ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CIAMPA

Osservazioni sull'ordinabilità dei gruppi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 1 (1964), p. 111-136
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_1_111_0>

OSSERVAZIONI SULL'ORDINABILITÀ DEI GRUPPI

di SALVATORE CIAMPA (1)

1. Introduzione.

1.1. Al problema dell'ordinabilità di un gruppo (2) sono stati dedicati numerosi lavori; la maggior parte riguarda gli ordinamenti bilateri (3), solo recentemente sono stati presi in considerazione gli ordinamenti unilateri e si è notato (si veda ad esempio CONRAD [4]) che importanti risultati già stabiliti per il primo tipo di ordinamenti valgono anche per l'altro.

In realtà quando si parla del problema dell'ordinabilità di un gruppo le questioni sono due: determinare le condizioni sotto le quali (a) nel gruppo si può introdurre una relazione d'ordine totale compatibile con la operazione gruppale; (b) un dato ordinamento parziale del gruppo può essere esteso ad un ordinamento totale.

Quasi sempre questi due aspetti del problema sono stati trattati separatamente; tuttavia, nel 1959 FUCHS [6] ha tratto la soluzione della prima questione da quella della seconda.

È bene però osservare esplicitamente che il problema della estensione degli ordinamenti parziali ad ordinamenti totali non può dirsi, in generale,

---

Pervenuto alla Redazione il 15 Novembre 1963.

(1) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche nell'anno accademico 1963/64.

(2) Si vuole intendere, qui e nel seguito, che la relazione d'ordine introdotta nel gruppo non abbia, a priori, proprietà particolari oltre a rendere monotona l'operazione gruppale: in particolare non si prende in considerazione il problema, molto importante, dell'ordinabilità reticolare dei gruppi.

(3) Cioè gli ordinamenti tali che l'insieme degli elementi positivi risulta invariante rispetto agli automorfismi interni del gruppo G. Un ordinamento non necessariamente bilatero sarà detto *unilatero*.

risolto quando si sappia che il gruppo è ordinabile totalmente (si veda per questo l'esempio del n. **6.1.**).

Il citato lavoro di FUCHS è importante anche perchè, nella prima parte, raccoglie ed unifica in modo semplice ed elegante i risultati relativi al problema dell'ordinabilità dei gruppi già stabiliti in precedenza da F. LEVI, P. LORENZEN, J. LOS, M. OHNISHI. A questo lavoro si rimanda per le indicazioni bibliografiche relative agli autori ora citati.

In un diverso ordine d'idee si muovono i lavori di MALCEV [8], IWASAWA [7], EVERETT ed ULAM [5], NEUMANN [10]. Gli ultimi tre sono particolarmente importanti perchè i metodi in essi adoperati hanno permesso di stabilire alcune relazioni tra i gruppi ordinati ed i gruppi liberi. Il risultato conclusivo, in questa direzione, è stato trovato (per quanto risulta all'autore) prima da IWASAWA poi da NEUMANN: essi hanno provato che ogni gruppo libero è ordinabile totalmente e bilateralmente (4).

Si ritiene utile aggiungere che molto recentemente ANDRUS e BUSTON [1], seguendo certe idee di O. FRINK, hanno studiato varie specie di ordinamenti dei gruppi che stanno tra quelli unilaterali e quelli bilaterali, cioè ordinamenti per i quali il requisito dell'invarianza per automorfismi interni dell'insieme degli elementi «*positivi*» è attenuato in vario modo.

1.2. Questo lavoro, più nell'ordine d'idee di quelli di OHNISHI, FUCHS e specialmente CONRAD, muove dalle osservazioni seguenti (a) in un gruppo nessun elemento periodico (cioè di ordine finito) può appartenere ad un insieme stabile (cioè chiuso rispetto all'operazione gruppale) non contenente l'identità; (b) in un gruppo totalmente ordinato ogni elemento non identico appartiene ad una parte stabile non contenente l'identità; (c) quindi l'assenza di elementi periodici (distinti dall'identità) in un gruppo è necessaria per l'ordinabilità totale del gruppo stesso; questa condizione, però, non è in generale sufficiente (5).

---

(4) EVERETT ed ULAM [5] avevano provato questo risultato nel caso dei gruppi liberi con due generatori. A. TARSKI e G. BIRKHOFF, indipendentemente, lo avevano provato per i gruppi liberi con un numero finito di generatori (a quanto consta all'autore le loro dimostrazioni non sono state pubblicate).

(5) Un esempio di gruppo privo di torsione e tuttavia non avente ordinamenti totali bilateri è quello (considerato da EVERETT ed ULAM) costituito da tutte le applicazioni continue ed invertibili dell'intervallo $[0, 1]$ su se stesso con la operazione di composizione: in un questo gruppo, infatti, per ogni a diverso dall'identità esistono infiniti elementi b tali che $a = b^2$.

Nell'intento di trovare una condizione per l'ordinabilità totale di un gruppo che contenga, in particolare, come condizione necessaria, l'osservazione (c) ora fatta, vengono opportunamente (e, ci sembra, naturalmente) generalizzate le nozioni di « *ordine finito* » e di « *insieme stabile* ».

Dal teorema generale che così si trova (n. **5.1.**) vengono dedotte alcune proposizioni già note ed un criterio di ordinabilità per i gruppi semplici. Sempre in tema di condizioni per l'ordinabilità totale dei gruppi, nel n. **5.2.** viene provata una proposizione che può essere avvicinata ad un teorema di E. J. TULLY [12].

Infine, nel n. **6.**, viene trattato il problema dell'estensione ad un ordinamento totale di un dato ordinamento parziale.

In tutto il lavoro verranno considerati soltanto ordinamenti unilateri senza specificare se a sinistra o a destra, in vista dei risultati del n. **3.3.2.**.

1.3. Nel seguito si farà riferimento sempre ad un gruppo G, notato moltiplicativamente, nel quale l'elemento neutro (*identità*) sarà indicato con e, mentre con $\bar{a}$ verrà indicato l'inverso dell'elemento $a \in G$; se H è una parte di G (6), con $\bar{H}$ verrà indicato il sottoinsieme di G costituito da tutti e soli gli inversi degli elementi di H.

Con G^0 verrà indicato l'insieme degli elementi del gruppo G diversi dall'identità e.

Con la denominazione *elemento di ordine finito* (oppure *periodico*) sarà indicato, come è consuetudine, ogni elemento del gruppo G del quale esiste una potenza con esponente positivo uguale all'identità.

Tutti i gruppi che saranno considerati nel seguito conterranno elementi distinti dall' identità.

2. Ordinamenti di un gruppo.

2.1. Si dirà che $\mathcal{A}$ è un *ordinamento parziale a sinistra del gruppo* G quando sono vere le seguenti proposizioni:

(a) $\mathcal{A} \subseteq G \times G$ (7);

(b) per ogni terna a, b, c di elementi di G si ha:

$$(a, b) \in \mathcal{A} \text{ e } (b, c) \in \mathcal{A} \Longrightarrow a \neq c \text{ e } (a, c) \in \mathcal{A} \; (^8);$$

(c) per ogni terna a, b, c di elementi di G si ha:

$$(a, b) \in \mathcal{A} \Longrightarrow (ca, cb) \in \mathcal{A}.$$

(6) Con G viene indicato tanto il gruppo quanto l'insieme dei suoi elementi.

(7) $G \times G$ indica il prodotto cartesiano dell'insieme G con se stesso.

(8) Si definisce così ciò che più propriamente si chiama *ordinamento stretto*.

Significato analogo ha l'espressione *ordinamento parziale a destra del gruppo* G basta sostituire la proposizione (c) con la seguente:

(c') per ogni terna a, b, c di elementi di G si ha:

$$(a, b) \in \mathcal{A} \Longrightarrow (ac, bc) \in \mathcal{A}.$$

2.2. Si dirà che $\mathcal{A}$ è un *ordinamento totale a sinistra del gruppo* G quando sono vere le seguenti proposizioni:

(a) $\mathcal{A}$ è un ordinamento parziale a sinistra del gruppo G;

(b) per ogni coppia di elementi a, b di G si ha:

$$(a, b) \notin \mathcal{A} \text{ e } a \neq b \Longrightarrow (b, a) \in \mathcal{A}.$$

Analogamente si definisce un *ordinamento totale a destra del gruppo* G.

2.3. Nel seguito dicendo che $\mathcal{A}$ è un *ordinamento* del gruppo G s'intenderà che $\mathcal{A}$ può essere uno qualsiasi dei quattro ordinamenti sopra definiti.

Con i segni $\mathcal{O}_s(G)$ ed $\mathcal{O}_s^*(G)$ saranno indicate le classi di tutti gli ordinamenti, rispettivamente parziali e totali, a sinistra del gruppo G. Analogo significato hanno i segni $\mathcal{O}_d(G)$ ed $\mathcal{O}_d^*(G)$.

Se l'insieme $\mathcal{O}_s(G) \cup \mathcal{O}_d(G)$ non è vuoto si dirà che il gruppo G è *parzialmente ordinabile unilateralmente;* G si dirà invece *totalmente ordinabile unilateralmente* quando $\mathcal{O}_s^*(G) \cup \mathcal{O}_d^*(G) \neq \varnothing$.

2.4. Sia G un gruppo ed $\mathcal{A}$ un sottoinsieme del prodotto cartesiano $G \times G$. Si definisce allora il sottoinsieme $P(\mathcal{A})$ di G come l'insieme di tutti gli elementi $a \in G$ tali che $(e, a) \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ è un ordinamento del gruppo G, $P(\mathcal{A})$ risulta essere una parte di G non contenente l'identità e chiusa rispetto alla moltiplicazione: è facile infatti verificare che insieme ad ogni coppia di elementi a, b, $P(\mathcal{A})$ contiene sempre anche il loro prodotto ab. L'insieme $P(\mathcal{A})$ verrà detto quindi il *monoide associato all'ordinamento* $\mathcal{A}$.

2.5.1. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ordinamenti del gruppo G. Si dirà che $\mathcal{A}$ è una *estensione* di $\mathcal{B}$ quando $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. È facile vedere che se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ordinamenti del gruppo G, entrambi a destra o a sinistra, allora:

$$\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B} \Longleftrightarrow P(\mathcal{A}) \supseteq P(\mathcal{B}).$$

2.5.2. Gli ordinamenti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ del gruppo G si diranno *opposti* quando:

$$(a, b) \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow (b, a) \in \mathcal{B}.$$

3. Parti stabili ed ordinamenti di un gruppo.

3.1. Se G è un gruppo e $H \subseteq G$, $K \subseteq G$, allora:

H è *stabile* significa: $a \in H$ e $b \in H \Longrightarrow ab \in H$;

H è *stabile massimale in* K significa

(*a*) H è stabile ed è contenuto in K;

(*b*) $H \subset L \subset K \Longrightarrow L$ non è stabile.

Se $H \subseteq G$ con $H^{\#}$ verrà indicata la più piccola (rispetto all'inclusione) parte stabile di G contenente H e sarà detta la *chiusura stabile* di H: $H^{\#}$ esiste sempre perchè la famiglia delle parti stabili di un gruppo è chiusa rispetto all'intersezione.

3.2. I seguenti tre lemmi, utili per il seguito, riportano fatti essenzialmente noti: nel caso particolare dei gruppi abeliani oppure per gli ordinamenti bilateri queste proposizioni si trovano rispettivamente in Bourbaki ([3] chap. VI, § 1, n. 3) e Birkhoff ([2] chap. XIV, n. 1). Le dimostrazioni vengono omesse perchè facilmente desumibili da quelle delle proposizioni ora citate.

3.2.1. Lemma. *Sia* G *un gruppo ed* $\mathcal{A} \subseteq G \times G$, *allora:*

(*a*) $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_s(G) \Longleftrightarrow P(\mathcal{A})$ *è stabile e contenuto in* G^0 *e*

$$[(a, b) \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \bar{a}\, b \in P(\mathcal{A})];$$

(*b*) $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_d(G) \Longleftrightarrow P(\mathcal{A})$ *è stabile ed è contenuto in* G^0 *e*

$$[(a, b) \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow b\, \bar{a} \in P(\mathcal{A})].$$

3.2.2. Lemma. *Se* $\mathcal{A}$ *è un ordinamento del gruppo* G *allora;*

$$\mathcal{A} \in \mathcal{O}_s^*(G) \cup \mathcal{O}_d^*(G) \Longleftrightarrow P(\mathcal{A}) \cup \overline{P(\mathcal{A})} = G^0.$$

3.2.3. LEMMA. *Se $\mathcal{A}$ è un ordinamento del gruppo G le due seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) $\mathcal{A}$ è un ordinamento bilatero;

(b) per ogni $a \in G$ e per ogni $b \in P(\mathcal{A})$, $a b \bar{a} \in P(\mathcal{A})$.

3.3. I tre precedenti lemmi in sostanza affermano che gli ordinamenti di un gruppo G hanno strette relazioni con certe parti stabili di G, i loro monoidi associati. Più precisamente si ha:

3.3.1. TEOREMA. *Per ogni gruppo G esistono due biiezioni ω_s e ω_d rispettivamente dalle classi $\mathcal{O}_s(G)$ ed $\mathcal{O}_d(G)$ nella classe di tutte le parti di G stabili e contenute in G^0.*

Le restrizioni di ω_s e ω_d rispettivamente alle classi $\mathcal{O}_s^*(G)$ ed $\mathcal{O}_d^*(G)$ sono biiezioni nella classe di tutte le parti H di G stabili e tali che:

$$H \cup \bar{\bar{H}} = G^0.$$

Le restrizioni di ω_s e ω_d alla classe $\mathcal{O}_s(G) \cap \mathcal{O}_d(G)$ coincidono in una biiezione di $\mathcal{O}_s(G) \cap \mathcal{O}_d(G)$ nella classe di tutte le parti H di G stabili e tali che:

$$\text{per ogni } a \in G,\ aH = Ha.$$

DIM. Sia $\mathcal{S}$ la classe di tutte le parti di G stabili e contenute in G^0. Si definiscano le applicazioni:

$$\omega_s : \mathcal{O}_s(G) \longrightarrow \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \omega_d : \mathcal{O}_d(G) \longrightarrow \mathcal{S}$$

in modo che:

$$\text{per ogni} \quad \mathcal{A} \in \mathcal{O}_s(G), \quad \omega_s(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A});$$

$$\text{per ogni} \quad \mathcal{A} \in \mathcal{O}_d(G), \quad \omega_d(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}).$$

I lemmi **3.2.1.**, **3.2.2.**, **3.2.3.** dànno immediatamente la dimostrazione del teorema.

3.3.2. COROLLARIO. *Per ogni gruppo G esiste una biiezione da $\mathcal{O}_s(G)$ in $\mathcal{O}_d(G)$: la sua restrizione ad $\mathcal{O}_s^*(G)$ è una biiezione in $\mathcal{O}_d^*(G)$* (9).

(9) Questo corollario afferma l'equivalenza tra le proposizioni « *il gruppo* G *è parzialmente ordinabile a sinistra* » e « *il gruppo* G *è parzialmente ordinabile a destra* » (e le analoghe relative agli ordinamenti totali): esso esime quindi dallo specificare da quale parte il gruppo è ordinabile.

Questa considerazione è stata fatta anche da P. CONRAD [4].

DIM. Basta associare ad ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_s(G)$ l'ordinamento $\mathcal{B} \in \mathcal{O}_d(G)$ per cui $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$: il teorema precedente completa la dimostrazione.

3.4. TEOREMA. *Sia G un gruppo ed H una parte stabile di G, allora le tre proposizioni seguenti:*

(*a*) $H \cup \overline{H} = G^0$;

(*b*) $G^0 - H$ *è stabile e* $H \subseteq G^0$ (10);

(*c*) H *è stabile massimale in* G^0;

sono tali che:

$$(a) \Longleftrightarrow (b) \Longrightarrow (c).$$

DIM. $(a) \Longrightarrow (b)$: si osservi intanto che da (a) segue che $H \cap \overline{H} = \emptyset$ altrimenti H non potrebbe essere stabile e contenuto in G^0; siano allora a e b due elementi di $G^0 - H$, ne segue che $\overline{a}$ e $\overline{b}$, e quindi anche $\overline{b}\,\overline{a}$, sono elementi di H, perciò $ab \notin H$ ed infine $G^0 - H$ è stabile;

$(a) \Longrightarrow (c)$: sia $H \subset K \subset G^0$ ed $a \in K - H$, allora $\overline{a} \in H \subset K$ e quindi K, essendo contenuto in G^0, non può essere stabile;

$(b) \Longrightarrow (a)$: se $a \in G^0 - H$, certamente $\overline{a} \in H$ e quindi $a \in \overline{H}$, altrimenti $G^0 - H$ non sarebbe stabile; d'altra parte, se $a \in \overline{H}$, $a \notin H$ altrimenti $e \in H$; resta quindi provato che $\overline{H} = G^0 - H$.

3.4.1. COROLLARIO. *Ogni ordinamento totale del gruppo G determina una partizione dell'insieme G^0 in due parti stabili (disgiunte); ogni siffatta partizione, viceversa, determina quattro ordinamenti totali di G (che possono non essere tutti distinti), due a sinistra (uno opposto all'altro) e due a destra (uno opposto all'altro).*

DIM. Segue immediatamente dai lemmi **3.2.2.** e **3.2.1.** e dal teorema precedente dopo aver osservato che se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ordinamenti opposti del gruppo G, allora $P(\mathcal{A}) = \overline{P(\mathcal{B})}$.

OSSERVAZIONE. Questo corollario afferma, in altre parole, che vi è equivalenza tra le due proposizioni:

(*a*) *il gruppo G è ordinabile totalmente unilateralmente;*

(*b*) *nel gruppo G son contenuti insiemi H tali che H e $G^0 - H$ risultano stabili e contenuti in G^0.*

---

(10) La notazione $G^0 - H$ (e le altre analoghe che saranno adoperate nel seguito) ha significato insiemistico, cioè $G^0 - H$ è l'insieme degli elementi di G^0 che non appartengono ad H.

Questa osservazione servirà per stabilire i risultati seguenti ed in particolare il teorema del n. **5.2.2.**.

3.4.2. COROLLARIO. *L'ordinamento parziale a sinistra (oppure a destra) $\mathcal{A}$ del gruppo G può essere esteso ad un ordinamento totale $\mathcal{B}$ della stessa specie se e solo se tra i sottoinsiemi di G stabili massimali in G^0 e contenenti $P(\mathcal{A})$* (11) *ne esiste uno, H, per cui $H \cup \overline{H} = G^0$.*

DIM. Se l'estensione $\mathcal{B}$ esiste, $P(\mathcal{B}) \supseteq P(\mathcal{A})$ e, per il lemma **3.2.2.**, $P(\mathcal{B})$ è stabile e $P(\mathcal{B}) \cup \overline{P(\mathcal{B})} = G^0$: il teorema **3.4.** afferma allora che $P(\mathcal{B})$ è stabile massimale in G^0. Viceversa, se H gode delle proprietà espresse nell'enunciato, l'ordinamento $\mathcal{B}$ di G definito in modo che $P(\mathcal{B}) = H$ è un ordinamento totale di G che estende l'ordinamento $\mathcal{A}$.

4. Insiemi di ordine finito e parti debolmente stabili.

4.1. Dopo quanto si è detto nel n. **3.3.1.** si può affermare che un gruppo G possiede ordinamenti parziali non banali (cioè, ordinamenti $\mathcal{A}$ tali che $\mathcal{A} \neq \emptyset$) se e solo se in G^0 sono contenute parti non vuote stabili; se poi si vuole che il gruppo G possieda ordinamenti totali (necessariamente non banali per quanto si è convenuto su G^0 nel n. **1.3**) la suddetta condizione (esistenza di parti non vuote stabili e contenute in G^0) risulta soltanto necessaria: questo, evidentemente, dipende dal fatto che non sempre un ordinamento parziale può essere esteso ad uno totale (si veda il corollario **3.4.2.**), dato che, come è provato dall'esempio che segue, l'ultima implicazione del del teorema **3.4.** non è in generale invertibile. Sia, per esempio, G il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli: se H è l'insieme costituito dai numeri reali di valore assoluto maggiore di 1, H è stabile massimale in G^0 ma $H \cup \overline{H} \neq G^0$.

Nell'esempio ora fatto è stata determinante la presenza in G di un elemento di ordine finito; si può anzi precisare che l'implicazione **3.4.** $(c) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ **3.4.** (b) è certamente falsa in ogni gruppo G contenente elementi di ordine finito: infatti un tale elemento non può appartenere a nessuna parte di G stabile e contenuta in G^0.

Non è però vero che, viceversa, l'assenza di elementi di ordine finito (diversi dall'identità) nel gruppo G permette di affermare che ogni parte

(11) L'esistenza di insiemi siffatti è assicurata dal lemma di ZORN.

$H \subseteq G$ stabile massimale in G^0 è tale che $H \cup \bar{H} = G^0$ [12]. È tuttavia utile osservare che:

4.1.1. Teorema. *Se G è un gruppo abeliano le due proposizioni seguenti sono equivalenti* [13]:

(*a*) *ogni parte H di G stabile massimale in G^0 è tale che $H \cup \bar{H} = G^0$;*

(*b*) *nessun elemento di G^0 ha ordine finito.*

Dim. $(a) \Longrightarrow (b)$: sia K una parte di G stabile e contenuta in G^0, esiste allora una parte H di G contenente K e stabile massimale in G^0 (sono soddisfatte le condizioni per applicare il lemma di Zorn), perciò $G^0 = H \cup \bar{H}$. Ne segue che ogni elemento di G^0 appartiene a qualche parte di G^0 stabile e perciò, come già si è osservato, questo elemento non può avere ordine finito;

$(b) \Longrightarrow (a)$: sia H una parte di G stabile massimale in G^0 e sia a un elemento non appartenente nè ad H nè ad $\bar{H}$. Se $a \neq e$, anche tutte le potenze (intere) positive di a e di $\bar{a}$ differiscono dall'identità e. Perciò, essendo:

$$e \in [H \cup \{a\}]^{\#} \quad \text{ed anche} \quad e \in [H \cup \{\bar{a}\}]^{\#},$$

esistono due elementi di H, k ed h, tali che:

$$e = ka^r = ha^{-s} \text{ (con } r \text{ ed } s \text{ interi maggiori di zero).}$$

Ne segue che:

$$a^r \in \bar{H} \quad \text{ed} \quad a^s \in H.$$

Allora gli insiemi H ed $\bar{H}$ non sono disgiunti, contenendo l'elemento a^{rs}; questo è impossibile perchè l'insieme $H \cap \bar{H}$ è stabile e perciò, se non è vuoto, contiene l'identità e.

Si deve quindi concludere che $a = e$ ed infine che $H \cup \bar{H} = G^0$.

4.1.2. Per chiarire meglio ed approfondire le osservazioni fatte nel n. **4.1.** verranno ora introdotte le nozioni di *insieme di ordine finito* e di *parte debolmente stabile in un gruppo G.*

---

(12) Nell'esempio riportato nel successivo n. **6.1.** tutti gli insiemi $P(\mathcal{B})$ sono stabili massimali in G^0 ma non godono di questa proprietà, pur essendo il gruppo ivi considerato privo di elementi di ordine finito (esclusa l'identità).

(13) L'implicazione $(a) \Longrightarrow (b)$ è vera in ogni gruppo.

4.2. Sia G un gruppo ed $H \subseteq G$. Si indichi con $[H]$ la famiglia delle parti di G che si possono ottenere come unione di una parte K di H e dell'insieme degli inversi degli elementi dell'insieme H non appartenenti a K. Si ponga, cioè:

$$[H] = \{T\text{: esiste } K \subseteq H \text{ tale che } T = K \cup (\overline{H - K})\}.$$

Si osservi che, per ogni insieme T appartenente alla famiglia $[H]$, non è sempre vero che la parte K di cui si parla nella definizione ora data coincide con l'insieme $T \cap H$, però accade sempre che:

$$T = (H \cap T) \cup (\overline{H - T}).$$

È utile inoltre osservare che:

(a) la famiglia $[H]$ contiene insieme ad ogni parte T di G anche l'insieme $\overline{T}$, giacchè se:

$$T = K \cup (\overline{H - K}), \qquad \text{con } K \subseteq G,$$

è anche:

$$\overline{T} = K' \cup (\overline{H - K'}), \qquad \text{con } K' = H - K \subseteq H;$$

(b) se $L \subseteq H$, ogni insieme $T \in [H]$ contiene un insieme R appartenente alla famiglia $[L]$; infatti, se:

$$T = K \cup (\overline{H - K}), \qquad \text{con } K \subseteq H,$$

posto:

$$K' = K \cap L \quad \text{e} \quad K'' = (H - K) \cap L,$$

l'insieme $R = K' \cup \overline{K}''$, ovviamente contenuto nell'insieme T, appartiene alla famiglia $[L]$ giacchè:

$$K' \subseteq L \quad \text{e} \quad K'' = (H - K) \cap L = L - K = L - K'.$$

Definita come si è detto, a partire da un insieme $H \subseteq G$, la famiglia $[H]$ di parti di G, si definisca ora l'insieme H^* come l'intersezione delle chiusure stabili $T^{\#}$ di tutti gli insiemi $T \in [H]$; cioè si ponga:

$$H^* = \{a : a \in T^{\#}, \quad \text{per ogni } T \in [H]\}.$$

OSSERVAZIONE. Al fine di definire l'insieme H^* a partire da H, la definizione della famiglia $[H]$ poteva esser data in modo apparentemente più semplice come segue:

$$[H] = \{\, T : T \subseteq G \text{ e } T \supseteq \overline{\overline{H} - T} \,\};$$

infatti, gli insiemi che così vengono aggiunti alla famiglia $[H]$ (rispetto alla precedente definizione) non tolgono nessun elemento alla intersezione che definisce H^* poichè ogni parte T di G tale che $T \supseteq \overline{\overline{H} - T}$ contiene un insieme T' appartenente alla famiglia $[H]$ come definita in precedenza: basta porre

$$T' = (\overline{\overline{H} - T}) \cup (H \cap T).$$

4.2.1. Teorema. *Per ogni coppia di sottoinsiemi H e J di un gruppo G sono vere le seguenti proposizioni:*

(*a*) *H^*, se non è vuoto, è un sottogruppo di G contenuto in $H^{\#}$;*

(*b*) $e \notin H^* \Longleftrightarrow H^* = \varnothing \Longleftrightarrow H^{\#} \subseteq G^0$;

(*c*) $H \subseteq H^* \Longleftrightarrow H^* = H^{\#}$;

(*d*) *se a è un elemento di ordine finito appartenente all'insieme H, allora $a \in H^*$ e quindi $\{a\}^{\#}$ è un sottogruppo di H^*;*

(*e*) $H \subseteq J \Longrightarrow H^* \subseteq J^*$ *(il viceversa è falso)*;

(*f*) $(H^*)^* \subseteq H^*$;

(*g*) *H^* è uguale all'unione degli insiemi F^* per ogni $F \subseteq H$ e costituito da un numero finito di elementi;*

(*h*) $H \cap H^* = \varnothing \Longleftrightarrow H^* = \varnothing$;

(*i*) $H^* = \{e\} \Longleftrightarrow e \in H$ *e l'insieme $(H - \{e\})^*$ è vuoto;*

(*j*) *per ogni automorfismo σ del gruppo G tale che $\sigma(H) \subseteq H$, si ha anche $\sigma(H^*) \subseteq H^*$: in particolare l'insieme $(G^0)^*$, se non è vuoto, è un sottogruppo caratteristico (perciò normale) di G.*

Dim. (*a*) H^* è un sottoinsieme stabile contenuto in $H^{\#}$ perchè intersezione di insiemi stabili tra i quali vi è anche $H^{\#}$ poichè $H \in [H]$; contenendo poi la famiglia $[H]$ insieme ad ogni parte K di G anche la parte $\overline{K}$, come già si è osservato nel n. precedente, ne segue che se $a \in H^*$ anche $\overline{a} \in H^*$, essendo $(\overline{K})^{\#} = \overline{K^{\#}}$; questo significa che l'insieme H^*, se non è vuoto, è un sottogruppo di G;

(*b*) conseguenza immediata della precedente proposizione (*a*);

(*c*) segue immediatamente dalla precedente proposizione (*a*) e dalla definizione della chiusura stabile $H^{\#}$;

(*d*) poichè $a \in H$, per ogni insieme $K \in [H]$, $a \in K$ oppure $\overline{a} \in K$, ma $\{a\}^{\#} = \{\overline{a}\}^{\#}$, perciò $a \in K^{\#}$ in ogni caso e quindi $a \in H^*$ che, essendo stabile, contiene di conseguenza il sottogruppo costituito dalle potenze dell'elemento a;

(e) essendo $H \subseteq J$, per quanto già si è osservato nel n. precedente, per ogni insieme $K \in [J]$ esiste un insieme $E \in [H]$ tale che $E \subseteq K$; allora se l'elemento a di G non appartiene all'insieme J^*, cioè se esiste un insieme $K \in [J]$ tale che $a \notin K^{\#}$, ne esiste anche uno della famiglia $[H]$ con la stessa proprietà (basta prendere uno degli insiemi della famiglia $[H]$ contenuti in K) e da questo consegue che l'elemento a non appartiene neppure all'insieme H^*, provando così che $J^* \supseteq H^*$;

(f) segue immediatemente dalla precedente proposizione (a);

(g) la proprietà che si vuol dimostrare sarà dedotta dal teorema di distributività generale (che vale in ogni algebra di BOOLE atomica) nella forma datagli da A. TARSKI (cfr. [11] pag. 195, propos. 5). Per ogni parte T di G sia $\mathcal{F}(T)$ la famiglia delle parti finite di T; nell'algebra di BOOLE costituita da tutti gli insiemi contenuti in $(H \cup \bar{H})^{\#}$ si considerino le seguenti famiglie di elementi e di insiemi:

$$\mathcal{V} = \{\mathcal{H}_T\}_{T \in [H]} \qquad \text{dove } \mathcal{H}_T = \{F^{\#}\}_{F \in \mathcal{F}(T)};$$

$$\mathcal{W} = \{\mathcal{E}_F\}_{F \in \mathcal{F}(H)} \qquad \text{dove } \mathcal{E}_F = \{E^{\#}\}_{E \in [F]};$$

evidentemente:
per ogni $\mathcal{H}_T \in \mathcal{V}$ ed $\mathcal{E}_F \in \mathcal{W}$, si ha

$$\mathcal{H}_T \cap \mathcal{E}_F = \varnothing \quad \text{e} \quad \bigcup_{T \in [H]} \mathcal{H}_T = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(H)} \mathcal{E}_F .$$

Essendo poi verificata nell'algebra di BOOLE considerata la condizione di atomicità (cioè ogni elemento non minimo contiene un atomo), vale il teorema di distributività generale che, con le notazioni introdotte, permette di affermare che:

$$\bigcap_{T \in [H]} \bigcup_{R \in \mathcal{H}_T} R = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(H)} \bigcap_{R \in \mathcal{E}_F} R .$$

Si osservi ora che la proprietà che si sta dimostrando è vera se invece di considerare H^* si considera $H^{\#}$, perciò il primo membro della uguaglianza ora scritta non è altro che l'insieme H^*, infatti:

$$H^* = \bigcap_{T \in [H]} T^{\#} = \bigcap_{T \in [H]} \bigcup_{F \in \mathcal{F}(T)} F^{\#},$$

quindi:

$$H^* = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(H)} \bigcap_{R \in \mathcal{E}_F} R = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(H)} \bigcap_{E \in [F]} E^{\#}.$$

La dimostrazione si completa osservando che nel terzo membro dell'ultima uguaglianza, per ogni $F \in \mathcal{F}(H)$, l'insieme

$$\bigcap_{E \in [F]} E^{\#}$$

coincide con l'insieme F^*;

(*h*) si osservi che, se si pone $K = H \cup \bar{H}$, risulta $K \cap K^* = \varnothing$ poichè $H^* = K^*$ (questo risulta dall'essere $H^* \subseteq K^*$ perchè $H \subseteq K$ e $H^* \supseteq K^*$ perchè $[H] \subseteq [K]$, in quanto se:

$$T = M \cup (\overline{H - M}) \in [H],$$

essendo:

$$K - T \subseteq \bar{M} \cup (H - M) = \bar{T},$$

si ha:

$$T = T \cup (\overline{K - T}) \in [K]).$$

Per ogni elemento $a \in H$, allora, esiste un insieme $T \in [K]$ tale che $a \notin T^{\#}$, cioè esiste una parte S di K tale che:

$$a \notin ((K - S) \cup \bar{S})^{\#}.$$

Anche l'insieme

$$V = S - ((K - S) \cup \bar{S})^{\#} \subseteq K,$$

che non è vuoto perchè contiene l'elemento a, gode della stessa proprietà poichè:

$$((K - V) \cup \bar{V})^{\#} \subseteq ((K - S) \cup \bar{S})^{\#}.$$

Inoltre si ha:

$$V \cap (K - V)^{\#} = \varnothing \quad \text{e} \quad V \cap \bar{V} = \varnothing.$$

È subito visto che la famiglia $\mathcal{T}$ di tutte le parti V di K che godono di queste due ultime proprietà ha elementi massimali se pensata ordinata per inclusione (lemma di Zorn): sia W uno di essi; si proverà ora che:

$$\bar{W} = K - W.$$

Infatti, se esiste un elemento

$$b \in K - (W \cup \bar{W}),$$

esiste anche un insieme X della famiglia $\mathcal{T}$ che contiene l'elemento b. Posto

$$Y = W \cup (X - \bar{W}),$$

si prova subito che:

$$W \subset Y \subseteq K, \quad Y \cap \overline{Y} = \varnothing \quad \text{e} \quad Y \cap (K - Y)^{\#} = \varnothing,$$

infatti, che Y ed $\overline{Y}$ sono disgiunti segue dall'osservare che $\overline{W}$ ed Y lo sono e che se $c \in X - \overline{W}$, $\overline{c} \notin X \cup W$; nei riguardi dell'ultima uguaglianza si osservi che se $c = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ con ogni $x_i \in K - Y$, $c \notin W$ e se $c \in X - \overline{W}$ necessariamente qualche x_i appartiene a $\overline{W}$, cosa impossibile perchè allora l'elemento $\overline{x}_i \in W$ apparterrebbe anche all'insieme $(K - W)^{\#}$.

Questo significa che l'insieme W non è massimale in $\mathcal{T}$ contro il supposto. Per completare la dimostrazione basta osservare che se gli insiemi W e $\overline{W}^{\#}$ sono disgiunti, anche $W^{\#}$ e $\overline{W}^{\#}$ lo sono; ma gli insiemi W e $\overline{W}$ sono elementi della famiglia $[K]$, perciò K^* è vuoto e quindi anche H^* lo è;

(*i*) se $H^* = \{e\}$ con $H \subseteq G^0$, per la proposizione precedente H^* dovrebbe esser vuoto, perciò $e \in H$; che, poi, $(H - \{e\})^* = \varnothing$ segue dalle precedenti proposizioni (*e*) ed (*h*); il viceversa segue dall'osservare che ogni insieme della famiglia $[H]$ si ottiene da un insieme della famiglia $[H - \{e\}]$ aggiungendovi l'identità ed in tal modo si esaurisce tutta la famiglia $[H - \{e\}]$;

(*j*) essendo σ un automorfismo del gruppo G si ha:

$$K \in [H] \Longleftrightarrow \sigma(K) \in [\sigma(H)]$$

$$\sigma(K^{\#}) = (\sigma(K))^{\#},$$

quindi:

$$\sigma(H^*) = \sigma\Big(\bigcap_{K \in [H]} K^{\#}\Big) = \bigcap_{K \in [H]} (\sigma(K^{\#})) =$$

$$= \bigcap_{\sigma(K) \in [\sigma(H)]} (\sigma(K))^{\#} = (\sigma(H))^* \subseteq H^*$$

per la precedente proposizione (*e*).

4.3. Se H è una parte del gruppo G, si dirà che H *ha ordine finito* quando l'insieme H^* contiene l'identità e.

La giustificazione di questa denominazione può trarsi dalle due seguenti proposizioni.

4.3.1. TEOREMA. *Se l'elemento a del gruppo G ha ordine finito, anche l'insieme $\{a\} \subseteq G$ ha ordine finito e viceversa.*

DIM. Se l'elemento a ha ordine finito, $a \in \{a\}^*$ per la proposizione (*d*) del teorema **4.2.1.**, allora $e \in \{a\}^*$ (cioè l'insieme $\{a\}$ ha ordine finito) per la proposizione (*b*) dello stesso teorema. Se, poi, l'elemento a non ha ordine finito $\{a\}^{\#} \subseteq G^0$ e l'insieme $\{a\}^*$ risulta vuoto per la proposizione (*b*) del citato teorema **4.2.1.**.

4.3.2. Teorema *Se H e K sono parti del gruppo G, allora:*

$$H \subseteq K \quad \text{e } H \text{ ha ordine finito} \Longrightarrow K \text{ ha ordine finito.}$$

Dim. Conseguenza immediata della proposizione (*e*) del teorema **4.2.1.** e della definizione **4.3.**.

4.4. Nel teorema **4.2.1.** è stato provato, tra l'altro, che l'applicazione di $\mathcal{P}(G)$, classe di tutti i sottoinsiemi di G, in sè che ad ogni parte H di G associa l'insieme H^* gode di due delle proprietà che caratterizzano una operazione di chiusura ([14]); la detta applicazione, però, non è una operazione di chiusura perchè la proprietà estensiva può non valere. Tuttavia se si definisce un'applicazione della famiglia $\mathcal{P}(G)$ in sè in modo che ad ogni parte H di G risulti associato l'insieme

$$H^\flat = H \cup H^*,$$

questa risulta una operazione di chiusura nella classe $\mathcal{P}(G)$ ordinata per inclusione.

Sussiste infatti la seguente proposizione che, per un risultato di J. Morgado (si veda [9]), afferma appunto che l'applicazione che ad ogni $H \subseteq G$ associa la parte $H^\flat$ di G è una operazione di chiusura.

4.4.1. Teorema. *Per ogni gruppo G e per ogni coppia H, K di parti di G si ha:*

$$H \subseteq K^\flat \Longleftrightarrow H^\flat \subseteq K^\flat.$$

([14]) Sia T un insieme parzialmente ordinato mediante una relazione $\mathfrak{T}$. Un'applicazione π di T in sè dicesi una operazione di chiusura quando, per ogni coppia a, b di elementi di T, valgono le seguenti proprietà:

$$(a, \pi(a)) \in \mathfrak{T} \text{ (propr. di } \textit{estensività}\text{)};$$

$$(a, b) \in \mathfrak{T} \Longrightarrow (\pi(a), \pi(b)) \in \mathfrak{T} \text{ (propr. di } \textit{monotonia}\text{)};$$

$$(\pi(\pi(a)), \pi(a)) \in \mathfrak{T} \text{ (propr. di } \textit{idempotenza}\text{)}.$$

Questa nozione risale, per quanto consta all'autore, ad E. H. Moore (1910).

DIM. Se $H^b \subseteq K^b$ evidentemente anche $H \subseteq K^b$, essendo $H \subseteq H^b$. Viceversa, sia $H \subseteq K^b = K \cup K^*$. Se si prova che:

$$(K \cup K^*)^* \subseteq K^*$$

il teorema è dimostrato perchè risulta (per la proposizione (*e*) del teorema **4.2.1.**):

$$H^* \subseteq (K \cup K^*)^* \subseteq K^* \subseteq K^b$$

e perciò:

$$H^b = H \cup H^* \subseteq K^b .$$

Si ponga allora $T = K^* - K$; tra i sottoinsiemi di G che compongono la famiglia $[K \cup K^*]$ vi sono anche quelli così costituiti:

$$X \cup \overline{Y} \cup T, \quad \text{per ogni } X \subseteq K \quad \text{ed} \quad Y = K - X.$$

Per ognuno di essi si ha:

$$(X \cup \overline{Y} \cup T)^{\#} = ((X \cup \overline{Y})^{\#} \cup T)^{\#} = (X \cup \overline{Y})^{\#}$$

essendo

$$T \subseteq K^* \subseteq (X \cup \overline{Y})^{\#} .$$

Quindi, infine,

$$(K \cup K^*)^* \subseteq \bigcap_{\substack{X \subseteq K \\ Y = K - X}} (X \cup \overline{Y})^{\#} = K^* .$$

4.4.2. Le parti di G chiuse rispetto alla operazione di chiusura definita nel n. **4.4.** saranno dette *parti debolmente stabili*, in altre parole le parti H di G debolmente stabili sono quelle per cui $H^* \subseteq H$. Si può allora dire che H^b è il più piccolo (rispetto all'inclusione) insieme debolmente stabile che contiene H.

4.4.3. TEOREMA. *Per ogni gruppo G e per ogni sua parte H si ha:*

(*a*) *H stabile $\Longrightarrow$ H è debolmente stabile;* [15]

(*b*) *la chiusura debolmente stabile H^b è contenuta in quella stabile $H^{\#}$;*

---

[15] Questa proposizione può servire per giustificare la denominazione « *debolmente stabile* ».

(c) *ogni sottoinsieme di un insieme debolmente stabile contenuto in G^0 è ancora debolmente stabile; quindi non vale il viceversa nella precedente proposizione (a);*

(d) *se H non ha ordine finito, H è debolmente stabile; il viceversa non vale in generale: è vero però se $H \subseteq G^0$.*

DIM. (a) per la proposizione (a) del teorema **4.2.1.** l'insieme H^* risulta contenuto in $H^{\#} = H$, perciò H è debolmente stabile;

(b) $H^{\flat} = H \cup H^* \subseteq H^{\#}$ in quanto $H \subseteq H^{\#}$ ed $H^* \subseteq H^{\#}$;

(c) sia K un insieme debolmente stabile contenuto in G^0 e sia $T \subseteq K$; per la proposizione (e) del teorema **4.2.1.** e per la definizione **4.4.2.** si ha che K^* contiene T^* ed entrambi questi insiemi sono contenuti in G^0; perciò (proposizione (b) del citato teorema) l'insieme K^* è vuoto e quindi tale risulta anche T^*, provando così che l'insieme T è debolmente stabile;

(d) se l'insieme H non ha ordine finito, per la proposizione (b) del teorema **4.2.1.**, H^* è vuoto e l'insieme H risulta debolmente stabile; viceversa, se $H \subseteq G^0$ ha ordine finito, risulta $e \in H^*$, ma $e \notin H$, perciò $H^* \not\subseteq H$.

OSSERVAZIONE. La seconda implicazione della proposizione (d) del teorema ora dimostrato è certamente falsa se l'insieme H è stabile e contiene l'identità; essa però può risultare ugualmente falsa anche se l'insieme H non è stabile: per esempio, se a è un elemento non periodico del gruppo G si ha:

$$\{e, a\}^* = \{e\} \subseteq \{e, a\},$$

pur avendo l'insieme $\{e, a\}$ ordine finito.

4.5. Si riprende ora la questione sollevata nel n. **4.1.**: si è già notato che non sempre una parte H del gruppo G, stabile massimale in G^0, è tale che $H \cup \overline{H} = G^0$; si daranno ora dei teoremi che stabiliscono sotto quali condizioni ed in qual modo il fatto sussiste.

4.5.1. LEMMA. *Per ogni gruppo G e per ogni coppia H e K di parti di G le proposizioni seguenti sono equivalenti:*

(a) $H \subseteq K = \overline{K}$ *ed* $e \notin (H \cup (\overline{K - H}))^{\#}$,

(b) $\overline{H} = K - H$ *e* $H = K \cap H^{\#}$.

DIM. (a) $\Longrightarrow$ (b): dalla seconda ipotesi segue che:

$$(H \cup (\overline{K - H})) \cap \overline{(H \cup (\overline{K - H}))} = \varnothing,$$

essendo poi:

$$\bar{H} \cup (H - K) = \overline{H \cup (\bar{K} - \bar{H})},$$

si ha:

$$\emptyset = (H \cup (\overline{K - H})) \cap (\bar{H} \cup (K - H)) =$$

$$= (H \cap \bar{H}) \cup (H \cap (K - H)) \cup (\bar{H} \cap (\overline{K - H})) \cup ((K - H) \cap (\overline{K - H})),$$

questi quattro addendi, perciò, devono coincidere con la parte vuota di G. Questo significa che:

$$\bar{H} \subseteq K - H \quad \text{e} \quad H \supseteq \overline{K - H}$$

da cui:

$$H \subseteq \overline{K - H} \qquad \text{ed infine} \qquad \bar{H} = K - H.$$

La seconda ipotesi si può ora scrivere:

$$e \notin (H \cup (\overline{K - H}))^{\#} = H^{\#}$$

e questo prova che $H = K \cap H^{\#}$ giacchè $K = H \cup \bar{H}$ e $\bar{H} \cap H^{\#} = \emptyset$;

(*b*) $\Longrightarrow$ (*a*): dalle ipotesi risulta:

$$H \cup \bar{H} = K \qquad \text{e} \qquad \bar{H} \cap H^{\#} = \emptyset;$$

dalla prima uguaglianza segue immediatamente che $H \subseteq K = \bar{K}$, dall'altra si deduce che $H^{\#} \subseteq G^0$ ed essendo:

$$(H \cup (\overline{K - H}))^{\#} = H^{\#},$$

resta provato che:

$$e \notin (H \cup (\overline{K - H}))^{\#}.$$

4.5.2. TEOREMA. *Sia G un gruppo e K una parte di G^0; le proposizioni seguenti sono allora equivalenti:*

(*a*) *K é debolmente stabile e $K = \bar{K}$;*

(*b*) *esiste una parte H di K tale che*

$$\bar{H} = K - H \qquad e \qquad H = K \cap H^{\#}.$$

DIM. (*a*) $\Longrightarrow$ (*b*): per la proposizione (*d*) del teorema **4.4.3.** l'insieme K non ha ordine finito, esiste perciò nella classe $[K]$ un insieme T tale che

$e \notin T^{\#}$. Per la definizione di $[K]$ esiste allora un insieme $H \subseteq K$ in modo che

$$T = H \cup (\overline{\overline{K - H}}) ;$$

il lemma precedente completa allora la dimostrazione;

$(b) \Longrightarrow (a)$: dal lemma precedente, nelle ipotesi (b), segue che $e \notin K^*$ essendo

$$K^* \subseteq (H \cup (\overline{\overline{K - H}}))^{\#} ;$$

perciò (per il teorema **4.4.3.**, proposizione (d)) K è debolmente stabile; che, poi, gli insiemi K e $\overline{\overline{K}}$ coincidono segue dal lemma precedente.

4.5.3. COROLLARIO. *Sia G un gruppo e K una parte di G^0; tale che $G - K$ contenga soltanto elementi di ordine finito, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) *K è debolmente stabile;*

(b) *esiste una parte H di K tale che*

$K = H \cup \overline{\overline{H}}$ *ed H è stabile (quindi anche $\overline{\overline{H}}$ lo è).*

DIM. $(a) \Longrightarrow (b)$: l'insieme K risulta non avere ordine finito (teor. **4.4.3.** propos. (d)), perciò $G - K$ è costituito da tutti gli elementi periodici del gruppo G (per i teoremi **4.3.1.** e **4.3.2.**); questo implica che $K = \overline{\overline{K}}$ (giacchè $G - K = \overline{\overline{G - K}}$) e quindi, per il teorema precedente, l'esistenza di una parte H di K tale che:

$$\overline{\overline{H}} = K - H \qquad \text{e} \qquad H = K \cap H^{\#};$$

per provare che H è stabile, basta osservare che se esiste un elemento a appartenente all'insieme $H^{\#}$ ma non ad H, necessariamente $a \in G - K$ (perchè $\overline{\overline{H}}$ ed $H^{\#}$ sono disgiunti) e questo è impossibile perchè, essendo l'elemento a di ordine finito,

$$e \in \{a\}^{\#} \subseteq H^{\#};$$

$(b) \Longrightarrow (a)$: essendo H stabile e contenuto in K, a sua volta contenuto in G^0, risulta $\overline{\overline{H}} = K - H$; basta allora ricorrere al teorema precedente.

4.5.4. COROLLARIO. *Per ogni gruppo G le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) *G^0 è debolmente stabile;*

(b) *esiste una parte H, stabile massimale in G^0, tale che*

$$H \cup \overline{\overline{H}} = G^0.$$

DIM. $G - G^0$ contiene soltanto elementi di ordine finito, basta perciò ricorrere al precedente corollario.

4.5.5. Una immediata applicazione della proposizione **4.1.1.** al risultato ora conseguito (n. **4.5.4.**) rende più forte, per i gruppi abeliani, l'implicazione $(a) \Longrightarrow (b)$ del teorema precedente permettendo di concludere che:

TEOREMA. *Per ogni gruppo abeliano G le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(*a*) *in G^0 non esistono elementi di ordine finito;*

(*b*) *G^0 è debolmente stabile;*

(*c*) *ogni parte H di G, stabile massimale in G^0, è tale che*
$$H \cup \overline{H} = G^0.$$

4.5.6. TEOREMA. *Per ogni gruppo abeliano G ed ogni parte H di G^0 si ha: se H è debolmente stabile e $G^0 - H$ è stabile massimale in G^0, allora H risulta stabile (e quindi anche stabile massimale in G^0).*

DIM. Per la proposizione (*d*) del teorema **4.4.3.** l'insieme H non ha ordine finito e perciò (teoremi **4.3.1.** e **4.3.2.**) in H non vi sono elementi di ordine finito. Il teorema precedente afferma allora che $\overline{H} = G^0 - H$ (perchè $G^0 - H$ e $\overline{G^0 - H}$ sono disgiunti) e quindi H è stabile massimale in G^0 perchè $G^0 - H$ lo è.

5. Condizioni per l'ordinabilità totale di un gruppo.

5.1. TEOREMA. *Sia G un gruppo e T l'insieme degli elementi di ordine finito, allora, nella ipotesi che T sia stabile, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(*a*) *il gruppo G/T è totalmente ordinabile unilateralmente* ([16]);

(*b*) *l'insieme $G - T$ è debolmente stabile;*

(*c*) *l'insieme $G - T$ non ha ordine finito.*

DIM. Poichè $G - T \subseteq G^0$, l'equivalenza tra le proposizioni (*b*) e (*c*) è stabilita dalla proposizione (*d*) del teorema **4.4.3.** .

([16]) Si ricordi quanto è stato detto nella nota ([9]).

Si osservi poi che dalla stabilità dell'insieme T segue che esso è un sottogruppo normale di G poichè $T = \overline{T}$ e $\sigma T \subseteq T$ per ogni endomorfismo σ del gruppo G; quindi esiste il gruppo quoziente di G/T; sia π l'omomorfismo canonico $G \longrightarrow G/T$.

$(a) \Longrightarrow (b)$: sia $\mathscr{A}$ un ordinamento totale del gruppo G/T, allora l'insieme $(G/T)^0$ resta diviso in due parti (disgiunte) e stabili $P(\mathscr{A})$ e $\overline{P(\mathscr{A})}$; anche l'insieme $G - T$ risulta diviso in due parti (disgiunte) e stabili H ed $\overline{H}$, basta porre:

$$H = \{a \in G : \pi(a) \in P(\mathscr{A})\};$$

il corollario **4.5.3.** completa allora la dimostrazione;

$(b) \Longrightarrow (a)$: il corollario ora citato afferma che l'insieme $G - T$ è unione di due parti stabili H ed $\overline{H}$: allora $\pi(H)$ e $\overline{\pi(H)}$ dividono analogamente l'insieme $(G/T)^0$; ogni ordinamento $\mathscr{A}$ del gruppo G/T definito in modo che $P(\mathscr{A})$ risulti uguale a $\pi(H)$, per il corollario **3.4.1.**, è un ordinamento totale del gruppo stesso.

5.1.1. Corollario. *Sia G un gruppo e T sia l'insieme degli elementi di ordine finito; se T è un insieme stabile, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(*a*) *il gruppo G/T è totalmente ordinabile unilateralmente;*

(*b*) *ogni parte finita H di $G - T$ ha la chiusura stabile $H^\#$ contenuta in G^0 oppure questo accade sostituendo in H qualche elemento col suo inverso;*

(*c*) *per ogni n-pla $a_1, a_2, \dots, a_n$ di elementi di $G - T$ si ha*

$$\{e, a_1, a_2, \dots, a_n\}^* = \{e\}.$$

Dim. Segue immediatamente dal teorema precedente e dalle proposizioni (*b*), (*g*), (*i*) del teorema **4.2.1.**

5.1.2. Corollario. *Per ogni gruppo G le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(*a*) *il gruppo G è totalmente ordinabile unilateralmente;*

(*b*) *l'insieme G^0 è debolmente stabile;*

(*c*) *l'insieme G^0 non ha ordine finito;*

(*d*) *ogni parte finita H di G^0 ha la chiusura stabile $H^\#$ contenuta in G^0 oppure questo accade sostituendo in H qualche elemento con il suo inverso;*

(*e*) *per ogni n-pla* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *di elementi di* G^0 *si ha*

$$\{e, a_1, a_2, \dots, a_n\}^* = \{e\} \text{ (}^{17}\text{)}.$$

DIM. Segue dal teorema e dal corollario precedenti dopo aver osservato che, per i teoremi **4.3.2.** e **4.3.1.**, se G^0 non ha ordine finito (o, ciò che è lo stesso, è debolmente stabile) l'insieme T degli elementi di ordine finito di G contiene soltanto l'identità e quindi G/T si può identificare con G.

5.1.3. COROLLARIO. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo abeliano sia ordinabile totalmente è che il gruppo stesso sia privo di torsione* (*cioè, in* G^0 *non esistano elementi di ordine finito*). ([18]).

DIM. Segue immediatamente dai teoremi **5.1.** e **4.5.5.**.

5.1.4. Si è già osservato nel n. **3.4.** che l'ordinabilità totale di un gruppo è equivalente, quando si considerino ordinamenti unilateri, alla possibilità della scomposizione dell'insieme G^0 in due parti H e K tali che

(*a*) ognuna sia costituita dagli inversi degli elementi dell'altra,

(*b*) una di esse (e quindi anche l'altra) abbia la chiusura stabile contenuta in G^0.

Si proverà ora che se il gruppo è semplice, la seconda proprietà può essere sostituita dalla seguente (più debole): una di esse (e quindi anche l'altra) abbia la chiusura stabile non coincidente con l'intero gruppo.

Sussiste infatti la proposizione seguente:

COROLLARIO. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo semplice risulti totalmente ordinabile unilateralmente è che esista un sua parte* K *tale che*

$$K \cup \overline{K} = G^0 \quad e \quad K^{\#} \neq G.$$

DIM. Se il gruppo G è semplice e G^0 non è debolmente stabile, necessariamente $(G^0)^* = G$ (per le proposizioni (*i*) e (*j*) del teorema **4.2.1.**): questo però non può accadere se esiste una parte K di G con le dette proprietà, in tal caso infatti $K \in [G^0]$ ed ogni elemento di G non appartenente all'in-

---

([17]) Le proposizioni (*c*) e (*d*) di questo teorema si trovano anche in CONRAD [4] theor. 2.2. Per gli ordinamenti bilateri si veda FUCHS [6], pag. 169.

([18]) Questo risultato è dovuto ad F. LEVI (1913). Si ritrova in IWASAWA e FUCHS. In BIRKHOFF [2], pag. 224, theorem 14, vi è una dimostrazione in cui si mostra come si possa costruire effettivamente un ordinamento totale di G.

sieme $K^{\#}$ non appartiene neppure all'insieme $(G^0)^*$. Il viceversa risulta ovvio dopo le considerazioni fatte all'inizio di questo n..

5.2. Avendo presente l'osservazione fatta alla fine del n. **3.4.1.**, la seguente caratterizzazione delle parti stabili di un gruppo G, contenute in G^0, permetterà di dedurre una condizione equivalente all'ordinabilità totale unilatera del gruppo G.

La condizione che si trova sembra meglio precisare il carattere delle parti H_a che intervengono nel seguente teorema dimostrato da E. J. Tully [12]:

« *L'ordinabilità totale a sinistra di un gruppo G è equivalente alla proposizione seguente:*

per ogni $a \in G$ esiste una parte H_a di G contenente l'elemento a e tale che per ogni $b \in G$, $bH_a \supseteq H_a$ oppure $bH_a \subseteq H_a$ ».

Si premette un lemma sulle parti di G stabili e contenute in G^0.

5.2.1. Lemma. *Per ogni gruppo G ed ogni sua parte H contenuta in G^0 le proposizioni seguenti sono equivalenti:*

(*a*) *H è stabile;*

(*b*) *per ogni $a \in H$ si ha $aH \subseteq H$ oppure $aH \supseteq H$;*

(*c*) *per ogni $a \in H$ si ha $Ha \subseteq H$ oppure $Ha \supseteq H$.*

Dim. Se l'insieme H è stabile, evidentemente per ogni $a \in H$ si ha

$$aH \subseteq H \qquad \text{e} \qquad Ha \subseteq H,$$

risultando così provate le implicazioni $(a) \Longrightarrow (b)$ e $(a) \Longrightarrow (c)$.

Sia vera la proposizione (c) e si supponga che esista un elemento $a \in H$ tale che $Ha \supset H$. Questo significa che per ogni $b \in H$, l'elemento $b\bar{a}$ appartiene ad H, cosa impossibile giacchè $a \in H$ mentre $e \notin H$. Resta così provato che per ogni $a \in H$ si ha $Ha \subseteq H$ e quindi che $(c) \Longrightarrow (a)$. In modo del tutto analogo si prova l'implicazione $(b) \Longrightarrow (a)$.

5.2.2. Teorema. *Per ogni gruppo G le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(*a*) *il gruppo G è totalmente ordinabile unilateralmente;*

(*b*) *esiste un insieme $H \subseteq G^0$ in modo che:*
per ogni $a \in H$, $aH \subseteq H$ oppure $aH \supseteq H$
e $a(G^0 - H) \subseteq G^0 - H$ oppure $a(G^0 - H) \supseteq G^0 - H$;

(*c*) *esiste un insieme $H \subseteq G^0$ in modo che:*
per ogni $a \in H$, $Ha \subseteq H$ oppure $Ha \supseteq H$
e $(G^0 - H)a \subseteq G^0 - H$ oppure $(G^0 - H)a \supseteq G^0 - H$.

DIM. Se in G^0 è contenuta una parte H con le proprietà espresse in una delle due proposizioni (*b*), (*c*), per il lemma precedente, G^0 risulta l'unione di due parti stabili H e $G^0 - H$; il corollario **3.4.1.** afferma allora che il gruppo G è ordinabile totalmente. Viceversa, se $\mathcal{A}$ è un ordinamento totale del gruppo G, l'insieme $P(\mathcal{A})$ gode delle proprietà espresse nelle proposizioni (*b*) e (*c*): se $a \in P(\mathcal{A})$, $aP(\mathcal{A})$ e $P(\mathcal{A})a$ sono contenuti in $P(\mathcal{A})$ essendo quest'ultimo insieme stabile; se poi a è l'identità $aP(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A})a = P(\mathcal{A})$; infine se $a \in G^0 - P(\mathcal{A})$, cioè se $a \in \overline{P(\mathcal{A})}$, $\bar{a}P(\mathcal{A}) \subseteq P(\mathcal{A})$ e $P(\mathcal{A})\bar{a} \subseteq P(\mathcal{A})$ e quindi $aP(\mathcal{A}) \supseteq P(\mathcal{A})$ e $P(\mathcal{A})a \supseteq P(\mathcal{A})$. Analoga prova si fa per l'insieme $G^0 - P(\mathcal{A})$.

6. Estensione di un ordinamento parziale ad uno totale.

6.1. Il seguente esempio mostra che non basta sapere che un gruppo è ordinabile totalmente (unilateralmente) perchè, in ogni caso, si possa estendere un ordinamento parziale ad uno totale.

Sia G il gruppo costituito dalle coppie ordinate di numeri interi con l'operazione definita in modo che:

$$(a, b)(c, d) = (a + c, \quad b + (-1)^a d).$$

L'ordinamento $\mathcal{A}$ per cui:

$$P(\mathcal{A}) = \{(a, b) : a > 0 \quad \text{oppure} \quad a = 0, \quad \text{e} \quad b > 0\}$$

è un ordinamento totale unilatero (non bilatero perchè $P(\mathcal{A})$ non è invariante per automorfismi interni).

L'ordinamento $\mathcal{B}$ definito in modo che:

$$P(\mathcal{B}) = \{(a, b) : a \text{ pari e } [\lambda a > b \quad \text{oppure} \quad \lambda a = b \quad \text{ed} \quad a > 0]\}$$

dove λ è un numero reale qualsiasi, è un ordinamento parziale bilatero non estendibile ulteriormente perchè l'insieme $P(\mathcal{B})$ è stabile massimale in G^0.

6.2.1. TEOREMA. *Sia G un gruppo ed $\mathcal{A}$ un ordinamento parziale unilatero di G; allora, condizione sufficiente affinchè l'ordinamento $\mathcal{A}$ si possa estendere ad un ordinamento totale della stessa specie è che l'insieme degli elementi di G^0 non confrontabili con l'identità sia unione di due parti stabili.*

DIM. Sia:

$$E = G^0 - (P(\mathcal{A}) \cup \overline{P(\mathcal{A})}) = R \cup T,$$

R e T essendo parti stabili di G. È subito visto che $E = \overline{E}$, perciò essendo

$$\overline{R} \subseteq E - R \quad \text{e} \quad \overline{T} \subseteq E - T$$

risulta anche

$$\overline{R} = T = E - R.$$

Posto allora $H = R \cup P(\mathscr{A})$, si ha:

$$\overline{H} = T \cup \overline{P(\mathscr{A})} = G^0 - H.$$

Si proverà ora che H è un insieme stabile e questo, per il corollario **3.4.2.**, completerà la dimostrazione. Essendo R e $P(\mathscr{A})$ parti stabili di G, basterà far vedere che per ogni $a \in R$ ed ogni $b \in P(\mathscr{A})$, ab e ba non sono nè in T nè in $\overline{P(\mathscr{A})}$: se $ab = c \in T$, $b = \overline{a}\, c \in T$ cosa impossibile perchè T è disgiunto da $P(\mathscr{A})$; se invece $ab = c \in \overline{P(\mathscr{A})}$, $a = c\, \overline{b} \in \overline{P(\mathscr{A})}$ cosa nuovamente impossibile perchè R è disgiunto da $\overline{P(\mathscr{A})}$; analogamente si prova che ba appartiene all'insieme $R \cup P(\mathscr{A})$.

6.2.2. Teorema. *Sia G un gruppo ordinabile totalmente a sinistra ed $\mathscr{A}$ sia un ordinamento parziale a sinistra di G; allora se G è abeliano oppure se ogni volta che due elementi del gruppo sono confrontabili tra loro almeno uno di essi è confrontabile con l'identità oppure è l'identità, l'ordinamento $\mathscr{A}$ è estendibile ad un ordinamento totale a sinistra di G* (19).

Dim. (a) se il gruppo G è abeliano, se H è una parte di G stabile massimale in G^0 e contenente $P(\mathscr{A})$, poichè $G^0 - H$ risulta debolmente stabile per la proposizione (c) del teorema **4.4.3.** e per l'ipotesi fatta, il teorema **4.5.4.** ed il corollario **3.4.2.** permettono di concludere che l'ordinamento $\mathscr{B}$ di G definito in modo che $P(\mathscr{B}) = H$ (che risulta pertanto una estensione dell'ordinamento $\mathscr{A}$) è totale;

(b) sia:

$$E = G - (P(\mathscr{A}) \cup \overline{P(\mathscr{A})})$$

e sia:

$$G^0 = L \cup \overline{L} \qquad \text{con } L \text{ stabile massimale in } G^0,$$

scomposizione possibile per l'ipotesi fatta su G.

---

(19) La parte di questo teorema che riguarda i gruppi abeliani è stata già dimostrata da P. Lorenzen e L. Fuchs (cf. [6], pag. 169). Altre condizioni sono state date da M. Ohnishi ed L. Fuchs per gli ordinamenti bilateri e P. Conrad per quelli unilateri (cf. [4], theorem 2.3).

Se si pone:

$$R = L \cap E, \qquad T = \bar{L} \cap E,$$

gli insiemi R e T risultano stabili in G^0 e la loro unione è l'insieme $E \cap G^0$: il teorema precedente completa la dimostrazione.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRUS, J. F. - BUSTON, A. T., *On ordered groups*. Amer. Mathem. Monthly, **70**, (1963), 619-628.

[2] BIKHOFF, G., *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. vol. XXV, revised edition, 1948.

[3] BOURBAKI, N., *Algèbre: chap. VI, groupes et corps ordonnés*. Act. Scient. Ind. n. **1179**, Paris, Hermann, 1952.

[4] CONRAD, P., *Right ordered groups*. Michig. Mathem. Jour., **6**, (1959), 267-275.

[5] EVERETT, C. J. - ULAM, S., *On ordered groups*. Trans. Amer. Math. Soc., **57**, (1945), 208-216.

[6] FUCHS, L., *Note on ordered groups and rings*. Fund. Math , **46**, (1958-59), 167-174.

[7] IWASAWA, K., *On linearly ordered groups*. Journ. Math. Soc. Japan, **1**, (1948), 1-9.

[8] MALCEV, A., *Sui gruppi ordinati*. (in russo). Izvestiya Akad. Nauk SSSR, **13**, (1949), 473-482.

[9] MORGADO, J., *A characterization of the closure operators by means of one axiom*. Port. Math., **21**, (1962), 155-156.

[10] NEUMANN, B. H., *On ordered groups*. Amer. Jour. Math., **71**, (1949), 1-18.

[11] TARSKI, A., *Zur Grundlegung der Booleschen Algebra* I. Fund. Math., **24**, (1935), 177-198.

[12] TULLY, E. J., *The existence of a total order on a group*. Proc. Amer. Math. Soc., **13**, (1962), 217-219.