ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VINICIO VILLANI

Frontiere di Silov negli spazi complessi e applicazioni olomorfe proprie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 4 (1963), p. 333-348

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_4_333_0>

FRONTIERE DI SILOV NEGLI SPAZI COMPLESSI E APPLICAZIONI OLOMORFE PROPRIE (*)

di VINICIO VILLANI (Pisa)

Introduzione.

Siano X, Y due spazi complessi (nel senso di Serre), $\pi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione olomorfa propria. Dato un aperto relativamente compatto $B \subset Y$, si ponga $A = \pi^{-1}(B)$. Se X ed Y sono olomorficamente separati, si può definire la frontiera di Silov $S(A)$ di A, rispettivamente $S(B)$ di B (vedi n. 2). In questo lavoro ci proponiamo di studiare i legami tra $S(A)$ ed $S(B)$. Precisamente, sotto l'ulteriore ipotesi che X ed Y siano spazi di Stein, irriducibili in ogni punto, dimostriamo (teorema 4):

$$S(B) = \pi(S(A)); \qquad \pi^{-1}(S(B)) = S(A).$$

La dimostrazione consta di due parti: nella prima si confronta la frontiera di Silov di un aperto relativamente compatto B, contenuto in uno spazio di Stein (non normale), con la frontiera di Silov dell'aperto B^*, immagine inversa di B nella normalizzazione $\varrho : Y^* \longrightarrow Y$. In proposito sussiste il teorema 1: Se Y è irriducibile in ogni suo punto, si ha

$$\varrho^{-1}(S(B)) = S(B^*).$$

Un controesempio mostra che questa uguaglianza non è più vera in generale, se Y è riducibile in qualche punto.

Nella seconda parte si studia il comportamento della frontiera di Silov

---

Pervenuto alla Redazione il 27 Agosto 1963.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

nel caso di un rivestimento analitico $\pi : X \longrightarrow Y$ di uno spazio normale olomorficamente separato Y, mediante uno spazio (non necessariamente normale) olomorficamente separato X (per le definizioni precise, vedi n. 4). In proposito si dimostrano i teoremi seguenti: $S(B) = \pi(S(A))$ (teorema 2); se poi anche X è normale, si ha: $\pi^{-1}(S(B)) = S(A)$ (teorema 3).

Il teorema 4 è una facile conseguenza dei teoremi 2 e 3, come si vede passando alle normalizzazioni di X e di Y, e ricorrendo al teorema 1.

Mi sia consentito ringraziare quì il prof. A. Andreotti per i suoi consigli, che mi sono stati assai utili nella preparazione del presente lavoro.

1. Sia K uno spazio topologico compatto; sia poi $\mathfrak{A}$ un'algebra su C di funzioni continue a valori complessi, definite su K; le funzioni di $\mathfrak{A}$ separino i punti di K (cioè per ogni coppia di punti distinti $x_1, x_2 \in K$ esista una funzione $f \in \mathfrak{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$).

In queste ipotesi, nella famiglia dei sottoinsiemi chiusi $F \subset K$, tali che

$$\max_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in F} |f(x)| \qquad \text{per ogni } f \in \mathfrak{A},$$

esiste un insieme minimo, unico (cfr. [3], pag. 80).

Denoteremo questo insieme con $S(K)$ e lo chiameremo *frontiera di Silov* di K (relativa all'algebra di funzioni $\mathfrak{A}$).

Nel seguito sarà utile la seguente caratterizzazione dell'insieme $S(K)$:

LEMMA 1. *Un punto $x \in K$ appartiene ad $S(K)$ se e solo se, comunque fissato un intorno $U \ni x$, esiste una funzione $f \in \mathfrak{A}$, tale che*

$$\sup_{x \in U} |f(x)| > \sup_{x \in K-U} |f(x)|.$$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo $x \in S(K)$, e fissiamo un intorno U di x. Se ogni funzione $f \in \mathfrak{A}$ soddisfacesse alla disuguaglianza $\sup\limits_{x \in U} |f(x)| \leq \sup\limits_{x \in K-U} |f(x)|$, $S(K)$ dovrebbe essere contenuto in $K - U$, assurdo.

Proviamo il viceversa: supponiamo dunque $x \notin S(K)$, e sia U un intorno di x, tale che $U \cap S(K) = \emptyset$. Se esistesse $f \in \mathfrak{A}$, tale che $\sup\limits_{x \in U} |f(x)| > \sup\limits_{x \in K-U} |f(x)|$, dalle inclusioni $K - U \supset S(K)$, $K \supset U$, seguirebbe a fortiori $\sup\limits_{x \in K} |f(x)| > \sup\limits_{x \in S(K)} |f(x)|$, onde f non assumerebbe massimo modulo su $S(K)$, assurdo.

OSSERVAZIONE: 1). Ogni funzione $f \in \mathfrak{A}$ è completamente determinata dalla propria restrizione $f \mid S(K)$ alla frontiera di Silov.

Infatti se due funzioni $f, g \in \mathfrak{A}$ coincidono su $S(K)$, si ha

$$\max_{x \in K} |(f - g)(x)| = \max_{x \in S(K)} |(f - g)(x)| = 0$$

ossia $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in K$.

2). Siano dati due spazi topologici compatti K_1, K_2, con algebre di funzioni $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Se $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ è un'applicazione continua surgettiva, e se $\varphi^* (\mathfrak{A}_2) \subset \mathfrak{A}_1$, allora si ha

$$\varphi (S (K_1)) \supset S (K_2)$$

(le inclusioni essendo intese in senso debole).

Infatti ogni funzione $f \in \mathfrak{A}_2$ assume massimo modulo in almeno un punto di $\varphi (S (K_1))$.

2. Sia ora X uno *spazio complesso* nel senso di Serre (β-spazio nella terminologia di [2]). Supponiamo che X sia *olomorficamente separato*, ossia le funzioni olomorfe globali su X separino i punti di X.

Dato un aperto relativamente compatto $A \subset X$, denotiamo con $S(A)$ la frontiera di Silov di $\overline{A}$, relativa all'algebra $\mathfrak{A}$ di tutte le funzioni continue su $\overline{A}$, che sono olomorfe su A.

Osservazione: In virtù del teorema del massimo modulo per le funzioni olomorfe sugli spazi complessi (cfr. ad es. [4], pag. 358) la frontiera di Silov $S(A)$ è contenuta nella frontiera topologica $\partial A = \overline{A} - A$.

3. Consideriamo un'applicazione olomorfa propria

$$\pi : X \longrightarrow Y$$

di uno spazio complesso olomorficamente separato X sopra uno spazio complesso olomorficamente separato Y. Sia B un aperto relativamente compatto di Y e sia $A = \pi^{-1}(B)$. L'insieme A è aperto relativamente compatto di X, ed è $\overline{B} = \pi(\overline{A})$.

Osservazione: Dall'osservazione 2 del n. 1 segue che

$$\pi (S (A)) \supset S (B).$$

Tuttavia non è detto in generale che

$$S (A) \supset \pi^{-1} (S (B)).$$

ESEMPIO : $Y = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid z \cdot w = 0\}$ con la struttura complessa indotta dalla struttura di $\mathbf{C}^2$. Y è riducibile nell'origine. X sia la normalizzazione di Y (cfr. [2], pag. 283). Lo spazio X consta di due rette complesse disgiunte, che indicheremo con X_z (immagine inversa della retta $w = 0$) e X_w (immagine inversa della retta $z = 0$). π sia la proiezione canonica di X su Y.

Consideriamo l'aperto $B \subset Y$ definito da:

$$B = \{w = 0\,;\, |z - 1| < 1\} \cup \{z = 0\,;\, 0 < |w| < 1\}.$$

Si ha

$$S(B) = \{w = 0\,;\, |z - 1| = 1\} \cup \{z = 0\,;\, |w| = 1\}.$$

Posto $A = \pi^{-1}(B)$, si ha

$$S(A) = \left\{z \in X_z \,\middle|\, |z - 1| = 1\right\} \cup \left\{w \in X_w \,\middle|\, |w| = 1\right\}.$$

Il punto $(0, 0)$ appartiene dunque ad $S(B)$; ma il punto $w = 0$ di X_w, pur appartenendo a $\pi^{-1}(0, 0)$, non fa parte di $S(A)$.

Il fatto che X sia sconnesso è inessenziale ai fini dell'esempio. Infatti basta considerare uno spazio Y' che su un intorno dell'origine è isomorfo con Y, ma che globalmente è irriducibile. In tal caso la normalizzazione viene ad essere uno spazio connesso, e l'esempio dato continua a sussistere.

Invece esempi di questo tipo non sussistono, se Y è irriducibile in ogni suo punto (cioè β_i-spazio nella terminologia di [2]). Infatti in tal caso, detta Y^* la normalizzazione di Y, la proiezione canonica $\varrho : Y^* \to Y$ è un omeomorfismo onde, dato un aperto relativamente compatto $B \subset Y$, e posto $B^* = \varrho^{-1}(B)$, dall'inclusione $\varrho(S(B^*)) \supset S(B)$ segue $S(B^*) \supset \varrho^{-1}(S(B))$. Di più, in queste ipotesi, proviamo il

TEOREMA 1. *Sia Y uno spazio di Stein, irriducibile in ogni suo punto; Y^* ne sia la normalizzazione; $\varrho : Y^* \to Y$ denoti la proiezione canonica. Dato un aperto relativamente compatto $B \subset Y$ e posto $B^* = \varrho^{-1}(B)$, si ha*

$$S(B^*) = \varrho^{-1}(S(B)).$$

OSSERVAZIONE : Identifichiamo Y ed Y^*, in quanto spazi topologici, mediante l'omeomorfismo ϱ; allora la tesi del teorema 1 si può esprimere dicendo che la frontiera di Silov di B, relativa alle funzioni olomorfe di Y coincide con la frontiera di Silov di B, relativa alle funzioni olomorfe di Y^*.

DIMOSTRAZIONE : Identifichiamo dunque Y con Y^* in quanto spazi topologici, e denotiamo con $\mathfrak{O}$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe su

Y, e con $\mathfrak{O}^*$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe su Y^*. Poichè certo $S(B) \subset S(B^*)$, si tratta di provare l'inclusione opposta: $S(B^*) \subset S(B)$. A tal fine consideriamo il fascio $\mathfrak{H}$ di ideali di $\mathfrak{O}$, che in ciascun punto $y \in Y$ ha come spiga

$$\mathfrak{H}_y = \{ f_y \in \mathfrak{O}_y \,|\, f_y \cdot g_y \in \mathfrak{O}_y \text{, per ogni } g_y \in \mathfrak{O}_y^* \}.$$

LEMMA 2. *Il fascio $\mathfrak{H}$ è coerente; nei punti y in cui Y è normale si ha $\mathfrak{H}_y = \mathfrak{O}_y$.*

DIMOSTRAZIONE: $\mathfrak{O}^*$ è un $\mathfrak{O}$-fascio coerente (cfr. [2], pag. 291); dato un punto $y_0 \in Y$, sia $s_1, \dots, s_r$ un sistema locale di generatori di $\mathfrak{O}^*$, su un opportuno intorno $U \ni y_0$. Indichiamo con $t_1, \dots, t_r$ le immagini omomorfe di $s_1, \dots, s_r$ nel fascio quoziente $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{O}$, e consideriamo gli r omomorfismi $\mathfrak{O}$-lineari:

$$k_j : \mathfrak{O} \longrightarrow \mathfrak{O}^*/\mathfrak{O} \qquad (j = 1, \dots, r)$$

definiti nei punti $y \in U$ da

$$k_j : f_y \longrightarrow f_y \cdot t_j \qquad (f_y \in \mathfrak{O}_y \,, y \in U).$$

I fasci $\operatorname{Ker} k_j$, definiti su U, sono coerenti, e quindi anche la loro intersezione $\operatorname{Ker} k_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} k_r$ è un fascio coerente. D'altra parte si vede subito che sull'aperto U questo fascio coincide col fascio $\mathfrak{H}$. Pertanto la prima affermazione del lemma è dimostrata. La verifica della seconda affermazione è immediata.

Ritorniamo alla dimostrazione del teorema 1. Consideriamo dunque un punto $y \in S(B^*)$; si tratterà di far vedere che ne segue $y \in S(B)$. In virtù del lemma 1, fissato comunque un intorno $U \ni y$ in Y, esiste una funzione $f \in \Gamma(B, \mathfrak{O}^*)$, continua su $\overline{B}$, tale che

$$\sup_{z \in U \cap \overline{B}} |f(z)| > \sup_{z \in \overline{B} - U} |f(z)|.$$

Poichè l'insieme dei punti normali di Y è ovunque denso in Y, è possibile scegliere in $U \cap \overline{B}$ un punto y_0, nel quale lo spazio Y è normale, e tale che si abbia

$$|f(y_0)| > \sup_{z \in \overline{B} - U} |f(z)|.$$

Sia $g \in \Gamma(Y, \mathfrak{H})$ una sezione globale di $\mathfrak{H}$, tale che $g(y_0) \neq 0$. Almeno una sezione siffatta esiste, perchè per il fascio $\mathfrak{H}$, che è coerente, vale il teorema A di Cartan-Serre, e perchè la scelta di y_0 assicura che la spiga $\mathfrak{H}_{y_0}$ contiene dei germi il cui valore in y_0 non è nullo.

Moltiplicando f e g per costanti opportune, possiamo fare in modo che per le nuove funzioni, che continueremo a denotare con f, g, valga:

$$f(y_0) = 1\,; \qquad g(y_0) = 1.$$

Poniamo poi per brevità:

$$\sup_{z \in \overline{B} - U} |f(z)| = \lambda \qquad\qquad (\lambda < 1)\,;$$

$$\sup_{z \in \overline{B} - U} |g(z)| = \mu,$$

e consideriamo le funzioni $f^n g \; (n \geq 0)$, che appartengono tutte a $\Gamma(B, \mathbb{O})$, e sono continue su $\overline{B}$. Si ha:

$$\sup_{z \in U \cap \overline{B}} |f^n(z)\, g(z)| \geq |f^n(y_0)\, g(y_0)| = 1\,;$$

$$\sup_{z \in \overline{B} - U} |f^n(z)\, g(z)| \leq \lambda^n \mu.$$

Poichè $\lambda < 1$, per un valore n_0 opportunamente grande si ha $\lambda^{n_0} \mu < 1$, onde la funzione $f^{n_0} g$ soddisfa alla disuguaglianza

$$\sup_{z \in U \cap B} |(f^{n_0} g)(z)| < \sup_{z \in \overline{B} - U} |(f^{n_0} g)(z)|.$$

In quanto U è un intorno arbitrario di y, e in quanto $f^{n_0} g \in \Gamma(B, \mathbb{O})$ ed è continua su $\overline{B}$, la caratterizzazione della frontiera di Silov fornita nel lemma 1 assicura che $y \in S(B)$. Ciò prova il teorema 1.

4. Siano X, Y due spazi complessi, che per semplicità di notazione supporremo connessi. Lo spazio Y sia *normale*.

Un'applicazione $\pi : X \longrightarrow Y$ si dirà un *rivestimento analitico diramato*, se π è surgettiva, olomorfa, propria, e tale inoltre che:

(i) l'immagine inversa $\pi^{-1}(y)$ di ciascun punto $y \in Y$ è un insieme finito;

(ii) esiste un sottoinsieme analitico (chiuso, non denso) $S \subset Y$, tale che $\pi^{-1}(S)$ non decompone X in alcun suo punto [1], e l'applicazione

$$\pi : X - \pi^{-1}(S) \longrightarrow Y - S$$

è un omeomorfismo locale.

---

[1] Un sottoinsieme chiuso Σ non decompone X in alcun suo punto, se Σ è non denso in X e se, dati comunque un punto $a \in \Sigma$ ed un intorno connesso $U \ni a$ in X, l'insieme $U - \Sigma$ è connesso (non vuoto).

S costituisce l'insieme dei punti di diramazione del rivestimento considerato. Se S è vuoto, il rivestimento si dice *non diramato*.

OSSERVAZIONE: La definizione quì data di rivestimento analitico diramato si ispira alla definizione 37 di [2], con una differenza: in [2] non si suppone a priori l'esistenza di alcuna struttura complessa su X (e di conseguenza si sostituisce la condizione che l'applicazione π sia olomorfa con la condizione che tale applicazione sia continua) e si fa vedere successivamente che X può essere sempre dotato di una struttura univocamente determinata di spazio complesso normale, tale che l'applicazione $\pi: X \longrightarrow Y$ sia olomorfa. Nella nostra definizione invece supponiamo in partenza che X sia dotato di una struttura di spazio complesso, non necessariamente normale, e che l'applicazione π sia olomorfa. Il vantaggio della nostra definizione rispetto a quella di [2] consiste dunque nell'ammettere una maggiore generalità per la struttura complessa di X; questa maggiore generalità non è solo apparente, poichè in effetti esistono spazi complessi non normali X, ed applicazioni olomorfe $\pi: X \longrightarrow Y$ su spazi normali, anzi addirittura su varietà Y, che sono dei rivestimenti nel nostro senso.

ESEMPIO: Sia $X = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid x^2 = y^3\}$; come funzioni olomorfe su X si considerino le restrizioni delle funzioni olomorfe di C^2; sia poi $Y = \{t \in \mathbf{C}^1\}$.

L'applicazione $\pi: X \longrightarrow Y$ sia definita da

$$t = \pi(x, y) = x.$$

Si ha un rivestimento analitico diramato, il cui insieme di diramazione S è costituito dall'origine $t = 0$. Lo spazio X, che è una cuspide, non è normale.

Sarà opportuno notare tuttavia che anche in un rivestimento analitico diramato secondo la nostra definizione, lo spazio X non è il più generale spazio complesso. Infatti dalla definizione si deduce la

PROPOSIZIONE 1. *Lo spazio X è irriducibile in ogni suo punto.*

DIMOSTRAZIONE: Detto A l'insieme dei punti non normali di X, si ha $A \subset \pi^{-1}(S)$. Poichè per ipotesi $\pi^{-1}(S)$ non decompone X in alcun punto, a fortiori lo stesso è vero per A. Quindi, dato comunque un punto $p \in A$ ed un intorno connesso $U \ni p$ in X, anche $U - A$ è connesso. Ora ciò implica precisamente che X è irriducibile in p: ragioniamo per assurdo. Esistano in p due germi di funzioni olomorfe non identicamente nulle f, g, con fg identicamente nulla; consideriamo un intorno connesso $U \ni p$, su cui queste funzioni sono tutte definite. Poichè $U - A$ è connesso, e poichè nei punti di $U - A$ vale il principio di annullamento del prodotto di germi di funzioni olomorfe, una almeno delle funzioni f, g, sia ad es. f, dev'essere identicamente nulla su $U - A$. Per continuità allora f è nulla anche sulla chiusura di $U - A$, ossia su tutto U, contro l'ipotesi. Ciò prova che X è irriducibile in tutti i punti di A. Poichè nei punti normali X è certo irriducibile, la proposizione 1 è dimostrata.

Dalla definizione di rivestimento analitico diramato discendono alcune facili conseguenze, che sarà utile formulare esplicitamente:

Per ogni punto $y \in Y$ indichiamo con $\sigma(y)$ il numero di punti che costituiscono l'immagine inversa $\pi^{-1}(y)$.

LEMMA 3. *La funzione $\sigma(y)$ è costante su $Y - S$; sia σ il valore comune di $\sigma(y)$, per $y \in Y - S$.*

Nei punti $y_0 \in S$ si ha $\sigma(y_0) \leq \sigma$.

Fissato un punto $y \in Y$, si ponga:

$$\pi^{-1}(y) = x_1 \cup \dots \cup x_{\sigma(y)}$$

e si consideri per ciascun x_j un intorno $U_j \ni x_j$ ($j = 1, \dots, \sigma(y)$); esiste in Y un intorno $W \ni y$ tale che

$$\pi^{-1}(W) \subset U_1 \cup \dots \cup U_{\sigma(y)}.$$

Omettiamo la dimostrazione, che si trova già nella letteratura (cfr. ad es. [6]).

Il numero σ dicesi l'*ordine* del rivestimento considerato.

5. Riprendiamo le notazioni introdotte all'inizio del n. 3, e supponiamo inoltre che $\pi : X \to Y$ sia un rivestimento analitico diramato (lo spazio Y si suppone normale).

LEMMA 4. *In queste ipotesi si ha*

$$S(A) \subset \pi^{-1}(S(B)).$$

DIMOSTRAZIONE: Se questa inclusione non fosse vera, dovrebbero esistere: una funzione g, continua su $\bar{A}$ ed olomorfa su A, ed un punto $x_0 \in \partial A - \pi^{-1}(S(B))$, con

$$\max_{x \in \pi^{-1}(S(B))} |g(x)| < |g(x_0)|.$$

Non è restrittivo supporre che $\max_{x \in \bar{A}} |g(x)| = 1$, e che x_0 sia uno dei punti in cui $|g(x)|$ assume questo valore massimo:

$$|g(x_0)| = 1.$$

Poniamo per brevità

$$m = \max_{x \in \pi^{-1}(S(B))} |g(x)|.$$

Si ha dunque $m < 1$.

Nei punti $y \in (Y - S) \cap \bar{B}$ si consideri, in corrispondenza ad ogni intero $k > 0$, la funzione

$$s_k(y) = \frac{1}{\sigma}\{g(x_1)^k + \dots + g(x_\sigma)^k\},$$

ove, come al solito,

$$\pi^{-1}(y) = x_1 \cup \dots \cup x_\sigma .$$

Questa funzione è ben definita e continua su $(Y - S) \cap \bar{B}$, ed è olomorfa su $(Y - S) \cap B$. Proviamo che $s_k(y)$ si estende ad una funzione continua su tutto $\bar{B}$. Sia dunque $y_0 \in \bar{B} \cap S$. Fissato un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si determinino in corrispondenza ai $\sigma(y_0)$ punti di $\pi^{-1}(y_0)$, degli intorni $U_1, \dots U_{\sigma(y_0)}$, tali che per ogni coppia di punti $x', x'' \in U_j \cap \pi^{-1}(\bar{B})$ si abbia

$$|g(x')^k - g(x'')^k| < \varepsilon \qquad (j = 1, \dots, \sigma(y_0));$$

ciò è possibile perchè g^k è continua su $\bar{A} = \pi^{-1}(\bar{B})$. Sia poi W un intorno di y_0 in Y, tale che $\pi^{-1}(W) \subset U_1 \cup \dots \cup U_{\sigma(y_0)}$ (lemma 3). Dati comunque due punti $y', y'' \in (Y - S) \cap \bar{B} \cap W$, si ha quindi

$$|s_k(y') - s_k(y'')| < \varepsilon$$

onde, per il criterio di Cauchy, s_k si può estendere per continuità nel punto y_0.

Ripetendo lo stesso ragionamento per ogni $y_0 \in \bar{B} \cap S$, si viene quindi ad estendere s_k ad una funzione continua su tutto $\bar{B}$. Continueremo ad indicare la funzione così estesa, con s_k.

Si era già osservato che s_k è olomorfa su $B - S$; inoltre s_k è continua su tutto $\bar{B}$ (in questo momento basta sapere che s_k è limitata su B); ricordando che Y è normale, si può dunque applicare il teorema di estensione di Riemann (cfr. ad es. [4], pag. 343) da cui segue che s_k è olomorfa su B.

Riassumendo, abbiamo provato: *la funzione s_k è olomorfa su B, è continua su $\bar{B}$.*

Avendo posto $m = \max\limits_{x \in \pi^{-1}(S(B))} |g(x)|$, si ha, per ogni $k > 0$ ed in ogni punto $y \in S(B)$:

$$|s_k(y)| \leq m^k$$

e quindi anche

$$\max_{y \in S(B)} |s_k(y)| \leq m^k.$$

D'altra parte sussiste il seguente

LEMMA (cfr. ad es. [1]. nota a pag. 9). *Dati ad arbitrio dei numeri complessi $a_1, \dots, a_\sigma$, si ha:*

$$\max \lim_{k \to \infty} \left\{\frac{1}{\sigma} |a_1^k + \dots + a_\sigma^k|\right\}^{\frac{1}{k}} = \max_{i=1,\dots,\sigma} |a_i|.$$

Applicando questo lemma ad $s_k(y_0)$, ove si è posto $y_0 = \pi(x_0)$, ne segue che in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $k > 0$, per il quale

$$\{|s_k(y_0)|\}^{\frac{1}{k}} > 1 - \varepsilon.$$

Fissiamo in particolare $\varepsilon = 1 - m$. Allora risulta, per un opportuno $k > 0$:

$$|s_k(y_0)| > m^k.$$

Confrontando questa disuguaglianza con la disuguaglianza ottenuta nei punti di $S(B)$, si ottiene

$$|s_k(y_0)| > \max_{y \in S(B)} |s_k(y)|.$$

Poichè $y_0 \notin S(B)$, questa disuguaglianza contraddice alla definizione di $S(B)$. Ciò prova il lemma 4.

Dal lemma 4 si trae l'inclusione

$$\pi(S(A)) \subset S(B).$$

Poichè sussiste altresì l'inclusione opposta (cfr. n. 3), abbiamo ottenuto il

TEOREMA 2. *Sia $\pi : X \to Y$ un rivestimento analitico diramato (X, Y spazi complessi; Y normale). Sia B un aperto relativamente compatto di Y, e sia $A = \pi^{-1}(B)$. Tra le frontiere di Silov di A e di B si ha il legame:*

$$S(B) = \pi(S(A)).$$

6. Proviamo ora il

TEOREMA 3. *Siano verificate le ipotesi del teorema* 2; *inoltre sia verificata una almeno delle tre condizioni seguenti:*

(a) *Il rivestimento* $\pi : X \longrightarrow Y$ *è di Galois* (2);

(b) X *è normale;*

(c) X *è di Stein.*

Allora tra le frontiere di Silov di A *e di* B *si ha il legame*

$$\pi^{-1}(S(B)) = S(A).$$

DIMOSTRAZIONE: (a). L'insieme $S(A)$ è invariante rispetto al gruppo degli automorfismi del rivestimento $\pi : X \longrightarrow Y$. Quindi, avendo supposto che il rivestimento sia di Galois, risulta

$$S(A) = \pi^{-1}(\pi(S(A)).$$

D'altra parte dal teorema 1 si trae

$$\pi^{-1}(\pi(S(A)) = \pi^{-1}(S(B)),$$

onde

$$S(A) = \pi^{-1}(S(B)).$$

(b). Se il rivestimento $\pi : X \longrightarrow Y$ non è di Galois, possiamo ricondurre l'affermazione del teorema 3 al seguente

LEMMA 5. *Sia* $\pi : X \longrightarrow Y$ *un rivestimento analitico diramato, con* X, Y *spazi normali. Si possono costruire: uno spazio complesso* (*connesso*) Z *e due rivestimenti analitici diramati* $\omega : Z \longrightarrow Y$, $\varrho : Z \longrightarrow X$, *in modo che:*

1) *Sussiste il diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\varrho"] \arrow[dr, "\omega"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & Y. \end{tikzcd}$$

2) $\omega : Z \longrightarrow Y$ *è un rivestimento di Galois.*

Se poi X *è olomorficamente separato, tale è* Z.

---

(2) Si dice che un rivestimento analitico diramato $\pi : X \to Y$ è di Galois, se in corrispondenza ad ogni coppia di punti $x', x'' \in X$, con $\pi(x') = \pi(x'')$ esiste un automorfismo analitico $\sigma : X \to X$, che è compatibile con π (cioè $\pi \circ \sigma = \pi$) ed è tale che $\sigma(x') = x''$.

Ammesso per il momento questo lemma, completiamo la dimostrazione del caso (b) del teorema 3. Si ponga :

$$C = \omega^{-1}(B).$$

Da quanto provato nel caso (a) segue

$$S(C) = \omega^{-1}(S(B)) = \varrho^{-1} \circ \pi^{-1}(S(B))$$

e quindi anche

$$\varrho(S(C)) = \varrho \circ \varrho^{-1} \circ \pi^{-1}(S(B)) = \pi^{-1}(S(B)).$$

Applicando poi il teorema 2 al rivestimento $\varrho : Z \longrightarrow X$, relativamente agli aperti $A = \pi^{-1}(B) \subset X$, $C = \varrho^{-1} \circ \pi^{-1}(B) \subset Z$, si ha

$$\varrho(S(C)) = S(\pi^{-1}(B)) = S(A).$$

Confrontando le due uguaglianze così ottenute, ne viene

$$S(A) = \varrho(S(C)) = \pi^{-1}(S(B)),$$

come appunto volevasi dimostrare.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 5. Sia σ l'ordine del rivestimento $\pi : X \longrightarrow Y$. Denotiamo con X^σ il prodotto topologico di σ copie di X (e analogamente per Y) e consideriamo l'applicazione olomorfa prodotto :

$$\pi^\sigma : X^\sigma \longrightarrow Y^\sigma,$$

che è un rivestimento analitico diramato di ordine σ^σ.

Sia poi $\Delta : Y \longrightarrow Y^\sigma$ l'applicazione diagonale di Y in Y^σ; indichiamo con X^σ_Δ l'immagine inversa di $\Delta(Y)$ in X^σ. La restrizione dell'applicazione π^σ :

$$\pi^\sigma_\Delta : X^\sigma_\Delta \longrightarrow Y$$

è un rivestimento analitico diramato, ancora di ordine σ^σ.

Indicando sempre con $S \subset Y$ l'insieme dei punti di diramazione di $\pi : X \longrightarrow Y$, consideriamo il sottoinsieme analitico di X^σ_Δ :

$$S_\Delta = (\pi^\sigma_\Delta)^{-1}(S);$$

consideriamo poi i sottoinsiemi analitici (chiusi) di X_Δ^σ definiti da

$$T_{ij} = \{(x_1, \dots, x_\sigma) \in X_\Delta^\sigma \mid x_i = x_j\}$$

e poniamo

$$T = \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i, j = 1, \dots, \sigma}} T_{ij}.$$

Definiamo infine

$$Z_0 = X_\Delta^\sigma - (S_\Delta \cup T).$$

La restrizione di π_Δ^σ a Z_0 definisce un rivestimento analitico non diramato di ordine σ ! :

$$\omega_0 : Z_0 \longrightarrow Y - S.$$

Non è detto che Z_0 sia connesso. Se ne consideri una componente connessa Z_1. Restringendo ω_0 a Z_1 si ottiene un nuovo rivestimento analitico non diramato

$$\omega_1 : Z_1 \longrightarrow Y - S.$$

Questo rivestimento si può estendere, in modo univoco, ad un rivestimento analitico diramato

$$\omega : Z \longrightarrow Y,$$

ove Z è uno spazio complesso normale, connesso, contenente Z_1; lo spazio Z è la chiusura di Z_1 in X_Δ^σ; ω si ottiene prolungando ω_1 per continuità ([3]).

Facciamo vedere che $\omega : Z \longrightarrow Y$ è un rivestimento di Galois. Siano $(z_1, \dots, z_\sigma)$, $(z_{j_1}, \dots, z_{j_\sigma})$ due punti di Z, aventi la medesima proiezione su Y e supponiamo in primo luogo che si abbia $\omega(z_1, \dots, z_\sigma) = \omega(z_{j_1}, \dots, z_{j_\sigma}) \in Y - S$. Allora la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \sigma \\ j_1 & \dots & j_\sigma \end{pmatrix}$$

è univocamente determinata; tale permutazione opera su Z, associando ad ogni punto $(\zeta_1, \dots, \zeta_\sigma) \in Z$ il punto $(\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_\sigma})$: si tratta di verificare che questo nuovo punto appartiene a Z. Ed infatti basta congiungere $(z_1, \dots, z_\sigma)$ con $(\zeta_1, \dots, \zeta_\sigma)$ mediante un cammino continuo, i cui punti (escluso al più

([3]) Queste affermazioni possono verificarsi direttamente senza difficoltà, e del resto si trovano già nella letteratura (cfr. [6], teorema 1).

$(\zeta_1, \dots, \zeta_\sigma))$ stanno in Z_1. I trasformati mediante la permutazione $\begin{pmatrix} 1 & \dots & \sigma \\ j_1 & \dots & j_\sigma \end{pmatrix}$ dei punti di tale cammino continuo costituiscono nello spazio Z_0 un cammino continuo che congiunge $(z_{j_1}, \dots, z_{j_\sigma})$ con $(\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_\sigma})$. Poichè il punto $(z_{j_1}, \dots, z_{j_\sigma})$ appartiene per ipotesi a Z, anche $(\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_\sigma})$ vi appartiene. Ciò prova appunto che la permutazione $\begin{pmatrix} 1 & \dots & \sigma \\ j_1 & \dots & j_\sigma \end{pmatrix}$ definisce un automorfismo di Z, compatibile con ω, e che trasforma $(z_1, \dots, z_\sigma)$ in $(z_{j_1}, \dots, z_{j_\sigma})$.

Se poi la proiezione dei due punti considerati appartiene ad $S : \omega(z_1, \dots, z_\sigma) = \omega(z_{j_1}, \dots, z_{j_\sigma}) \in S$, allora la permutazione $\begin{pmatrix} 1 & \dots & \sigma \\ j_1 & \dots & j_\sigma \end{pmatrix}$ non è più univocamente determinata, perchè può accadere che sia $z_{j_\alpha} = z_{j_\beta}$, con $\alpha \neq \beta$. Tuttavia esiste almeno una permutazione degli indici $(1, \dots, \sigma)$ che al primo punto fa corrispondere il secondo punto. Per ogni permutazione siffatta si può ripetere il ragionamento del caso precedente.

Gli automorfismi considerati sono tutti analitici. Da quanto detto risulta dunque che

$$\omega : Z \longrightarrow Y$$

è un rivestimento di Galois, come volevasi dimostrare.

Se si suppone che X sia olomorficamente separato, lo stesso è vero per X^σ, e quindi anche per Z, che è un sottoinsieme analitico di X^σ.

Per completare la dimostrazione del lemma, resta ancora da costruire un rivestimento analitico

$$\varrho : Z \longrightarrow X,$$

tale che $\pi \circ \varrho = \omega$. Ad ogni punto $(z_1, \dots, z_\sigma) \in Z$ si faccia corrispondere il punto $z_1 \in X$. Si ottiene palesemente un rivestimento analitico, i cui punti di diramazione sono contenuti in $\pi^{-1}(S)$; dalla costruzione stessa risulta che $\pi \circ \varrho = \omega$. Ciò dimostra il lemma 5.

Ritorniamo al teorema 3; dobbiamo esaminare ancora il caso (c). X è irriducibile in ogni suo punto (proposizione 1); consideriamone la normalizzazione X^*, e sia $\pi^* : X^* \longrightarrow Y$ l'applicazione naturalmente indotta da π.

Per quanto provato in (b), si ha

$$(\pi^*)^{-1}(S(B)) = S(A^*).$$

D'altra parte, dal punto di vista topologico X^* coincide con X, e si ha $\pi^* = \pi$; inoltre il teorema 1 assicura che $S(A^*) = S(A)$; si conclude:

$$\pi^{-1}(S(B)) = S(A),$$

come volevasi dimostrare.

7. Nel n. 3 abbiamo impostato il problema: data un'applicazione olomorfa surgettiva $\pi : X \longrightarrow Y$ tra due spazi complessi, si confrontino le frontiere di Silov di due aperti relativamente compatti $B \subset Y, A = \pi^{-1}(B) \subset X$; perchè tale problema fosse ben posto, abbiamo imposto le due condizioni seguenti:

(a) L'applicazione π è propria;

(b) Gli spazi X ed Y sono olomorficamente separati.

Nei n. 5 e 6 abbiamo dato due teoremi, che rispondono al nostro problema in una situazione particolare, e precisamente nel caso che:

(c) Y è normale;

(d) L'applicazione π è un rivestimento analitico diramato. Da queste due condizioni segue:

(e) X ed Y sono irriducibili in ogni punto.

Infatti Y è normale, e quindi certo irriducibile in ogni suo punto; quanto ad X, l'affermazione è stata provata nella proposizione 1.

Proviamo ora che la tesi dei teoremi 2 e 3 sussiste anche se, in luogo di (c) e (d), è verificata solo l'ipotesi (e), purchè, ferma restando la condizione (a), si sostituisca la condizione (b) con la:

(b′) Gli spazi X ed Y sono di Stein.

TEOREMA 4. *Sia $\pi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione olomorfa propria dello spazio complesso X sullo spazio complesso Y. Supponiamo che X ed Y siano spazi di Stein, irriducibili in ogni punto. Allora, dato un aperto relativamente compatto $B \subset X$ e posto $A = \pi^{-1}(B)$, si ha:*

$$S(B) = \pi(S(A)); \qquad \pi^{-1}(S(B)) = S(A).$$

DIMOSTRAZIONE: L'applicazione $\pi : X \longrightarrow Y$ induce in modo naturale un'applicazione $\pi^* : X^* \longrightarrow Y^*$ tra le normalizzazioni di X e di Y. π^* è un rivestimento analitico diramato (cfr. [5], pag. 166). Quindi, tenuto conto dei teoremi 2 e 3, si ha, con notazioni evidenti:

$$S(B^*) = \pi^*(S(A^*)); \qquad (\pi^*)^{-1}(S(B^*)) = S(A^*).$$

Identificando dal punto di vista topologico X^* con X ed Y^* con Y, π^* coincide con π; pertanto, in virtù del teorema 1, si trae:

$$S(B) = \pi(S(A)); \qquad \pi^{-1}(S(B)) = S(A),$$

come volevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI : *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves.* Bull. Soc. math. France 91 (1963), p. 1-38.

[2] H. GRAUERT-R. REMMERT : *Komplexe Räume.* Math. Annalen **136** (1958), p. 245-318.

[3] L. LOOMIS : *An introduction to abstract harmonic analysis,* New York, 1953.

[4] R. REMMERT : *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume.* Math. Annalen **133** (1957) p. 328-370.

[5] R. REMMERT-K. STEIN : *Eigentliche holomorphe Abbildungen.* Math. Zeitschr. **73** (1960), p. 159-189.

[6] K. STEIN : *Analytische Zerlegungen komplexer Räume.* Math. Annalen **132** (1956) p. 63-93.