

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. GEYMONAT

Su un problema relativo alle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 18, n° 1 (1964), p. 87-110

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_1_87_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UN PROBLEMA RELATIVO ALLE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE (*)

di G. GEYMONAT (a Pavia)

Introduzione.

Nel presente lavoro riprendo alcuni risultati della mia tesi (v. [5], parte seconda) e studio il seguente problema: sia Ω un aperto limitato e sufficientemente regolare di frontiera Γ contenuto in R^n ; considerato il problema di DIRICHLET omogeneo per una equazione lineare alle derivate parziali di tipo ellittico in Ω

$$(1) \quad \begin{cases} Au = 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma_j u = \varphi_j & \text{su } \Gamma, j = 0, \dots, m-1 \end{cases} \quad \left(\gamma_j = \frac{\partial^j}{\partial \nu^j}, \right.$$

ν normale interna a Γ)

siano $S_j, j = 0, \dots, m-1$ gli operatori di NEUMANN (di ordine $2m-j-1$) associati ai γ_j ; in opportune ipotesi di unicità per (1) vedere in quali spazi l'applicazione $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} \rightarrow \mathcal{F}(\varphi) = \{S_0 u, \dots, S_{m-1} u\}$ è lineare e continua.

Per i risultati recenti di LIONS-MAGENES (v. ad es. [8]) se $\varphi_j \in W^{s-j-1/p, p}(\Gamma)$, p reale, $1 < p < +\infty$, s reale, $0 \leq s \leq m, s - 1/p$ non intero, allora l'applicazione $\varphi \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-j-1/p, p}(\Gamma)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{s-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$; un simile risultato manca nel caso $s - \frac{1}{p}$ intero. In questo lavoro sfruttando appunto i risultati della mia tesi riesco a di-

Pervenuto alla Redazione il 28 Settembre 1963.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

mostrare, nel caso $n = 2$, che l'applicazione $\varphi \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-j,p}(\Gamma)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-2m+j+1,p}(\Gamma)$ per r intero, $0 \leq r \leq m-1$; naturalmente le tracce non sono intese nel senso di completamento per continuità delle funzioni regolari ma come convergenza in media lungo varietà « parallele » alla frontiera.

Il teorema dimostrato si può considerare come l'estensione all'operatore A di un ben noto teorema di M. RIESZ [11] sulle funzioni armoniche coniugate (v. osservazione 2 del n. 3).

Questo risultato si basa sullo studio della proprietà di una funzione ausiliaria costruita mediante una applicazione della teoria del potenziale secondo AGMON [1] e MIRANDA [10].

n. 1. Alcuni richiami e preliminari.

1.1. Per comodità del lettore richiamo dapprima qualche definizione data in [5] a cui rinvio per i particolari. Ω è un insieme aperto e limitato di classe C^{2m+2} di frontiera Γ dello spazio euclideo R^2 ed $\{\Omega_\tau\}$, $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 1$, è una famiglia di aperti di classe C^{2m+2} di frontiera Γ_τ che invade Ω per $\tau \rightarrow 0$ (per una enunciazione precisa si veda l'ipotesi 1.1 di [5]). $W^{s,p}(\Omega)$, $W^{s,p}(\Gamma)$, s reale, $1 < p < +\infty$, sono gli spazi che estendendo al caso reale i ben noti spazi di SOBOLEV.

Si considera l'operatore differenziale lineare di ordine $2m$

$$Au = \sum_{|k|, |h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k(a_{kh}(x)) D^h u(x) \quad (1)$$

i cui coefficienti $a_{kh}(x)$ sono funzioni a valori complessi assegnate in $\bar{\Omega}$ tali che

$$a_{kh}(x) \in C^{\max\{|h|, |k|\}}(\bar{\Omega})$$

$$a_{kh}(x) \in C^{m+1}(\bar{\Omega}) \quad \text{se } |h| = |k| = m$$

e si fa l'ipotesi che esso sia propriamente ellittico in $\bar{\Omega}$. Si indica poi con $a(u, v)$ la forma sesquilineare associata ad A , con A^* l'operatore aggiunto formale di A , con $a^*(u, v)$ la forma sesquilineare associata ad A^* .

(1) Indicato con N l'insieme dei numeri interi ≥ 0 , se $k = (k_1, k_2) \in N \times N$ si pone $|k| = k_1 + k_2$, $D^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}$, $D^{(0,0)} u = u$.

Posto poi

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx$$

si ha per $u, v \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ la seguente formula di GREEN

$$(Au, v) - (u, A^* v) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} S_j u \overline{\gamma_j v} \, d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} \gamma_j u \overline{T_j v} \, d\sigma$$

dove $d\sigma$ indica l'elemento di curva su Γ ed S_j, T_j sono opportuni operatori differenziali di ordine $2m - j - 1$ tali che i sistemi

$$\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, S_{m-1}, \dots, S_0\}, \quad \{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \dots, T_0\}$$

siano sistemi normali e di DIRICHLET nel senso di [2]; precisamente

$$S_j = \bar{b}_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{2m-j} S_j^k \gamma_{2m-j-k}, \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$T_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{2m-j} T_j^k \gamma_{2m-j-k}, \quad j = 0, \dots, m-1$$

dove b_j ed $1/b_j$ sono in $C^{m+1}(\Gamma)$, T_j^k ed S_j^k essendo operatori tangenziali a Γ a coefficienti almeno in $C^{j+1}(\Gamma)$.

Se si considerano due funzioni $u, v \in C^{2m}(\bar{\Omega}_\tau)$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$, si possono ripetere le stesse considerazioni e si introducono così gli operatori

$$S_{j, \tau} = \bar{b}_{j, \tau} \gamma_{2m-j-1, \tau} + \sum_{k=2}^{2m-j} S_{j, \tau}^k \gamma_{2m-j-k, \tau} \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$T_{j, \tau} = b_{j, \tau} \gamma_{2m-j-1, \tau} + \sum_{k=2}^{2m-j} T_{j, \tau}^k \gamma_{2m-j-k, \tau} \quad j = 0, \dots, m-1$$

ed inoltre i coefficienti di $S_{j, \tau}$ e di $T_{j, \tau}$ « riportati » su Γ mediante la prop. 1.7 di [5] dipendono da τ con continuità in $C^{j+1}(\Gamma)$ e risulta $b_{j, 0} = b_j$; si indicherà poi con $\tilde{S}_{j, \tau}$ l'operatore $S_{j, \tau}$ riportato su Γ .

Si supponrà sempre verificata la seguente ipotesi di unicità

Ipotesi 1.1. Il problema

$$\begin{cases} Au = 0 \\ \gamma_j u = 0 \quad j = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

ha in $W^{2m, p}(\Omega)$ la sola soluzione $u = 0$.

È noto che l'ipotesi qui fatta non dipende da p per $1 < p < +\infty$; sono anche ben conosciute condizioni integrali (A è $W_0^{m,2}(\Omega)$ -ellittico) ed algebriche (A è *fortemente ellittico* oppure è *semidefinito debolmente positivo* ed il coefficiente di u è $\geq \lambda$ con $\lambda > 0$ sufficientemente grande) perchè l'ipotesi 1.1 sia verificata (v. ad es. [7], n. 7.1. e la bibliografia ivi citata).

1.2. Sia β una *fissata* funzione di $C^{2m}(\bar{\Omega})$ a supporto in $\bar{\Omega} - \Omega_{\tau_0}$ ed uguale ad 1 in $\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_{\frac{\tau}{2}}$ con un fissato $\tau \in]0, \tau_0[$.

Considerato lo spazio lineare $\mathcal{A}_s^{m,p'}(\Omega)$, m intero > 0 , s reale, $0 \leq s \leq m$, p' reale, $1 < p' < +\infty$, delle u tali che $u \in W^{m,p'}(\Omega)$ e che la funzione di $\tau \in [0, \tau_0]$ $(\beta u)_{\Gamma_{\frac{\tau}{2}}}$ « riportata » su Γ sia in $W^{m,p'}(0, \tau_0; W^{s,p'}(\Gamma))$, munito della norma del grafico, sia $A_s^{m,p'}(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{A}_s^{m,p'}(\Omega)$.

Definito $A_s^{-m,p}(\Omega)$ come il duale di $A_s^{m,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, si indica con $\mathcal{N}_A^{m-s,p}(\Omega)$, s reale, $0 \leq s \leq m$, lo spazio delle $u \in W^{m-s,p}(\Omega)$ tali che $Au \in A_s^{-m,p}(\Omega)$ munito della norma del grafico e si pone

$$\mathcal{N}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega) = \mathcal{N}_A^{m-s,p}(\Omega) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega).$$

1.3. Si dimostra ora un teorema di tracce che completa il teor. 3.3 di [5] in quanto dà senso per gli elementi $u \in \mathcal{N}_A^{r+1,p}(\Omega)$ r intero, $0 \leq r \leq m-1$ all'applicazione $u \rightarrow S_j u$, $j = 0, \dots, m-1$.

TEOR. 1.1. *Sia r intero, $0 \leq r \leq m-1$; l'applicazione $u \rightarrow Su = \{S_0 u, \dots, S_{m-1} u\}$ definita per le $u \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{r+1,p}(\Omega)$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata $u \rightarrow Su = \{S_0 u, \dots, S_{m-1} u\}$ di $\mathcal{N}_{A,0}^{r+1,p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{\tau+1-2m+j+1-1/p,p}(\Gamma)$.*

Alla dimostrazione si premette il seguente lemma del tutto analogo al lemma 1.1. di [6] e al lemma 5.1. di [8].

LEMMA 1.1. *Sia r intero, $0 \leq r \leq m-1$; siano assegnate $\beta_j \in W^{2m-r-1-j-1/p,p'}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$ esiste allora almeno una funzione $w \in W^{2m-r-1,p'}(\mathbb{R}^2)$ tale che*

$$\gamma_j w = \beta_j \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$T_j w = 0 \quad j = r+1, \dots, m-1$$

l'applicazione $\{\beta_0, \dots, \beta_{m-1}\} \rightarrow w$ essendo lineare e continua da

$$\prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-r-1-j-1/p,p'}(\Gamma) \text{ in } W^{2m-r-1,p'}(\mathbb{R}^2).$$

DIM. TEOR. 1.1. Siano assegnate comunque $\beta_j \in W^{2m-r-1-j-1/p', p'}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, e sia $w \in W^{2m-r-1, p'}(R^2)$ la funzione data dal lemma 1.1. Sia poi

$$\mathcal{A} = \sum_{|k|, |h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (\mathcal{A}_{kh}(x) D^h)$$

ove

$$\mathcal{A}_{kh}(x) \in C^{\max\{|h|, |k|\}}(R^2)$$

$$\mathcal{A}_{kh}(x) \in C^{m+1}(R^2) \quad \text{se} \quad |h| = |k| = m,$$

ed inoltre le funzioni \mathcal{A}_{kh} siano limitate in R^2 con le loro derivate fino all'ordine $\max\{|h|, |k|\}$ (rispettivamente fino all'ordine $m+1$ se $|h| = |k| = m$) ed infine $\mathcal{A}_{kh}(x) = a_{kh}(x)$ su $\bar{\Omega}$; l'operatore \mathcal{A} non è più necessariamente ellittico in tutto R^2 . Si indichi con \tilde{u} il prolungamento di u ad R^2 ottenuto ponendo $u = 0$ fuori di Ω ; poichè $u \in W_0^{r+1, p}(\Omega)$ allora, come è noto, $u \in W^{r+1, p}(R^2)$; si indichi infine con w_Ω la restrizione di w ad Ω .

Assegnato ora $u \in \mathcal{M}_{A, 0}^{r+1, p}(\Omega)$ si consideri il funzionale

$$X_\beta^w = \langle u, \overline{A^*(w_\Omega)} \rangle - \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \bar{w} \rangle$$

dove il primo \langle, \rangle rappresenta la dualità fra $W_0^{r+1, p}(\Omega)$ e $W^{-r-1, p'}(\Omega)$ ed il secondo \langle, \rangle rappresenta la dualità fra $W^{-2m+r+1, p}(R^2)$ e $W^{2m-r-1, p'}(R^2)$ (infatti se $\tilde{u} \in W^{r+1, p}(R^2)$ allora $\mathcal{A}\tilde{u} \in W^{-2m+r+1, p}(R^2)$).

X_β^w è indipendente da w ; sia infatti w_1 un'altra funzione di $W^{2m-r-1, p'}(R^2)$ che assegnati i β_j verifichi il lemma 1.1., allora $\chi = w - w_1$ è tale che $\gamma_j \chi = 0$ $j = 0, \dots, m-1$, $T_j \chi = 0$, $j = r+1, \dots, m-1$ ed essendo il sistema $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \dots, T_{r+1}\}$ normale e di DIRICHLET di ordine $2m-r-1$ allora (v. ad es. LIONS-MAGENES [8], prop. 5.1.) posto $0' = \bar{C}\Gamma$ si ha $\chi \in W_0^{2m-r-1, p'}(0')$.

Si ricava allora

$$(1.1) \quad X_\beta^\chi = \langle u, \overline{A^*(\chi_\Omega)} \rangle - \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \bar{\chi} \rangle = 0;$$

infatti per $\eta \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{r+1, p}(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{D}(0')$ si ha per la formula di GREEN:

$$(\eta, A^*(\psi_\Omega)) - (A\eta, \psi_\Omega) = 0$$

e poichè risulta

$$(A\eta, \psi_\Omega) = \langle \mathcal{A}\tilde{\eta}, \bar{\psi} \rangle$$

si ha la

$$(1.2) \quad (\eta, A^*(\psi_\Omega)) - \langle \mathcal{A}\tilde{\eta}, \bar{\psi} \rangle = 0;$$

ricordando poi la prop. 3.2 di [5] si ha la (1.1) prolungando per continuità la (1.2) ed X_β^{2p} non dipende da w e si scriverà perciò d'ora in avanti X_β .

Per il lemma 2.1. il funzionale semilineare $\{\beta_0, \dots, \beta_{m-1}\} \rightarrow X_\beta$ è continuo su $\prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-r-1-j-1/p', p'}(\Gamma)$ e quindi è della forma

$$X_\beta = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \tau_j u, \bar{\beta}_j \rangle \quad \text{con} \quad \tau_j u \in W^{-2m+r+1+j+1-1/p, p}(\Gamma)$$

e l'applicazione $u \rightarrow \tau_j u$ è lineare e continua da $\mathcal{M}_{\Delta, 0}^{r+1, p}(\Omega)$ in $W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$; è sufficiente ora dimostrare che $\tau_j u = -S_j u$ per $u \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{r+1, p}(\Omega)$ per avere il teorema. Sia ora $\beta_j \in C^{2m}(\Gamma)$ allora nel lemma 1.1 si può assumere $w \in C^{2m}(R^2)$ e per tale u e w si ha per la formula di GREEN

$$X_\beta = - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} S_j u \bar{\beta}_j d\sigma$$

e quindi per $j = 0, \dots, m-1$

$$\langle \tau_j u, \bar{\beta}_j \rangle = - \langle S_j u, \bar{\beta}_j \rangle \quad \forall \beta_j \in C^{2m}(\Gamma)$$

allora $\tau_j u = -S_j u$ ed il teorema è dimostrato.

Si può dimostrare ora il teorema di cui si parlava all'inizio.

TEOR. 1.2. *Sia r intero, $0 \leq r \leq m-1$; l'applicazione $u \rightarrow Su = \{S_0 u, \dots, S_{m-1} u\}$ definita per le $u \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata $u \rightarrow Su = \{S_0 u, \dots, S_{m-1} u\}$ di $\mathcal{M}_{\Delta}^{r+1, p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$.*

DIM. Sia $u \in \mathcal{M}_{\Delta}^{r+1, p}(\Omega)$; allora per il teorema di tracce risulta che $\gamma_j u \in W^{r+1-j-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, 1, \dots, r$; si consideri il problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} Aw = 0 \\ \gamma_j w = \gamma_j u & j = 0, \dots, r \\ \gamma_j w = 0 & j = r+1, \dots, m-1 \end{cases}$$

In virtù del teor. 5.2 di [8] esiste una ed una sola $w \in W^{r+1, p}(\Omega)$ che risolve tale problema ed anzi risulta $w \in D_{\Delta}^{r+1, p}(\Omega) = \{\eta \in W^{r+1, p}(\Omega); A\eta \in L^p(\Omega)\}$ (per le cui proprietà principali si veda [8] n. 3, 4, 5) e per il teor. 5.4 di

[8] ⁽²⁾ risulta $S_j w \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, l'applicazione $w \rightarrow S_j w$ essendo lineare e continua da $D_A^{r+1, p}(\Omega)$ in $W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$.

Posto $v = u - w$ si ha $v \in \mathcal{M}_{A,0}^{r+1, p}(\Omega)$ e quindi per il teor. 1.1. esiste $S_j v \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, l'applicazione $v \rightarrow S_j v$ essendo lineare e continua. Ed allora posto $u = v + w$ esiste $S_j u \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, e l'applicazione $u \rightarrow S_j u$ è lineare e continua da $\mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$. c. v. d.

OSSERVAZIONE: Come si vede facilmente questo teorema può anche essere dimostrato nelle ipotesi più generali del teor. 3.4 di [5].

1.4. Definito lo spazio $\mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega_\tau)$ in modo analogo ad $\mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega)$ (v. [5], n. 3.5.) ovviamente il teor. 1.2 vale anche se si sostituisce Ω con Ω_τ e quindi si ha il seguente teorema.

TEOR. 1.3. Sia r intero, $0 \leq r \leq m-1$, e sia $\tau \in [0, \tau_0]$: l'applicazione $u \rightarrow S_\tau u = \{S_{0, \tau} u, \dots, S_{m-1, \tau} u\}$ è lineare e continua da $\mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega_\tau)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma_\tau)$.

Sia ora $u \in \mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega)$; poichè la restrizione u_{Ω_τ} di u ad Ω_τ è per $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ in $\mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega_\tau)$ (v. [5] n. 3.5) si pone in maniera naturale il problema di sapere se per $\tau \rightarrow 0$ $\tilde{S}_{j, \tau} u \rightarrow S_j u$ in $W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$. Tale problema ammette risposta affermativa; a tal fine premettiamo i seguenti lemmi del tutto analoghi ai lemmi 3.5 e 3.6 di [5].

LEMMA 1.2. Sia $\tau \in [0, \tau_1]$ con $0 < \tau_1 \leq \tau_0$, e sia r intero, $0 \leq r \leq m-1$; siano assegnate $\beta_{j, \tau} \in W^{2m-r-1-j-1/p', p'}(\Gamma_\tau)$, $j = 0, \dots, m-1$; esiste allora almeno una funzione $w \in W^{2m-r-1, p'}(R^2)$ tale che

$$\begin{cases} \gamma_{j, \tau} w = \beta_{j, \tau} & j = 0, \dots, m-1 \\ T_{j, \tau} w = 0 & j = r+1, \dots, m-1 \end{cases}$$

l'applicazione $\{\beta_{0, \tau}, \dots, \beta_{m-1, \tau}\} \rightarrow w$ essendo lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-r-1-j-1/p', p'}(\Gamma_\tau)$ in $W^{2m-r-1, p'}(R^2)$ e inoltre vale la disuguaglianza

$$\|w\|_{W^{2m-r-1, p'}(R^2)} \leq c \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\beta_{j, \tau}\|_{W^{2m-r-j-1-1/p', p'}(\Gamma_\tau)} \right)^{1/p'}$$

con c costante indipendente da $\tau \in [0, \tau_1]$.

⁽²⁾ Si osservi che non è stata qui fatta l'ipotesi di unicità per il problema di NEUMANN J_S) di [8]; si può infatti con i ragionamenti di [8] completati con quelli di [9] dimostrare anche che $S_j w \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$ (si veda anche la conferenza di E. MAGENES al VII Congresso dell'U. M. I. Genova 1963).

LEMMA 1.3. Sia r intero, $0 \leq r \leq m - 1$; sia $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$ con $0 < \tilde{\tau} \leq \tau_0$; allora l'operatore \tilde{S}_τ varia in un insieme limitato di

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_A^{r+1,p}(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} W^{r+1-2m+j+1-1/p,p}(\Gamma)\right).$$

DIM. Per dimostrare il lemma basta maggiorare con una costante indipendente da $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|S_{j,\tau} u\|_{W^{r+1-2m+j+1-1/p,p}(\Gamma_\tau)}^p$$

per tutte le u tali che $\|u\|_{\mathcal{M}_A^{r+1,p}(\Omega)} = 1$.

Sia ora una tale u ; riprendendo il ragionamento fatto per dimostrare il lemma 3.6 di [5] sia per $\tau \in [0, \tau_2]$, con $0 < \tau_2 < \tilde{\tau}$, $w_\tau^* \in D_A^{r+1,p}(\Omega_\tau) \subset \subset \mathcal{W}_A^{r+1,p}(\Omega_\tau)$ tale che

$$Aw_\tau^* = 0$$

$$\gamma_{j,\tau} w_\tau^* = \gamma_{j,\tau} u \quad j = 0, \dots, r$$

$$\gamma_{j,\tau} w_\tau^* = 0 \quad j = r + 1, \dots, m - 1;$$

questa w_τ^* verifica inoltre la disuguaglianza

$$(1.3) \quad \|w_\tau^*\|_{\mathcal{M}_A^{r+1,p}(\Omega_\tau)} = \|w_\tau^*\|_{W^{r+1,p}(\Omega_\tau)} \leq c_1$$

con c_1 indipendente da $\tau \in [0, \tau_2]$ ⁽³⁾; tenendo anche conto del teor. 5.4 di [8] e facendo la stessa osservazione della nota ⁽²⁾ si ha che $S_{j,\tau} w_\tau^* \in$

⁽³⁾ La (1.3) si ottiene facilmente utilizzando anche il teor. 5.2 di [8]. Per le ipotesi fatte su Ω esistono gli omeomorfismi $\eta_\tau: \bar{\Omega}_\tau \rightarrow \bar{\Omega}$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$, e gli inversi η_τ^{-1} ($2m + 1$ volte differenziabili con continuità e le cui derivate di ordine $\leq 2m + 1$ sono limitate da costanti indipendenti da τ) che per $\tau = 0$ coincidono con l'identità e che su Γ_τ e su Γ coincidono con gli omeomorfismi θ_τ e θ_τ^{-1} della prop. 1.1 di [5]; sia poi $\eta_\tau^*: u \rightarrow \eta_\tau^* u$ l'applicazione lineare e continua di $W^{s,p}(\Omega_\tau)$ in $W^{s,p}(\Omega)$, s reale, $-2m \leq s \leq 2m$, che per $\varphi \in C^{2m}(\bar{\Omega}_\tau)$ è definita mediante la $\eta_\tau^* \varphi(x) = \varphi(\eta_\tau^{-1}(x))$ e sia $(\eta_\tau^*)^{-1}: W^{s,p}(\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\Omega_\tau)$ definita in modo analogo; posto poi $\tilde{A}_\tau = \eta_\tau^*(A_{\Omega_\tau})$ (ove A_{Ω_τ} è la restrizione di A ad $\bar{\Omega}_\tau$) se $u \in D_{\tilde{A}_\tau}^{s,p}(\Omega)$ allora $(\eta_\tau^*)^{-1} u \in D_A^{s,p}(\Omega_\tau)$, $0 \leq s \leq 2m$. Per il teor. 5.2 di [8] sia infine

è $W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma_\tau)$ e risulta

$$\|S_{j, \tau} w_\tau^*\|_{W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma_\tau)} \leq c_1$$

con c_1 indipendente da $\tau \in [0, \tau_2]$ ⁽⁴⁾.

Per $\tau \in [0, \tau_2]$ si pone poi $v_\tau = u_{\Omega_\tau} - w_\tau^*$; allora $v_\tau \in \mathcal{M}_{A, 0}^{r+1, p}(\Omega_\tau)$ ed inoltre $\|v_\tau\|_{\mathcal{M}_{A, 0}^{r+1, p}(\Omega_\tau)} \leq c_2$ con c_2 indipendente da $\tau \in [0, \tau_2]$.

Assegnate comunque $\beta_{j, \tau} \in W^{2m-r-j-1-1/p', p'}(\Gamma_\tau)$ si può scrivere in virtù del teor. 1.1 la seguente formula di GREEN per $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$ con $\tilde{\tau} = \min(\tau_1, \tau_2)$:

$$\langle v_\tau, \overline{A^*(w_{\Omega_\tau})} \rangle - \langle \mathcal{A} \tilde{v}_\tau, \tilde{w} \rangle = - \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_{j, \tau} v_\tau, \bar{\beta}_{j, \tau} \rangle$$

dove il primo \langle, \rangle rappresenta la dualità fra $W_0^{r+1, p}(\Omega_\tau)$ e $W^{-r-1, p'}(\Omega_\tau)$, il secondo \langle, \rangle la dualità fra $W^{-2m+r+1, p}(R^2)$ e $W^{2m-r-1, p'}(R^2)$, il terzo \langle, \rangle la dualità fra $W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma_\tau)$ e $W^{2m-r-1-j-1/p', p'}(\Gamma_\tau)$. Il lemma segue ora in maniera analoga a come si dimostra il lemma 3.6 di [5].

$\chi_\tau \in D_{\tilde{A}_\tau}^{r+1, p}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{\tilde{A}_\tau}^{r+1, p}(\Omega)$ tale che

$$\tilde{A}_\tau \chi_\tau = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\gamma_j \chi_\tau = \tilde{\gamma}_{j, \tau} u \quad j = 0, \dots, r \quad \text{su } \Gamma$$

$$\gamma_j \chi_\tau = 0 \quad j = r+1, \dots, m-1 \quad \text{su } \Gamma.$$

Essa inoltre verifica la

$$\|\chi_\tau\|_{D_{\tilde{A}_\tau}^{r+1, p}(\Omega)} \leq c' \left(\sum_{j=0}^r \|\tilde{\gamma}_{j, \tau} u\|_{W^{r+1-j-1/p, p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p} \leq c_0$$

con c_0 indipendente da $\tau \in [0, \tau_2]$; basta ora porre $w_\tau^* = (\eta_\tau^*)^{-1} \chi_\tau$ per avere la (1.3).

⁽⁴⁾ Si osservi che riprendendo quanto detto in ⁽³⁾, per il teor. 5.4 di [8] e facendo la stessa osservazione di ⁽²⁾ si ha che esistono $S_j \chi_\tau \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$ ed anzi

$$\|S_j \chi_\tau\|_{W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)} \leq c'' \|\chi_\tau\|_{D_{\tilde{A}_\tau}^{r+1, p}(\Omega)} \leq c'''$$

con c''' indipendente da $\tau \in [0, \tau_2]$.

Si ha infine il seguente teorema che risponde in maniera affermativa al problema sopra posto e la cui dimostrazione è analoga a quella del teor. 3.5 di [5].

TEOR. 1.4. *Sia r intero, $0 \leq r \leq m - 1$; per ogni $u \in \mathcal{M}_A^{r+1, p}(\Omega)$ risulta*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\tilde{S}_{j, \tau} u - S_j u\|_{W^{\tau+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)} = 0 \quad j = 0, \dots, m - 1.$$

n. 2. Ulteriori proprietà della funzione ausiliaria.

2.1. Per comodità del lettore richiamo dapprima una parte del n. 7 di [5]. Si consideri nel piano (t, s) l'operatore uniformemente e propriamente ellittico di ordine $2m$

$$\mathcal{A} = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(s) D_t^j D_s^{2m-j} \quad (5)$$

con i coefficienti funzioni a valori complessi della sola variabile s appartenenti a $C^1(R^1)$ e limitati in R^1 .

Si dimostra allora che gli m zeri $z_1(s), \dots, z_m(s)$ con parte immaginaria negativa del polinomio in z

$$A(z, 1, s) = \sum_{k=0}^{2m} a_{2m-k}(s) z^k$$

non escono, al variare di s in R^1 , da una curva γ semplice e chiusa fissa appartenente al semipiano $Im z < 0$ che orientata positivamente ammette, ponendo $z = x + iy$, la rappresentazione parametrica

$$(2.1) \quad \begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases} \quad a \leq \tau \leq b$$

con $x(\tau), y(\tau) \in C^1(a, b)$ ed esiste inoltre una costante $C_* > 0$ tale che per $z \in \gamma$

$$(2.2) \quad Im z = y \leq -C_* < 0$$

(5) Si è posto $D_t = \frac{\partial}{\partial t}, D_s = \frac{\partial}{\partial s}$.

Posto poi

$$M(z, s) = (z - z_1(s)) \dots (z - z_m(s)) = \sum_{k=0}^m b_{m-k}(s) z^k$$

$$M_{m-j-1}(z, s) = \sum_{k=j+1}^m b_{m-k}(s) z^{k-j-1} \quad j = 0, \dots, m-1$$

si osserva che per il modo con il quale sono costruiti detti polinomi i coefficienti $b_{m-k}(s)$, $k = 0, 1, \dots, m$ sono funzioni di s appartenenti a $C^1(\mathbb{R}^1)$ e limitati in \mathbb{R}^1 ; inoltre, per $z \in \gamma$ e per $s \in \mathbb{R}^1$, $|M(z, s)|$ è maggiore di una costante positiva.

Fissato r intero con $0 \leq r \leq m-1$ e date m distribuzioni a valori complessi $\psi_j(s) \in W^{r-j, p}(\mathbb{R}^1)$, $j = 0, \dots, m-1$ ed a supporto compatto contenuto in un intervallo aperto J di \mathbb{R}^1 esiste una funzione $v(t, s)$ la quale

i) è indefinitamente differenziabile nel semipiano $t < 0$;

ii) per ogni intervallo chiuso e limitato $I = [s', s''] \subset \mathbb{R}^1$ verifica le condizioni:

$$(2.3) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \|D_t^j v - \psi_j\|_{W^{r-j, p}(I)} = 0 \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$(2.4) \quad \|D_t^q v\|_{W^{-m+r+1, p}(I)} = 0 \quad (|t|^{-l}) \quad |q| = m-1+l, \quad l = 1, 2, \dots$$

$$(2.5) \quad \|v\|_{W^{-m+r+1, p}(I)} = 0 \quad (|t|^{-m})$$

iii) appartiene a $W^{r, p}(B)$, dove B è un aperto limitato fissato qualunque del semipiano $t < 0$.

Si osservi che se $r-j < 0$, allora, per il teorema di rappresentazione, esiste almeno una decomposizione:

$$\psi_j(s) = \sum_{k=0}^{j-r} D_s^k f_{jk}(s)$$

con $f_{jk}(s) \in L^p(\mathbb{R}^1)$ ed a supporto compatto contenuto in J ; sia fissata una tale decomposizione. La funzione risulta definita per $t < 0$ ed $s \in \mathbb{R}^1$ dalle formule seguenti:

$$(2.6) \quad v(t, s) = \sum_{j=0}^r v_j(t, s) + \sum_{j=r+1}^{m-1} \sum_{k=0}^{j-r} v_{jk}(t, s)$$

dove

$$(2.7) \quad v_i(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(\sigma) K_j(t, \sigma, s - \sigma) d\sigma \quad j = 0, \dots, r$$

$$(2.8) \quad v_{jk}(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{jk}(\sigma) K_{jk}(t, \sigma, s - \sigma) d\sigma \quad \begin{array}{l} j = r + 1, \dots, m - 1 \\ k = 0, \dots, j - r \end{array}$$

nelle quali se $r = 1, 2, \dots, m - 1$ allora è

$$(2.9) \quad K_j(t, \sigma, s - \sigma) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(r-1)!} (tz + s - \sigma)^{r-1} \right. \\ \left. \lg(tz + s - \sigma) dz \right\}$$

$$(2.10) \quad K_{jk}(t, \sigma, s - \sigma) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(j-k-1)!} (tz + s - \sigma)^{j-k-1} \right. \\ \left. \lg(tz + s - \sigma) dz \right\}$$

e se $r = 0$ allora è

$$(2.9 \text{ bis}) \quad K_0(t, \sigma, s - \sigma) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-1}(z, \sigma) dz}{M(z, \sigma)(tz + s - \sigma)} \right\}$$

$$(2.10 \text{ bis}) \quad K_{jk}(t, \sigma, s - \sigma) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(j-k-1)!} (tz + s - \sigma)^{j-k-1} \right. \\ \left. \lg(tz + s - \sigma) dz \right\} \quad k = 0, \dots, j - 1$$

$$(2.10 \text{ ter}) \quad K_{jj}(t, \sigma, s - \sigma) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) dz}{M(z, \sigma)(tz + s - \sigma)} \right\}$$

$+\gamma$ essendo la curva semplice e chiusa dal semipiano $\operatorname{Im} z < 0$ già considerata orientata positivamente e la determinazione del logaritmo essendo presa nelle (2.9), (2.10), (2.10 bis) in modo che

$$0 \leq \operatorname{Im} \lg(tz + s - \sigma) \leq \pi.$$

2.2. Si considerino ora le funzioni a valori complessi $s \rightarrow F_j^h(s)$ $j = 0, 1, \dots, r$, $h = 0, 1, \dots$ definite mediante gli integrali singolari

$$F_j^h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) z^h}{M(z, \sigma)} dz \right\} \frac{d\sigma}{s - \sigma}.$$

Per un noto teorema di M. RIESZ (v. [11], teor. VII) poichè $\psi_j^{(r-j)}(\sigma) \in L^p(\mathbb{R}^1)$ ed inoltre $\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) z^h}{M(z, \sigma)} dz \right\}$ è una funzione continua e limitata per $\sigma \in \mathbb{R}^1$ l'integrale singolare esiste ed $F_j^h(s) \in L^p(\mathbb{R}^1)$. Risulta inoltre, sempre per il citato teorema di M. RIESZ, che l'applicazione lineare $\psi_j^{(r-j)}(s) \rightarrow F_j^h(s)$ di $L^p(\mathbb{R}^1)$ in $L^p(\mathbb{R}^1)$ è anche continua e si ha

$$\|F_j^h\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leq K \|\psi_j^{(r-j)}\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \quad j = 0, \dots, r; h = 0, 1, \dots$$

con K costante indipendente da ψ_j .

Siccome l'applicazione $F_j^h(s) \rightarrow D_s^{m+l-r-1} F_j^h(s)$, $l = 1, 2, \dots$ è lineare continua da $L^p(\mathbb{R}^1)$ in $W^{r-m+1-l, p}(\mathbb{R}^1)$ allora l'applicazione

$$\psi_j(s) \rightarrow D_s^{m+l-r-1} F_j^h(s) \quad (j = 0, \dots, r; h = 0, 1, \dots; l = 1, 2, \dots)$$

è lineare e continua da $W^{r-j, p}(\mathbb{R}^1)$ in $W^{r-m+1-l, p}(\mathbb{R}^1)$.

Con ragionamenti del tutto analoghi si dimostra che la funzione $s \rightarrow F_{jk}^h(s)$, $j = r+1, \dots, m-1$, $k = 0, \dots, j-r$, $h = 0, 1, \dots$ definita mediante l'integrale singolare

$$F_{jk}^h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{jk}(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma) z^h}{M(z, \sigma)} dz \right\} \frac{d\sigma}{s - \sigma},$$

appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^1)$ e l'applicazione $f_{jk}(s) \rightarrow D_s^{m+l-j+k-1} F_{jk}^h(s)$ ($j = r+1, \dots, m-1$; $k = 0, \dots, j-r$; $h = 0, 1, \dots$; $l = 1, 2, \dots$) è lineare e continua da $L^p(\mathbb{R}^1)$ in $W^{j-k-m+1-l, p}(\mathbb{R}^1) \subset W^{r-m+1-l, p}(\mathbb{R}^1)$.

2.3. Si può ora precisare la (2.4); si ha infatti la formula:

$$(2.11) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \|D_t^h D_s^{m-1+l-h} v(t, s) - \sum_{j=0}^r D_s^{m-1+l-r} (\psi_j^{(r-j)}(s))\|$$

$$A_j^h(s) + F_j^h(s) - \sum_{j=r+1}^{m-1} \sum_{k=0}^{j-r} D_s^{m+l-j+k-1} (f_{jk}(s) + F_{jk}^h(s)) \|_{W^{r-m+1-l, p}(\mathbb{R}^1)} = 0$$

dove si è posto

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, s) z^h}{M(z, s)} dz \right\} = A_j^h(s)$$

e risulta per $0 \leq h \leq m-1$ (v. AGMON [1]) $A_j^h(s) = \delta_{jh}^{(*)}$; inoltre l'applicazione

$$\{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\} \rightarrow \sum_{j=0}^r D_s^{m-1+l-r} (\psi_j^{(r-j)}(s) A_j^h(s) + F_j^h(s)) + \\ + \sum_{j=r+1}^{m-1} \sum_{k=0}^{j-r} D_s^{m-1+l-j+k} (f_{jk}(s) + F_{jk}^h(s))$$

è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-j, p}(R^1)$ in $W^{r-m+1-l, p}(R^1)$.

2.4. Per dimostrare la (2.11) dimostro dapprima che per $j=0, \dots, r$, $h=0, 1, \dots, m-1+l$, $l=1, 2, \dots$ si ha

$$(2.12) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \| D_t^h D_s^{m-1+l-h} v_j(t, s) - D_s^{m+l-r-1} (F_j^h(s) + \\ + \psi_j^{(r-j)}(s) A_j^h(s)) \|_{W^{r-m+1-l, p}(R^1)} = 0$$

Posto per semplicità $\psi_j^{(r-j)}(s) = \psi(s)$ e

$$\frac{M_{m-j-1}(z, s) z^h}{M(z, s)} = P_j^h(z, s)$$

per dimostrare la (2.12) si dimostra che per ogni $g(s) \in \mathcal{D}(R^1)$ risulta

$$| \langle D_t^h D_s^{m-1+l-h} v_j(t, s) - D_s^{m+l-r-1} (F_j^h(s) + \psi(s) A_j^h(s)), g(s) \rangle | \leq \\ \leq \varepsilon(t) \| g \|_{W^{m-1+l-r, p'}(R^1)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

con $\varepsilon(t)$ infinitesimo con t ed indipendente da g .

Si ha intanto dalle (2.7), (2.9):

$$| \langle D_t^h D_s^{m-1+l-h} v_j(t, s) - D_s^{m-1+l-r} (F_j^h(s) + A_j^h(s) \psi(s)), g(s) \rangle | =$$

(*) δ_{jh} è il simbolo di KRONECKER.

$$\begin{aligned}
 &= \left| \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} P_j^h(z, \sigma) \frac{(-1)^{m-1+l-r} (m-1+l-r)!}{(tz+s-\sigma)^{m+l-r}} dz \right\} d\sigma - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - D_s^{m-1+l-r} (A_j^h(s) \psi(s) + F_j^h(s)), g(s) \right\rangle \right| = \\
 &= \left| \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma) dz}{tz+s-\sigma} \right\} d\sigma - A_j^h(s) \psi(s) - F_j^h(s), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. g^{(m-1+l-r)}(s) \right\rangle \right| \leq \\
 &\leq \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{(tz+s-\sigma)} dz \right\} d\sigma - A_j^h(s) \psi(s) - \right. \\
 &\quad \left. - F_j^h(s) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \|g\|_{W^{m-1+l-r, p'}(\mathbb{R}^1)}.
 \end{aligned}$$

Per dimostrare che

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{(tz+s-\sigma)} dz \right\} d\sigma - A_j^h(s) \psi(s) - \right. \\
 \left. - F_j^h(s) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0,
 \end{aligned}$$

osservato che per la definizione di integrale singolare si ha (v. [3])

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| F_j^h(s) - \int_{|s-\sigma|>-t} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} P_j^h(z, \sigma) dz \right\} \frac{d\sigma}{s-\sigma} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0$$

si dimostra che

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad &\lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{tz+s-\sigma} dz \right\} d\sigma - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{|s-\sigma|>-t} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{s-\sigma} dz \right\} d\sigma - \right. \\
 &\quad \left. - A_j^h(s) \psi(s) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0.
 \end{aligned}$$

Si ha intanto ponendo $z = x + iy$ e sviluppando gli integrali curvilinei complessi :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{tz + s - \sigma} dz \right\} d\sigma - \\
 & \qquad - \int_{|s-\sigma| > -t} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{s - \sigma} dz \right\} d\sigma = \\
 & = \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dx \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N \left(z, \frac{s - \sigma}{t} \right) d\sigma \right) - \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dy \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, \sigma)\} N \left(z, \frac{s - \sigma}{t} \right) d\sigma \right) - \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dx \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, \sigma)\} N_1 \left(z, \frac{s - \sigma}{t} \right) d\sigma \right) - \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dy \left(\frac{1}{t} \int_{+\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N_1 \left(z, \frac{s - \sigma}{t} \right) d\sigma \right)
 \end{aligned}$$

ove si è posto

$$N(z, s) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s+z} - \frac{1}{s} \right\} & \text{per } s^2 > 1 \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s+z} \right\} & \text{per } s^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$N_1(z, s) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{s+z} \right\}.$$

Considerate ora le funzioni sommabili definite per $\xi \geq 0$ da

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{\Delta}{\xi^2 - \delta_1} & \text{per } \xi > 1 \\ \min\left(\frac{\Delta}{1 - \delta_1}, \frac{1 + \Delta}{C_*^2}\right) & \text{per } 0 \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\Delta}{(\xi - \Delta)^2 + C_*^2},$$

dove si è ricordata la (2.2) e si è posto

$$\delta_1 = \min\left(\frac{1}{2}, \min_{z \in \gamma} |z|\right) > 0$$

$$\Delta = \max_{z \in \gamma} |z| < +\infty,$$

si hanno, *uniformemente rispetto a* $z \in \gamma$, le maggiorazioni

$$|N(z, s)| \leq \varphi(|s|)$$

$$|N_1(z, s)| \leq \varphi_1(|s|)$$

e si può quindi applicare una ovvia variante al lemma 2. di cap. II di CALDERON-ZYGMUND [3] ed osservato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(z, s) ds = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(z, s) ds = -\pi$$

si ha *uniformemente per* $z \in \gamma$:

$$(2.14) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N\left(z, \frac{s - \sigma}{t}\right) d\sigma \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, \sigma)\} N\left(z, \frac{s - \sigma}{t}\right) d\sigma \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N_1 \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma + \right. \\ \left. + \pi \psi(s) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, s)\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, \sigma)\} N_1 \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma + \right. \\ \left. + \pi \psi(s) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, s)\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = 0.$$

Essendo inoltre

$$-\frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dx (-\pi\psi(s) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, s)\}) - \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dy (-\pi\psi(s) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, s)\}) = \\ = \psi(s) A_j^h(s)$$

si ottiene alla fine

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{tz + s - \sigma} dz \right\} d\sigma - \right. \\ \left. - \int_{|s-\sigma| > -t} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{P_j^h(z, \sigma)}{s - \sigma} dz \right\} d\sigma - \right. \\ \left. - A_j^h(s) \psi(s) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leq \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dx \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} + \\ + \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dy \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, \sigma)\} N \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dx \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, \sigma)\} N_1 \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \pi \psi(s) \operatorname{Im} \{P_j^h(z, s)\} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} + \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dy \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \right. \right. \\
 & \left. \left. \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N_1 \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma + \pi \psi(s) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, s)\} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}
 \end{aligned}$$

Si ha poi dalla (2.1) e per la uniformità rispetto a $z \in \gamma$ della (2.14)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} dx \left(\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(z, \sigma)\} N \left(z, \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leq \\
 & \leq \lim_{t \rightarrow 0^-} \left\| \left(\int_a^b \left| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(x(\tau) + iy(\tau), \sigma)\} N \left(x(\tau) + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + iy(\tau), \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma \right|^p d\tau \right)^{1/p} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_a^b |x'(\tau)|^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \leq \\
 & \leq c_0 \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_a^b \left| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(x(\tau) + iy(\tau), \sigma)\} N \left(x(\tau) + iy(\tau), \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma \right|^p d\tau \right)^{1/p} \leq \\
 & \leq c_0 \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\int_a^b \left\| \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) \operatorname{Re} \{P_j^h(x(\tau) + iy(\tau), \sigma)\} \right. \right. \\
 & \left. \left. N \left(x(\tau) + iy(\tau), \frac{s-\sigma}{t} \right) d\sigma \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}^p d\tau \right)^{1/p} = 0.
 \end{aligned}$$

Ripetendo poi lo stesso ragionamento per gli altri addendi della (2.15) si ha la (2.13) e quindi la (2.12).

Per completare la dimostrazione della (2.11) basta ora dimostrare che per $j = r + 1, \dots, m - 1$, $k = 0, \dots, j - r$, $l = 1, \dots, h = 0, \dots, m - 1 + l$

si ha

$$(2.16) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \| D_t^h D_s^{m-1+l-h} v_{jk}(t, s) - D_s^{m+l-j+k-1} (f_{jk}(s) A_j^h(s) + F_{jk}^h(s)) \|_{W^{r-m+1-l, p(\mathbb{R})}} = 0.$$

A tal fine con ragionamento analogo a quello poco sopra svolto si dimostra a partire dalle (2.8), (2.10) che per ogni $g(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ risulta

$$\begin{aligned} & | \langle D_t^h D_s^{m-1+l-h} v_{jk}(t, s) - D_s^{m+l-j+k-1} (f_{jk}(s) A_j^h(s) + F_{jk}^h(s)), g(s) \rangle | \leq \\ & \leq \varepsilon(t) \| g \|_{W^{m+l-j+k-1, p'(\mathbb{R})}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \end{aligned}$$

con $\varepsilon(t)$ infinitesimo con t indipendente da g donde a fortiori la (2.16).

2.5. Si può anche precisare la (2.5) nel senso che si ha la seguente formula

$$(2.17) \quad \| \mathcal{A}v \|_{W^{-m+r+1, p(I)}} \leq \frac{c}{|t|^m} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \| \psi_j \|_{W^{r-j, p(I)}}^p \right)^{1/p}$$

questa precisazione è molto semplice, basta infatti osservare che nella (7.45) di [5] risulta per $j = 0, \dots, r$

$$c_{13} = c_{17} \| \psi_j \|_{W^{r-j, p(I)}}$$

e inoltre

$$c_7 = c_{18} \| \psi_j \|_{W^{r-j, p(I)}}$$

e infine che nella (7.53) di [5] risulta per $j = r+1, \dots, m-1$

$$c_{16} = c_{19} \| \psi_j \|_{W^{r-j, p(I)}}.$$

Avendo precisato con la (2.17) la (2.5) si può ripetendo il ragionamento svolto nel n. 6.1 di [5] precisare la (6.4) di [5] con la seguente formula

$$(2.18) \quad \| (Av)_r \|_{W^{-m+r+1, p(I)}} \leq \frac{c}{|t|^m} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \| \varphi_j \|_{W^{r-j, p(I)}}^p \right)^{1/p}.$$

Dalla (2.18) si può poi osservare che nel ragionamento del n. 6.2 di [5] risulta

$$c_1 = c_1^* \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{W^{r-j,p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p}$$

$$c_2 = c_2^* \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{W^{r-j,p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p}$$

e quindi si ha la maggiorazione

$$(2.19) \quad \|Av\|_{A_{m-r-1}^{-m,p}(\Omega)} \leq c_0 \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{W^{r-j,p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p}$$

che afferma la dipendenza con continuità di Av dai dati $\varphi_j, j = 0, \dots, m-1$.

n. 3 Il teorema principale.

Sia Ω l'aperto considerato nel n. 1.1, fissato r intero, $0 \leq r \leq m-1$, siano assegnate le distribuzioni $\varphi_j \in W^{r-j,p}(\Gamma), j = 0, \dots, m-1$; allora per il teor. 6.2. di [5] esiste una ed una sola $u \in W^{r,p}(\Omega)$ tale che

$$Au = 0 \quad \text{nel senso delle distribuzioni su } \Omega$$

$$(3.1) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \|\tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \varphi_j\|_{W^{r-j,p}(\Gamma)} = 0, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

È opportuno introdurre la notazione seguente; si scriverà

$${}^* \gamma_j u = \varphi_j \quad \text{in } W^{r-j,p}(\Gamma), \quad j = 0, \dots, m-1$$

per indicare che la condizione $\frac{\partial^j u}{\partial v^j} = \varphi_j$ è intesa nel senso della (3.1) ed analogamente si porrà ${}^* \gamma u = \{ \gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u \}$.

Seguendo la dimostrazione del teor. 6.2 si costruisce dapprima una funzione ausiliaria $v \in C^{2m}(\Omega) \cap W^{r,p}(\Omega)$ tale che

$${}^* \gamma_j v = \varphi_j \quad \text{in } W^{r-j,p}(\Gamma) \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Dalle considerazioni svolte nel n. 2 segue poi, con lo stesso ragionamento del n. 6.1 di [5], che esiste il limite per $\tau \rightarrow 0$ di $\tilde{S}_{j,\tau} v$ in $W^{r-2m+j+1,p}(\Gamma), j = 0, \dots, m-1$. Indicato con ${}^* \tilde{S}_j v \in W^{r-2m+j+1,p}(\Gamma), j = 0, \dots, m-1$, tale

limite, risulta che non solo l'applicazione $\tilde{\gamma}_\tau v \rightarrow \tilde{S}_\tau v$ ma anche l'applicazione $\gamma v \rightarrow \tilde{S} v = \{\tilde{S}_0^* v, \dots, \tilde{S}_{m-1}^* v\}$ è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-j, p}(\Gamma)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-2m+j+1, p}(\Gamma)$.

Seguendo sempre la dimostrazione del citato teor. 6.2 di [5] si risolve poi il problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} Aw = -Av \\ \gamma_j w = 0 \end{cases} \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Poichè $Av \in A_{m-r-1}^{-m, p}(\Omega)$, mediante il teor. 3.1 di [5] si ottiene una $w \in \mathcal{W}_{A, 0}^{r+1, p}(\Omega)$ che dipende con continuità da Av in $A_{m-r-1}^{-m, p}(\Omega)$; risulta anzi per la (2.19) che tale w verifica la disuguaglianza

$$(3.2) \quad \|w\|_{\mathcal{W}_{A, 0}^{r+1, p}(\Omega)} \leq c \| -Av \|_{A_{m-r-1}^{-m, p}(\Omega)} \leq c_0 \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{W^{r-j, p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p}.$$

Per i risultati del n. 1, in particolare per i teor. 1.1 ed 1.4 per $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$ esistono $S_j w$ ed $\tilde{S}_{j, \tau} w \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$ ed inoltre si ha la relazione seguente

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\tilde{S}_{j, \tau} w - S_j w\|_{W^{r-2m+j+2-1/p, p}(\Gamma)} = 0, \quad j = 0, \dots, m-1$$

e per la (3.2) si ha

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}_{j, \tau} w\|_{W^{r-2m+j+2-1/p, p}(\Gamma)} &\leq C' \|w\|_{\mathcal{W}_{A, 0}^{r+1, p}(\Omega)} \leq \\ &\leq c'' \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{W^{r-j, p}(\Gamma)}^p \right)^{1/p} \quad j = 0, \dots, m-1 \end{aligned}$$

e quindi essendo $\tilde{S}_j^* w = S_j w \in W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$ l'applicazione $\gamma w \rightarrow \tilde{S} w$ è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-j, p}(\Gamma)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r+1-2m+j+1-1/p, p}(\Gamma)$.

Posto infine $\tilde{S}_j^* u = \tilde{S}_j^* v + \tilde{S}_j^* w$, $j = 0, \dots, m-1$, si ha $\tilde{S}_j^* u \in W^{r-2m+j+1, p}(\Gamma)$ ed inoltre l'applicazione $\gamma u \rightarrow \tilde{S} u$ è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-j, p}(\Gamma)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-2m+j+1, p}(\Gamma)$.

Si può allora enunciare il teorema

TEOR. 3.1. *Nelle ipotesi del n. 1.1. fissato r intero, $0 \leq r \leq m - 1$, siano assegnate $\varphi_j \in W^{r-j, p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m - 1$ e si consideri il problema di DIRICHLET*

$$\begin{cases} Au = 0 & \text{nel senso delle distribuzioni in } \Omega \\ \gamma_j u = \varphi_j & \text{in } W^{r-j, p}(\Gamma) \quad j = 0, \dots, m - 1. \end{cases}$$

Allora l'applicazione $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} = \gamma^* u \rightarrow \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{S}^* u$ è lineare e continua da $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-j, p}(\Gamma)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{r-2m+j+1, p}(\Gamma)$.

OSSERVAZIONE 1. Dai ragionamenti svolti e per quanto detto in [5] appare evidente la possibilità di estendere questo teorema al caso

$$Au = f$$

con $f \in A_{m-r-1}^{-m, p}(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 2. Si può interpretare questo teorema come una generalizzazione di un noto teorema di M. RIESZ [11].

Sia infatti $u(x, y)$ una funzione armonica nel cerchio Ω degli $x^2 + y^2 < r^2$ e continua con le derivate prime in $\bar{\Omega}$ e sia $v(x, y)$ una funzione armonica coniugata (determinata a meno di una costante). Il teor. 3.1 dà la maggiorazione

$$\|\gamma_1 u\|_{W^{-1, p}(\Gamma)} \leq c_0 \|\gamma_0 u\|_{L^p(\Gamma)}$$

e poichè per le condizioni di CAUCHY-RIEMANN risulta $\gamma_1 u = -\frac{\partial v}{\partial s}$ e per la definizione di norma in $W^{-1, p}(\Gamma)$ si ha

$$\|\gamma_1 u\|_{W^{-1, p}(\Gamma)} = \sup_{\substack{g \neq 0 \\ g \in W^{1, p'}(\Gamma)}} \frac{|\langle \gamma_1 u, g \rangle|}{\|g\|_{W^{1, p'}(\Gamma)}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

e poichè inoltre una funzione armonica costante su Γ è costante in tutto $\bar{\Omega}$ allora si ricava la relazione

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|\gamma_0(v + c)\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_1 \|\gamma_0 u\|_{L^p(\Gamma)}$$

che lega la traccia di una funzione armonica con l'estremo inferiore della traccia delle funzioni armoniche coniugate, come appunto fa il teorema di M. RIESZ.

OSSERVAZIONE 3. Recentemente G. FICHERA [4] ha studiato il problema di DIRICHLET, nel caso in cui i dati φ_j siano in classi di funzioni hölderiane, mediante una generalizzazione del concetto di potenziale di semplice strato ottenendo una rappresentazione esplicita della soluzione; mediante questa rappresentazione dovrebbero allora potersi avere risultati del tipo di quelli ottenuti in questo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

1. S. AGMON - *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for high order elliptic equations in the plane I*. Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) pp. 179-239.
2. N. ARONSZAJN, A. N. MILGRAM - *Differential operators on riemannian manifolds*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 2 (1952) pp. 1-61.
3. A. P. CALDERON, A. ZYGMUND - *On the existence of certain singular integrals*. Acta Mat., 88 (1952) pp. 85-139.
4. G. FICHERA - *Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity*. Partial differential equations and continuum mechanics, University of Wisconsin, 1961, pp. 55-80.
5. G. GEYMONAT - *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XVI (1962) pp. 225-284.
6. J. L. LIONS, E. MAGENES - *Problèmes aux limites non homogènes (II)* Ann. Inst. Fourier 11 (1961) pp. 137-178.
7. J. L. LIONS, E. MAGENES - *Problemi ai limiti non omogenei (III)* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XV (1961) pp. 39-101.
8. J. L. LIONS, E. MAGENES - *Problemi ai limiti non omogenei (V)*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XVI (1962) pp. 1-44.
9. J. L. LIONS, E. MAGENES - *Problèmes aux limites non homogènes (VI)* J. Analyse Math. XI (1963) pp. 165-188.
10. C. MIRANDA - *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili*. Ann. Mat. Pura Appl., 46 (1958) pp. 647-675.
11. M. RIESZ - *Sur les fonctions conjuguées*. Math. Zeit. 27 (1928) pp. 218-244.