ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALBERTO TOGNOLI

Un teorema di unicità per le teorie dell'omologia

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 2 (1965), p. 265-275

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_265_0>

UN TEOREMA DI UNICITÀ PER LE TEORIE DELL'OMOLOGIA (*)

di ALBERTO TOGNOLI (Pisa)

Introduzione.

Sia $\mathfrak{a}$ la categoria degli spazi connessi per archi e delle applicazioni continue fra essi; sia $\widetilde{H}$ una teoria dell'omologia, a supporti compatti, definita sulle coppie di elementi di $\mathfrak{a}$.

In questo lavoro proveremo che se $\widetilde{H}$ gode della seguente proprietà:

$$\alpha) \qquad \pi_q(Y) \simeq \{0\}, \ \forall \ q > 0 \Longrightarrow \widetilde{H}_q(Y) \simeq \{0\}, \ \forall \ q > 0$$

la teoria $\widetilde{H}$ è isomorfa, su $\mathfrak{a}$, alla teoria dell'omologia singolare.

Questo risultato discende dalle seguenti considerazioni topologiche. Siano $X \supset S$ due elementi di $\mathfrak{a}$, e sia $J : S \longrightarrow T$ un'applicazione continua di S in uno spazio localmente solido T, tale che: $J : S \longrightarrow J(S)$ sia un omeomorfismo e $J(S)$ sia un chiuso di T. Indichiamo con X_S il « mapping cylinder » di J, saldato ad X. Dimostreremo che, in queste ipotesi, se l'immersione $i : S \longrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_*(S) \longrightarrow \pi_*(X)$, allora $\pi_q(X_S) \simeq \{0\}, \ \forall \ q > 0$.

Invertiremo parzialmente questo risultato provando che: se $\pi_1(S) = \pi_1(X) = \{0\}$ e $\pi_q(X_S) \simeq \{0\}, \ \forall \ q > 0$, allora $i_* : \pi_*(S) \longrightarrow \pi_*(X)$ è un isomorfismo

---

Pervenuto alla Redazione il 13 Gennaio 1965.

(*) Lavoro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 35 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1963-64.

NOTAZIONI. Sia X uno spazio topologico, con $\pi_*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi_n(X)$ indicheremo il gruppo graduato di omotopia di X.

Con $H_*(X; G) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X; G)$, $(H_*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X))$ noteremo i gruppi di omologia singolare di X, a coefficienti nel gruppo abeliano G, (rispettivamente nel gruppo additivo $\mathbb{Z}$ degli interi).

Sia $\varphi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, con φ_q indicheremo l'omomorfismo indotto fra i gruppi di omologia, o di omotopia, di dimensione q e con $\varphi_* = \bigoplus \varphi_q$.

Dato lo spazio topologico X, indicheremo con $R(X)$ la realizzazione geometrica del complesso delle catene singolari di X e con $\omega : R(X) \longrightarrow X$ la proiezione canonica (vedi [2] pag. 171). Diremo che lo spazio T è localmente solido se ogni compatto $K \subset T$ è contenuto in un sottospazio K' di T che è solido.

§ 1. — Lemmi preliminari.

Sia X uno spazio topologico, S un sottospazio di X, $J : S \longrightarrow T$ una applicazione continua che sia un omeomorfismo di S su un sottospazio chiuso $J(S)$ di uno spazio localmente solido, T.

Consideriamo lo spazio topologico $X \cup (S \times I) \cup T$, unione disgiunta dei tre spazi, ed indichiamo con $X_S = X \cup (S \times I) \cup T_{/R(J)}$ lo spazio topologico quoziente, ottenuto identificando $x \in S \subset X$ con $x \in S \times \{0\} \subset S \times I$, ed $y \times \{1\} \subset S \times I$ con $J(y) \in T$.

D'ora in avanti i simboli S, X, T, X_S, $R(J)$ avranno il significato dato loro in questa costruzione; si userà il simbolo $R(J)$ anche quando la relazione sia ristretta ad un sottoinsieme di $X \cup (S \times I) \cup T$.

OSSERVAZIONE. Ricordiamo subito che, se S è un retratto assoluto di intorni, esso si può vedere come chiuso di uno spazio vettoriale topologico T (vedi [4] pag. 186) e T è uno spazio solido (vedi [4], pag. 184).

Se S è uno spazio triangolato, esso si può considerare come sottopoliedro di un poliedro localmente solido. Sia W l'insieme dei vertici di S, e consideriamo la realizzazione geometrica W' del complesso simpliciale dato dagli elementi di W e da tutti i sottoinsiemi finiti di W. Ovviamente W' contiene S come sottopoliedro ed è localmente solido.

LEMMA 1. *Siano X, S spazi topologici connessi per archi, $S \subset X$; condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia: $H_*(X_S) \simeq H_0(X_S) \simeq \mathbb{Z}$ è che l'immersione $i : S \longrightarrow X$ induca un isomorfismo $i_* : H_*(S) \longrightarrow H_*(X)$.*

PROVA. Notiamo: $X_1 = X \cup (\bigcup_{0 \leq t \leq \frac{1}{2}} S \times \{t\})_{/R(J)}$, $X_2 = \overline{X_S - X_1}$ onde $X_1 \cap X_2 = S \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Scrivendo la successione di Mayer Vietoris per l'omologia singolare della terna X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$ e tenuto conto che X_1 è contrattile su X ed X_2 su T, si ha la successione esatta:

$$(1) \qquad \longrightarrow H_{q+1}(X_S) \longrightarrow H_q(S) \longrightarrow H_q(X) \oplus H_q(T) \longrightarrow H_q(X_S) \longrightarrow$$

Essendo T uno spazio localmente solido si ha $H_*(T) \simeq H_0(T) \simeq \mathbb{Z}$. Valga $H_*(X_S) \simeq H_0(X_S) \simeq \mathbb{Z}$; allora per $q > 0$ la (1) diviene

$$0 \longrightarrow H_q(S) \xrightarrow{i_q} H_q(X) \longrightarrow (0)$$

ed essendo S, X connessi per archi

$$i_q : H_q(S) \longrightarrow H_q(X) \text{ è un isomorfismo, } \quad \forall\, q \geq 0.$$

Viceversa sia $i_* : H_*(S) \longrightarrow H_*(X)$ un isomorfismo, per la (1) si ha allora $H_q(X_S) \simeq \{0\}$, per $q > 1$.

Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow H_1(X_S) \longrightarrow H_0(S) \xrightarrow{i_0} H_0(X) \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(X_S) \longrightarrow 0.$$

Essendo i_0 iniettivo si ha $H_1(X_S) = \{0\}$, $H_0(X_S) \simeq \mathbb{Z}$ ed il lemma è così provato.

LEMMA 2. *Siano X, S due spazi topologici connessi per archi e sia S sottospazio di X.*

Siano verificate le seguenti ipotesi:

i) *l'immersione $i : S \longrightarrow X$ induca un isomorfismo*

$$i_* : H_*(S) \longrightarrow H_*(X)$$

ii) *l'omomorfismo* $i_1 : \pi_1(S) \to \pi_1(X)$ *sia surgettivo.*

Risulta allora $\pi_q(X_S) \simeq \{0\}$, $\forall\, q > 0$.

Prova. Per il lemma precedente, la i) implica $H_q(X_S) = \{0\}$, $\forall\, q > 0$. In virtù del teorema di Hurewicz basta dunque provare $\pi_1(X_S) \simeq \{0\}$.

a) Sia S^1 la sfera ad una dimensione.

Ogni applicazione $\alpha : S^1 \to X \cup (S \times I)_{/R(J)}$ è omotopa ad una applicazione $\alpha' : S^1 \to X$. Per la ii) essa è omotopa ad una $\alpha'' : S^1 \to S \times \{0\}$.

Lo spazio $T \cup (S \times I)_{/R(J)}$ è contrattile su T. Quindi, essendo T uno spazio localmente solido, ogni applicazione $\alpha'' : S^1 \to S \times \{0\}$ è omotopa, in X_S, all'applicazione costante.

Si è così provato che ogni applicazione $\alpha : S^1 \to X \cup (S \times I)_{/R(J)}$, è omotopa, in X_S, all'applicazione costante; il lemma sarà provato qualora si dimostri che, per ogni applicazione $\beta : S^1 \to X_S$, ne esiste una omotopa β', tale che $\beta'(S^1) \subset X \cup (S \times I)_{/R(J)}$. Supponiamo dapprima che S sia chiuso in X. Data un'applicazione continua $\beta : S^1 \to X_S$ poniamo $W = \beta^{-1}(T)$, $\widetilde{W} = \beta^{-1}(T \cup (S \times I - S \times \{0\}))$. W è un chiuso di S^1 e quindi è compatto, $\widetilde{W}$ è un aperto di S^1 e si ha $\widetilde{W} \supset W$.

Sia W' l'insieme formato da quelle componenti connesse di $\widetilde{W}$ che contengono punti di W; W è compatto quindi W' è formato da un numero finito di componenti connesse. Sia $\delta \subset S^1$ una componente connessa di W', siano x_1, x_2 gli estremi di δ. Risulta allora $\beta(x_1) \cup \beta(x_2) \subset S \times \{0\}$.

Consideriamo la restrizione di β ad una componente connessa δ di W' e proviamo che essa è omotopa ad una $\beta' : \delta \to X \cup (S \times I)_{/R(J)}$. Applicando le omotopie trovate ad ogni componente connessa di W' concluderemo la dimostrazione. Data un'applicazione continua $\varphi : I \to (S \times I) \cup T_{/R(J)}$, supponiamo che $x_1 = \varphi(0)$ e $x_2 = \varphi(1)$ siano in $S \times \{0\}$.

Consideriamo la famiglia di applicazioni $\psi_t : I \to I$ definite da:

$$\psi_t(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 \leq \tau \leq \dfrac{t}{3} \\[2ex] \dfrac{3\tau - t}{3 - 2t} & \text{per} \quad \dfrac{t}{3} \leq \tau \leq 1 - \dfrac{t}{3} \\[2ex] 1 & \text{per} \quad 1 - \dfrac{t}{3} \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Poniamo $\varphi_t = \varphi \circ \psi_t$; risulta

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} x_1 & \text{per} \quad 0 \leq \tau \leq \dfrac{1}{3} \\ \varphi(3\tau - 1) & \text{per} \quad \dfrac{1}{3} \leq \tau \leq \dfrac{2}{3} \\ x_2 & \text{per} \quad \dfrac{2}{3} \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Evidentemente φ_1 è omotopa a φ.

Definiamo le classi di applicazioni $\sigma_t : S \times I \rightarrow S \times I$ date da:

$$\sigma_t(x \times r) = x \times (r + t(1 - r)).$$

Consideriamo le famiglie di applicazioni $\eta_t : I \rightarrow (S \times I) \cup T_{/R(J)}$ così definite

$$\eta_t(\tau) = \begin{cases} x_1 \times (3\tau \cdot t) & \text{per} \quad 0 \leq \tau \leq \dfrac{1}{3}, \\ \sigma_t(\varphi_1(\tau)) & \text{per} \quad \dfrac{1}{3} \leq \tau \leq \dfrac{2}{3}, \\ x_2 \times 3t \cdot (1 - \tau) & \text{per} \quad \dfrac{2}{3} \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Denotiamo con φ_2 l'applicazione η_1 e con p proiezione naturale di $S \times I$ su $S \times \{1\}$, risulta:

$$\varphi_2(\tau) = \begin{cases} x_1 \times 3\tau & \text{per} \quad 0 \leq \tau \leq \dfrac{1}{3} \\ \varphi_1(\tau) & \text{per} \quad \tau \in \varphi_1^{-1}(T) \\ x_2 \times 3(1 - \tau) & \text{per} \quad \dfrac{2}{3} \leq \tau \leq 1 \\ p(\varphi_1(\tau)) & \text{per ogni } \tau \text{ tale che } \dfrac{1}{3} \leq \tau \leq \dfrac{2}{3} \\ & \text{e che } \tau \in \varphi_1^{-1}(S \times I) \end{cases}$$

φ_2 è omotopa a φ_1.

Torniamo ora all'applicazione $\beta : S^1 \longrightarrow X_S$.

L'insieme W', per quanto osservato prima, è l'unione di un numero finito di archi chiusi disgiunti $\delta_1 \dots \delta_n$ i cui estremi hanno immagine in $S \times \{0\}$. Detto $\varphi^i = \beta_{i/\delta i}$, in modo analogo a quanto fatto per la φ costruiamo la φ_2^i omotopa alla φ^i.

Sia $\beta' : S^1 \longrightarrow X_S$ l'applicazione che coincide con β su $S^1 - W'$ e tale che $\beta'/_{\delta i} = \varphi_2^i$. Osserviamo che β' è ancora continua, essendo i δ_i in numero finito, ed è omotopa a β.

Indichiamo con δ_i' l'insieme dei punti di δ_i il cui parametro τ soddisfa le relazioni $\dfrac{1}{3} \leq \tau \leq \dfrac{2}{3}$.

Consideriamo degli archi $\gamma_i \subset S \times \{1\}$ aventi come estremi le immagini mediante β', degli estremi di δ_i'.

Definiamo $\beta'' : S^1 \longrightarrow X_S$ in modo che coincida con β' fuori di $\bigcup_{i=1}^{n} \delta_i'$ e tale che applichi δ_i' su γ_i.

Essendo T uno spazio localmente solido, β'' risulta omotopa a β' e quindi a β, e ciò conclude la dimostrazione nelle ipotesi in cui S sia chiuso.

c) Se S non è chiuso si sostituisce $X \cup \big(\bigcup_{0 \leq t \leq \frac{1}{3}} S \times \{t\}\big)_{/R(J)} = X'$, ad X ed $S \times \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$, che è chiuso in X', ad $S \times \{0\}$, e si ripete la dimostrazione precedente.

OSSERVAZIONE. Le ipotesi i) ed ii) del lemma 2 possono essere sostituite con la seguente $\pi_q(X, S) \simeq \{0\}$, $\forall\, q \geq 0$, od equivalentemente con la condizione che $i_* : \pi_*(S) \longrightarrow \pi_*(X)$ sia un isomorfismo. Ricordiamo infatti che, per il teorema di Hurewicz, (vedi [2] pag. 166) se $\pi_q(X, S) = \{0\}$, $\forall\, q > 0$, allora $H_q(X, S) = \{0\}$, $\forall\, q > 0$.

Il risultato del lemma 2 si può parzialmente invertire.

LEMMA 3. *Siano X, S spazi topologici connessi per archi ed $S \subset X$. Se $\pi_1(X) \simeq \pi_1(S) \simeq \{0\}$ e $H_q(X_S) \simeq \{0\}$, $\forall\, q > 0$, l'immersione naturale $i : S \longrightarrow X$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_*(S) \longrightarrow \pi_*(X)$.*

PROVA. In base alla successione esatta di omotopia:

$$\longrightarrow \pi_{q+1}(X, S) \longrightarrow \pi_q(S) \longrightarrow \pi_q(X) \longrightarrow \pi_q(X, S) \longrightarrow, \tag{2}$$

il lemma sarà dimostrato se proveremo che, nella nostra ipotesi, $\pi_q(X, S) \simeq \{0\}$, $\forall\, q \geq 0$.

Per il teorema di Hurewicz basterà quindi provare che $H_q(X, S) \simeq \{0\}$, $\forall q > 0$, e che $\pi_1(X, S) = \{0\}$. Il primo fatto segue da $H_q(X_S) = \{0\}$, $\forall q > 0$ (vedi lemma 1); il secondo è conseguenza immediata della (2) nel caso $q = 0$.

§ 2. — Un teorema di unicità per le teorie dell'omologia.

Sia $\mathfrak{A}$ la categoria degli spazi topologici connessi per archi e delle applicazioni continue; sia $\widetilde{H}_*$ una teoria dell'omologia a supporti compatti definita sulle coppie di elementi di $\mathfrak{A}$ e sulla categoria $\mathfrak{G}$ dei gruppi abeliani (per la def. vedi [1]).

Indicheremo con $\widetilde{H}_*(Y, A)$ il gruppo graduato che la teoria associa alla coppia (Y, A) di spazi topologici $A \subset Y$, prendendo il gruppo $\mathbf{Z}$ degli interi, come coefficienti.

Se $\varphi : (Y, A) \to (W, B)$ è un'applicazione fra coppie di elementi di $\mathfrak{A}$, cioè $\varphi : Y \to W$ e $\varphi(A) \subset B$. Indicheremo con $\widetilde{\varphi}_q : \widetilde{H}_q(Y, A) \to \widetilde{H}_q(W, B)$ l'omomorfismo indotto da φ e $\widetilde{\varphi}^* = \bigoplus_q \widetilde{\varphi}_q$.

Si ha il seguente

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la teoria dell'omologia, a supporti compatti, $\widetilde{H}_*$, definita sulle coppie di elementi di $\mathfrak{A}$, sia isomorfa alla teoria dell'omologia singolare è che:*

α) per ogni $X \in \mathfrak{A}$ tale che $\pi_q(X) = \{0\}$, $\forall q > 0$, si abbia:

$$\widetilde{H}_q(X, G) = \{0\}, \ \forall q > 0, \ G \in \mathfrak{G}.$$

Prova. La necessità è conseguenza del teorema di Hurewicz. Proviamo ora la sufficienza. Dato $Y \in \mathfrak{A}$, sia $K(Y)$ la realizzazione geometrica del complesso delle catene singolari di Y, sia $\omega : K(Y) \to Y$ la proiezione canonica (vedi [2] pag. 170) e sia X il « mapping cylinder » di ω.

Indichiamo $S = K(Y) \times \{0\} \subset X$ ed X_S sia lo spazio topologico costruito nel § 1 partendo da X, S.

Dimostriamo che $\pi_q(X_S) \simeq \{0\}$, $\forall q > 0$. Per quanto detto nell'osservazione del lemma 2 basta provare che $i_* : \pi_*(S) \to \pi_*(X)$ è un isomorfismo.

Consideriamo la successione di spazi: $S \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\omega'} Y$ ove i è l'immersione naturale ed $\omega'(x \times t) = \omega(x)$ per $0 \leq t \leq 1$. Osserviamo che $\omega' \circ i = \omega$. Pertanto $\omega' \circ i : \pi_*(S) \to \pi_*(Y)$ è un isomorfismo (vedi [2] pag. 171). D'altra parte ω'_* è un isomorfismo perchè X è contrattile su Y e perciò anche i_* risulta un isomorfismo.

Consideriamo la seguente decomposizione di X_S:

$$X_1^Y = Y \cup \big(\bigcup_{\frac{1}{2} \leq t < 1} R(Y) \times \{t\} \big), X_2 = \overline{X_S - X_1^Y}, \; S' = R(Y) \times \left\{ \frac{1}{2} \right\};$$

evidentemente X_1^Y, X_2, S' è una triade propria (vedi [1] pag. 34) e quindi, per ogni teoria dell'omologia $\widetilde{H}_*$, si ha la successione esatta:

$$\longrightarrow \widetilde{H}_{q+1}(X_S) \longrightarrow \widetilde{H}_q(S') \xrightarrow{(i_2)_q} \widetilde{H}_q(X_1^Y) \oplus \widetilde{H}_q(X_2) \longrightarrow \widetilde{H}_q(X_S) \longrightarrow .$$

Risulta $\pi_q(X_2) \simeq \pi_q(X_S) \simeq \{0\}$, $\forall\, q > 0$. Quindi, se per la teoria $\widetilde{H}_*$ vale la proprietà α), si ha:

$$\widetilde{H}_q(X_2) \simeq \widetilde{H}_q(X_S) \simeq \{0\}, \qquad \forall\, q > 0,$$

e perciò l'immersione $S' \longrightarrow X_1^Y$ induce un isomorfismo

$$(i_2)_* : \widetilde{H}_*(R(Y)) \longrightarrow \widetilde{H}_*(X_1^Y).$$

Presa una coppia (Y, A), $A \subset Y$ di elementi di $\mathfrak{a}$, analogamente a quanto fatto per Y si costruiscano gli spazi $R(A)$, X_1^A. Si hanno naturalmente le inclusioni $R(A) \subset R(Y)$, $X_1^A \subset X_1^Y$.

Usando il lemma dei «cinque» (vedi [1] pag. 16) si prova che l'immersione

$$(R(Y), \; R(A)) \longrightarrow (X_1^Y, X_1^A)$$

induce un isomorfismo

$$(\eta_2) : \widetilde{H}_*(R(Y), \; R(A)) \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}_*(X_1^Y, \; X_1^A).$$

Lo spazio X_1^Y è contrattile su Y, X_1^A su A. Quindi le immersioni $Y \longrightarrow X_1^Y$, $A \longrightarrow X_1^A$ inducono degli isomorfismi

$$(i_1)_* : \widetilde{H}_*(Y) \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}_*(X_1^Y),$$

$$(i_1)_* : \widetilde{H}_*(A) \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}_*(X_1^A),$$

$$(\eta_1)_* : \widetilde{H}_*(Y, A) \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}_*(X_1^Y, X_1^A).$$

Poichè gli spazi $R(Y)$ ed $R(A)$ sono triangolabili, risultano definiti degli isomorfismi:

$$(i_3)_* : \tilde{H}_*(R(Y)) \xrightarrow{\simeq} H_*(R(Y)),$$

$$(i_3)_* : \tilde{H}_*(R(A)) \xrightarrow{\simeq} H_*(R(A)),$$

$$(\eta_3)_* : \tilde{H}_*(R(Y), R(A)) \xrightarrow{\simeq} H_*(R(Y), R(A)).$$

Le proiezioni $\omega : R(Y) \longrightarrow Y$, $\omega : R(A) \longrightarrow A$ inducono degli isomorfismi (vedi [2] pag. 171):

$$(i_4)_* : H_*(R(Y)) \xrightarrow{\simeq} H_*(Y),$$

$$(i_4)_* : H_*(R(A)) \xrightarrow{\simeq} H_*(A),$$

$$(\eta_4)_* : H_*(R(Y)), R(A)) \xrightarrow{\simeq} H_*(Y, A).$$

Per ogni coppia (Y, A) di elementi di $\mathfrak{a}$ si hanno quindi gli isomorfismi:

$$\tilde{H}_*(Y, A) \xrightarrow{(\eta_1)_*} \tilde{H}_*(X_1^Y, X_1^A) \xrightarrow{(\eta_2)_*^{-1}} \tilde{H}_*(R(Y), R(A)) \xrightarrow{(\eta_3)_*} H_*(R(Y), R(A)) \xrightarrow{(\eta_4)_*} H_*(Y, A)$$

proveremo che l'isomorfismo $\eta_* = (\eta_4)_* \circ (\eta_3)_* \circ (\eta_2)_*^{-1} \circ (\eta_1)_*$ stabilisce un isomorfismo fra le due teorie dell'omologia.

Cominciamo a dimostrare che, data un'applicazione continua $\varphi : (Y, A) \longrightarrow$ $\longrightarrow (W, B)$, fra coppie di elementi di $\mathfrak{a}$, i seguenti diagrammi sono commutativi:

(3)
$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_q(Y, A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{q-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_q} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_q} \\ H_q(Y, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(A) \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_*(Y, A) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \tilde{H}_*(W, B) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_*} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_*} \\ H_*(Y, A) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(W, B) \end{array}$$

La commutatività di (3) segue dal seguente diagramma ogni cui quadrato è ovviamente commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\tilde{H}_q(A) \arrow[r, "(i_1)_q"] \arrow[d] & \tilde{H}_q(X_1^A) \arrow[d] & \tilde{H}_q(R(A)) \arrow[l, "(i_2)_q"'] \arrow[r, "(i_3)_q"] \arrow[d] & H_q(R(A)) \arrow[r, "(i_4)_q"] \arrow[d] & H_q(A) \arrow[d] \\
\tilde{H}_q(Y) \arrow[r, "(i_1)_q"] \arrow[d] & \tilde{H}_q(X_1^Y) \arrow[d] & \tilde{H}_q(R(Y)) \arrow[l, "(i_2)_q"'] \arrow[r, "(i_3)_q"] \arrow[d] & H_q(R(Y)) \arrow[r, "(i_4)_q"] \arrow[d] & H_q(Y) \arrow[d] \\
\tilde{H}_q(Y, A) \arrow[r, "(\eta_1)_q"] \arrow[d] & \tilde{H}_q(X_1^Y, X_1^A) \arrow[d] & \tilde{H}_q(R(Y), R(A)) \arrow[l, "(\eta_2)_q"'] \arrow[r, "(\eta_3)_q"] \arrow[d] & H_q(R(Y), R(A)) \arrow[r, "(\eta_4)_q"] \arrow[d] & H_q(Y, A) \arrow[d] \\
\tilde{H}_{q-1}(A) \arrow[r, "(i_1)_q"] \arrow[d] & \tilde{H}_{q-1}(X_1^A) \arrow[d] & \tilde{H}_{q-1}(R(A)) \arrow[l, "(i_2)_q"'] \arrow[r, "(i_3)_q"] \arrow[d] & H_{q-1}(R(A)) \arrow[r, "(i_4)_q"] \arrow[d] & H_{q-1}(A) \arrow[d] \\
\tilde{H}_{q-1}(Y) \arrow[r, "(i_1)_q"] & \tilde{H}_{q-1}(X_1^Y) & \tilde{H}_{q-1}(R,(Y)) \arrow[l, "(i_2)_q"'] \arrow[r, "(i_3)_q"] & H_{q-1}(R(Y)) \arrow[r, "(i_4)_q"] & H_{q-1}(Y) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{tikzcd}
$$

Per dimostrare la commutatività del diagramma (4) basta osservare che l'applicazione φ induce delle applicazioni

$$\varphi' : (R(Y), R(A)) \to (R(W), R(B)),$$

$$\varphi'' : (X_1^Y, X_1^A) \to (X_1^W, X_1^B),$$

così che si ha il diagramma commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{H}_*(Y, A) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_*"] & \tilde{H}_*(X_1^Y, X_1^A) \arrow[d, "(\tilde{\varphi}'')_*"] & \tilde{H}_*(R(Y), R(A)) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde{\varphi}')_*"] & H_*(R(Y), R(A)) \arrow[r] \arrow[d, "(\varphi')_*"] & H_*(Y, A). \arrow[d, "\varphi_*"'] \\
\tilde{H}_*(W, B) \arrow[r] & \tilde{H}_*(X_1^W, X_1^B) & \tilde{H}_*(R(W), R(B)) \arrow[l] \arrow[r] & H_*(R(W), R(B)) \arrow[r] & H_*(W,B)
\end{tikzcd}
$$

Osserviamo che se invece del gruppo $\mathbf{Z}$ degli interi si prende, come gruppo dei coefficienti un qualsiasi $G \in \mathfrak{D}$, si ottengono gli stessi isomorfismi e ciò prova che le due teorie sono isomorfe su ogni gruppo di coefficienti.

COROLLARIO. Sia $\mathfrak{A}'$ la categoria dei retratti assoluti di intorni connessi per archi. Tutte le teorie dell'omologia a supporti compatti definite sulle coppie di elementi di $\mathfrak{A}'$ coincidono con la teoria dell'omologia singolare.

PROVA. Per un teorema di S. T. HU (vedi [3] pag. 216) se X è un retratto assoluto di intorni connesso per archi, e se $\pi_q(X) \simeq \{0\}$, $\forall q \geq 0$, allora X è contrattile. Perciò l'ipotesi α) del teorema 1 è verificata per ogni teoria dell'omologia definita sulle coppie di elementi di $\mathfrak{a}'$ ed il corollario risulta provato.

OSSERVAZIONE 1. Siano $\widetilde{H}_*$, $\widehat{H}_*$, due teorie dell'omologia, eventualmente non soddisfacenti all'assioma della dimensione, se esse coincidono sulla categoria delle coppie di spazi connessi triangolabili allora coincidono sulla categoria $\mathfrak{a}$.

Basta nella dimostrazione del teorema 1 sostituire H_* con $\widehat{H}_*$ e l'isomorfismo $(i_3)_*$ con quello

$$\widetilde{H}_*(R(Y), G) \to \widehat{H}_*(R(Y), G) \qquad \text{che esiste per ipotesi.}$$

OSSERVAZIONE 2. Ad ogni teoria dell'omologia a supporti compatti, $\widetilde{H}$, definita su $\mathfrak{a}$ e non coincidente con l'omologia singolare si può associare una famiglia, non vuota, di spazi che hanno lo stesso tipo di omotopia del punto ma non sono contrattili. Detti spazi sono quelli per cui non vale la condizione α) del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[0] A. BOREL, J. C. MOORE, *Homology theory for locally compact spaces*. Michigan Math. Jour. 7 (1960), 137-159.

[1] S. EILENBERG, N. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*. Princeton Univ. press. 1952.

[2] S. T. HU, *Homotopy Theory*. Academic Press, New York and London, (1959).

[3] S. T. HU, *Cohomology and deformation retracts*. London Math. Soc. 52 (1950-51) 191-219.

[4] M. WOJDYSLAWSKI, *Retractes absolus et hyperespaces des continus*. Fund. Math. 32 (1939), 184-192.