anche *ipercampo banale* l'iperalgebra k, con il coprodotto necessariamente dato da $\mathbf{P}1 = 1 \overline{\times}\, 1$; le componenti degli elementi di $\mathcal{C}R$ saranno chiamate gli *elementi canonici* di R.

3.33 LEMMA. *Siano R, S iperalgebre tali che $\mathcal{C}R$, $\mathcal{C}S$ esistano, e siano σ, τ dei $\varkappa$-semiomomorfismi di R su S, $\varkappa$ essendo un automorfismo di k. Per ogni $x \in \mathcal{C}R$ si ha allora $(\sigma + \tau)\, x = \sigma x + \tau x$; in particolare, $p\iota_R\, x = px$.*

DIM. Infatti, per 3.12, $(\sigma + \tau) x = \mu_S(\sigma \otimes \tau)\mathbf{P}_R x = \mu_S(\sigma \otimes \tau)(x \overline{\times}\, 1 + 1 \overline{\times}\, x) =$ $\mu_S(\sigma x \overline{\times}\, 1 + 1 \overline{\times}\, \tau x) = \sigma x + \tau x$, C. V. D..

3.34 TEOREMA. *Siano R, S iperalgebre tali che $\mathcal{C}R$, $\mathcal{C}S$, $\mathcal{C}(R \overline{\times} S)$ esistano. Allora $\mathcal{C}(R \overline{\times} S) = \mathcal{C}R \overline{\times}\, 1 \oplus 1 \overline{\times}\, \mathcal{C}S \cong \mathcal{C}R \oplus \mathcal{C}S$.*

DIM. Dato $z \in \mathcal{C}(R \overline{\times} S)$, si definiscano i covettori x, y, a componenti in R, S rispettivamente, mediante le: $x \overline{\times}\, 1 = (\iota \otimes \varepsilon) z$, $1 \overline{\times}\, y = (\varepsilon \otimes \iota) z$,

ove ε è la coidentità. Dimostriamo intanto che $x \in \mathcal{C}R$, onde analogamente $y \in \mathcal{C}S$. Si ha infatti
$(\mathbf{P}_R \otimes \mathbf{P}_S)(x \mathbin{\overline{\times}} 1) = (\mathbf{P}_R\, \iota_R \otimes \mathbf{P}_S\, \varepsilon_S)\, z = (\iota_R \otimes \iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \varepsilon_S)(\mathbf{P}_R \otimes \mathbf{P}_S)\, z =$
$(\iota_R \otimes \iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \varepsilon_S)\, \alpha\, (z \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} z)$, ove α indica scambio del secondo col terzo fattore; questa espressione a sua volta eguaglia la
$\alpha\, [(\iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \iota_R \otimes \varepsilon_S)(z \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} z)] = \alpha\, (x \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} x \mathbin{\overline{\times}} 1) =$
$x \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} x \mathbin{\overline{\times}} 1 \mathbin{\overline{\times}} 1$, donde appunto $\mathbf{P}x = x \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} x$, e $x \in \mathcal{C}R$.

Dimostriamo poi che $z = x \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} y$, ossia, per 3.33, che $z = (\iota \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \iota)\, z$; tenendo presente la 3.12, ciò è conseguenza immediata del fatto che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "\mathbf{P}"'] \arrow[dr] & & \overline{\times} & & S \arrow[dl] \arrow[dr, "\mathbf{P}"] & \\
R \arrow[d, "\iota"'] & \overline{\times} & R \arrow[d, "\varepsilon"] & \overline{\times} & S \arrow[d, "\varepsilon"'] & \overline{\times} & S \arrow[d, "\iota"] \\
R \arrow[dr, "\mu"'] & \overline{\times} & R \arrow[dl] & \overline{\times} & S \arrow[dr] & \overline{\times} & S \arrow[dl, "\mu"] \\
& R & & \overline{\times} & & S &
\end{tikzcd}$$

definisce, per 3.9, l'omomorfismo ι, C. V. D..

26. Nel n⁰ 4 di MC abbiamo introdotto degli enti che là venivano chiamati « ipercampi » ; quelli, fra essi, che sono equidimensionali, verranno qui chiamati provvisoriamente « ipercampi nel senso di MC» ; essi sono intanto anelli locali regolari completi, sono linearmente compatti, e soddisfano quindi la condizione 1 del n⁰ 25 ; soddisfano poi le 2, 3 come conseguenza dei 7.2, 7.4, e 3.1 di MC. Ricordiamo in particolare le seguenti definizioni :
$R_{m,0} = R_{1,0} \mathbin{\overline{\times}} \dots \mathbin{\overline{\times}} R_{1,0}$ (m fattori); è l'ipercampo $k\{x_1, \dots, x_n]$, con il coprodotto $\mathbf{P}x_i = \Phi\,(x_i \mathbin{\overline{\times}} 1, x_i \mathbin{\overline{\times}} 1, \dots ; 1 \mathbin{\overline{\times}} x_i, 1 \mathbin{\overline{\times}} x_i, \dots)$; si ha $\mathcal{C}R_{m,0} \cong N_{m,0}$.

Poi, per r, s interi primi fra loro: $R_{r,s} = k\{x_1, \dots, x_r]$, con il coprodotto così definito :
$\mathbf{P}x_i = \Phi\,(x_i \mathbin{\overline{\times}} 1, x_{i+1} \mathbin{\overline{\times}} 1, \dots, x_r \mathbin{\overline{\times}} 1, x_1^{p^s} \mathbin{\overline{\times}} 1, \dots, x_1^{p^s} \mathbin{\overline{\times}} 1, x_1^{p^{2s}} \mathbin{\overline{\times}} 1, \dots, x_r^{p^{2s}} \mathbin{\overline{\times}} 1,$
$\dots ; 1 \mathbin{\overline{\times}} x_i, \dots, 1 \mathbin{\overline{\times}} x_r, 1 \mathbin{\overline{\times}} x_1^{p^s}, \dots, 1 \mathbin{\overline{\times}} x_r^{p^s}, \dots)$; si ha $\mathcal{C}R_{r,s} \cong N_{r,s}$. Ogni ipercampo nel senso di MC è isomorfo (cfr. p. 359 di MC) ad un $S = R_{m,0} \mathbin{\overline{\times}} R'$, ove R' è isogeno ad un prodotto tensoriale completo R di vari R_{r_i, s_i} ; ciò

significa, ricordiamo, che vi sono isomorfismi di iperalgebre $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$. Inoltre, per 7.4 di MC, se M è un qualsiasi K-modulo canonico di codimensione separabile nulla, ossia con $M_t = 0$, esiste un ipercampo R nel senso di MC tale che $\mathcal{C}R \cong M$.

Indicheremo con $R_{0,0}$ l'ipercampo banale k, e daremo la seguente definizione: se R è l'iperalgebra su C_p indicata con tale simbolo al n^0 24, $R_{0,1}$ indicherà l'estensione di R su k, ed $R_{0,n}$ il prodotto tensoriale completo di n fattori isomorfi ad $R_{0,1}$; l'asserzione del 3.31 sulla topologia di R è subito estensibile ad $R_{0,n}$, cosicchè $R_{0,n}$ soddisfa la condizione 1 del n^0 25. Indicheremo con $D_{n,m}$ il duale di $R_{m,n}$; quindi $D_{n,0}$ è il prodotto tensoriale di n fattori isomorfi a $D_{1,0}$, e $D_{1,0}$ è l'estensione su k della D, definita su C_p, del n^0 24.

Si indichi con $\mathcal{P}_0\, D_{n,0}$ l'insieme delle successioni $d = (d_0, d_1, \ldots)$, $d_i \in D_{n,0}$, tali che $\pi d_i = d_{i-1}\,(i > 0)$, $\pi d_0 = 1$, e che $\mathbf{P}d = d \,\overline{\times}\, d$, ossia $(\mathbf{P}d_0, \mathbf{P}d_1, \ldots) = (d_0 \,\overline{\times}\, d_0, d_1 \,\overline{\times}\, d_1, \ldots)$. La seconda condizione comporta subito che ogni d_i deve essere, nelle notazioni del n^0 24, un $f_{h_{i1}} \,\overline{\times} \ldots \overline{\times}\, f_{h_{in}}$ $(h_{il} \in H = \operatorname{cov} C_p)$, mentre la prima dà $p\,(h_{il})_j = (h_{il})_{j-1}\,(j > 0)$, e $p\,(h_{il})_0 = 0$; definiremo anche $\pi d = (\pi d_0, \pi d_1, \ldots)$, e $td = (td_0, td_1, \ldots)$.

Due elementi di $\mathcal{P}_0\, D_{n,0}$ possono essere moltiplicati mediante moltiplicazione termine a termine; se poi $a \in \operatorname{vect} C_p$, e per esempio $a = a_0 + pa_1 + p^2 a_2 + \ldots$, con a_i intero e $0 \leq a_i < p$, si può definire $d^a = (d_0^{a_0}, d_1^{a_0+pa_1}, d_2^{a_0+pa_1+p^2a_2}, \ldots)$, ossia $(d^a)_i = f_{a_{hi1}} \,\overline{\times} \ldots \overline{\times}\, f_{ah_{in}}$. Con ciò $\mathcal{P}_0\, D_{n,0}$ diviene un $(\operatorname{vect} C_p)$-modulo, con l'operazione di prodotto anzichè somma, e di elevazione a potenza anzichè prodotto scalare; esso è prodotto diretto di n moduli isomorfi a $\mathcal{P}_0\, D_{1,0}$; indicheremo con $\mathcal{P}\, D_{n,0}$ l'estensione di $\mathcal{P}_0\, D_{n,0}$ su K.

3.35 LEMMA. *$\mathcal{P}D_{n,0}$ è un K-modulo canonico isomorfo ad $N_{n,0}$, qualora vi si definiscano π e t nel modo seguente: se $\delta_1, \ldots, \delta_m \in \mathcal{P}_0\, D_{n,0}$, ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, allora:*

$$\pi \prod_i \delta_i^{\alpha_i} = \prod_i (\pi\delta_i)^{\pi\alpha_i}, \ e \ t \prod_i \delta_i^{\alpha_i} = \prod_i (t\delta_i)^{\pi^{-1}\alpha_i};$$

(se gli α_i appartengono a vect C_p, tale definizione è in accordo con le definizioni di π e t operanti su $\mathcal{P}_0\, D_{n,0}$).

DIM. Basta dimostrarlo per $n=1$; pongasi allora $M = \mathcal{P}D_{1,0}$, $M' = \mathcal{P}_0 D_{1,0}$. Allora M' è l'insieme dei $d = (f_{h_0}, f_{h_1}, \ldots)$, con $h_i \in \operatorname{cov} C_p$ e $ph_i = h_{i-1}\,(i > 0)$, $ph_0 = 0$; queste condizioni dicono che esistono elementi $c_0, c_1, \ldots \in C_p$ tali che

$$h_0 = (\dots, 0, 0, c_0)$$
$$h_1 = (\dots, 0, 0, c_0, c_1)$$
$$h_2 = (\dots, 0, 0, c_0, c_1, c_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

posto $c = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in \text{vect}\, C_p$, e indicato con δ l'elemento di M' per il quale $c = (1, 0, 0, \dots)$, si vede subito che, per ogni $d \in M'$ e per il corrispondente c, si ha $d = \delta^c$. L'applicazione $c \longrightarrow \delta^c$ è quindi un isomorfismo del (vect C_p)-modulo vect C_p su tutto il (vect C_p)-modulo M', ed è ovviamente estensibile all'isomorfismo $c \longrightarrow \delta^c$ di K su tutto M, come K-moduli. Ciò mostra intanto che M è un K-modulo libero con 1 generatore.

Si definisca poi un'applicazione K-bilineare $(\delta^c, c') \longrightarrow \langle \delta^c, c' \rangle = cc'$ di $M \times K$ su K; per mezzo di essa si vede subito che M diviene il duale del K-modulo K; valgono per le relazioni:

$$\langle \pi\delta^c, c' \rangle = \langle (\pi\delta)^{\pi c}, c' \rangle = \langle \delta^{p\pi c}, c' \rangle = c^\pi p c' = \pi\,(ctc') = \pi \langle \delta^c, tc' \rangle,$$

e

$$\langle t\delta^c, c' \rangle = \langle \delta^{\pi^{-1} c}, c' \rangle = (\pi^{-1} c)\, c' = \pi^{-1} (c\pi c') = \pi^{-1} \langle \delta^c, \pi c' \rangle,$$

che mostrano, per 3.6, che M è il K-modulo canonico duale di K; per 3.5 e 3.6 esso è quindi isomorfo a $N_{1,0}$, C.V.D..

27.

3.36 TEOREMA. *$R_{0,n}$ è un ipercampo, e $\mathcal{C}R_{0,n} \cong N_{0,n}$. In particolare, $\mathcal{C}R_{0,1}$ è generato dall'$y = (\dots, y_{-2}, y_{-1})$ del* 3.31.

DIM. Si è già visto al n⁰ 26 che $R_{0,n}$ soddisfa alla condizione 1 del n⁰ 25; se si dimostra che $R = R_{0,1}$ soddisfa anche le 2, 3, e che $\mathcal{C}R$ ha ordine 1 e dimensione 0, ne seguirà l'asserto per 3.34.

Se $x \in \mathcal{C}R$ e $d \in \mathcal{P}_0 D$, ove $D = D_{1,0}$, pongasi

$$d \circ x = (\pi\,(d_0 \circ x_{-1}),\ \pi^2 (d_1 \circ x_{-1}),\ \pi^3 (d_2 \circ x_{-1}), \dots) \in K.$$

Dico che questa applicazione è (vect C_p)-lineare in d e K-lineare in x; essa è chiaramente continua in (d, x), quando in $\mathcal{P}D$ si ponga la topologia di K-modulo canonico, ed in $\mathcal{C}R$ quella di insieme di covettori.

Sia anche $y \in \mathcal{C}R$, e sia per esempio, nelle notazioni del n^0 24, $d = (f_{h_0}, f_{h_1}, \dots)$, $h_1 \in H = \operatorname{cov} C_p$; allora

$$\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ (x+y)_{-1}) = \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ \Phi(x_{-1}, x_{-2}, \dots; y_{-1}, y_{-2}, \dots)) =$$

$$= \pi^{i+1}\Phi(f_{h_i} \circ x_{-1}, f_{h_i} \circ x_{-2}, \dots; f_{h_i} \circ y_{-1}, f_{h_i} \circ y_{-2}, \dots); \text{ ma}$$

$$\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ x_{-j}) = \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ t^{j-1} x_{-1}) = \pi^{i-j+2}(\pi^{j-1} f_{h_i} \circ x_{-1}) =$$

$$= \pi^{i-j+2}(f_{h_{i-j+1}} \circ x_{-1}),$$

ove $f_{h_{i-j+1}}$ è da interpretare come 1 se $i - j + 1 < 0$. Quindi

$$\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ (x+y)_{-1}) = \Phi(\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ x_{-1}), \pi^i(f_{h_{i-1}} \circ x_{-1}), \dots, \pi(f_{h_0} \circ x_{-1}), 0, 0, \dots;$$

$\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ y_{-1}), \dots, \pi(f_{h_0} \circ y_{-1}), 0, 0, \dots)$, dato che ovviamente $x_{-1} \in R^+$, chè altrimenti la $j \to t^j x_{-1}$ non potrebbe essere ammessa. Ciò mostra appunto che $d \circ (x+y) = d \circ x + d \circ y$.

Sia ora $c \in k$, e sia $\{c\}$, al solito (n^0 9), il vettore $(c, 0, 0, \dots) \in K$; allora $(\{c\} x)_{-1} = (\pi^{-1} c) x_{-1}$ (n^0 7), onde

$$(d \circ \{c\} x)_i = \pi^{i+1}(d_i \circ (\pi^{-1} c) x_{-1}) = (\pi^i c)\pi^{i+1}(d_i \circ x_{-1}) = (\pi^i c)(d \circ x)_i,$$

il che mostra che $d \circ \{c\} x = \{c\}(d \circ x)$. Questa, unita alla precedente ed alla continuità, dà la K-linearità di $x \to d \circ x$.

La linearità della $d \to d \circ x$ si dimostra mediante la:

$$\pi^{i+1}(f_{h_i} f_{l_i} \circ x_{-1}) = \pi^{i+1}(f_{h_i} \overline{\times} f_{l_i} \circ \mathrm{P} x_{-1}) =$$

$$= \pi^{i+1}\Phi(f_{h_i} \circ x_{-1}, f_{h_i} \circ x_{-2}, \dots; f_{l_i} \circ x_{-1}, f_{l_i} \circ x_{-2}, \dots),$$

e continuando poi come prima.

È ora lecito, e possibile in modo unico, estendere la $(d, x) \to d \circ x$ ad un'applicazione K-bilineare continua di $\mathcal{P}D \times \mathcal{C}R$ su K; questa è una dualità fra K-moduli:

se $d \circ x = 0$ per ogni d, è $f_h \circ x_{-1} = 0$ per ogni h, onde $x_{-1} = 0$;

se $d \circ y = 0$ per ogni y, si scelga per y l'elemento del 3.31, che il 3.31 stesso mostra essere canonico; sia poi $d = \delta^c$, ove δ è il generatore di $\mathcal{P}D$ usato nella dimostrazione del 3.35. Si ha $\delta_i \circ y_{-1} = f_{p-i-1} \circ \Sigma_h h_{-1} e_h$ per il 3.31; questo è sempre nullo, eccetto che per $i = 0$, nel qual caso è $= 1$. Quindi $\delta \circ y = 1$, e $c = 0$; la $\delta \circ y = 1$ mostra anche che $\mathcal{C}R$ è, come K-modulo, duale di $\mathcal{P}D$.

Si è così stabilito che $\mathcal{C}R$, in quanto duale di un K-modulo libero con un generatore, è un K-modulo libero con un generatore. Esso possiede, per 3.33 e 3.32, i π e t necessari per renderlo un K-modulo canonico di ordine 1; la sua dimensione è 0 perchè $\pi\mathcal{C}R = \mathcal{C}R$; si noti anche che la dualità definita sopra è una dualità di K-moduli canonici, C.V.D..

28.

3.37 Lemma. *Sia $R = R_{0,n}$, e sia S un ipercampo nel senso di* MC*; allora $R \overline{\times} S$ è un ipercampo, è linearmente compatto, e la sua topologia è generata da pseudovalutazioni discrete come descritto nell'* 1.2.

Dim. $R \overline{\times} S$ è linearmente compatto perchè tali sono R ed S; inoltre, la topologia di S è data da una valutazione normalizzata discreta w di rango 1; si definiscano in $R \overline{\times} S$ le seguenti pseudovalutazioni $w_{h_1,\dots,h_n}$, con $h_i \in H$: se $x \in S$, $w_{h_1,\dots,h_n}(e_{l_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} e_{l_s}) = w(x)$ se $h_i = l_i$ per ogni i, ed $= \infty$ altrimenti; allora la topologia di $R \overline{\times} S$ soddisfa alla 1 del n^0 25 per l'1.4. Le condizioni 2 e 3 sono verificate separatamente per R (cfr. 3.36) e per S (cfr. n^0 26), onde sono verificate per $R \overline{\times} S$ come conseguenza del 3.34, C.V.D..

3.38 Lemma. *Sia $R \overline{\times} S$ un ipercampo del tipo descritto al* 3.37*; allora, nelle notazioni del* 3.22*, è $J^* = J$ per ogni ideale chiuso J di $R \overline{\times} S$ che soddisfi l'analoga della* 3.21*; e $U^* = U$ per ogni sottoiperalgebra chiusa U di $R \overline{\times} S$.*

Dim. Se il fattore R manca, il risultato è vero per il 4 del 5.8 di MC. Si consideri il caso generale; dato J, pongasi $J = \Sigma_h e_h \overline{\times} J_h$, ove $e_h = e_{h_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} e_{h_n}$, e gli e_{h_i} hanno il significato del 3.27, mentre J_h è ideale di S. Intanto $J' = J \cap (R \overline{\times} 1) = \Sigma_h e_h \overline{\times} (J_h \cap k)$, e questa è la somma diretta completa dei k-moduli generati dagli e_h tali che $J_h = S$. Sia F l'insieme degli $h \in H \oplus \dots \oplus H$ per i quali $J_h \neq S$; dalla 3.21 per J si ricava la 3.21 per J', e da questa segue agevolmente che $F + F \subseteq F$; poi, $0 \in F$, poichè altrimenti $e_0 \overline{\times} S \subseteq J$, ed $\varepsilon J \neq 0$ per 3.27, assurdo; infine, da $\mathbf{P}(e_0 \overline{\times} 1) \notin \mathbf{P}J'$ segue anche che $-F \subseteq F$, ossia che F è un gruppo additivo. Ma allora esso è un I_p-sottomodulo dell'I_p modulo $H \oplus \dots \oplus H$; previo cambiamento degli addendi diretti di questo, ossia dei fattori diretti $R_{0,1}$ di $R_{0,n}$, ogni sottomodulo F può essere così descritto: esistono degli $r_1, \dots, r_n$, ciascuno un intero non negativo ovvero il simbolo ∞, tali che F consiste degli $h = (h_1, \dots, h_n)$ colla proprietà $p^{r_i} h_i = 0$ per ogni i, ove $p^{\infty} h_i = 0$ per ogni h_i. È quanto dire che J' è la somma diretta completa di quei ke_h tali che $p^{r_i} h_i \neq 0$; ed allora sia $U' = p^{r_1} \iota R_{0,1} \overline{\times} \dots \overline{\times} p^{r_n} \iota R_{0,1}$, ove $p^{\infty} \iota R_{0,1} = k$: si constata facilmente che J' è generato da U'^{+}, che U' è un sottoipercampo di R, e che è l'unica sottoiperalgebra chiusa di R con la proprietà descritta rispetto a J'; quindi $U'^* = U'$.

Passiamo a considerare $J'' = J \cap (1 \overline{\times} S)$; esso è certamente, come si è visto, generato da un U''^+, con U'' sottoipercampo di S. Dico allora che $J = J' \overline{\times} S + R \overline{\times} J''$, dal che seguirà che J è generato da $(U' \overline{\times} U'')^+$; e infatti, se $J_h \subset S$ e $J_l \subset S$, ossia se h, $l \in F$, si ha intanto $h + l \in F$; poi, se α indica scambio del secondo col terzo fattore, $(e_h \overline{\times} e_l \overline{\times} 1 \overline{\times} 1)\, \alpha\, \mathbf{P} J = (e_h \overline{\times} e_l) \overline{\times} \mathbf{P} J_{h+l}$, e questo deve essere contenuto in $(e_h \overline{\times} e_l \overline{\times} 1 \overline{\times} 1)$ $\alpha (J \overline{\times} R \overline{\times} S + R \overline{\times} S \overline{\times} J)$; questa espressione coincide con $e_h \overline{\times} e_l \overline{\times}$ $(J_h \overline{\times} S + S \overline{\times} J_l)$, il che dice che $\mathbf{P} J_{h+l} \subseteq J_h \overline{\times} S + S \overline{\times} J_l$. L'applicazione ad ambo i membri di $\mu_S (\iota \otimes \varepsilon)$ dà, tenendo presente la 3.9, $J_{h+l} \subseteq J_h$; essendo questa valida ogniqualvolta h, $l \in F$, si conclude che i J_h, per $h \in F$, sono tutti uguali fra loro, e per esempio a $\overline{J}$; ma allora $J = \sum_{h \in F} e_h \overline{\times} S + \sum_{h \in F} e_h \overline{\times} \overline{J} = J' \overline{\times} S + \Sigma_h e_h \overline{\times} \overline{J} = J' \overline{\times} S + R \overline{\times} \overline{J} = J' \overline{\times} S + R \overline{\times} J''$, come richiesto.

Occorre ora dimostrare che $U = U^*$ per ogni U; pongasi $U' \overline{\times} 1 = (\iota_R \otimes \varepsilon_S)\, U$, $1 \overline{\times} U'' = (\varepsilon_R \otimes \iota_S)\, U$, cosicchè U', U'' sono sottoiperalgebre chiuse di R, S rispettivamente. Come si è visto nella dimostrazione del 3.34, l'omomorfismo $\mu_{R \overline{\times} S} (\iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \varepsilon_R \otimes \iota_S)\, \mathbf{P}_{R \overline{\times} S}$ di $R \overline{\times} S$ è l'identità, cosicchè $U = U' \overline{\times} U''$. Ma $(U' \overline{\times} 1)^+$ genera $(\iota_R \otimes \varepsilon_S)\, J = J' \overline{\times} 1$, e analogamente per U'' e J''; si è anche visto per U', e si sa da MC per U'', che esse sono le uniche sottoiperalgebre chiuse di R, S rispettivamente con tali proprietà rispetto a J', J''. Se allora J fosse anche generato da un $U^{*+} \supset U^+$, J' sarebbe generato da $U^{*\prime +}$, e J'' da $U^{*\prime\prime +}$, ed uno di questi conterrebbe propriamente il rispettivo U'^+ o U''^+; ciò essendo impossibile, si conclude che $U^* = U$, C. V. D..

3.39 LEMMA. *Sia R un ipercampo del tipo indicato con $R \overline{\times} S$ nel 3.37; sia σ un omomorfismo (di iperalgebre) di R; sia N il nucleo di σ come omomorfismo di $\mathcal{C} R$, e sia U la sottoalgebra chiusa, su k, di R generata da* 1 *e dalle componenti degli elementi di N (o, il che è lo stesso, di un suo insieme di generatori). Allora U è un sottoipercampo di R, il nucleo di σ (come omomorfismo di R) è l'ideale chiuso J generato da U^+, ed $N = \mathcal{C}\, U$.*

DIM. Che U sia sottoiperalgebra chiusa di R, ossia che $\mathbf{P}\, U \subseteq U \overline{\times} U$, è chiaro, per il modo in cui U è ottenuto da N; è anche chiaro che U è generato da 1 e dagli elementi canonici di R che appartengono al nucleo J di σ; di qui segue anche che $N = \mathcal{C}\, U$. Resta da provare che J è anche l'ideale chiuso generato da U^+; tenendo presente il 3.38 e la sua dimostrazione, basterà provare questo fatto nei due casi in cui R è ipercampo nel senso di MC, oppure $R = R_{0,n}$; si tengano anche presenti i 3.1, 3.34, 3.36.

Ora, nel primo caso ciò è conseguenza di MC: più precisamente, se U' è iperalgebra chiusa e U'^{+} genera J, per il n⁰ 7 di MC U' è ipercampo nel senso di MC, ed è generato da 1 e dalle componenti degli elementi di $\mathcal{C}U' \subseteq \mathcal{C}R$, e coincide perciò con U.

Nel secondo caso, quando $R = R_{0,n}$, si può ripetere lo stesso ragionamento se si riesce a dimostrare che U' è generato da 1 e dalle componenti degli elementi di $\mathcal{C}U'$; ora, nella dimostrazione del 3.38 si è visto che U' è necessariamente della forma $p^{r_1}\iota R_{0,1} \,\overline{\times}\, \dots \,\overline{\times}\, p^{r_n}\iota R_{0,1}$, e ciò è sufficiente, C. V. D..

29.

3.40 TEOREMA *Ogni ipercampo è bicontinuamente isomorfo ad un $R_{0,n} \,\overline{\times}\, S$, ove S è ipercampo nel senso di* MC*, e quindi anello locale regolare completo con corpo residuo k. Pertanto ogni ipercampo è un'iperalgebra linearmente compatta. Per ogni K modulo canonico M, esiste un ipercampo R tale che $\mathcal{C}R \simeq M$, in un isomorfismo in cui i π, t di M sono trasformati nei π_R, t_R. Sia poi R un ipercampo, sia S un'iperalgebra con topologia S lineare, e sia σ' un omomorfismo di $\mathcal{C}R$ su un K-modulo M di covettori canonici a componenti in S; suppongasi che σ' commuti con π, ossia che $\pi_S\sigma' x = \sigma'\pi_R x$; esiste allora un unico omomorfismo σ di R su S* (*come iperalgebre*) *tale che $\sigma x = \sigma' x$ per ogni $x \in \mathcal{C}R$. Se poi M è libero, σR è un ipercampo, e $\mathcal{C}\sigma R = \sigma' \mathcal{C}R$.*

DIM. La seconda e terza asserzione sono già note dai 3.37 e dal n⁰ 26. La prima asserzione discende dall'ultima: si prenda infatti per R un ipercampo del tipo descritto nella prima asserzione, per S un ipercampo tale che $\mathcal{C}S \simeq \mathcal{C}R$, e per σ' l'isomorfismo di $\mathcal{C}R$ su tutto $\mathcal{C}S$; allora l'ultima asserzione (e la penultima) dà un omomorfismo σ di R su tutto S; il 3.39 dice poi che σ è un isomorfismo, e resta perciò solo da vedere che sia bicontinuo, e non solo continuo. Ora, R è linearmente compatto, ed è quindi noto che anche $\sigma R = S$ è linearmente compatto [cfr. G. Kothe, Topologische lineare raume, 1960; pp. 99-102, e in particolare (2), p. 99]; ed allora, per mezzo di una pseudobase di R e della sua immagine in S si controlla che σ, essendo continuo, è nesessariamente bicontinuo, il che prova la prima asserzione.

Dimostriamo quindi l'ultima asserzione; la dimostreremo sotto l'ipotesi che R sia del tipo descritto all'inizio dell'enunciato; ciò è sufficiente poichè comporta, come si è visto, che ogni R è di questo tipo, e quindi che l'asserzione stessa che stiamo dimostrando è vera per ogni R. Sia dunque

$R = R_1 \overline{\times} R_2$, con $R_1 = R_t \cong R_{0,n}$, e $R_2 = R_r \overline{\times} R_\pi$ anello locale regolare completo. Scegliamo un insieme libero $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di generatori di $\mathcal{C} R_1$ come K-modulo, tali che $\pi x_i = x_i$, e un insieme minimo $\{y_1, \ldots, y_m\}$ di generatori di $\mathcal{C} R_2$ come Π-modulo; allora, per il 7.1 di MC, una pseudobase $B = \{b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots\}$ di R è data dai monomi monici nelle $x_{i,-j}$, $y_{i,-1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, di grado $< p$ in ogni $x_{i,-j}$. Posto $x'_i = \sigma' x_i$, $y'_i = \sigma' y_i$, e dato un $X \in R$, espresso come combinazione lineare infinita, a coefficienti in k, degli elementi b_r della pseudobase, vogliamo dimostrare che esiste in S, ossia converge, l'analoga combinazione lineare X' degli analoghi monomi b'_r nelle $x'_{i,-j}$, $y'_{i,-1}$; dato infatti in S un intorno U dello 0 che sia un ideale, dovendo gli x'_i, y'_j essere simultaneamente ammessi esiste un intero q tale che siano in U i monomi nelle $x'_{i,-j}$, $y'_{i,-j}$ di grado $\geq p^q$ in almeno una $x'_{i,-q}$, o $y'_{i,-q}$; e d'altra parte, esiste un intero q' tale che ogni b_r, con $r > q'$, sia combinazione lineare infinita a coefficienti in k di monomi del tipo descritto, col dato q; e ciò in quanto per r abbastanza elevato i b_r appartengono all'ideale chiuso di R generato da $\pi p^{q-1} \iota R^+$. Pertanto per $r > q'$ si ha $b'_r \in U$, il che mostra appunto che X' esiste.

L'applicazione $\sigma : X \longrightarrow X'$ è un omomorfismo continuo di k-algebre, e applica $x_{i,-j}$, $y_{i,-j}$ su $x'_{i,-j}$, $y'_{i,-j}$; esso è quindi un omomorfismo di iperalgebre, e dà $\sigma x = \sigma' x$ per $x \in \mathcal{C} R$.

Suppongasi ora che M sia libero; in tal caso si può anche supporre che il nucleo di σ' sia generato dagli x_i con $i > n'$ e dagli y_i con $i > m'$; pertanto, per il 3.39, il nucleo di σ è l'ideale chiuso J generato dagli $x_{i,-j}$ con $i > n'$ e dagli $y_{i,-1}$ con $i > m'$; quindi R/J è un ipercampo, in quanto $R_1 \overline{\times} 1/J \cap (R_1 \overline{\times} 1) \cong R_{0,n'}$, e $1 \overline{\times} R_2/J \cap (1 \overline{\times} R_2)$ è anello locale regolare completo. Ma allora σR, che è immagine, in un isomorfismo continuo, di R/J, è anche bicontinuamente isomorfo a R/J, perchè questo è linearmente compatto. Ne segue che σR è un ipercampo, e che quindi $\mathcal{C}\sigma R = \sigma' \mathcal{C} R$, C. V. D..

In base al 3.40, la definizione di ipercampo data al n^0 25 può essere così modificata (ossia è equivalente alla seguente):

3.41 COROLLARIO. *L'iperalgebra R su k è un ipercampo se e solo se;*

1. *La topologia di R è R-lineare;*

2. *Esiste un insieme N di covettori canonici a componenti in R che è un K-modulo canonico, con $\pi = \pi_R$;*

3. *R è generato, come k-algebra completa, dalle componenti degli elementi di N, o, il che è lo stesso, degli elementi di un insieme di generatori di N come K-modulo.*

In tal caso $N = \mathcal{C} R$.

30. I 3.40, 3.39 danno una corrispondenza biunivoca (« isomorfismo di categorie ») fra da una parte i K-moduli canonici coi loro omomorfismi, e dall'altra gli ipercampi coi loro omomorfismi; ed anzi, il 3.39 é più generale, e potrebbe permettere di estendere la corrispondenza da una parte ai K-moduli finiti, ma non necessariamente liberi, dotati di un π ed un t tali che $t\pi = \pi t = p\iota$, e dall'altra alle iperalgebre R linearmente compatte, o finite, o prodotti di queste, con topologie R lineari ammesse, che sono generate, come k-algebre complete, dai propri elementi canonici, e per le quali $\mathcal{C}R$ è un K-modulo finito. L'estensione qui non verrà fatta, dato che non ha applicazione diretta alle varietà abeliane. Comunque, i nuovi « ipercampi » verrebbero ad essere le immagini omomorfe di quelli « liberi » (ossia quelli che abbiamo descritto in questo capitolo); ed ognuno di essi sarebbe il prodotto tensoriale di uno « libero » per uno finito.

La corrispondenza permette di estendere agli ipercampi ed ai loro omomorfismi tutta la nomenclatura dei K-moduli canonici e dei loro omomorfismi: isogenia, grado, dimensione, separabilità, ecc.; gli ipercampi nel senso di MC divengono così gli ipercampi inseparabili. Qui interessa in particolare il risultato seguente:

3.42 Teorema. *Sia σ un isomorfismo di immersione dell'ipercampo S nell'ipercampo R, e suppongasi che* conull $\sigma = 0$, *cosicchè R, S sono isogeni; allora il grado di σ è la dimensione dello spazio vettoriale R/J su k, J essendo l'ideale chiuso di R generato da S^+; inoltre R è un S-modulo libero, il cui numero di generatori liberi coincide di nuovo col grado di σ.*

Dim. Basta dimostrare il risultato separatamente nel caso in cui $R_t = 0$, e nel caso in cui $R = R_t$ (onde lo stesso varrà per S). Nel primo caso, per il 5 del 5.7 di MC, esiste un sistema regolare di parametri $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ di R, ed esistono degli interi $s_1, \dots, s_n$, tali che $\{\pi^{s_1}\xi_1, \dots, \pi^{s_n}\xi_n\}$ sia un sistema regolare di parametri di S; il grado di σ è in questo caso p^l, ove $l = \Sigma_i s_i$; e dall'altra parte, i monomi monici nelle $\xi_1, \dots, \xi_n$, di grado $< p^{s_i}$ nelle ξ_i, formano un insieme libero di generatori di R come S modulo; le immagini di questi in R/J formano un insieme libero di generatori di R/J come k-modulo.

Sia invece $R = R_t$; allora si è visto nella dimostrazione del 3.38 che esistono elementi $y_1, \dots, y_n$ di $\mathcal{C}R$ (ciascuno essendo la y del proprio $R_{0,1}$ nelle notazioni del 3.31), e degli interi $s_1, \dots, s_n$, tali che S sia generato dalle $y_{i,-j}$ con $j > s_i$; il 3.31 dice allora che R ha, come S-modulo, l'insieme libero di generatori formato dai monomi monici nelle $y_{i,-j}$ con $j \leq s_i$, di grado $< p$ in ciascun $y_{i,-j}$; questi sono appunto in numero di p^l, se di nuovo $l = \Sigma_i s_i$. Le immagini di questi monomi in R/J formano un insieme libero di generatori di R/J come k-modulo, C. V. D..

3.43 TEOREMA. *Sia R un ipercampo; allora la topologia di $\mathcal{C}R$ come sottospazio di* cov R *coincide con la sua topologia come K-modulo canonico.*

DIM. Sia α la topologia di cov R (cfr. n^0 7), e β la topologia di $\mathcal{C}R$ come K-modulo canonico. La β è determinata dagli intorni $p^n\mathcal{C}R = p^n\iota\mathcal{C}R = \mathcal{C}(p^n\iota R)$ dello 0, per 3.33, 3.39; la α è determinata, nelle notazioni del n^0 7, dagli U', ove gli U sono intorni dello 0 in R; ora, per intorni dello 0 in R possono anche prendersi gli ideali chiusi generati dai $(p^n\iota R)^+$, che indicheremo con J_n. Ma $J_n' \cap \mathcal{C}R = \mathcal{C}(p^n\iota R) = p^n\,\mathcal{C}R$ per 3.39; C. V. D..

Dato che un ipercampo R è limite inverso delle iperalgebre finite R/J_n, ove i J_n hanno il significato della precedente dimostrazione, si ha:

3.44 TEOREMA. *Gli ipercampi soddisfano alla condizione per l'applicabilità del* 3.17.

31. Chiudiamo questo capitolo con alcune osservazioni. Intanto, da MC (n^0 4) appare chiaro che non appena un'iperalgebra linearmente compatta è un anello locale regolare completo con corpo residuo k, essa è anche un ipercampo, con componente separabile banale; non occorre cioè investigare la natura di $\mathbf{P}$. Invece, per stabilire che una iperalgebra linearmente compatta è un ipercampo separabile, ossia isomorfo ad un $R_{0,n}$, occorre proprio trovare le $e_{h_1} \,\overline{\times}\, ... \,\overline{\times}\, e_{h_n}$, con le proprietà descritte da 3.27, ivi compreso il $\mathbf{P}$; ed infatti, se nelle 3.27 si permette ad h di percorrere un qualsiasi gruppo abeliano infinito non isomorfo a cov C_p, si ottiene un'iperalgebra che, come algebra, è isomorfa ad $R_{0,1}$, ma che non è un ipercampo.

Le iperalgebre discrete che sono duali degli ipercampi sono per ora passate in sottordine; esse sono i prodotti di una $D_{n,0}$ per una «iperalgebra equidimensionale» nel senso di MC. Saranno chiamate *cocampi,* ed avranno un ruolo importante nel prossimo capitolo.

Un altro ente che non ha neppure fatto la sua comparsa, e che non avrà nessun ruolo nel resto di questa trattazione, è quello dei *gruppi analitici.* Sia R un'iperalgebra, o in particolare un ipercampo; per ogni k algebra topologica completa Ω si possono considerare gli omomorfismi continui P: $x \longrightarrow x(P)$ di R su Ω che applicano 1 su 1; se P, Q sono due di essi, si può definire $P + Q$ mediante la $x(P+Q) = \mu_\Omega(\mathbf{P}x)(P \otimes Q)$; se R possiede un'inversione, l'insieme di tali P diviene un gruppo, detto *gruppo analitico,* ed indicato con $G(R, \Omega)$; i suoi elementi ne sono i *punti.* Se Ω è «abbastanza grande», e se R è ristretto ad essere un ipercampo, gli omomorfismi fra gli R hanno dei duali fra i rispettivi $G(R, \Omega)$, e tale dualità si comporta nel modo migliore possibile, ossia: il $\sigma: R \longrightarrow S$ è su tutto S se e solo se il $\sigma': G(S, \Omega) \longrightarrow G(R, \Omega)$ dato da $x(\sigma' P) = (\sigma x)(P)$ è un isomomorfismo; σ è isomorfismo se e solo se σ' è su tutto $G(R, \Omega)$, ecc.. Si ha per esempio $G(R_{0,1}, k) = \mathrm{cov}\, C_p$; $G(R_{r,s}, k) = 0$ (r, s primi fra loro); $G(R_{1,0}, k\{\xi])$, con ξ indeterminata, è isomorfo al gruppo delle unità di $k\{\xi]$ che sono $\equiv 1 \pmod{\xi k\{\xi]}$.

Appendice al Capitolo 3.

Notazioni come al principio del n⁰ 19; si è asserito nel n⁰ 19 che gli insiemi $U \otimes B + A \otimes V$ hanno intersezione ridotta al solo elemento 0. Quando le topologie non siano numerabili, la dimostrazione di questo fatto non è ovvia; espongo quindi una dimostrazione, dovuta ad F. Mantovani. Gli $U \otimes B + A \otimes V$ definiscono in $A \otimes B$ una topologia k-lineare eventualmente non di Hausdorff, ossia eventualmente senza la proprietà descritta; si tratta di dimostrare che essa è di Hausdorff, e per questo basta trovare, per ogni $x \in A \otimes B$ non nullo, un omomorfismo continuo σ_x di $A \otimes B$ su k tale che $\sigma_x x \neq 0$: infatti in tal caso $\sigma_x^{-1} 0$ è un intorno dello 0 in $A \otimes B$ che non contiene x.

Per dimostrare l'esistenza di tale σ_x, si scelgano delle basi $\{a_r\}$, $\{b_s\}$ di A, B rispettivamente, e sia $x \neq 0$ un elemento di $A \otimes B$, per esempio $x = \Sigma\, c_{rs}\, a_r \otimes b_s$, con i c_{rs} elementi non tutti nulli di k, e con la Σ estesa ad insiemi finiti R (per r), S (per s). Se per esempio $c_{r_0 s_0} \neq 0$, si scelgano degli omomorfismi continui α, β di A, B su k, tali che $\alpha a_r = \delta_{r_0 r}$, $\beta b_s = \delta_{s_0 s}$ ($r \in R$, $s \in S$); l'elemento σ_x cercato è allora quello che applica $\Sigma d_{ij}\, a_i \otimes b_j$ su $\Sigma d_{ij} (\alpha a_i)(\beta b_j)$: infatti $\sigma_x x = c_{r_0 s_0} \neq 0$.

Capitolo 4.

I bicampi.

32. In questo capitolo dovremo fare largo uso di limiti diretti ed inversi, ed è bene intendersi sulle topologie da assegnare loro. Sia $\mathcal{R}$ limite inverso di k-moduli R_i, ove k è un corpo, mediante gli omomorfismi σ_{ij} di R_i su tutto R_j ($i > j$); gli indici si suppone percorrano l'insieme degli interi, o un suo sottoinsieme; gli R_i siano dotati di topologie k-lineari, ed i σ_{ij} siano continui. Assegneremo ad $\mathcal{R}$ la topologia meno fina fra le k-lineari che rendono continui gli omomorfismi naturali σ_i di $\mathcal{R}$ su tutto R_i (al solito, la discreta è considerata la topologia più fina). Un sistema di intorni dello 0 in $\mathcal{R}$ per tale topologia è l'insieme dei V ciascuno dei quali è, per qualche i, immagine inversa in $\mathcal{R}$, secondo σ_i, di un intorno dello 0 in R_i. Se ogni R_i è una k-algebra topologica, tale è $\mathcal{R}$; e se la topologia di ogni R_i è R_i-lineare, quella di $\mathcal{R}$ risulta $\mathcal{R}$-lineare. Se ogni R_i è completo, anche $\mathcal{R}$ risulta completo.

Per quanto riguarda i limiti diretti, vi è una differenza sostanziale secondochè le topologie siano k-lineari o R_i-lineari; a noi interessa solo il secondo caso. Sia dunque $\mathcal{R}$ limite diretto delle k-algebre R_i mediante gli isomorfismi (di algebre) σ_{ij} di R_i su R_j $(i<j)$; ogni R_i sia dotata di una topologia R_i-lineare, ed i σ_{ij} siano continui. Assegneremo ad $\mathcal{R}$ la topologia più fina fra le $\mathcal{R}$-lineari che rendono continui tutti gli isomorfismi naturali σ_i di R_i su $\mathcal{R}$. Un sistema di intorni dello 0 in $\mathcal{R}$ è dato dagli ideali U di $\mathcal{R}$ tali che $U \cap \sigma_i R_i$ contenga, per ogni i, l'immagine secondo σ_i di un intorno dello 0 in R_i; un sistema cofinale con questo è l'$\mathcal{U}$ così definito: $U \in \mathcal{U}$ se e solo se esiste un'applicazione $i \longrightarrow U_i$, con U_i intorno dello 0 in R_i (e ideale di R_i), tale che $U = \Sigma_i (\sigma_i U_i)\mathcal{R}$. Il caso che ci interessa di più è quello in cui gli U_i possono essere scelti in modo che per ogni U_i di R_i, ed ogni $j>i$, $(\sigma_{ij} U_i) R_j$ sia aperto in R_j, e si abbia $(\sigma_{ij} U_i) R_j \cap \sigma_{ij} R_i = \sigma_{ij} U_i$; in tal caso i σ_{ij} sono bicontinui, i σ_i risultano anch'essi bicontinui, ed un sistema di intorni dello 0 in $\mathcal{R}$ è dato dai $(\sigma_i U_i)\mathcal{R}$ al variare di i, e quando U_i percorre, per ogni i, un sistema di intorni dello 0 in R_i che siano ideali.

Da notare che $\mathcal{R}$ può benissimo essere non completa anche quando tutte le R_i sono complete.

33. Sia R un ipercampo sul corpo k (algebricamente chiuso, di caratteristica p), sia D il cocampo duale di R, e sia n un intero ≥ 0; nelle notazioni del 3.22, si definiscano gli enti seguenti (cfr. 3.38 e 3.40):

$$p^n\iota R \longrightarrow J_n \mathrel{-\!\!\mid\!\!\!\longrightarrow} D^n \longrightarrow C_n \mathrel{-\!\!\mid\!\!\!\longrightarrow} p^n\iota R\,;$$

pongasi $R^n = R/J_n$; sia σ_n l'omomorfismo naturale di R su tutto R^n, e sia τ_n l'isomorfismo di immersione di D^n in D. Allora R^n, D^n sono iperalgebre, duali l'una dell'altra; per 3.42 la loro dimensione, come k-moduli, coincide col grado di $p^n\iota$; questo a sua volta è dato da $p^{n\nu}$, se $\nu = \operatorname{ord} R = \operatorname{ord} \mathcal{C}R$. Definiamo gli omomorfismi p_+, p_- di iperalgebre finite richiedendo che siano commutativi i seguenti diagrammi, duali l'uno dell'altro:

4.1
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p\iota"] \arrow[d, "\sigma_n"'] & R \arrow[d, "\sigma_{n+1}"] \\ R^n \arrow[r, "p_+"'] & R^{n+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D & D \arrow[l, "p\iota"'] \\ D^n \arrow[u, "\tau_n"] & D^{n+1} \arrow[l, dashed, "p_-"] \arrow[u, "\tau_{n+1}"'] \end{tikzcd};$$

quindi p_- è duale di p_+; il p_+ è un isomorfismo, e il p_- è su tutto D^n. Vi sono poi gli omomorfismi naturali $\sigma_{n+1,n}$ di R^{n+1} su tutto R^n, e $\tau_{n,n+1}$ di immersione di D^n in D^{n+1}; si vede facilmente che

4.2
$$\begin{aligned} p\iota_{R^n} &= \sigma_{n+1,n}\, p_+ = p_+\, \sigma_{n+1,n} \\ p\iota_{D^n} &= p_-\, \tau_{n,n+1} = \tau_{n,n+1}\, p_- . \end{aligned}$$

Infine, R è il limite inverso degli R^n secondo i $\sigma_{n,m}$, e D è il limite diretto dei D^n secondo i $\tau_{n,m}$; ciò vale non solo come k-moduli topologici, ma anche come iperalgebre.

4.3 **Teorema.** *Nelle notazioni precedenti, siano $\widetilde{R}, \widetilde{D}$ rispettivamente il limite inverso $D^0 \xleftarrow[p_-]{} D^1 \xleftarrow[p_-]{} D^2 \xleftarrow[p_-]{} \dots$, e il limite diretto $R^0 \xrightarrow[p_+]{} R^1 \xrightarrow[p_+]{} R^2 \xrightarrow[p_+]{} \dots$; allora $\widetilde{R}, \widetilde{D}$ sono rispettivamente un ipercampo e un cocampo, duali l'uno dell'altro secondo la dualità indotta da quella fra gli R^n e i D^n; si ha inoltre $\widetilde{R}^n \cong D^n$, $\widetilde{D}^n \cong R^n$. Infine, $\mathcal{C}\widetilde{R}$ è isomorfo al duale di $\mathcal{C}R$.*

Dim. Se il risultato è vero per ciascun fattore di un prodotto tensoriale completo, è vero per il prodotto; basta quindi dimostrarlo in alcuni casi speciali.

Caso 1. Suppongasi $D = D_{1,0}$; in tal caso, nelle notazioni del 3.27, J_n è l'insieme delle combinazioni lineari infinite, a coefficienti in k, degli e_h tali che $p^n h \neq 0$ (cfr. 3.30); quindi D^n ha per base l'insieme degli f_h tali che $p^n h = 0$. Il μ, l'ε, e il $\mathbf{P}$ di D^n sono dati da 3.26; il p_-, per 4.1 e 3.30, è dato da $p_- f_h = f_{ph}$. Se $S = R_{1,0}$, occorre far vedere che vi è un isomorfismo α di D^n su tutto S^n (tralasciando di apporre un indice n ad α) che rende commutativo il diagramma

4.4
$$\begin{tikzcd} D^{n+1} \arrow[r, "p_-"] \arrow[d, "\alpha"'] & D^n \arrow[d, "\alpha"] \\ S^{n+1} \arrow[r, "\sigma_{n+1,n}"'] & S^n \end{tikzcd} .$$

Ora, S è l'anello locale $k\{x\}$, con $\mathbf{P}x = \Phi(x \mathbin{\bar\times} 1,\ x \mathbin{\bar\times} 1, \dots;\ 1 \mathbin{\bar\times} x,\ 1 \mathbin{\bar\times} x, \dots)$; ma per quanto esposto a p. 359 di MC, vi è un $y \in S$ tale che $S = k\{y-1\}$, $\mathbf{P}y = y \mathbin{\bar\times} y$, $\varepsilon y = 1$ (la relazione fra x ed y è $y = F(x)$, con F data dal 2.9). Pertanto una base di S^n è data dai $\sigma_n y^i$, ove $i = 0, 1, \dots, p^n - 1$, e ove

$(\sigma_n y)^{p^n} = 1$. Se si definisce $\alpha f_{p-n_i} = \sigma_n y^i$, si constata appunto che α è un isomorfismo di iperalgebre di D^n su tutto S^n, che rende il 4.4 commutativo. Ciò dimostra che $\widetilde{R}$ esiste ed è isomorfo a $R_{1,0}$.

Caso 2. Suppongasi $D = D_{0,1}$; dal 5.3 di MC sappiamo che esiste un vettore di Witt $d = (d_0, d_1, ...)$, $d_i \in D$, tale che $\mathbf{P}d = d \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, d$, e tale che i monomi monici nelle d_i, di grado $< p$ in ciascun d_i, formino una base di D come spazio vettoriale su k; inoltre $\pi d_i = d_i^p = d_i$. Il D^n è il B del 5.7 di MC quando il σ di tale enunciato sia $p^n\iota$; quindi una base di D^n è formata dai monomi monici, di grado $< p$ in ciascun d_i, nelle $d_0, d_1, ..., d_{n-1}$. È $\varepsilon d_i = 0$, $\mathbf{P}d_i = \Phi\,(d_i \,\overline{\times}\, 1, ..., d_0 \,\overline{\times}\, 1, 0, 0, ... ; 1 \,\overline{\times}\, d_i, ..., 1 \,\overline{\times}\, d_0, 0, 0, ...)$, $p_- \, d_{i+1} = d_i$, $p_- \, d_0 = 0$.

Se $S = R_{0,1}$, vogliamo trovare un α di D^n su tutto S^n che soddisfi il 4.4. Nelle notazioni del 3.31, $p^n\iota S$ è generato dalle y_{-n-1}, $y_{-n-2}, ...$ (come k-algebra chiusa); quindi S^n ha per base, come k-modulo libero, i monomi monici nelle $\sigma_n y_{-1}, ..., \sigma_n y_{-n}$, di grado $< p$ in ogni $\sigma_n y_i$; e inoltre $\pi(\sigma_n y_{-i}) = \sigma_n y_{-i}$. Il $\mathbf{P}$ e l'ε sono dati dal 3.31, e pertanto l'α cercato è: $\alpha d_{n-i} = \sigma_n y_{-i}$. Ciò dimostra che $\widetilde{R}$ esiste ed è isomorfo ad $R_{0,1}$.

Caso 3. Suppongasi che $D = D_r$, ossia che in D manchino i fattori tensoriali che sono duali di ipercampi separabili o logaritmici; in tal caso vi è ciò che in MC è indicato con $\mathcal{C}(D)$ (p. 351 di MC), e che qui sarà indicato con $\mathcal{V}D$: il K-modulo canonico dei vettori canonici di Witt a componenti in D, che è anche un T-modulo canonico. Nella nomenclatura di MC, $\mathcal{V}D$ è il « trasposto di $\mathcal{C}(R)$ » (cfr. 7.2 di MC). Occorre notare però che se si considerano un covettore $x = (..., x_{-2}, x_{-1})$, ed un vettore $\{c\} = (c, 0, 0, ...)$, $c \in k$, il prodotto $\{c\}x$ usato in MC è $\{c\}x = (..., c^{p^{-1}} x_{-2}, cx_{-1})$ (p. 366 di MC), mentre quello usato nel presente lavoro (n° 7) è $\{c\}x = (..., c^{p^{-2}} x_{-2}, c^{p^{-1}} x_{-1})$. Se perciò x denota un covettore, ed x' è lo stesso covettore nel senso di MC, l'applicazione $x \longrightarrow x'$ è un π^{-1} semiisomorfismo di K-moduli. Ne segue che il $\mathcal{C}(R)$ del n° 7 di MC è isomorfo a $t\mathcal{C}R$, e che quindi $t\mathcal{C}R$ è il « trasposto » di $\mathcal{V}D$ (7.2 di MC). Ma allora, per il 3.10 di MC, $\mathcal{C}R$ è il duale di $\mathcal{V}D$, sia nel senso del n° 3 di MC, che nel senso del n° 18.

Sia $d_1, ..., d_m$ un insieme minimo di generatori di $\mathcal{V}D$ come T modulo canonico, e sia d la matrice ad una colonna delle d_i. Per il 2.8 di MC vi è una matrice C, ad elementi in T, tale che $\pi d = Cd$. Sia $S = S_r$ l'ipercampo tale che $\mathcal{C}S$, considerato come T-modulo canonico, sia isomorfo a $\mathcal{V}D$ (3.40), e siano $x_1, ..., x_m$ i corrispondenti di $d_1, ..., d_m$ in $\mathcal{C}S$; definiamo, in questo caso, dei D_0^r, S_0^r non per mezzo dei $p^r\iota$, ma per mezzo dei t^r; nelle notazioni del 3.22:

$$\pi^r R \longrightarrow J_r^0 \dashv\!\!\longrightarrow D_0^r, \quad t^r S \longrightarrow H_r^0, \quad S_0^r = S/H_r^0.$$

In luogo del secondo diagramma del 4.1 occorre usare il

4.5
$$\begin{tikzcd} D & D \arrow[l, "t"'] \\ D_0^r \arrow[u, "\tau_r^0"] & D_0^{r+1} \arrow[l, "t_-"] \arrow[u, "\tau_{r+1}^0"'] \end{tikzcd},$$

ove ora t_- è un π^{-1}-semiomomorfismo di D_0^{r+1} su tutto D_0^r.

Troveremo un π^{-r}-semiisomorfismo α_0 di D_0^r su tutto S_0^r che rende commutativo il diagramma

4.6
$$\begin{tikzcd} D_0^{r+1} \arrow[r, "t_-"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & D_0^r \arrow[d, "\alpha_0"] \\ S_0^{r+1} \arrow[r, "\sigma_{n+1,n}^0"'] & S_0^r \end{tikzcd},$$

che sostituisce il 4.4. In tal modo avremo dimostrato che S è isomorfo al limite inverso dei D_0^r mediante i t_-. A tale scopo, osserviamo anzitutto che per il 5.6 di MC D_0^r è generato, come k-algebra, dai d_{ij} con $j < r$; la dimensione di D_0^r come spazio vettoriale su k è la stessa della dimensione di $R_0^r = R/J_r^0$, e questa è, per 3.42, il grado del semiomomorfismo π^r di R, ossia p^{mr}; poichè tutti i d_{ij} formano una p-base di D, quelli con $j < r$ formano una p-base di D_0^r. La descrizione completa di D_0^r consiste, oltre che di questo fatto, delle proprietà seguenti:

1. $\varepsilon d_{ij} = 0$;

2. posto $d'_i = (d_{i,0}, \dots, d_{i,r-1})$ (vettore finito di Witt), detta d' la matrice ad una colonna i cui elementi sono i d'_i, chiamata C' la matrice ottenuta da C troncando ogni elemento di K dopo la componente di indice $r-1$, e fatta la convenzione che l'operatore t, applicato al vettore finito $(z_0, \dots, z_{r-1})$, produca $(0, z_0, \dots, z_{r-2})$, si ha: $\pi d' = C' d'$;

3. $\mathbf{P} d'_i = d'_i \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, d'_i$.

Inoltre, il t_- (fornito da 4.5) di D_0^{r+1} su D_0^r è dato da: $t_- d_{i,j+1} = d_{i,j}$ $(j = 0, \dots, r-2)$, $t_- d_{i,0} = 0$.

D'altra parte, una p-base di S_0^r è data dai $\sigma_r^0 x_{i,-j}$ per $j = 1, \dots, r$, ove σ_r^0 ha il nucleo H_r^0; le analoghe di 1, 2, 3 per S_0^r sono:

1'. $\varepsilon\sigma_r^0 x_{i,-j} = 0$;

2'. posto $x_i' = (\sigma_r^0 x_{i,-r}, \dots, \sigma_r^0 x_{i,-1})$ (vettore finito di Witt), e detta x' la matrice ad una colonna i cui elementi sono gli x_i', si ha $\pi x' = C'^{\pi^{-r}} x'$;

3'. $\mathbf{P} x_i' = x_i' \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, x_i'$.

Il π^{-r}-semiisomorfismo α_0 di D_0^r su tutto S_0^r che soddisfa la 4.6 è allora dato da: $\alpha_0 d_i' = x_i'$, ossia $\alpha_0 d_{i,j} = \sigma_r^0 x_{i,j-r}$ $(j = 0, \dots, r-1)$.

Visto così che S è isomorfo al limite inverso dei D_0^r mediante i t_-, occorre intanto controllare che $\mathcal{C}S$ sia isomorfo al duale di $\mathcal{C}R$, ossia, come si è visto, a $\mathcal{V}D$; ma ciò è conseguenza immediata del fatto che $\pi d = Cd$ e $\pi x = Cx$. Occorre poi controllare che $S \cong \tilde{R}$, ossia che S sia anche isomorfo al limite inverso dei D^n mediante i p_-; ciò si otterrà dimostrando l'esistenza di un isomorfismo α di D^n su tutto S^n, per ogni n, che renda commutativo il diagramma 4.4. Iniziamo con l'osservare che, dato n, per r elevato l'omomorfismo naturale σ_n di S su tutto S^n si spezza in $\sigma_n = \eta_n^r \sigma_r^0$, ove gli η_n^r sono omomorfismi di S_0^r su tutto S^n che soddisfano la relazione:

$$4.7 \qquad \eta_n^r = \sigma_{n+1,\,n}\, \eta_{n+1}^r, \qquad \eta_n^{r+1} = \eta_n^r\, \sigma_{r+1,\,r}^0 .$$

Sia poi $d \in D$; poiché $p\iota$ è omomorfismo di D su tutto D, esiste un $d' \in D$ tale che $p^n \iota d' = d$; inoltre, poichè per r elevato il nucleo di t_D^r contiene quello di $p^n \iota_D$, l'elemento $t^r d'$ di D è univocamente determinato da d; si ha cioè un π^{-r}-semiomomorfismo $d \longrightarrow t^r d'$ di D su tutto D, che indicheremo con $(t^r p^{-n} \iota)$. Se d appartiene anche a D_0^r, ricordando che questa è la massima sottoiperalgebra di D che soddisfa la $t^r D_0^r = 0$ si conclude che $(t^r p^{-n} \iota)\, d \in D^n$: esiste cioè un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} D & D \arrow[l, "(t^r p^{-n} \iota)"'] \\ D^n \arrow[u, "\tau^n"] & D_0^r \arrow[l, "(t_-^r p_-^{-n})"] \arrow[u, "\tau_r^0"'] \end{tikzcd} ,$$

ove $(t_-^r p_-^{-n})$ è un π^{-r}-semiomomorfismo di D_0^r su tutto D^n; come conseguenza delle 4.5 e 4.1 si ha:

$$4.8 \qquad (t_-^{r+1} p_-^{-n}) = (t_-^r p_-^{-n})\, t_-, \quad (t_-^r p_-^{-n}) = p_-\, (t_-^r p_-^{-n-1}).$$

Osserviamo ora che il nucleo di $(t_-^r p_-^{-n})$ ha $p^n \iota D_0^r$ come nocciolo, mentre il nucleo di η_n^r ha come nocciolo $p^n \iota S_0^r$; pertanto esiste un isomorfismo $\beta_n^{(r)}$ di

D^n su tutto S^n che rende commutativo il

$$\begin{tikzcd} D_0^r \arrow[r, "(t_-^r\, p_-^{-n})"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & D^n \arrow[d, "\beta_n^{(r)}"] \\ S_0^r \arrow[r, "\eta_n^r"'] & S^n \end{tikzcd} .$$

In virtù delle 4.6, 4.8, 4.7, $\beta_n^{(r)}$ è indipendente da r, quando r è elevato, e può quindi essere indicato con β_n; e in virtù delle 4.8, 4.7 è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} D^{n+1} \arrow[r, "p_-"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"'] & D^n \arrow[d, "\beta_n"] \\ S^{n+1} \arrow[r, "\sigma_{n+1,n}"'] & S^n \end{tikzcd} ,$$

che è appunto il 4.4.

Caso 4. In tutti i casi precedenti si è costruito $\tilde{R}$ partendo da D; si dovrebbe ora costruire, in ogni caso, $\tilde{D}$ partendo da R. Ma il metodo è lo stesso, ed anzi ciascuna delle dimostrazioni precedenti può essere letta in ordine inverso, dando appunto la costruzione di $\tilde{D}$ a partire da R. Il resto dell'enunciato è palese, C. V. D..

Torniamo ora sulle 4.2, alla luce del 4.3; si constata che il $\sigma_{n+1,n}$ di R^{n+1} su tutto R^n non è altro che il p_- di $\tilde{D}^{n+1}$ su tutto $\tilde{D}^n$; e che il $\tau_{n,n+1}$ di D^n su D^{n+1} è il p_+ di $\tilde{R}^n$ su $\tilde{R}^{n+1}$; essi saranno perciò così indicati, e le 4.2 diverranno:

4.9 $$p\iota_{R^n} = p_- p_+ = p_+ p_- .$$

34. Premettiamo che per i cocampi verrà usata la stessa nomenclatura che si usa per gli ipercampi loro duali (ordine, dimensioni, ecc.). Un *bicampo* su k è un'iperalgebra $\mathcal{D}$ su k tale che:

1. $p\iota$ è un isomorfismo (bicontinuo) di $\mathcal{D}$ su tutto $\mathcal{D}$;

2. esiste un omomorfismo σ di $\mathcal{D}$ su tutto un cocampo D (su k);

3. $\mathcal{D}$ è universale rispetto alle proprietà 1 e 2, con lo stesso D, ossia: se $\mathcal{D}'$, σ', D godono delle 1 e 2, esiste un omomorfismo τ di $\mathcal{D}'$ su tutto $\mathcal{D}$ tale che $\sigma' = \sigma\tau$.

Dato D, si costruisca il limite inverso $\mathcal{D}$ della $D \xleftarrow{p\iota} D \xleftarrow{p\iota} D \xleftarrow{p\iota} \ldots$; esso soddisfa ovviamente alla 2; soddisfa poi alla 1 in quanto $p\iota_{\mathcal{D}}$ è su tutto $\mathcal{D}$ perchè $p\iota_D$ è su tutto D; e inoltre $p\iota_{\mathcal{D}}$ è un isomorfismo bicontinuo per motivi ovvii. Se poi $\mathcal{D}'$, σ' sono come in 3, il τ è ottenuto facendo corrispondere ad un $d' \in \mathcal{D}'$ l'elemento $d = \{\sigma' d', \sigma'(p\iota)^{-1} d', \sigma'(p\iota)^{-2} d', \dots\} \in \mathcal{D}$. Reciprocamente, dato un bicampo $\mathcal{D}$, esso è isomorfo a quello ora costruito come limite inverso, per mezzo dell'isomorfismo che a $d \in \mathcal{D}$ fa corrispondere il $\{\sigma d, \sigma(p\iota)^{-1} d, \sigma(p\iota)^{-2} d, \dots\}$.

4.10 LEMMA. *Siano $\mathcal{D}$, D, σ un bicampo, un cocampo, e un omomorfismo che soddisfino le condizioni 1, 2, 3 sopraelencate. Sia τ un omomorfismo di $\mathcal{D}$ su tutto un cocampo D'; allora esistono un intero $n \geq 0$ e un omomorfismo τ' di D su tutto D' che rendono commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"'] & D' \arrow[d, "p^n \iota"] \\ D \arrow[r, "\tau'"'] & D' \end{tikzcd} .$$

DIM. Basta dimostrare che il nucleo J di σ è contenuto nel nucleo di $p^n \tau$, per n elevato. E infatti, essendo D' discreto, deve esistere un intorno U dello 0 in $\mathcal{D}$ tale che $\tau U = 0$; essendo $\mathcal{D}$ limite inverso di $D \xleftarrow[p\iota]{} D \xleftarrow[p\iota]{} \dots$, si può supporre che tale U consista dei $d \in \mathcal{D}$ colla proprietà $\sigma(p^n \iota)^{-1} d = 0$; è cioè $U = p^n \iota J$. Quindi la $\tau U = 0$ significa $p^n \tau J = 0$, C. V. D..

4.11 LEMMA. *Siano $\mathcal{D}$, D, σ e $\mathcal{D}'$, D', σ' due terne che soddisfano le condizioni 1, 2, 3; sia τ un omomorfismo di $\mathcal{D}$ su D'; esiste allora un unico omomorfismo τ_0 di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{D}'$ che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[dr, "\tau"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "\sigma'"] \\ & D' \end{tikzcd} .$$

Poi, τ è su tutto D' se e solo se τ_0 è su tutto $\mathcal{D}'$. Infine, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ sono isomorfi se e solo se D, D' sono isogeni.

DIM. Un τ_0 si ottiene ponendo, per $d \in \mathcal{D}$, $\tau_0 d = \{\tau d, \tau(p\iota)^{-1} d, \tau(p\iota)^{-2} d, \dots\} \in \mathcal{D}'$. L'unicità discende dall'osservare che per un τ_0 qualsiasi si deve avere $\sigma' \tau_0 d = \tau d$, ecc. La seconda asserzione è conseguenza immediata della costruzione di τ_0. Infine, il diagramma del 4.11 e quello del 4.10, uniti, danno il seguente diagramma commutativo (¹)

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[dr, "\tau"] \arrow[dd, "\sigma"'] & D' \arrow[d, "\sigma'"] \\
& D' \arrow[d, "p^{n_i}"] \\
D \arrow[r, "\tau'"'] & D'
\end{tikzcd},$$

donde l'asserzione sulle isogenie, C. V. D..

Si vede da quanto precede che un cocampo definisce un bicampo a meno di isomorfismi, e che un bicampo definisce un cocampo a meno di isogenie; il bicampo e il cocampo si diranno allora *legati* l'un l'altro *da* σ.

35. Sia $\mathcal{D}$ un bicampo, legato da σ al cocampo D; sia R l'ipercampo duale di D; sia D^n il nocciolo del nucleo di $p^n \iota_D$, che è lo stesso significato attribuito a D^n nel n^0 33. Indicheremo con $\widetilde{R}_n$ l'insieme dei $d \in \mathcal{D}$ tali che $\sigma(p\iota)^{-i} d \in D^{n+i}$ per ogni intero $i \geq 0$. Se gli elementi di $\mathcal{D}$ vengono scritti sotto la forma $d = \{d_0, d_1, \dots\}$, con $d_i \in D$ e $p\iota d_{i+1} = d_i$, si avrà $d \in \widetilde{R}_n$ se e solo se $d_i \in D^{n+i}$ per ogni i; pertanto $\widetilde{R}_n$ è il limite inverso della $D^n \xleftarrow[p]{} D^{n+1} \xleftarrow[p]{} D^{n+2} \xleftarrow[p]{} \dots$, ed è quindi bicontinuamente isomorfo ad $\widetilde{R}$ per il 4.3. Si ha ovviamente $\widetilde{R}_0 \subseteq \widetilde{R}_1 \subseteq \dots$, e l'unione degli $\widetilde{R}_i$ è una sottoalgebra di $\mathcal{D}$, che verrà sempre denotata con $\mathcal{D}^0$; essa è isomorfa al limite diretto di $\widetilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \widetilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \widetilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \dots$, per 4.1 e 4.9. La topologia di ogni $\widetilde{R}_i$, ossia quella indotta dalla topologia di $\mathcal{D}$, è anche quella di ipercampo, e la topologia di $\mathcal{D}^0$, indotta da quella di $\mathcal{D}$, è anche quella di limite diretto (n^0 32).

4.12 TEOREMA. *Nelle notazioni precedenti, $\mathcal{D}^0$ è univocamente determinata da $\mathcal{D}$ (ossia è indipendente dalla scelta di D e σ), ed è densa in $\mathcal{D}$.*

DIM. Per la prima asserzione, suppongasi che $\mathcal{D}$ sia legata a D da σ e a D' da σ'; allora, per 4.10 esiste un intero m tale che $p^m \sigma' = \tau' \sigma$, ove τ' è una isogenia di D su tutto D'. Sia $\widetilde{R}_n$ costruito con D, σ, ed $\widetilde{R}'_n$ con D', σ'. Se $d \in \widetilde{R}_n$ si ha $\sigma(p\iota)^{-i} d \in D^{n+i}$ per ogni i; quindi $p^m \sigma' (p\iota)^{-i} d \in \tau' D^{n+i} \subseteq D'^{n+i}$, ossia $\sigma' (p\iota)^{m-i} d \in D'^{(n+m)+(i-m)}$, e infine $d \in \widetilde{R}'_{n+m}$. Quindi $\widetilde{R}_n \subset \widetilde{R}'_{n+m}$, e pertanto il $\mathcal{D}^0$ costruito con σ e D è contenuto in quello costruito con σ' e D'; ciò prova, per la simmetria delle relazioni di isogenia, che essi coincidono.

(¹) Errata: in questo diagramma leggasi $p^n \iota$ in luogo di p^{n_ι}.

Sia poi $d \in \mathcal{D}$, e sia U l'intorno dello 0 in $\mathcal{D}$ formato dai $\delta \in \mathcal{D}$ per i quali $\sigma(p\iota)^{-n}\delta = 0$. Per un m opportuno si avrà $\sigma(p\iota)^{-n} d \in D^{m+n}$, onde $\sigma(p\iota)^{-i} d \in D^{m+i}$ quando $i \leq n$; se allora si sceglie d' in $\widetilde{R}_m$ in modo che $\sigma(p\iota)^{-i} d' = \sigma(p\iota)^{-i} d$ per $i \leq n$, si constata subito che $d - d' \in U$, C. V. D..

Il 4.3, unito a quanto precede, permette di costruire il seguente diagramma commutativo, nel quale si riassumono i legami fra D, $\mathcal{D}$, R, $\mathcal{D}^0$, D^n; in esso alcune successioni che definiscono limiti diretti o inversi vengono prese aperte anche a sinistra (o in basso), il che evidentemente non cambia nulla; $\varkappa$ è l'isomorfismo di immersione di $\mathcal{D}^0$ in $\mathcal{D}$; le successioni verticali definiscono limiti inversi; quelle orizzontali, diretti:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "p\iota"] & \widetilde{R} \arrow[r, "p\iota"] & \widetilde{R} \arrow[r, "p\iota"] & \cdots & & \mathcal{D}^0 \arrow[r, "\varkappa"] & \mathcal{D} \\
& \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & & & & \vdots \arrow[d, "p\iota"'] \\
\cdots \arrow[r, "p_+"] & D^3 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D^4 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots & & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
\cdots \arrow[r, "p_+"] & D^2 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D^3 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots \arrow[d, "p_-"'] & & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
\cdots \arrow[r, "p_+"] & D^1 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D^2 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D^3 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
& D^0 \arrow[r, "p_+"] & D^1 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D^2 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
& & D^0 \arrow[r, "p_+"] & D^1 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
& & & D^0 \arrow[r, "p_+"] & \cdots & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
& & & & & & \cdot
\end{tikzcd}$$

Si noti che per il 4.9 si potrebbero aggiungere delle frecce oblique, così:

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] \arrow[dr, "p\iota"] & D^3 \arrow[d, "p_-"] \\ D^1 \arrow[r, "p_+"'] & D^2 \end{tikzcd} \; .$$

36.

4.13 Teorema. *Sia $\mathcal{D}$ un'iperalgebra su k; essa è un bicampo se e solo se:*

1. *$p\iota$ è un isomorfismo bicontinuo di $\mathcal{D}$ su tutto $\mathcal{D}$;*
2. *esiste un isomorfismo τ di un ipercampo $\tilde{R}$ su $\mathcal{D}$;*
3. *$\mathcal{D}$ è universale rispetto alle proprietà 1 e 2, con lo stesso $\tilde{R}$, ossia: se $\mathcal{D}'$, τ', $\tilde{R}$ godono di 1 e 2, esiste un isomorfismo ν di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{D}'$ tale che $\tau' = \nu\tau$.*

In tal caso τ risulta bicontinuo.

Dim. Se $\mathcal{D}$ è un bicampo, esso soddisfa le 1, 2 (con τ bicontinuo) per quanto esposto ai nn$^{\text{i}}$ 34 e 35; quanto alla 3, si ha subito che $\mathcal{D}'$ deve contenere $\tau'\tilde{R}$, e quindi tutti i $(p\iota)^{-n}\tau'\tilde{R}$, e quindi la loro unione $\mathcal{D}'^0$. Ora, si verifica immediatamente che $\tau'\tilde{R} \cong \tau\tilde{R} = \tilde{R}_0$, che $(p\iota)^{-n}\tau'\tilde{R} \cong \tilde{R}_n$ ($\tilde{R}_n$ ha lo stesso significato che ha nel n^0 35), e che nell'isomorfismo l'immersione di $\tilde{R}_n$ in $\tilde{R}_{n+1}$ corrisponde al $p\iota$ di $(p\iota)^{-n}\tau'\tilde{R}$. Quindi $\mathcal{D}'^0 \cong \mathcal{D}^0$, e pertanto $\mathcal{D}'$, essendo completo perchè iperalgebra, conterrà una sottoiperalgebra isomorfa a $\mathcal{D}$.

Viceversa, suppongasi che $\mathcal{D}$ soddisfi le 1, 2, 3; ciò significa che $\mathcal{D}$ è isomorfo al completamento del limite diretto $\mathcal{D}^0$ di $\tilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \tilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \tilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \dots$, con la topologia che gli compete secondo il n^0 32; si noti che i $p\iota$ devono essere bicontinui per 1, onde la topologia è univocamente determinata; il τ è un isomorfismo, continuo, di un ipercampo su tutta un'iperalgebra, ed è necessariamente bicontinuo. Ma allora, per il n^0 35, $\mathcal{D}$ è anche isomorfo al limite inverso di $D \xleftarrow[p\iota]{} D \xleftarrow[p\iota]{} D \xleftarrow[p\iota]{} \dots$, C. V. D..

Quando un bicampo $\mathcal{D}$ è dato mediante un ipercampo $\tilde{R}$ e un isomorfismo τ, indicheremo il bicampo anche con $\tilde{\mathcal{R}}$, e indicheremo con $\tilde{\mathcal{R}}^0$ il $\mathcal{D}^0$, ossia il limite diretto di $\widetilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \widetilde{R} \xrightarrow[p\iota]{} \dots$; naturalmente, se si dà R anzichè $\widetilde{R}$, si scriverà $\mathcal{R}$ e non $\widetilde{\mathcal{R}}$. Si dirà ancora che R, $\mathcal{R}$ sono *legati* l'un l'altro *da* τ. È utile saper trovare un D e σ quando siano dati $\widetilde{R}$ e τ, così come nel n° 35 si sono trovati $\widetilde{R}$ e τ quando erano dati D e σ; il diagramma del n° 35 mostra che il nucleo dell'omomorfismo σ di $\widetilde{\mathcal{R}}$ su tutto D è l'ideale chiuso J di $\widetilde{\mathcal{R}}$ tale che $J \cap \widetilde{R}_n$ sia l'ideale J_n di $\widetilde{R}_n$, ossia quello il cui nocciolo è $p^n\iota\, \widetilde{R}_n = \widetilde{R}_0$; in altre parole, J è l'ideale chiuso di $\widetilde{\mathcal{R}}$ generato da $\widetilde{R}_0^+ = \tau\, \widetilde{R}^+$.

4.14 LEMMA. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, R un ipercampo legato ad $\mathcal{R}$ da τ; sia ν un isomorfismo (necessariamente bicontinuo) di un ipercampo R' su $\mathcal{R}$; allora esistono un intero $n \geq 0$, e un isomosfismo bicontinuo ν' di R' su R che rendono commutativo il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\nu'} & R \\ {\scriptstyle p^n\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ R' & \xrightarrow[\nu]{} & \mathcal{R} \end{array} .$$

DIM. La bicontinuità di ν discende dalla continuità come nella dimostrazione del 3.40. Se τ e ν vengono considerati come immersioni, basta dimostrare che $p^n\iota\, R' \subseteq R$ per n elevato. Ora, R' è generato, come k algebra completa, da un numero finito di suoi elementi canonici $x_1, \dots, x_n$ (le componenti di posto -1 in un insieme libero di generatori di $\mathcal{C} R'$), e dai $t^i x_j$ $(i = 1, 2, \dots)$; se si dimostra che $x_i \in \mathcal{R}^0$ per ogni i, ne segue $p^n\iota x_i \in R$ per ogni i e per n grande, e perciò anche $p^n\iota R' \subseteq R$. Notiamo che se $\mathcal{R}$ è legato al cocampo $\widetilde{D}$ da σ, σ induce un omomorfismo continuo di R' su $\widetilde{D}$; poichè $\widetilde{D}$ è discreto e $\sigma R'$ è linearmente compatto, ne segue che $\sigma R'$ è finito, ossia è una sottoiperalgebra finita di $\widetilde{D}$. Ma allora, per un opportuno m, è $\sigma R' \subseteq \widetilde{D}^m$, e in particolare $\sigma x \in \widetilde{D}^m$ se $x \in R'$; quindi $\sigma(p\iota)^{-i} x$ appartiene all'immagine inversa in $\widetilde{D}$, secondo $p^i\iota$, di $\widetilde{D}^m$. Se x è anche elemento canonico di R', questa condizione comporta che $\sigma(p\iota)^{-i} x \in \widetilde{D}^{m+i}$, ossia che $x \in R_m$; ciò prova appunto che $R' \subseteq \mathcal{R}^0$, C. V. D..

Il 4.14 dà anche il

4.15 COROLLARIO. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo; allora $\mathcal{R}^0$ è l'unione di tutti i sottoipercampi di $\mathcal{R}$; se quindi ν è un omomorfismo su $\mathcal{R}$ di un bicampo $\mathcal{S}$, è $\nu\mathcal{S}^0 \subseteq \mathcal{R}^0$.*

4.16. Lemma. *Siano $\mathcal{R}$, R un bicampo e un ipercampo legati da τ, e siano analogamente $\mathcal{R}'$, R' legati da τ'; sia ν un omomorfismo di R' su $\mathcal{R}$; esiste allora un unico omomorfismo ν_0 di $\mathcal{R}'$ su $\mathcal{R}$ che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\tau'"'] & \mathcal{R} \\ \mathcal{R}' \arrow[ur, "\nu_0"'] & \end{tikzcd}$$

Poi, ν è un isomorfismo se e solo se tale è ν_0. Infine, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ sono isomorfi se e solo se R, R' sono isogeni.

Dim. Per 4.14, $\nu R'$ è contenuto in $\mathcal{R}^0$; perciò ν_0 si ottiene così (su $\mathcal{R}'^0$): se $x \in \mathcal{R}'^0$, si cerchi un n tale che $p^n \iota x \in R'$ (ove τ' si considera come un'immersione); si costruisca $\nu p^n \iota x$, e si ponga $\nu_0 x = (p\iota)^{-n} \nu p^n \iota x$. Il resto è immediato, C. V. D..

Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, legato all'ipercampo R da τ; poichè $R = R_t \mathbin{\bar{\times}} R_r \mathbin{\bar{\times}} R_\pi$ si ha, con evidente significato dei simboli, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_t \mathbin{\bar{\times}} \mathcal{R}_r \mathbin{\bar{\times}} \mathcal{R}_\pi$; si indichi con $\mathcal{R}_{r,s}$ il bicampo legato a $R_{r,s}$; allora, per 4.16, si ha sempre: $\mathcal{R}_t \cong \mathcal{R}_{0,n} = \mathcal{R}_{0,1} \mathbin{\bar{\times}} \ldots \mathbin{\bar{\times}} \mathcal{R}_{0,1}$ per qualche n; $\mathcal{R}_\pi \cong \mathcal{R}_{m,0} = \mathcal{R}_{1,0} \mathbin{\bar{\times}} \ldots \mathbin{\bar{\times}} \mathcal{R}_{1,0}$ per qualche m; mentre $\mathcal{R}_r$ è sempre isomorfo al prodotto tensoriale completo di vari $\mathcal{R}_{r_i, s_i}$, con r_i, s_i primi fra loro e univocamente determinati. Si noti anche che se $\mathcal{R}$ è legato all'ipercampo R, esso è anche legato al cocampo $\tilde{D}$, se D è il duale di R; quindi, per esempio, $\mathcal{R}_{0,1}$ è legato al $\tilde{D}$ con $D = D_{1,0}$, ossia è legato a $D_{0,1}$; analogamente, per 4.3, $\mathcal{R}_{1,0}$ è legato a $D_{1,0}$, ed $\mathcal{R}_{r,s}$ a $D_{r,s}$; quindi la regola mnemonica per apporre gli indici r, s ad $R_{r,s}$ è la stessa, sia che si parta da un ipercampo che da un cocampo.

37. Riprendiamo le notazioni del n° 35, ove si sono definiti gli $\tilde{R}_n$, e teniamo presente il diagramma del n° 35; è importante notare che

4.17 $$\sigma \mathcal{D}^0 = D,$$

in quanto $\sigma \mathcal{D}^0$ deve essere denso in D, e quindi $= D$ perchè D è discreto (questo è in realtà il significato del 4.12). È quindi commutativo il seguente diagramma :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{R} \arrow[r, "p\iota"] & \widetilde{R} \arrow[r, "p\iota"] & \cdots & & \mathcal{D}^0 \\
\vdots \arrow[d, "p-"'] & \vdots \arrow[d, "p-"'] & & & \vdots \arrow[d, "p\iota"'] \\
D^2 \arrow[r, "p+"] \arrow[d, "p-"'] & D^3 \arrow[r, "p+"] \arrow[d, "p-"'] & \cdots & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
D^1 \arrow[r, "p+"] \arrow[d, "p-"'] & D^2 \arrow[r, "p+"] \arrow[d, "p-"'] & \cdots & & D \arrow[d, "p\iota"'] \\
{} & {} & & & {} ;
\end{tikzcd}$$

ne riscriviamo un pezzo, cambiando le notazioni:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{R} \cong \widetilde{R}_0 \arrow[r, "p\iota"] & \widetilde{R}_1 \arrow[r] & \cdots & & \mathcal{D}^0 \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & & \vdots \arrow[d] \\
D^{10} \arrow[r, "p+"] \arrow[d, "p-"'] & D^{11} \arrow[r] \arrow[d, "p-"] & \cdots & & D_1 \arrow[d, "p\iota"'] \\
k = D^{00} \arrow[r, "p+"'] & D^{01} \arrow[r] & \cdots & & D_0 \cong D .
\end{tikzcd}$$

Qui, $D^{ij} = D^{i+j}$ per definizione; l'immersione di $\widetilde{R}$ in $\mathcal{D}^0$ è $\tilde{\tau}^0$ (restrizione di $\tilde{\tau}$ a $\mathcal{D}^0$), e l'omomorfismo di $\mathcal{D}^0$ su tutto D è σ^0 (restrizione di σ a $\mathcal{D}^0$).

Il duale di questo diagramma è ottenuto sostituendo $\widetilde{R}_i$ con $\widetilde{D}_i$ (= insieme delle applicazioni k-lineari continue di $\widetilde{R}_i$ su k), D_i con R_i, D^{ij} con

R^{ij}, p_+ con p_-, p_ι con p_ι, $\mathcal{D}^0$ con l'unione (limite diretto) $\mathcal{R}^0$ degli R_i, e invertendo le frecce; con ciò si ottiene un diagramma commutativo; richiamiamo l'attenzione sul fatto che il duale di $\mathcal{D}^0$, ossia l'insieme delle sue applicazioni k lineari continue su k, è proprio $\mathcal{R}^0$ e non $\mathcal{R}$. Il diagramma commutativo duale così ottenuto è il seguente:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{D} \cong \widetilde{D}_0 & \widetilde{D}_1 \arrow[l, "p_\iota"'] & \cdots \arrow[l] & \mathcal{R}^0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
R^{10} \arrow[u] & R^{11} \arrow[l, "p_-"'] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & R_1 \arrow[u] \\
k = R^{00} \arrow[u, "p_+"] & R^{01} \arrow[l, "p_-"] \arrow[u, "p_+"'] & \cdots \arrow[l] & R_0 \cong R\,; \arrow[u, "p_\iota"]
\end{tikzcd}$$

l'isomorfismo di R su $\mathcal{R}^0$ è τ^0, e l'omomorfismo di $\mathcal{R}^0$ su tutto $\widetilde{D}$ è $\widetilde{\sigma}^0$. I precedenti diagrammi in dualità mostrano che vi è un'applicazione k-bilineare $(d, x) \longrightarrow d \circ x$ di $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{R}^0$ su k; essa è una dualità nel senso seguente:

1. $d \circ x = 0$ per ogni x (risp. per ogni d) se e solo se $d = 0$ (risp. $x = 0$);

2. la $(d, x) \longrightarrow d \circ x$ è continua in x per ogni d, e continua in d per ogni x.

Essa non è però continua in (d, x): dato n, si scelga infatti un $d' \in D^{nn}$ contenuto nel nucleo di p_ι ma non nel suo nocciolo; allora l'ortogonale di d' in R^{nn} non contiene il nucleo di p_ι ma ne contiene il nocciolo, onde esiste un $x' \in R^{nn}$ tale che $d' \circ x' \neq 0$, e che x' sia contenuto nel nucleo di p_ι, ma non nel suo nocciolo. Presi $d \in \widetilde{R}_n \subset \mathcal{D}^0$, $x \in R_n \subset \mathcal{R}^0$ tali che le loro immagini in D^{nn}, R^{nn} siano rispettivamente d', x', è $d \circ x \neq 0$, e d'altra parte d, x stanno in intorni «piccoli» dello 0, in quanto $\sigma^0 (p_\iota)^{-n+1} d = \widetilde{\sigma}^0 (p_\iota)^{-n+1} x = 0$.

L'applicazione $(d, x) \longrightarrow d \circ x$ di $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{R}^0$ su k può essere estesa per continuità in due modi: dato d, la $x \longrightarrow d \circ x$ può essere estesa per continuità ad $x \in \mathcal{R}$; e dato x, la $d \longrightarrow d \circ x$ può essere estesa per continuità a $d \in \mathcal{D}$; si noti che, per esempio nel primo caso, la $d \longrightarrow d \circ x$ è continua se e solo se $x \in \mathcal{R}^0$.

Il fatto che $\mathcal{D}^0$ sia l'insieme delle applicazioni k-lineari continue di $\mathcal{R}^0$ (e ora di $\mathcal{R}$) su k mostra che la « $\circ$ » è indipendente dalla scelta di D, R, σ, τ. Le formule

4.18 $$\mathbf{P}\, d \circ (x \,\overline{\times}\, y) = d \circ \mu\,(x \,\overline{\times}\, y),$$

4.19 $$\mu\,(d \,\overline{\times}\, \delta) \circ x = (d \,\overline{\times}\, \delta) \circ \mathbf{P}\, x$$

sono valide nel senso seguente: la prima vale per $d \in \mathcal{D}^0$, ed $x, y \in \mathcal{R}^0$, nel qual caso $x \,\overline{\times}\, y \in (\mathcal{R} \,\overline{\times}\, \mathcal{R})^0$ e $\mathbf{P}\, d \in (\mathcal{D} \,\overline{\times}\, \mathcal{D})^0$; è estensibile per continuità ad $x, y \in \mathcal{R}$, oppure a $d \in \mathcal{D}$. Considerazioni analoghe valgono per la seconda formula.

Diremo che $\mathcal{D}$ è il *duale* di $\mathcal{R}$ secondo $\circ$; e si è visto che $\mathcal{R}$ è il duale di $\mathcal{D}$. Altre formule ovvie sono le:

4.20 $$\varepsilon\, d = d \circ 1, \quad \varepsilon\, x = 1 \circ x,$$

4.21 $$\pi\,(td \circ x) = d \circ \pi\, x, \quad \pi\, d \circ x = \pi\,(d \circ tx),$$

che valgono per $d \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{R}^0$, e per $d \in \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{R}$. Poi:

4.22 TEOREMA. *Siano $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ bicampi, e siano R, D un ipercampo e un cocampo legati ad $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ da τ e σ rispettivamente; sia $\mathcal{D}$ (risp. D) duale di $\mathcal{R}$ (risp. R) mediante $\circ$, e suppongasi che valga la relazione $\sigma d \circ x = d \circ \tau x$ per $d \in \mathcal{D}$, $x \in R$. Allora, se $d \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{R}^0$ si ha $d \circ x = \sigma\,(p\iota)^{-n}\, d \circ \tau^{-1} p^n \iota x$ per n elevato.*

È bene notare che:

il nucleo V_n dell'omomorfismo di $\mathcal{D}$ su tutto D_n è l'ortogonale di R_n: $d \in V_n \Longleftrightarrow d \circ R_n = 0$;

R_n è l'ortogonale di V_n : $x \in R_n \Longleftrightarrow V_n \circ x = 0$.

Quanto esposto in questo numero mostra che $\mathcal{R}^0$, e non $\mathcal{R}$, è ciò che conta; $\mathcal{R}^0$, benchè non completo, si comporta come un'iperalgebra, nel senso che $\mathbf{P}\mathcal{R}^0 \subseteq (\mathcal{R} \,\overline{\times}\, \mathcal{R})^0$; la $\mathcal{R}$ serve solo a mantenere la convenzione che un'iperalgebra deve essere completa.

38. Notazioni come nel n⁰ 37; per $d \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{R}^0$, definiamo l'elemento $dx \in \mathcal{R}^0$ per mezzo della:

4.23 $$\delta \circ dx = d\delta \circ x$$

per ogni $\delta \in \mathcal{D}$; questa è l'analoga della 3.15. La $(d, x) \longrightarrow dx$ è un'applicazione k-bilineare di $\mathcal{D} \times \mathcal{R}^0$ su $\mathcal{R}^0$; valgono i risultati seguenti:

4.24 *Se $\mathcal{R}$ è legato all'ipercampo R da τ, è $d\,(p\iota)^{-n}\, \tau R \subseteq (p\iota)^{-n}\, \tau R$.*

Infatti se $x \in (p\iota)^{-n}\, \tau R = R_n$ (nelle notazioni del n⁰ 37), e se $\delta \circ R_n = 0$, è anche

$d\delta \circ R_n = 0$ (cfr. le osservazioni alla fine del n^0 37), onde $\delta \circ dx = d\delta \circ x = 0$; ciò essendo vero per tutti i δ descritti, si conclude che $dx \in R_n$.

4.25 *Nelle notazioni del* n^0 37, *se* $d \in \mathcal{D}^0$ *la* $x \longrightarrow dx$ *è continua; più precisamente: se* $d \in \widetilde{R}_n$, *e se* U_i *è l'intorno dello* 0 *in* $\mathcal{R}^0$ *formato dagli* x *tali che* $\widetilde{R}_i \circ x = 0$, *si ha, per ogni* i, $dU_{\max(n,i)} \subseteq U_i$.

Infatti se $\delta \in \widetilde{R}_i$ e $x \in U_h$ con $h = \max(n, i)$, è $\delta \circ dx = d\delta \circ x = 0$ perchè $d\delta \in \widetilde{R}_h$.

Il 4.25 mostra che la $x \longrightarrow dx$ può essere estesa ad una applicazione continua di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{R}$ quando $d \in \mathcal{D}^0$; la 4.23 vale allora per $\delta, d \in \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{R}$.

4.26 *La* $d \longrightarrow dx$ *è continua se* $x \in \mathcal{R}^0$; *più precisamente, se* V_i *è l'intorno dello* 0 *in* $\mathcal{D}$ *formato dai* d *tali che* $d \circ R_i = 0$, *e se* $x \in R_n$, *allora* $V_n x = 0$.

Infatti se $d \in V_n$ si ha $\delta \circ dx = \delta d \circ x = 0$ per ogni $\delta \in \mathcal{D}$.

Altre proprietà dell'applicazione $(d, x) \longrightarrow dx$ sono le seguenti:

4.27
1. $d(d'x) = (dd')x$;
2. $\pi[(td)x] = d\pi x$;
3. $t[(\pi d)x] = dtx$; *valide per* $d, d' \in \mathcal{D}$ *ed* $x \in \mathcal{R}^0$, *e per* $d, d' \in \mathcal{D}^0$ *ed* $x \in \mathcal{R}$;
4. $d \in \widetilde{R}_n$ *se e solo se* d, *come applicazione di* $\mathcal{R}^0$ *su* $\mathcal{R}^0$, *è* R_n*-lineare*;
5. $1_{\mathcal{D}} x = x$; $d \in \mathcal{D}^+$ *se e solo se* $d 1_{\mathcal{R}} = 0$;
6. $\varepsilon_{\mathcal{R}} dx = d \circ x$.

4.28
1. $\mathbf{P}(dx) = (1 \,\overline{\times}\, d)\mathbf{P}x = (d \,\overline{\times}\, 1)\mathbf{P}x$;
2. $d(xy) = \mu_{\mathcal{R}}(\mathbf{P}d)(x \,\overline{\times}\, y)$; *valide per* $d \in \mathcal{D}$ *ed* $x, y \in \mathcal{R}^0$, *e per* $d \in \mathcal{D}^0$ *ed* $x, y \in \mathcal{R}$;
3. *le* $x \longrightarrow dx$, *per* $d \in \mathcal{D}^0$, *sono tutte e sole le applicazioni* k*-lineari continue di* $\mathcal{R}^0$ *su se stesso che sono invarianti* (cfr. 3.18), *e ciascuna delle quali è* R_n*-lineare per qualche* n.

DIM. Le dimostrazioni sono le stesse delle dimostrazioni delle analoghe asserzioni nei 3.16, 3.18, tenendo presente il 3.20, C.V.D..

Come conseguenza del 4.28, gli elementi di $\mathcal{D}^0$, considerati come applicazioni k-lineari di $\mathcal{R}$ su se stesso, si chiamano le *iperderivazioni invarianti di* $\mathcal{R}$. Al solito, la 2 del 4.28 ha una interpretazione più diretta quando si sappia che la $\delta \longrightarrow \delta(x \mathbin{\overline{\times}} y)$ sia continua, ossia, per 4.26, quando $x, y \in \mathcal{R}^0$.

Si noti che il duale di $\mathcal{R}_{r,s}$ (r, s primi fra loro, ovvero $r = 1$, $s = 0$, ovvero $r = 0$, $s = 1$) è $\mathcal{R}_{s,r}$; ed anche che il duale di $\mathcal{R}$, che fin'ora è stato indicato con $\mathcal{D}$, è $\tilde{\mathcal{R}}$. Il risultato seguente è ovvio, ma molto importante:

4.29 TEOREMA. *Un bicampo* $\mathcal{R}$ *è autoduale, ossia* $\mathcal{R} \cong \tilde{\mathcal{R}}$, *se e solo se*

$$\mathcal{R} \cong \mathcal{R}_{0,n} \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}_{n,0} \mathbin{\overline{\times}} (\mathcal{R}_{1,1} \mathbin{\overline{\times}} \dots \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}_{1,1}) \mathbin{\overline{\times}} (\mathcal{R}_{r_1,s_1} \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}_{s_1,r_1}) \mathbin{\overline{\times}} \dots \mathbin{\overline{\times}} (\mathcal{R}_{r_m,s_m} \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}_{s_m,r_m})$$

per opportune coppie $(r_i, s_i) \neq (1, 1)$ *di interi primi fra loro.*

OSSERVAZIONE. Nella 4.23 si è usata la stessa lettera d per indicare un elemento di $\mathcal{D}$ o un endomorfismo di $\mathcal{R}$; se quest'ultimo viene indicato con σ_d, la 4.23 si scrive $\delta \circ \sigma_d x = \delta d \circ x$; naturalmente, esiste anche un τ_x (applicazione di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{D}$) definito da $\tau_x d \circ y = d \circ xy$; se ora $\mathcal{D} = \mathcal{R}$, come nel caso del 4.29 dopo una opportuna identificazione, e se $x, y \in \mathcal{R}$, vi sono i quattro elementi $\sigma_x y$, $\tau_y x$, $\sigma_y x$, $\tau_x y$, che sono in generale tutti distinti. Il $\sigma_x y$ non può più essere indicato con xy, come si fa quando $\mathcal{D} \neq \mathcal{R}$, perchè ciò darebbe luogo a confusione con $xy = \mu_{\mathcal{R}}(x \mathbin{\overline{\times}} y)$; quindi il $\sigma_x y$ verrà indicato, quando $\mathcal{D} = \mathcal{R}$, con $x \cdot y$.

39. Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, legato all'ipercampo R da τ; la topologia di $\mathcal{R}$ è quella in cui un sistema di intorni dello 0 è dato dagli ideali chiusi J_n generati dai $[(p\iota)^{-n} R]^+ = R_n^+$ ($n = \dots, 1, 0, -1, \dots$). Vogliamo far vedere come questa topologia sia legata a certe valutazioni in modo simile (ma non identico) a quello descritto nell'1.2; supporremo che τ sia un'immersione. Siano w_{ih}, con h percorrente $H = \operatorname{cov} C_p \oplus \dots \oplus \operatorname{cov} C_p$ (tanti addendi quanta è la codimensione separabile di R), le pseudovalutazioni che danno la topologia di R a norma del 3.37; si normalizzino le w_{0h} in modo arbitrario, e le w_{ih} in modo che $w_{i+1,h}$ induca $w_{i,ph}$ in R_i. Sia C il limite inverso $\dots \underset{p\iota}{\longleftarrow} H \underset{p\iota}{\longleftarrow} H \underset{p\iota}{\longleftarrow} \dots$, e per ogni $c = \{\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots\} \in C$ si definisca la pseudovalutazione w_c di $\mathcal{R}^0$ col porre $w_c(x) = w_{i,c_i}(x)$ se $x \in R_i$. Per mezzo delle w_c si definisca il seguente insieme: $W_c(\alpha)$, con α reale ≥ 0, ovvero $\alpha = \infty$, è l'insieme degli $x \in \mathcal{R}^0$ tali che $w_c(x) \geq \alpha$.

Se allora $R_t = k$, ossia se vi è una sola w_c, che indicheremo con w, gli insiemi $W(\alpha)$, per $\alpha \longrightarrow \infty$, sono cofinali con gli $R_n^+ \mathcal{R}^0$ per $n \longrightarrow -\infty$; se invece $R_r = R_\pi = k$, ossia se $R = R_t$, si ha addirittura che $R_n^+\mathcal{R}^0$ è l'intersezione dei $W_c(\infty)$ per i quali $c_n = 0$. Nel caso generale, si indichi con $U^n(\alpha)$ l'intersezione dei $W_c(\alpha)$ per i quali $c_{-n} = 0$; quanto precede dimostra che gli $U^n(\alpha)$ formano un sistema di intorni dello 0 per la topologia di $\mathcal{R}^0$; le loro chiusure in $\mathcal{R}$, ancora indicate con $U^n(\alpha)$, formano un sistema di intorni dello 0 per la topologia di $\mathcal{R}$. In quest'ultimo caso si ha anche $U^n(\alpha) = U_t^n(\infty) \,\overline{\times}\, \mathcal{R}_r \,\overline{\times}\, \mathcal{R}_\pi + \mathcal{R}_t \,\overline{\times}\, W(\alpha)$, ove, nel secondo membro, $U_t^n(\infty)$ è l' $U^n(\infty)$ costruito in $\mathcal{R}_t$, mentre $W(\alpha)$ è costituito in $\mathcal{R}_r \,\overline{\times}\, \mathcal{R}_\pi$.

In base a questa descrizione si vede che la topologia di $\mathcal{R}$ è, nel caso $\mathcal{R}_t = k$, del tipo voluto nel n^0 9 e nel resto del capitolo 2; invece nel caso generale è più fina di una tale topologia; però tutto quanto esposto nel capitolo 2, ed in particolare le condizioni (A), (B) del n^0 9, resta valido per questa topologia qualora si adotti la definizione seguente: biv $\mathcal{R}$ è l'insieme dei bivettori x, a componenti in $\mathcal{R}$, tali che per ogni intero n esista un $\beta_n > 0$ colla proprietà $x_{-j} \in U^n(\beta_n)$ per j elevato; questa condizione assicura in particolare, come si vede dalla dimostrazione dell'1.5, che elementi qualsiansi di biv $\mathcal{R}$, in numero finito, sono simultaneamente ammessi. Questa definizione di biv $\mathcal{R}$ sarà quella adottata d'ora in poi. È bene osservare che le altre condizioni su $\mathcal{R}$, richieste al n^0 9, sono soddisfatte: $\mathcal{R}$ è perfetto per definizione; è poi privo di elementi pseudonulli; se infatti ve ne fossero, vi sarebbero anche degli $x \neq 0$ tali che $x^p = \pi x = 0$, e quindi $p\iota x = 0$; ma ciò si sa essere impossibile perchè $p\iota$ è un isomorfismo bicontinuo di $\mathcal{R}$ (n^0 34).

40. Sia $\mathcal{R}$ un bicampo; per quanto precede esistono biv $\mathcal{R}$ e Biv $\mathcal{R}$; un elemento $x \in$ biv $\mathcal{R}$ dicesi *canonico* se

$$\mathbf{P}x = x \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, x\,;$$

qui facciamo valere per gli elementi di biv $\mathcal{R}$ le convenzioni adottate al principio del n^0 25 per gli elementi di cov R. L'insieme degli elementi canonici di biv $\mathcal{R}$ sarà denotato con $\mathcal{C}'\mathcal{R}$, mentre $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ denoterà l'insieme degli elementi canonici di biv $\mathcal{R}$ che hanno tutte le componenti in $\mathcal{R}^0$; come conseguenza del successivo 4.31, basta a tale scopo che una componente sia in $\mathcal{R}^0$; per il 2.3 (ponendovi $x \in K'$), $\mathcal{C}'\mathcal{R}$ è un K'-modulo. Le componenti degli elementi di $\mathcal{C}'\mathcal{R}$ (risp. di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$) saranno chiamate gli *elementi canonici* di $\mathcal{R}$ (risp. di $\mathcal{R}^0$).

4.30 Lemma. *Siano $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ bicampi, e sia z elemento canonico di* biv$(\mathcal{R} \,\overline{\times}\, \mathcal{S})$; *allora $z = x \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, y$, con x, y elementi canonici di* biv $\mathcal{R}$, biv $\mathcal{S}$ *rispettivamente, dati da $x \,\overline{\times}\, 1 = (\iota \otimes \varepsilon)\, z$, $1 \,\overline{\times}\, y = (\varepsilon \otimes \iota)\, z$.*

DIM. Come quella del 3.34, C.V.D..

4.31 TEOREMA. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, legato all'ipercampo R da τ; vi è allora un unico isomorfismo K-lineare τ di $\mathcal{C}R$ su $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ tale che $(\tau x)_{-1} = \tau x_{-1}$ per $x \in \mathcal{C}R$. Per $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}$ si ha $tx = t_{\mathcal{R}}\, x$, ossia $t_{\mathcal{R}}\, x_i = x_{i-1}$; di conseguenza, $px = p\iota_{\mathcal{R}}\, x$. Poi, $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ è un K'-modulo canonico mediante $\pi_{\mathcal{R}}$ e $t_{\mathcal{R}}$, e il τ sopra definito è un isomorfismo di K'-moduli canonici; inoltre $\tau\,\mathcal{C}R$ contiene un insieme di generatori di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ come K'-modulo. La topologia di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ come K'-modulo canonico coincide con la sua topologia come sottospazio di* biv $\mathcal{R}$. *Infine $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0_{r,s} \cong \mathcal{N}_{r,s}$ (r, s interi primi fra loro, ovvero $r = 0$, ovvero $s = 0$).*

DIM. Come nella dimostrazione del 3.32, se $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}$ si ha $p\iota_{\mathcal{R}}\, x = \mu^p \mathbf{P}^p x = px$; questa si scrive anche $\pi_{\mathcal{R}}\, t_{\mathcal{R}}\, x = \pi\, tx$; essendo $\mathcal{R}$ privo di elementi pseudonulli, ne segue $t_{\mathcal{R}}\, x = tx$, come richiesto. Essendo $t_{\mathcal{R}}$ un isomorfismo su tutto, perchè tale è il π di $\tilde{\mathcal{R}}$, questa dice anche che il τ di $\mathcal{C}R$ definito all'enunciato esiste, è K-lineare, è un isomorfismo, ed è unico. Se poi $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}^0$, per n elevato si avrà $p^n \iota x_{-1} \in \tau R$, e quindi $p^n \iota x = \tau y$ per un $y \in \mathcal{C}R$; ciò dimostra che $\tau\,\mathcal{C}R$ contiene una base di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ come spazio vettoriale su K'. Ma allora $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ è un K'-modulo canonico, e τ è un isomorfismo di K-moduli canonici.

Dotiamo ora $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ della topologia di insieme di bivettori (n^0 9), e $\mathcal{C}R$ di quella di insieme di covettori (n^0 7), e dimostriamo che il τ di $\mathcal{C}R$ è bicontinuo; τ è certamente bicontinuo come omomorfismo di ipercampi. Sia dunque U un intorno dello 0 in R, e sia precisamente U l'ideale chiuso generato da $[(p\iota)^h R]^+$ per qualche h; sia invece V un intorno dello 0 in $\mathcal{R}$, del tipo $V = U^l(\alpha)$ descritto al n^0 39. Dato $x \in \mathcal{C}R$, si ha $x \in U'$ (n^0 7) se e solo se $x_{-1} \in U$; e si ha $\tau x \in V_n$ (n^0 9) se e solo se $\pi^{-i} t^{-i-1} \tau x_{-1} \in V$ per $i \leq n$, ossia se e solo se $\tau x_{-1} \in t\,(p\iota)^i V$ per $i \leq n$; dato che $p\iota V \subset V$, quest'ultima significa anche $\tau x_{-1} \in t\,(p\iota)^n V$. Dati V ed n si può scegliere U in modo che $\tau U \subseteq t\,(p\iota)^n V$; e dato U, si può scegliere V ed n in modo che $t\,(p\iota)^n V \cap \tau R \subset \tau U$; quindi l'applicazione τ di $\mathcal{C}R$ su $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ è bicontinua secondo le topologie descritte. Ma la topologia di $\mathcal{C}R$ è anche quella di K-modulo canonico, per 3.43; pertanto quella di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ coincide con la sua topologia di K'-modulo canonico.

Che poi sia $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0_{r,s} \cong \mathcal{N}_{r,s}$ discende da quanto precede, dal n^0 18, e dal fatto che $\mathcal{C}R_{r,s} \cong N_{r,s}$, C. V. D..

4.32 TEOREMA. *Siano R un ipercampo, $\mathcal{R}$ un bicampo, e ν un isomorfismo di $\mathcal{C}R$ su $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ (come K-moduli) che commuti con π, e quindi con t.*

Allora esiste un solo omomorfismo η *di* R *su* $\mathcal{R}$, *come iperalgebre, tale che* $\eta x = \nu x$ (*ossia* $\eta x_{-1} = (\nu x)_{-1}$) *per* $x \in \mathcal{C}R$; *tale* η *è un isomorfismo.*

DIM. Sia S la sottoiperalgebra chiusa di $\mathcal{R}$ generata dai $(\nu x)_{-i}$ $(i > 0)$ quando x percorre un insieme libero di generatori di $\mathcal{C}R$; vi è un isomorfismo ν' di $\mathcal{C}R$ su un K-modulo di covettori a componenti in S, dato da: $\nu' x = (\ldots, (\nu x)_{-2}, (\nu x)_{-1})$; il 3.40 assicura allora l'esistenza di η, e la sua unicità, mentre il 3.39 assicura che η è un isomorfismo, C. V. D..

INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI