ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. CAMPANATO
M. K. V. MURTHY

Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 1 (1965), p. 87-100
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_1_87_0>

UNA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI RIESZ-THORIN

S. Campanato e M. K. V. Murthy (*)

Sia Ω un insieme misurabile di R^n, $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, lo spazio di Banach delle funzioni a valori complessi di potenza p-sommabili in Ω. Indichiamo con $\| \ \|_p$ la norma in $L^p(\Omega)$.

È noto il seguente risultato di Riesz-Thorin sulla interpolazione per operazioni lineari tra gli spazi $L^p(\Omega)$ (cfr. ad es. [1], [10]): (Teorema di Riesz-Thorin). *Sia $u \longrightarrow Tu$ una operazione lineare che applica $L^{p_j}(\Omega)$ in $L^{q_j}(\Omega)$, $j = 1, 2$, con*

$$\text{(I)} \qquad \| Tu \|_{q_j} \leq K_j \| u \|_{p_j} \qquad (j = 1, 2)$$

allora, $\forall\, t \in [0, 1]$, T applica $L^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ dove

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}$$

e inoltre

$$\text{(II)} \qquad \| Tu \|_q \leq K_1^{1-t} K_2^t \| u \|_p .$$

In questa nota si dà una generalizzazione di questo teorema; più precisamente si estende il teorema di Riesz-Thorin ad operazioni lineari tra gli spazi $L^p(\Omega)$ e gli spazi $\mathcal{L}_k^{(q,\mu)}(\Omega)$ (cfr. [2] e il § 1 di questa nota).

È interessante rilevare che per ottenere questo risultato si seguirà lo stesso metodo di dimostrazione del teorema di Riesz-Thorin dato da Calderon-Zygmund in [1] (cfr. anche [10]) tenendo conto naturalmente delle proprietà degli spazi $\mathcal{L}_k^{(q,\mu)}(\Omega)$.

Pervenuto alla Redazione il 16 luglio 1964 e, in forma definitiva, il 10 dicembre 1964.

(*) Ha parzialmente contribuito finanziariamente alla preparazione di questo lavoro l'Air Force Office of Scientific Research OAR con il grant AF EOAR 63-29.

Nel § 3 si trovano, come applicazione del risultato precedente, teoremi di interpolazione per applicazioni lineari definite negli spazi L^p e con immagine che varia tra gli spazi L^q e gli spazi $C^{h,\alpha}$ passando attraverso gli spazi di Morrey, gli spazi hölderiani e certi spazi limiti come lo spazio di John-Nirenberg e altri spazi, che abbiamo indicato con $\mathcal{E}_h(\Omega)$, le cui proprietà non sono ancora ben studiate.

Ringraziamo il Professore G. Stampacchia per le utili discussioni sull'argomento.

1. Siano Ω un aperto limitato dello spazio euclideo R^n, d il diametro di Ω, Ω_d l'insieme $\overline{\Omega} \times (0 < r \leq d)$. Per ogni $x \in R^n$ e $\varrho > 0$ indichiamo con $I(x, \varrho)$ l'insieme $\{y \in R^n : |x - y| < \varrho\}$ e poniamo $\Omega(x, \varrho) = I(x, \varrho) \cap \Omega$.

Richiamiamo brevemente la definizione e qualche proprietà degli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ (cfr. [2], [3], [4]):

DEF. [1.I]. *Sia* $p \geq 1$, $\lambda \geq 0$, k *intero* ≥ 0; $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ *è lo spazio delle funzioni* $u \in L^p(\Omega)$ *tali che* (1)

$$||| u |||_{k,p,\lambda} = \sup_{(x,r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{p}} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \| u - P \|_{p, \Omega(x,r)} < +\infty$$

dove $\mathcal{P}_k$ *è la classe dei polinomi di grado non superiore a* k.

$\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio normato con la norma (2)

$$\| u \|'_{k,p,\lambda} = \| u \|_p + ||| u |||_{k,p,\lambda}. \tag{1.1}$$

Nel lavoro [2] sono stati studiati gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ reali (3) e per questi spazi sono state dimostrate alcune proprietà. Ci si può rendere immediatamente conto che le dimostrazioni date in [2] e quindi le proprietà che ora enunceremo sussistono inalterate anche per gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ complessi.

Nel seguito diremo che Ω *è di tipo* ($\mathcal{A}$) *se esiste una costante positiva* C *tale che* $\forall (x, r) \in \Omega_d$

$$\text{mis}\, \Omega(x, r) \geq C r^n.$$

---

(1) Con $\| u \|_{p,A}$, A sottoinsieme misurabile di Ω, indichiamo la norma in $L^p(A)$. Se $A \equiv \Omega$ scriveremo più semplicemente $\| u \|_p$ anzichè $\| u \|_{p,A}$.

(2) Vedremo più avanti che per gli scopi di questa nota converrà introdurre in $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ non la norma (1.1) ma una norma ad essa equivalente.

(3) Cioè il caso in cui nella def. [1.I] le funzioni u sono reali e di conseguenza i polinomi $P \in \mathcal{P}_k$ sono a coefficienti reali.

Si hanno le seguenti proposizioni:

a) Se Ω è di tipo $(\mathfrak{A})$ e $0 \leq \lambda < n$, $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) \sim L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ (4) dove gli $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ sono gli spazi di Morrey (5).

b) Se Ω è di tipo $(\mathfrak{A})$ e convesso, $\lambda > n$, $\dfrac{\lambda - n}{p}$ non è intero, $h = \left[\dfrac{\lambda - n}{p}\right] \leq k$, $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) \sim C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $\alpha = \dfrac{\lambda - n}{p} - h$.

c) Indichiamo con $\mathcal{E}_h(\Omega)$ lo spazio $\mathcal{L}_h^{(1,n+h)}(\Omega)$ per $h = 0, 1, 2, \ldots$; allora se Ω è di tipo $(\mathfrak{A})$, $\dfrac{\lambda - n}{p} = h$ intero e $h \leq k$, si ha che $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) \sim \mathcal{E}_h(\Omega)$.

Ricordiamo a questo proposito che per quanto riguarda lo spazio $\mathcal{E}_0(\Omega)$, con Ω cubo di R^n, John e Nirenberg hanno dato la seguente caratterizzazione [5]: sia u_Ω la media integrale di u in Ω e sia $\| u \|_{\mathcal{E}_0} \leq M$, esistono tre costanti positive $H, \beta, l\,(l < 1)$ tali che $\forall\, \sigma > 0$

$$\text{mis}\,\{|\, u - u_\Omega \,| > \sigma \text{ in } \Omega\} \leq H e^{-\beta\sigma M^{-1}} \text{ mis}\,\{|\, u - u_\Omega \,| > l\sigma \text{ in } \Omega\}.$$

Concludiamo questi brevi richiami sugli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ enunciando alcuni lemmi che saranno utili nel seguito del lavoro.

LEMMA [1.I]. *Sia $P(x) \in \mathcal{P}_k$, q un numero ≥ 1, A sottoinsieme misurabile della sfera $I(x_0, r)$ verificante la condizione*

$$\text{mis } A \geq C r^n \qquad (C \text{ costante} > 0)$$

esiste allora una costante $c_1(k, q, n, C)$ (6) tale che per ogni n-pla di interi non negativi $l \equiv (l_1, l_2, \ldots, l_n)$

$$|\{D^l P(x)\}_{x=x_0}|^q \leq \frac{c_1}{r^{n+|l|q}} \int_A |P(x)|^q \, dx$$

---

(4) Il simbolo $\sim$ indica che gli spazi sono equivalenti come spazi di Banach.

(5) Cioè gli spazi delle funzioni u definite in Ω tali che

$$\| u \|_{L^{(p,\lambda)}} = \sup_{(x,r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{p}} \| u \|_{p,\,\Omega(x,r)} < +\infty.$$

In tali spazi si assume abitualmente come norma $u \to \| u \|_{L^{(p,\lambda)}}$.

(6) Qui e nel seguito con $c_1, c_2, \ldots$ si indicano costanti positive indipendenti dalle funzioni cui le maggiorazioni si riferiscono. Quando sarà utile fra ( ) scriveremo esplicitamente le quantità dalle quali le costanti dipendono.

Questo lemma, dovuto a De Giorgi, si trova dimostrato in [2] § 2 nel caso di polinomi a coefficienti reali ma la dimostrazione è valida anche se i polinomi hanno coefficienti complessi.

Ricordiamo a questo punto (cfr. [2]) che se u è una funzione di $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$, $k \geq 0$, allora $\forall\ (x, r) \in \Omega_d$ esiste uno ed un solo polinomio $P_k(x, r, u, p) \in \mathcal{P}_k$ tale che

$$(1.2) \qquad \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \| u - P \|_{p, \Omega(x,r)} = \| u - P_k(x, r, u, p) \|_{p, \Omega(x,r)} .$$

Detta $\chi(x, r)$ la funzione caratteristica di $\Omega(x, r)$ (7), osserviamo che $\chi \cdot P_k(x, r, u, 2)$ non è altro che la proiezione di χu, $u \in L^2$, sulla varietà lineare di dimensione finita $\{\chi \cdot P : P \in \mathcal{P}_k\} \subset L^2(\Omega)$ e quindi, in particolare, l'applicazione $u \longrightarrow \chi \cdot P_k(x, r, u, 2)$ è lineare e continua da $L^2(\Omega)$ in $\{\chi \cdot P : P \in \mathcal{P}_k\}$.

LEMMA [1.II]. *Sia* $u \in \mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ $(p \geq 2)$ *e* Ω *di tipo* $(\mathcal{A})$, *allora*

$$(1.3) \qquad \| u \|'_{k,p,\lambda} \leq \| u \|_p + \sup_{(x,r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{p}} \| u - P_k(x, r, u, 2) \|_{p, \Omega(x, r)} \leq c_2 \| u \|'_{k,p,\lambda} .$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare la disuguaglianza di destra. Fissato $(x, r) \in \Omega_d$, poniamo, $\forall\ q \geq 2$ e $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$,

$$P_k(x, r, u, q) = \sum_{|l| \leq k} a_l(q)(y - x)^l .$$

Sia allora $u \in \mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$; dal lemma [1.I] segue che

$$(1.4) \qquad | a_l(p) - a_l(2) | \leq \frac{c_1}{r^{\frac{n}{2} + |l|}} \| P_k(x, r, u, p) - P_k(x, r, u, 2) \|_{2, \Omega(x, r)} .$$

D'altra parte

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} &\| P_k(x, r, u, p) - P_k(x, r, u, 2) \|_{2, \Omega(x,r)} \leq \\ &\leq \| u - P_k(x, r, u, p) \|_{2, \Omega(x,r)} + \| u - P_k(x, r, u, 2) \|_{2, \Omega(x,r)} \leq \\ &\leq 2 \| u - P_k(x, r, u, p) \|_{2, \Omega(x, r)} \leq 2 \omega^{\frac{p-2}{2p}} r^{\frac{2\lambda + n(p-2)}{2p}} ||| u |||_{k,p,\lambda} \end{aligned}$$

dove ω è la misura della sfera unitaria.

(7) Con ciò intenderemo la funzione

$$\chi(x, r) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega(x, r) \\ 0 & \text{in } \Omega - \Omega(x, r) . \end{cases}$$

Da (1.4) e (1.5) si ha allora

$$(1.6)\qquad | a_l(p) - a_l(2) | \leq c_3\, r^{\frac{\lambda-n}{p} - |l|}\, ||| u |||_{k,p,\lambda}.$$

Inoltre

$$\| u - P_k(x, r, u, 2) \|_{p,\Omega(x,r)} \leq$$

$$\leq \| u - P_k(x, r, u, p) \|_{p,\Omega(x,r)} + \| P_k(x, r, u, p) - P_k(x, r, u, 2) \|_{p,\Omega(x,r)} \leq$$

$$\leq r^{\frac{\lambda}{p}} ||| u |||_{k,p,\lambda} + \| \sum_{|l| \leq k} \{a_l(p) - a_l(2)\}(y-x)^l \|_{p,\Omega(x,r)} \leq$$

$$\leq r^{\frac{\lambda}{p}} ||| u |||_{k,p,\lambda} + \sum_{|l| \leq k} | a_l(p) - a_l(2) |\, r^{|l|} \cdot \{\text{mis}\, \Omega(x, r)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Quindi applicando (1.6) si ottiene

$$(1.7)\qquad \| u - P_k(x, r, u, 2) \|_{p,\Omega(x,r)} \leq c_4\, r^{\frac{\lambda}{p}}\, ||| u |||_{k,p,\lambda}.$$

Il lemma è pertanto dimostrato.

Se poniamo, per definizione,

$$(1.8)\qquad \| u \|_{k,q,\lambda} = \| u \|_q + \sup_{(x,r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{q}} \| u - P_k(x, r, u, 2) \|_{q,\Omega(x,r)}$$

$u \longrightarrow \| u \|_{k,q,\lambda}$ è evidentemente una norma in $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$; *nel seguito del lavoro in* $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ *intenderemo sempre di aver assunto come norma la* (1.8).

Dal lemma ora dimostrato segue che se Ω è di tipo $(\mathcal{A})$ le norme $u \longrightarrow \| u \|_{k,q,\lambda}$ e $u \longrightarrow \| u \|'_{k,q,\lambda}$ $q \geq 2$ sono equivalenti e si verifica che per gli spazi $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ normati con la (1.8) valgono ancora le proprietà *a*) *b*) *c*).

LEMMA [1.III]. *Sia* $u(z)$, $z = \xi + i\eta$, *una funzione continua e limitata nella striscia*

$$S(a, b) = \{z : a \leq \xi \leq b\},$$

olomorfa nell'interno di $S(a, b)$. *Se*

$$(1.9)\qquad | u(a + i\eta) | \leq M_1, \quad | u(b + i\eta) | \leq M_2$$

allora, $\forall\ z \in S(a, b)$,

$$(1.10)\qquad | u(z) | \leq M_1^{L(\xi)}\, M_2^{1-L(\xi)},$$

dove $L(\xi) = \dfrac{b - \xi}{b - a}$.

Per la dimostrazione di questo lemma, noto come lemma delle tre rette, si veda ad es. [10].

§ 2. In questo paragrafo dimostriamo un teorema che generalizza il teorema di Riesz-Thorin per operazioni lineari tra gli spazi $L^p(\Omega)$ e gli spazi $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$.

TEOREMA [2. I]. *Sia* $u \longrightarrow Tu$ *una operazione lineare che applica simultaneamente* $L^{p_j}(\Omega)$ *in* $\mathcal{L}_k^{(q_j,\lambda_j)}(\Omega)$ $(j = 1, 2)$ *tale che* $\forall\, u \in L^{p_j}(\Omega)$

$$\| Tu \|_{k,q_j,\lambda_j} \leq K_j \| u \|_{p_j}, \tag{2.1}$$

allora, $\forall\, t \in [0, 1]$, T *applica* $L^p(\Omega)$ *in* $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}$ *dove* p, q, λ *sono definiti dalle relazioni*

$$\begin{gathered}\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}, \\ \frac{\lambda}{q} = (1-t)\frac{\lambda_1}{q_1} + t\,\frac{\lambda_2}{q_2}\end{gathered} \tag{2.2}$$

e si ha la maggiorazione

$$\| Tu \|_{k,q,\lambda} \leq K_1^{1-t} K_2^t \| u \|_p . \tag{2.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo t in $[0,1]$ e siano p, q, λ i corrispondenti valori dati dalle (2.2). Supponiamo dapprima $q > 1$ e $p < +\infty$. Per semplicità poniamo

$$\alpha_j = \frac{1}{p_j}, \qquad \beta_j = \frac{1}{q_j},$$

$$\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \beta = \frac{1}{q}.$$

Per qualunque sottoinsieme misurabile A di Ω indichiamo con $\mathcal{F}(A)$ lo spazio vettoriale (rispetto al corpo complesso) delle funzioni semplici su A, cioè delle funzioni che sono combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi misurabili di A. È ben noto che $\mathcal{F}(A)$ è denso in $L^p(A)$ per qualunque $p \geq 1$ (8).

(8) $\mathcal{F}(A)$ è denso anche in $L^\infty(A)$ in quanto $A \subset \Omega$ è di misura finita.

Basterà allora dimostrare la maggiorazione (2.3) per funzioni $u \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Sia $z = \xi + i\eta$ un parametro complesso. Poniamo

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= (1-z)\,\alpha_1 + z\alpha_2\,, \\ \beta(z) &= (1-z)\,\beta_1 + z\beta_2\,, \\ \lambda(z)\cdot\beta(z) &= (1-z)\,\lambda_1\,\beta_1 + z\lambda_2\,\beta_2\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sia $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ con $\| u \|_p = 1$. Definiamo in $\Omega \times S(0,1)$ la funzione $(y, z) \longrightarrow \tilde{u}(y, z)$ ponendo

$$\tilde{u}(y, z) = |\, u(y)\,|^{\alpha(z)\cdot\alpha^{-1}}\, e^{i \arg. u(y)}\;. \tag{2.5}$$

Per ogni $z \in S(0,1)$ la funzione $y \longrightarrow \tilde{u}(y, z)$ appartiene ancora a $\mathcal{F}(\Omega)$ e quindi $T\tilde{u}$ è definita.

Sia (x, r) un punto fissato di Ω_d e v una funzione di $\mathcal{F}(\Omega(x, r))$ tale che $\| v \|_{(1-\beta)^{-1},\, \Omega(x, r)} = 1$.

Definiamo in $\Omega(x, r) \times S(0, 1)$ la funzione $(y, z) \longrightarrow \tilde{v}(y, z)$ ponendo

$$\tilde{v}(y, z) = |\, v(y)\,|^{[1-\beta(z)](1-\beta)^{-1}}\, e^{i \arg. v(y)}\;. \tag{2.6}$$

Da (2.4), (2.5), (2.6) si ha che

$$\begin{aligned} |\,\tilde{u}(y, z)\,| &= |\,u(y)\,|^{[(1-\xi)\alpha_1+\xi\alpha_2]\alpha^{-1}}\,, \\ |\,\tilde{v}(y, z)\,| &= |\,v(y)\,|^{[1-(1-\xi)\beta_1-\xi\beta_2](1-\beta)^{-1}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

e quindi

$$\| \tilde{u}(y, i\eta) \|_{p_1} = \|\, |\,u\,|^{\alpha_1\alpha^{-1}} \|_{p_1} = \| u \|_p^{\alpha_1\alpha^{-1}} = 1\;, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \| \tilde{v}(y, i\eta) \|_{(1-\beta_1)^{-1},\, \Omega(x, r)} &= \|\, |\,v\,|^{(1-\beta_1)(1-\beta)^{-1}} \|_{(1-\beta_1)^{-1},\, \Omega(x, r)} = \\ &= \| v \|_{(1-\beta)^{-1},\, \Omega(x, r)}^{(1-\beta_1)(1-\beta)^{-1}} = 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

e analogamente si verifica che

$$\| \tilde{u}(y, 1 + i\eta) \|_{p_2} = 1\;, \tag{2.10}$$

$$\| \tilde{v}(y, 1 + i\eta) \|_{(1-\beta_2)^{-1},\, \Omega(x, r)} = 1\;. \tag{2.11}$$

Consideriamo la funzione

$$f(x, r, z) = r^{\lambda(z)\cdot\beta(z)} \int_{\Omega(x,r)} T\widetilde{u}(y, z) \cdot \widetilde{v}(y, z)\, dy + \tag{2.12}$$

$$+ \int_{\Omega(x,r)} [T\widetilde{u}(y, z) - P_k(x, r, T\widetilde{u}, 2)]\, \widetilde{v}(y, z)\, dy.$$

Fissato $(x, r) \in \Omega_d$, la funzione $z \longrightarrow f(x, r, z)$ verifica nella striscia $S(0, 1)$ le ipotesi del lemma [1. III].

Per quanto riguarda la continuità, la limitatezza e l'olomorfia della funzione $z \longrightarrow f(x, r, z)$ basta osservare che se $u(y)$ è una funzione semplice

$$u(y) = \sum_{\tau=1}^{s} |c_\tau|\, e^{i\varphi_\tau} \chi_\tau(y)$$

con c_τ, φ_τ costanti e $\chi_\tau(y)$ funzioni caratteristiche, allora dalla (2.5) e dalla linearità delle applicazioni $u \longrightarrow Tu$ e $u \longrightarrow P_k(x, r, u, 2)$ segue che

$$T\widetilde{u}(y, z) = \sum_{\tau=1}^{s} |c_\tau|^{\alpha(z)\alpha - 1} e^{i\varphi_\tau}\, T(\chi_\tau),$$

$$P_k(x, r, T\widetilde{u}, 2) = \sum_{\tau=1}^{s} |c_\tau|^{\alpha(z)\alpha - 1} e^{i\varphi_\tau} P_k(x, r, T\chi_\tau, 2).$$

Calcoliamo allora le costanti M_1 e M_2 della condizione (1.9). Applicando la disuguaglianza di Hölder e sfruttando la (2.9) si ha

$$|f(x, r, i\eta)| \leq r^{\lambda_1\beta_1} \left| \int_{\Omega(x,r)} T\widetilde{u}(y, i\eta) \cdot \widetilde{v}(y, i\eta)\, dy \right| +$$

$$+ \left| \int_{\Omega(x,r)} \left\{ T\widetilde{u}(y, i\eta) - P_k(x, r, T\widetilde{u}(y, i\eta), 2) \right\} \cdot \widetilde{v}(y, i\eta)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \{ r^{\lambda_1\beta_1} \| T\widetilde{u}(y, i\eta) \|_{q_1, \Omega(x,r)} + \| T\widetilde{u}(y, i\eta) - P_k(x, r, T\widetilde{u}(y, i\eta), 2) \|_{q_1, \Omega(x,r)} \} \cdot$$

$$\cdot \| v(y, i\eta) \|_{(1-\beta_1)^{-1}, \Omega(x,r)} = r^{\lambda_1\beta_1} \{ \| T\widetilde{u}(y, i\eta) \|_{q_1, \Omega(x,r)} +$$

$$+ r^{-\lambda_1\beta_1} \| T\widetilde{u}(y, i\eta) - P_k(x, r, T\widetilde{u}(y, i\eta), 2) \|_{q_1, \Omega(x,r)} \} \leq r^{\lambda_1\beta_1} \| T\widetilde{u}(y, i\eta) \|_{k, q_1, \lambda_1}.$$

E sfruttando l'ipotesi (2.1) e la relazione (2.8) si ha in definitiva

$$(2.13) \qquad | f(x, r, i\eta) | \leq K_1 \, r^{\lambda_1 \beta_1}.$$

Procedendo in modo analogo, sfruttando ora le (2.10), (2.11) e l'ipotesi (2.1) si ottiene che

$$(2.14) \qquad | f(x, r, 1 + i\eta) | \leq K_2 \, r^{\lambda_2 \beta_2}.$$

Applicando allora il lemma [1.III] si ottiene, per ogni $0 \leq t \leq 1$,

$$(2.15) \qquad | f(x, r, t) | \leq K_1^{1-t} \, K_2^t \, r^{\lambda\beta}.$$

D'altra parte, per definizione di $\| \quad \|_{q, \Omega(x, r)}$,

$$(2.16) \qquad r^{\lambda\beta} \{ \| Tu \|_{q, \Omega(x, r)} + r^{-\lambda\beta} \| Tu - P_k(x, r, Tu, 2) \|_{q, \Omega(x, r)} \} =$$

$$= \sup_v | f(x, r, t) | \quad \text{per } v \in \mathcal{F}(\Omega(x, r)) \text{ e } \| v \|_{(1-\beta)^{-1}, \Omega(x, r)} = 1.$$

Da (2.15) e (2.16) segue allora che, $\forall \ (x, r) \in \Omega_d$,

$$(2.17) \qquad \| Tu \|_{q, \Omega(x, r)} + r^{-\lambda\beta} \| Tu - P_k(x, r, Tu, 2) \|_{q, \Omega(x, r)} \leq K_1^{1-t} \, K_2^t .$$

Da cui

$$\| Tu \|_{k, q, \lambda} \leq K_1^{1-t} \, K_2^t$$

per ogni $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ con $\| u \|_p = 1$.

Poichè $\mathcal{F}(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ si è dimostrata la maggiorazione (2.3).

Nel caso in cui $q = 1$ (cioè $\beta = 1$) e quindi $q_1 = q_2 = 1$ si ripete la stessa dimostrazione con l'unica semplificazione che al posto di $\tilde{v}(y, z)$ definita dalla (2.6) basta assumere $\tilde{v}(y, z) = v(y)$.

Se $p = +\infty$ e $q = 1$ il teorema è banale.

Se $p = +\infty$, e quindi $p_1 = p_2 = +\infty$, e $q > 1$ si ripete la dimostrazione data precedentemente ponendo $\tilde{u}(y, z) = u(y)$.

Il teorema è così dimostrato.

§ 3. In questo paragrafo mettiamo in evidenza dei teoremi di interpolazione che discendono come corollario dal teorema dimostrato nel § 2 e dalle proprietà degli spazi $\mathcal{L}_k^{(q, \mu)}(\Omega)$ richiamate nel § 1.

Supponiamo che Ω sia di tipo $(\mathcal{A})$ e convesso; le proprietà *a*) *b*) *c*) del § 1 assicurano quanto segue:

i) Negli spazi di Morrey $L^{(q,\mu)}(\Omega)$, $q \geq 1$ e $0 \leq \mu < n$, $u \longrightarrow \| u \|_{k,q,\mu}$, $k \geq 0$ è una famiglia di norme equivalenti.

ii) Negli spazi hölderiani $C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$, h intero ≥ 0 e $0 < \alpha < 1$, sono equivalenti le norme $u \longrightarrow \| u \|_{k,q,\mu}$ dove k, q, μ sono parametri che verificano le relazioni

$$k \geq h, \quad \frac{\mu - n}{q} = h + \alpha.$$

iii) In $\mathcal{E}_h(\Omega)$, h intero ≥ 0, sono equivalenti le norme $u \longrightarrow \| u \|_{k,q,\mu}$ i cui parametri k, q, μ verificano le relazioni

$$k \geq h, \quad \frac{\mu - n}{q} = h.$$

Se T è una applicazione lineare e continua da un certo $L^p(\Omega)$ in uno degli spazi ora elencati e se in tale spazio è stata assunta come norma $u \longrightarrow \| u \|_{k,q,\mu}$ (9) allora indichiamo con $K(k, q, \mu)$ la norma della trasformazione T.

Ciò posto, dal teorema [2.I] si deduce in particolare questo risultato:

TEOREMA [3.I]. *Sia Ω di tipo ($\mathcal{Q}$) e convesso, sia T un'operazione lineare che applica simultaneamente $L^{p_1}(\Omega)$ in $L^{q_1}(\Omega)$ e $L^{p_2}(\Omega)$ in $C^{h_2,\alpha_2}(\bar{\Omega})$* ($h_2$ intero ≥ 0 e $0 < \alpha_2 < 1$) *tale che*

$$\| Tu \|_{L^{q_1}} \leq K_1(k, q_1, 0) \| u \|_{p_1},$$

$$\| Tu \|_{C^{h_2,\alpha_2}} \leq K_2(k, q_2, \mu_2) \| u \|_{p_2}.$$

Poniamo, per $0 \leq t \leq 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}, \frac{\mu}{q} = t\frac{\mu_2}{q_2} = t\left(h_2 + \alpha_2 + \frac{n}{q_2}\right).$$

Allora

a) Se $t = t_h = \dfrac{h + \dfrac{n}{q_1}}{h_2 + \alpha_2 + \dfrac{n}{q_1}}$ *con* $h = 0, 1, \ldots, h_2$, *T applica* $L^{p(t_h)}(\Omega)$

(9) Ometteremo di precisare ogni volta che i parametri k, q, λ verificano le condizioni precisate in i) ii) iii).

in $\mathcal{E}_h(\Omega)$ e si ha la maggiorazione

$$\| Tu \|_{\mathcal{E}_h} = \| Tu \|_{k,\, q(t_h),\, \mu(t_h)} \leq K_1^{1-t_h}(k, q_1, 0)\, K_2^{t_h}(k, q_2, \mu_2)\, \| u \|_{p(t_h)} . \tag{3.1}$$

b) Se $0 \leq t < t_0$, *T applica* $L^p(\Omega)$ *in* $L^{(q,\mu)}(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$\| Tu \|_{L^{(q,\mu)}} = \| Tu \|_{k,\, q,\, \mu} \leq K_1^{1-t}(k, q_1, 0)\, K_2^{t}(k, q_2, \mu_2)\, \| u \|_p . \tag{3.2}$$

c) Se $t_h < t < t_{h+1}$ $h = 0, 1, \dots, h_2 - 1$ *oppure* $t_{h_2} < t \leq 1$ *allora T applica* $L^p(\Omega)$ *in* $C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$ *con* $\alpha = t\dfrac{\mu_2}{q_2} - \dfrac{n}{q} - h = t(h_2 + \alpha_2) - (1-t)\dfrac{n}{q_1} - h$ *e si ha la maggiorazione*

$$\| Tu \|_{C^{h,\alpha}} = \| Tu \|_{k,\, q,\, \mu} \leq K_1^{1-t}(k, q_1, 0)\, K_2^{t}(k, q_2, \mu_2)\, \| u \|_p . \tag{3.3}$$

Facciamo notare che nei casi *a*) e *c*) lo spazio immagine della applicazione T non dipende, al variare di t, dalla scelta particolare della terna di numeri k, q_2, μ_2, cioè dalla particolare norma $u \longrightarrow \| u \|_{k,\, q_2,\, \mu_2}$ introdotta in $C^{h_2,\alpha_2}(\bar{\Omega})$; nel risultato *b*) invece lo spazio immagine $L^{(q,\mu)}(\Omega)$ dipende in definitiva dal parametro q_2; è naturale in tal caso chiedersi se è possibile scegliere q_2 in modo che lo spazio immagine sia « minimo » [10]. Se in tale richiesta si include la validità di una maggiorazione del tipo della (3.2) si vede che uno spazio « minimo » non esiste in quanto, per le proprietà di inclusione degli spazi di Morrey [11], se $q_2'' \geq q_2'$ si verifica subito che $L^{(q'',\mu'')}(\Omega) \subset L^{(q',\mu')}(\Omega)$ [12] e quindi lo spazio minimo si avrebbe al limite per $q_2 \longrightarrow +\infty$ [13]. Ma al limite la maggiorazione (3.2) perde significato.

Se invece si rinuncia ad avere una maggiorazione quale la (3.2) la ricerca puramente qualitativa dello spazio « minimo » si riduce a questo problema:

Sia T una applicazione lineare e continua di $L^{p_1}(\Omega)$ *in* $L^{q_1}(\Omega)$ *e, simultaneamente, di* $L^{p_2}(\Omega)$ *in* $\mathcal{E}_0(\Omega)$. *Posto*

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad 0 < t < 1$$

---

(10) E' chiaro che qui si pensa a un ordinamento per inclusione.

(11) $p_1 \leq p_2$, $\dfrac{n-\lambda_2}{p_2} \leq \dfrac{n-\lambda_1}{p_1} \longrightarrow L^{(p_2,\lambda_2)}(\Omega) \subset L^{(p_1,\lambda_1)}(\Omega)$. Si dimostra applicando la disuguaglianza di Hölder.

(12) $q'' = q(q_2'')$, $\mu'' = \mu(q_2'')$, $q' = q(q_2')$, $\mu' = \mu(q_2')$.

(13) Tale spazio sarebbe lo spazio di Morrey $L^{\left(\frac{q_1}{1-t},\, \frac{tq_1(h_2+\alpha_2)}{1-t}\right)}(\Omega)$.

per ogni $0 < t < 1$ *si vuole il più piccolo spazio di Morrey* $B(t)$ *tale che* $T(L^{p(t)}(\Omega)) \subset B(t)$ *e l'applicazione* $u \longrightarrow Tu$ *sia continua da* $L^{p(t)}(\Omega)$ *in* $B(t)$.

Tale problema trova risposta nel teorema [3.1] del lavoro [9] di Stampacchia nella condizione che gli spazi $L^{p_i}(\Omega)$, $L^{q_i}(\Omega)$ ed $\mathcal{E}_0(\Omega)$ siano spazi reali e Ω sia un cubo. Si vede facilmente che la dimostrazione vale anche per Ω di tipo $(\mathfrak{A})$.

In tali ipotesi $B(t) \backsim L^{(q_1/(1-t),\,0)}(\Omega) \backsim L^{(q_1/(1-t))}(\Omega)$; introdotta in $\mathcal{E}_0(\Omega)$ una qualunque norma del tipo $u \longrightarrow \| u \|_{k,\,q_2,\,n}$ per ogni t $(0 < t < 1)$ esiste una costante $C_5(k, t, q)$ tale che

$$\| Tu \|_{\frac{q_1}{(1-t)}} \leq C_5(k, t, q_2) \, \| u \|_{p(t)}$$

dove $t \longrightarrow C_5(k, t, q_2)$ diverge per $t \longrightarrow 0$ e $t \longrightarrow 1$.

Sarebbe interessante poter stabilire per ogni scelta della norma $u \longrightarrow \| u \|_{k,\,q_2,\,n}$ la minima costante $C_5(k, t, q_2)$.

Lasciamo infine al lettore la dimostrazione dei seguenti risultati, analoghi al teorema [3.I], che si possono dedurre in egual maniera dal teorema [2.1].

Negli spazi $\mathcal{E}_h(\Omega)$ $[C^{(h,\,\alpha)}(\bar{\Omega})]$ con h intero ≥ 0 $(0 < \alpha < 1)$ assumiamo come norma $u \longrightarrow \| u \|_{k,\,q,\,\mu}$ dove i parametri k, q, μ verificano le condizioni

$$k \geq h, \ \frac{(\mu - n)}{q} = h \left[k \geq h, \ \frac{(\mu - n)}{q} = h + \alpha \right].$$

Indichiamo con K_i la costante $K_i(k, q_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$. Poniamo, per $0 < t < 1$

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{p_1} + \frac{t}{p_2}; \quad \frac{1}{q} = \frac{(1-t)}{q_1} + \frac{t}{q_2}.$$

Si ha il seguente

TEOREMA [3.II]. *Sia* Ω *di tipo* $(\mathfrak{A})$ *e convesso.*

1) *Sia* T *un'operazione lineare che applica* $L^{p_i}(\Omega)$ *in* $C^{(h_i,\,\alpha_i)}(\bar{\Omega})$ *simultaneamente tale che*

$$\| Tu \|_{C^{h_i,\,\alpha_i}} \leq K_i \, \| u \|_{p_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Allora

(*a*) *Se* $t_h = \dfrac{(h - h_1) - \alpha_1}{(h_2 - h_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)}$ *con* $h = h_1 + 1, \ldots, h_2$ T *applica* $L^{p(t_h)}(\Omega)$ *in* $\mathcal{E}_h(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$\| Tu \|_{\mathcal{E}_h} \leq K_1^{(1-t_h)} K_2^{t_h} \, \| u \|_{p(t_h)}.$$

(*b*) *Se* $0 \leq t < t_{h_1+1}$ *o* $t_h < t < t_{h+1}$ $(h = h_1 + 1, \ldots, h_2 - 1)$ *oppure* $t_{h_2} < t \leq 1$ *T applica* $L^p(\Omega)$ *in* $C^{(h,\alpha)}(\bar{\Omega})$ *con* $\alpha = (1-t)(h_1 + \alpha_1) + t(h_2 + \alpha_2) - h$ *e si ha la maggiorazione*

$$\| Tu \|_{C(h,\alpha)} \leq K_1^{(1-t)} K_2^t \| u \|_p .$$

2) *Sia T una operazione lineare che applica* $L^{p_1}(\Omega)$ *in* $L^{(q_1,\mu_1)}(\Omega)$ *e* $L^{p_2}(\Omega)$ *in* $C^{h_2,\alpha_2}(\bar{\Omega})$ *simultaneamente tale che*

$$\| Tu \|_{L(q_1,\mu_1)} \leq K_1 \| u \|_{p_1} ,$$

$$\| Tu \|_{C(h_2,\alpha_2)} \leq K_2 \| u \|_{p_2} .$$

Allora

(*a*) *Se* $t_h = \dfrac{h + \dfrac{(n-\mu_1)}{q_1}}{(h_2+\alpha_2) + \dfrac{(n-\mu_1)}{q_1}}$ *con* $h = 0, 1, \ldots, h_2$, *T applica* $L^{p(t_h)}(\Omega)$ *in* $\mathcal{E}_h(\Omega)$ *e si ha*

$$\| Tu \|_h \leq K_1^{(1-t_h)} K_2^{t_h} \| u \|_{p(t_h)} .$$

(*b*) *Se* $0 \leq t < t_0$, *T applica* $L^p(\Omega)$ *in* $L^{(q,\mu)}(\Omega)$ *dove* $\dfrac{\mu}{q} = \dfrac{(1-t)}{q_1} + \dfrac{t}{q_2}$ *e si ha*

$$\| Tu \|_{L(q,\mu)} \leq K_1^{(1-t)} K_2^t \| u \|_p .$$

(*c*) *Se* $t_h < t < t_{h+1}$ *oppure* $t_{h_2} < t \leq 1$, *T applica* $L^p(\Omega)$ *in* $C^{(h,\alpha)}(\Omega)$ *con*

$$\alpha = (1-t)\frac{(\mu_1 - n)}{q} + t(h_2 + \alpha_2) - h$$

e si ha

$$\| Tu \|_{C(h,\alpha)} \leq K_1^{(1-t)} K_2^t \| u \|_p .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CALDERON-A. ZYGMUND : « *Contributions to Fourier Analysis* ». Annals of Mathem. Studies, 25, p. 166-188.

[2] S. CAMPANATO : « *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali* ». Annali S. N. Superiore di Pisa, s. III, vol. XVIII, (1964) p. 137-160.

[3] S. CAMPANATO : « *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni* ». Annali S. N. Superiore di Pisa, s. III, vol. XVII, (1963) p. 175-188.

[4] S. CAMPANATO : « *Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano L^p in $C^{h,\alpha}$* ». Annali S. N. Sup. di Pisa. vol. XVIII, 1964 p. 345-360.

[5] F. JOHN-L. NIRENBERG : « *On functions of bounded mean oscillation* ». Comm. Pure and Applied Math., vol. XIV (1961) p. 415-426.

[6] P. GRISVARD: « *Semi-groups faiblement continus et interpolation* » C. R. Acad. Sc. Paris vol. 259 (1964) p. 27-29.

[7] G. N. MEYERS : « *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity* ». Proc. Amer. Math. Soc. vol 15, 1964, p. 717-721.

[8] J. PEETRE : « *On function spaces defined using the mean oscillation over cubes* ». In corso di stampa.

[9] G. STAMPACCHIA : « *$\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ spaces and interpolation* ». Comm. Pure and Applied Math. Vol. XVII, 1964 p. 293-306.

[10] A. ZYGMUND : « *Trigonometric Series* ». Vol. II, Cambridge University Press, 1959.