Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

C. Baiocchi

Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 3 (1963), p. 239-253

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_3_239_0>

OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI BOCHNER

di C. BAIOCCHI (Pavia) (*)

§ 1. — Introduzione.

Tra le generalizzazioni portate alla definizione di integrale di Lebesgue assai feconda è stata quella data da Bochner [1] (1) nel 1933, nella quale veniva estesa la definizione di integrale a una certa classe di funzioni a valori in uno spazio di Banach (la cosa è ripresa più dettagliatamente al § 5).

Anche la definizione di Bochner ha avuto molte generalizzazioni ed è stata ritrovata procedendo in altri modi; ma in genere ogni estensione del concetto di integrale portava una estensione della classe delle funzioni integrabili che, rispetto alla definizione di Bochner, dava di tale classe una caratterizzazione assai meno diretta.

Hille e Phillips [5] sfruttando una definizione di integrale data da Dunford [3,4] analoga a quella di Bochner, e una osservazione dello stesso Dunford, hanno generalizzato l'integrale definito in [3] e hanno chiamato quello così ottenuto integrale secondo Bochner; in effetti (cfr. § 5) tale integrale contiene l'integrale di Bochner come caso particolare e per di più le funzioni integrabili secondo [5] sono caratterizzabili direttamente in maniera analoga a quelle integrabili secondo Bochner.

In questa nota, che è uno sviluppo del lavoro svolto a Pisa col prof. E. De Giorgi nel 1962 per la mia Tesi di Laurea, è dato un procedimento diretto di generalizzazione dell'integrale di Bochner; e dalla assiomatica di [1] è stato tolto un assioma perchè (cfr. § 5) era conseguenza degli altri; grazie ad un teorema di esistenza e unicità si ha la coincidenza tra questo integrale e quello di [5]; cioè si è ritrovata la stessa generalizzazione con un procedimento più diretto in quanto gli assiomi di [1] sono l'estensione naturale delle prime proprietà classiche dell'integrale di Lebesgue.

Pervenuto alla Redazione il 26 Luglio 1963.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio nazionale delle ricerche.

(1) I numeri tra parentesi quadre rinviano alla bibliografia.

§ 2. — Funzioni di punto.

È dato uno spazio astratto S su cui è fissata una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi, famiglia numerabilmente additiva su S (2). È definita una funzione numerabilmente additiva (3) $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow R^{1*}$ (retta euclidea estesa) che è σ-finita (4) ed a valori non negativi; inoltre $\mathcal{F}$ è completa (5) rispetto a μ.

Sia B uno spazio di Banach; la norma di un elemento $p \in B$ sarà indicata con $\| p \|$.

Le funzioni su cui si lavora sono funzioni definite (quasi ovunque) in S ed a valori in B; tra queste chiamerò costanti a tratti su un insieme $F \in \mathcal{F}$ quelle funzioni tali che si può suddividere F in un numero finito di insiemi $F_i \in \mathcal{F}$ su ognuno dei quali la funzione sia costante; in simboli f è misurabile su F se $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$; $F_i \in \mathcal{F}$; $f / F_i = \alpha_i$.

Chiamerò poi funzioni misurabili funzioni che, a meno di un insieme di misura nulla, sono ottenibili come limite puntuale di funzioni costanti a tratti.

Si può dimostrare (cfr. p. es. [3], [4]) che si estendono a tali funzioni misurabili il teorema di Severini-Egoroff ed il criterio di Weyl-Riesz sulla convergenza in misura; e la dimostrazione può farsi in modo completamente simile a quello seguito nel caso reale (cfr, p. es. [2]: basta sostituire i moduli con i valori assoluti).

Sarà sfruttato nel seguito il fatto che una funzione limite quasi ovunque di funzioni misurabili è misurabile; poichè in [1] la cosa è supposta vera senz'altro e poichè non è immediatamente generalizzabile la dimostrazione usuale per le funzioni reali che sfrutta proprietà caratteristiche di R^1 ne do una dimostrazione. Premetto un lemma:

LEMMA 1.2. Una funzione tale che risulta misurabile la sua restrizione ad ogni insieme di una famiglia numerabile di insiemi disgiunti è misurabile.

---

(2) Cioè $S \in \mathcal{F}$; $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto a complementazione relativa e a unioni numerabili; ne segue immediatamente che $\emptyset \in \mathcal{F}$, ed $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto a intersezioni numerabili e massimo e minimo limite.

(3) Cioè se $\{F_i\}_{i=1,2,\ldots}$ è una famiglia finita o numerabile di insiemi disgiunti di $\mathcal{F}$, $\mu(\bigcup\limits_i F_i) = \Sigma_i \, \mu(F_i)$.

(4) Cioè S, se non ha misura finita, è unione numerabile di insiemi disgiunti (o equivalentemente non decrescenti) di misura finita.

(5) Cioè le condizioni $N \in \mathcal{F}$ e $\mu(N) = 0$ implicano $M \in \mathcal{F}$ per ogni $M \subseteq N$ (e ovviamente $\mu(M) = 0$).

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{F_i\}_{i=1,2,\dots}$ una famiglia numerabile di insiemi disgiunti; sia per ogni i $\{f_{i,k}\}_{k=1\,2\dots}$ una successione di funzioni costanti a tratti convergente in $A_i - N_i$ verso la funzione f; e sia $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) = 0$.

Posto

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{i,n}(x) & \text{per} \quad x \in A_i - N_i : \ i \leq n \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$$

è definita $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; $g(x) = f(x)$ per $x \in A_i - N_i$ per ogni i; g è ovviamente misurabile. c. d. d.

TEOR. 1.2. Una funzione che coincida quasi ovunque col limite di funzioni misurabili è misurabile.

DIMOSTRAZIONE: Essendo S σ-finito posso limitarmi, per il lemma 1.2 a dimostrare il teorema nel caso in cui $\mu(S) < +\infty$. Sia (tutti i limiti sono da intendersi quasi ovunque)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x); \qquad f_n(x) = \lim_{k\to\infty} f_{nk}(x)$$

dove $f_{n,k}(x)$ è una funzione costante a tratti per ogni n e ogni k.

Per il teorema di Severini-Egoroff posso trovare un insieme A_0 con $\mu(A_0) < \mu(S)\cdot 2^{-2}$ tale che in $S - A_0$ $f_n(x)$ converga uniformemente a $f(x)$. Analogamente troverò una successione di insiemi $\{A_n\}_{n=1,2..}$ con $\mu(A_n) < \mu(S)\cdot 2^{-2-n}$ tali che $\{f_{n,k}(x)\}_{k=1,2\dots}$ converga uniformemente a $f_n(x)$ in $S - A_n$. Posto $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ è $\mu(A) < \mu(S)/2$ e in $S_1 = S - A$ tutte le convergenze sono uniformi.

Fissata una successione di numeri reali, decrescente e tendente a zero, $\{\varepsilon_h\}_{h=1,2\dots}$, sia n_h il primo indice tale che $\| f_{n_h}(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon_h}{2}$ per ogni $x \in S_1$; fissato in tal modo n_h sia k_h il primo indice tale che per ogni $x \in S_1$ $\| f_{n_h, k_h}(x) - f_{n_h}(x) \| < \frac{\varepsilon_h}{2}$. Posto $\varphi_h(x) = f_{n_h, k_h}(x)$ è ovvio che la successione di costanti a tratti $\{\varphi_h(x)\}_{h=1,2\dots}$ converge uniformemente a $f(x)$ in S_1: fissato $\varepsilon > 0$ sia $\varepsilon_{\bar h} < \varepsilon$; si ha

$$\| f(x) - \varphi_{\bar h}(x) \| < \| f(x) - f_{n_{\bar h}}(x) \| + \| f_{n_{\bar h}}(x) - f_{n_{\bar h}, k_{\bar h}}(x) | < 2 \cdot \frac{\varepsilon_{\bar h}}{2} < \varepsilon$$

per ogni $x \in S_1$. Ne segue che è misurabile la restrizione di $f(x)$ a S_1. Sostituendo al posto di S l'insieme $S - S_1$ e ripetendo tutto il ragionamento fin qui svolto otterremo che è misurabile la restrizione di $f(x)$ a un insieme S_2 tale che $\mu(S_2) > \mu(S - S_1)\cdot 2^{-1} > \mu(S)\cdot 2^{-2}$; procedendo indefinitamente in questo modo si ottiene la misurabilità della restrizione di $f(x)$ a una successione di insiemi disgiunti la cui unione copre S a meno di un insieme di misura nulla. Dal lemma 1.2 segue il teorema.

Molto impiegato sarà il seguente risultato:

TEOR. 2.2. Sia $f: S \to B$ misurabile; esiste una successione $\{f_n(x)\}_{n=1,2\ldots}$ di costanti a tratti convergenti quasi ovunque a $f(x)$ e tale che $\{\|f_n(x)\|\}_{n=1,2\ldots}$ è non decrescente per quasi ogni $x \in S$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{g_n(x)\}_{n=1,2\ldots}$ una successione di costanti a tratti che converge quasi ovunque a $f(x)$. Sia $\{h_n(x)\}_{n=1,2\ldots}$ una successione quasi ovunque non decrescente di costanti a tratti che convergono quasi ovunque a $\|f(x)\|$. (Per l'esistenza di $\{h_n(x)\}$ cfr. p. es. [2] pag. 294; qui le costanti a tratti sono chiamate funzioni semplici). Pongo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se esiste un indice } m \geq n \text{ tale che } g_m(x) = 0 \\ \dfrac{h_n(x)}{\|g_n(x)\|} \cdot g_n(x) \quad \text{se} \quad g_m(x) \neq 0 \quad \text{per ogni} \quad m \geq n. \end{cases}$$

Ovviamente se $f_n(x) = 0$ è $f_m(x) = 0$ per ogni $m \leq n$ e in quasi ogni altro punto $\|f_n(x)\| \leq h_n(x) \leq h_{n+p}(x) = \|f_{n+p}(x)\|$; inoltre per quasi ogni x tale che $f(x) = 0$ è $h_n(x) = 0$ cioè $f_n(x) = 0$; mentre per quasi ogni x tale che $f(x) \neq 0$ è $g_n(x) \neq 0$ da un certo indice in poi; in ogni caso perciò è quasi ovunque: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; $\|f_n(x)\| \leq \|f_{n+1}(x)\|$.

§ 3. — Funzioni d'insieme.

In questo paragrafo si lavora su funzioni di insieme definite in $\mathcal{F}$ ed a valori in B; ad esse si estendono molte delle definizioni e delle proprietà delle funzioni reali; per esempio è immediata la generalizzazione della definizione di funzione numerabilmente additiva; e solo di queste funzioni parlerò in questo paragrafo.

DEF. 1.3. Data una funzione $\varphi: \mathcal{F} \to B$ si dice variazione di φ sull'insieme $A \in \mathcal{F}$ e si indica con $V_\varphi(A)$ il numero: $V_\varphi(A) = \sup\{\Sigma_i \|\varphi(A_i)\|\}$ dove il superiore è calcolato al variare di $\{A_i\}_{i=1,2\ldots n}$ sulla classe di tutte le decomposizioni di A in un numero finito di insiemi di $\mathcal{F}$ due a due disgiunti. Se $V_\varphi(A) < +\infty$ φ si dice a variazione limitata su A.

TEOR. 1.3. $V_\varphi: \mathcal{F} \to R^{1*}$ (retta euclidea estesa) è numerabilmente additiva.

DIMOSTRAZIONE: Sia $A \cap B = \emptyset$; $\{C_i\}_{i=1,2\dots n}$ sia una decomposizione in insiemi disgiunti di $\mathcal{F}$ di $A \cup B$: si ha:

$$\Sigma_i \, \| \varphi(C_i) \| \leq \Sigma_i \, \| \varphi(C_i \cap A) \| + \Sigma_i \, \| \varphi(C_i \cap B) \| \leq V_\varphi(A) + V_\varphi(B).$$

Prendendo il superiore del primo membro al variare di $\{C_i\}$ si ha $V_\varphi(A \cup B) \leq V_\varphi(A) + V_\varphi(B)$.

Poichè V_φ è ovviamente non decrescente basta, per ottenere la disuguaglianza inversa, limitarsi al caso in cui $V_\varphi(A) + V_\varphi(B) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ posso trovare una decomposizione di A in insiemi disgiunti $\{A_i\}_{i=1,2\dots h}$ e una di B, $\{B_j\}_{j=1,2\dots h}$ tali che $V_\varphi(A) \leq \sum_{i=1}^{h} \| \varphi(A_i) \| + \varepsilon$; $V_\varphi(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \| \varphi(B_j) \| + \varepsilon$; $\{\{A_i\}_{i=1,2\dots h}; \{B_j\}_{j=1,2\dots k}\}$ è una decomposizione di $A \cup B$ in insiemi disgiunti; ne segue

$$V_\varphi(A) + V_\varphi(B) \leq \Sigma_i \, \| \varphi(A_i) \| + \Sigma_j \, \| \varphi(B_j) \| + \varepsilon \leq V_\varphi(A \cup B) + \varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε si ha l'additività finita.

In generale se $\{A_n\}_{n=1,2..}$ è una successione di insiemi di $\mathcal{F}$ due a due disgiunti si ha

$$V_\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq V_\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} V_\varphi(A_n)$$

per ogni k; al limite

$$V_\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} V_\varphi(A_n).$$

Viceversa se $\{A^i\}_{i=1,2..N}$ è una decomposizione di $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in insiemi disgiunti si ha:

$$\sum_{i=1}^{N} \| \varphi(A^i) \| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi(A^i \cap A_n) \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_\varphi(A_n)$$

Prendendo il superiore del primo membro si ha la relazione cercata che dimostra il teorema.

TEOR. 2.3. Una funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ a variazione limitata su un insieme $A \in \mathcal{F}$ è continua (1) sulla famiglia $\mathcal{F} \cap A = \{F \in \mathcal{F}; F \subseteq A\}$.

DIMOSTRAZIONE : Sia $\{F_n\}_{n=1, 2..}$ una successione di elementi di $\mathcal{F} \cap A$ con $\lim\limits_{n \to \infty} F_n = F$. Le successioni $\{F_n - F\}_{n=1, 2 ...}$ e $\{F - F_n\}_{n=1, 2..}$ hanno entrambe limite vuoto e poichè il teorema cercato è noto per funzioni a valori reali si ha :

$$\lim_{n \to \infty} V_\varphi (F_n - F) = \lim_{n \to \infty} V_\varphi (F - F_n) = V_\varphi (\emptyset) = 0$$

Dalla relazione $\varphi (A_1 - A_2) - \varphi (A_2 - A_1) = \varphi (A_1) - \varphi (A_2)$ si ricava :

$$\| \varphi (F_n) - \varphi (F) \| \leq \| \varphi (F_n - F) \| +$$

$$+ \| \varphi (F - F_n) \| \leq V_\varphi (F_n - F) + V_\varphi (F - F_n)$$

cioè

$$\| \varphi (F) - \varphi (F_n) \|$$

è infinitesimo per n tendente all'infinito, ed è la relazione voluta.

DEF. 2.3. Una funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ si dice assolutamente continua rispetto a una misura $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow R^{1*}$ se la condizione $\mu (A) = 0$ implica $\varphi (A) = 0$.

Si estende facilmente un teorema noto per le funzioni a valori reali ; e cioè

TEOR. 3.3. Una funzione $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow B$ è assolutamente continua rispetto a una misura $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow R^{1*}$ se e solo se fissato $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un $\eta > 0$ e un insieme $\bar{S}$ di misura finita tale che $\mu (A \cap \bar{S}) < \eta$ implichi $\| \varphi (A) \| < \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE : Sia φ assolutamente continua ; poichè $\| \varphi (A) \| \leq V_\varphi (A)$ e poichè per V_φ il teorema è noto basta far vedere che V_φ è assolutamente continua ; infatti se $\mu (A) = 0$ e $F \in \mathcal{F} \cap A$ è $\mu (F) = 0$ quindi $\varphi (F) = 0$ cioè $V_\varphi (A) = 0$. Viceversa se è verificata la condizione enunciata e se $\mu (A) = 0$ è $\| \varphi (A) \| < \varepsilon$ per ogni ε cioè $\varphi (A) = 0$.

DEF. 3.3. Una famiglia $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di funzioni d'insieme si dice equiassolutamente continua rispetto a una misura μ se, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile

---

(1) Una funzione $\varphi : \mathcal{F} \to B$ si dice continua in $\mathcal{F} \cap A$ se per ogni successione $\{F_n\}_{n=1, 2..}$ di elementi di $\mathcal{F} \cap A$ con $\lim\limits_{n \to \infty} F_n = F$ si ha : $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi (F_n) = \varphi (F)$.

trovare un $\eta > 0$ e un insieme $\bar{S} \in \mathcal{F}$ di misura finita tali che la condizione: $\mu(A \cap \bar{S}) < \eta$ implichi $\| \varphi_\lambda(A) \| < \varepsilon$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $A \in \mathcal{F}$.

§ 4. — Definizione di integrale; sue proprietà.

DEF. 1.4. Una funzione $f : S \longrightarrow B$ misurabile si dice sommabile rispetto alla misura $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow R^{1*}$ sull'insieme $A \in \mathcal{F}$ se $\int_A \| f \| \, d\mu < +\infty$.

Ovviamente una funzione sommabile su A è sommabile su ogni insieme della famiglia $\mathcal{F} \cap A$.

DEF. 2.4. Sia $\mathfrak{F}$ la famiglia delle funzioni sommabili sull'insieme A. Sia data una applicazione $I : \mathfrak{F} \times \mathcal{F} \cap A \longrightarrow B$ che gode delle seguenti proprietà:

(1) $$\| I(f, F) \| \leq \int_F \| f \| \, d\mu ;$$

(2) se $f(x) = \alpha$ per ogni $x \in F$, $I(f, F) = \alpha \cdot \mu(F)$

(3) $I(c_1 f_1 + c_2 f_2, F) = c_1 I(f_1, F) + c_2 I(f_2, F)$

(4) se $\{A_n\}_{n=1,2\,\ldots}$ è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti di $\mathcal{F} \cap A$, $I(f, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f, A_n)$.

In queste ipotesi diremo $I(f, F)$ integrale della funzione f esteso all'insieme F rispetto alla misura μ.

LEMMA 1.4. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia delle funzioni costanti a tratti sommabili su A. Esiste ed è unica l'applicazione $I : \mathcal{C} \times \mathcal{F} \cap A \longrightarrow B$ soddisfacente le (1)-(4).

DIMOSTRAZIONE: sia $f \in \mathcal{C}$; $f/A_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Si dovrà avere $I(f, F) = \sum_{i=1}^{n} I(f, F \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(F \cap A_i)$ ed è banale verificare per tale applicazione le (1)-(4).

LEMMA 2.4. Sia f sommabile su A e sia $\{f_n\}_{n=1,2\,\ldots}$ una successione di costanti a tratti non decrescenti in norma e convergenti quasi ovunque ad f. Esiste il $\lim_{n \to \infty} I(f_n, F)$ per ogni $F \in \mathcal{F} \cap A$.

Dimostrazione: $\| I(f_n, F) - I(f_m, F) \| = \| I(f_n - f_m, F) \| \leq$ $\leq \int_F \| f_n - f_m \| \, d\mu \leq \int_A \| f_n - f_m \| \, d\mu = \varepsilon(n, m)$ (cioè infinitesimo al tendere di m ed n all'infinito) per il teorema di Lebesgue sul passaggio al limite sotto il segno di integrale (applicabile perchè quasi ovunque $\| f_n(x) - f_m(x) \| \leq 2 \| f(x) \|$.

Allora $\{ I(f_n, F) \}_{n=1,2\ldots}$ è una successione di Cauchy e il lemma è dimostrato.

Osservazione Iª. La non decrescenza in norma della $\{ f_n(x) \}$ non è essenziale e può essere sostituita da $\| f_n(x) \| \leq S(x)$ con $\int_A S(x) \, d\mu + \infty$.

Osservazione IIª. Il limite trovato è indipendente dalla particolare successione scelta: se $\| f_n(x) \| \leq S(x)$ e $\| g_n(x) \| \leq S'(x)$ quasi ovunque con $S(x)$ e $S'(x)$ sommabili su A, la successione $\{ h_n(x) \}_{n=1,2\ldots}$ che ha alternativamente per termini $g_n(x)$ e $f_n(x)$ dà una successione $\{ I(h_n, F) \}_{n=1,2\ldots}$ che è di Cauchy in quanto $\| h_n(x) \| \leq S(x) + S'(x)$ quasi ovunque; ne segue l'uguaglianza dei limiti $\lim\limits_{n \to \infty} I(f_n, F)$ e $\lim\limits_{n \to \infty} I(g_n, F)$ in quanto entrambi uguali al limite $\lim\limits_{n \to \infty} I(h_n, F)$. Si noti anche che l'ipotesi che le funzioni $f_n(x)$ fossero costanti a tratti è servita solo in quanto per altre funzioni non conosciamo ancora il teorema di esistenza e unicità; ma potrà essere abolita non appena si sia in possesso di tale teorema.

Teor. 1.4. Esiste una ed una sola applicazione $I : \mathfrak{F} \times \mathcal{F} \cap A \to B$ che goda delle (1)..(4).

Dimostrazione: posto $\int_F g d\mu = I(g, F)$ per le funzioni g costanti a tratti e $\int_F f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} I(f_n, F)$ in generale (con le notazioni del lemma 2.4.), verifico che $\int_F f \, d\mu$ gode delle proprietà (1)...(4) per quanto riguarda le f misurabili (per le f costanti a tratti è già stata data come ovvia nel lemma 1.4).

La (1) segue subito dalla corrispondente per le costanti a tratti con un passaggio al limite; analogamente la (3) dopo aver osservato che, se $f_{n,1} \to f_1$ e $f_{n,2} \to f_2$ con $\{ \| f_{n,1} \| \}$ e $\{ \| f_{n,2} \| \}$ non crescenti $f_{n,1} + f_{n,2} \to f_1 + f_2$ con $\| f_{n,1} + f_{n,2} \| \leq \| f_1 \| + \| f_2 \|$; tenendo conto della osservazione Iª al lemma 2.4 si può passare al limite.

La (2) non ha senso per le funzioni non costanti a tratti; resta solo da verificare la (4) ed anche essa è ovvia nel caso finito per le costanti a tratti e con passaggio al limite per le funzioni misurabili. In generale se $\{F_n\}_{n=1,2\ldots}$ è una successione di insiemi di $\mathcal{F} \cap A$ due a due disgiunti, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k\geq n} F_k = \emptyset$ e per una nota proprietà dell'integrale di Lebesgue per ogni f con $\|f\|$ sommabile su A è $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\bigcup\limits_{k\geq n} F_k} \|f\|\, d\mu = 0$.

Ne segue

$$\left\| \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k} f\, d\mu - \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k} f\, d\mu \right\| = \left\| \int\limits_{\bigcup\limits_{k>n} F_k} f\, d\mu \right\| \leq \int\limits_{\bigcup\limits_{k>n} F_k} \|f\|\, d\mu \to 0$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{F_k} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{F_n} f\, d\mu = \int\limits_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n} f\, d\mu.$$

Per dimostrare l'unicità della applicazione trovata sia $I(f, F)$ una applicazione che verifica le (1) ... (4). Per il lemma 1.4 se $f \in \mathcal{C}$ $I(f, F) = \int\limits_F f\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F} \cap A$.

In generale se $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ con $f_n(x) \in \mathcal{C}$ e $\{\|f_n(x)\|\}_{n=1,2\ldots}$ non decrescente si avrà, per le (1) e (3),

$$\left\| I(f, F) - \int\limits_F f\, d\mu \right\| = \lim_{n\to\infty} \| I(f, F) - I(f_n, F) \| = \lim_{n\to\infty} \| I(f - f_n, F) \| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_A \| f_n - f \|\, d\mu = 0$$

il che prova il teorema.

D'ora in poi adoprerò per l'integrale solo la notazione $\int\limits_F f\, d\mu$ tralasciando la notazione $I(f, F)$.

È immediatamente generalizzabile a tale integrale (sfruttando la (1)) la proprietà enunciata più sopra per l'integrale di funzioni reali: se $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \emptyset$

si ha

$$\left\| \int_{F_n} f \, d\mu \right\| \leq \int_{F_n} \| f \| \, d\mu \to 0 \qquad \text{cioè} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f \, d\mu = 0.$$

TEOR. 2.4. Sia f sommabile su A; $\varphi(F) = \int_F f \, d\mu$. $\varphi(F)$ è a variazione limitata su A e precisamente $V_\varphi(F) = \int_F \| f \| \, d\mu$.

DIMOSTRAZIONE. Per la (1), per ogni decomposizione di F in insiemi disgiunti $\{F_i\}_{i=1,2\dots n}$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{F_i} f \, d\mu \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \| f \| \, d\mu = \int_F \| f \| \, d\mu ;$$

prendendo il superiore del primo membro al variare di $\{F_i\}_{i=1,2\dots n}$ si ha:

$$V_\varphi(F) \leq \int_F \| f \| \, d\mu.$$

La relazione inversa è ovvia per le costanti a tratti: se $f/F_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ è:

$$V_\varphi(F) \geq \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{F_i \cap F} \alpha_i \, d\mu \right\| = \sum_{i=1}^{n} \| \alpha_i \| \, \mu(F_i \cap F) = \int_F \| f \| \, d\mu.$$

In generale sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ con $\{f_n(x)\}_{n=1,2\dots}$ funzioni costanti a tratti ed equilimitate in norma da una funzione sommabile. Sia

$$V_n = V_{\int f_n d\mu} = \int \| f_n \| \, d\mu.$$

Avrò:

$$\left\| \int_{F_i} f \, d\mu \right\| \geq \left\| \int_{F_i} f_n \, d\mu \right\| - \int_{F_i} \| f_n - f \| \, d\mu.$$

Sommando membro a membro le precedenti relazioni per ogni i rispetto a una decomposizione di F in insiemi disgiunti si ha:

$$V_\varphi(F) \geq \sum_i \left\| \int_{F_i} f \, d\mu \right\| \geq \sum_i \left\| \int f_n \, d\mu \right\| - \int_F \| f_n - f \| \, d\mu$$

e prendendo il superiore del II^0 membro al variare di $\{F_i\}$

$$V_\varphi(F) \geq V_n(F) - \int_F \| f_n - f \| \, d\mu = \int_F \| f_n \| \, d\mu - \int_F \| f_n - f \| \, d\mu .$$

Passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ si ha la relazione cercata.

TEOR. 3.4. (Generalizzazione del teorema di Lebesgue). Data una successione di funzioni misurabili $\{f_n(x)\}_{n=1,2\ldots}$ convergente quasi ovunque verso la funzione $f(x)$, se quasi ovunque $\| f_n(x) \| \leq S(x)$ con

$$\int_A S(x)\, d\mu < +\infty \quad \text{è} \quad \int_F f\, d\mu = \lim \int_F f_n\, d\mu \quad \text{per ogni} \quad F \in \mathcal{F} \cap A .$$

DIMOSTRAZIONE: Già vista alla fine della osservazione II^a al lemma 2.4.

TEOR. 4.4. (Generalizzazione del teorema di Vitali).

Sia $\{f(x)\}_{n=1,2\ldots}$ una successione di funzioni sommabili convergenti quasi ovunque verso una funzione $f(x)$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\int_A \| f(x) \| \, d\mu + \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \int_A \| f_n - f \| \, d\mu = 0$ è che le funzioni di insieme $\left\{ \int \| f_n \| \, d\mu \right\}_{n=1,2\ldots}$ siano equiassolutamente continue.

DIMOSTRAZIONE. Se $\int_A \| f(x) \| \, d\mu < +\infty$ e se $\lim_{n\to\infty} \int_A \| f_n - f \| \, d\mu = 0$ è $\left| \| f_n \| - \| f \| \right| \leq \| f_n - f \|$ quindi $\lim_{n\to\infty} \int_A \left| \| f_n \| - \| f \| \right| d\mu = 0$; per il teorema di Vitali per funzioni reali la successione di funzioni di insieme $\left\{ \int \| f_n \| \, d\mu \right\}_{n=1,2\ldots}$ è formata da funzioni equiassolutamente continue.

Viceversa se le funzioni $\int_A \| f_n \| \, d\mu$ sono equiassolutamente continue per il teorema di Vitali è $\int_A \| f_n \| \, d\mu < +\infty$; fissato $\varepsilon > 0$ sia S_ε un insieme di $\mathcal{F} \cap A$ tale che $\int_{A-S_\varepsilon} \| f_n \| \, d\mu < \varepsilon/5$; $\int_{A-S_\varepsilon} \| f \| \, d\mu < \varepsilon/5$: e con $\mu(S_\varepsilon) < +\infty$[1].

---

[1] Cosa possibile perchè S è σ-finito e $\left\{ \int \| f_n \| \, d\mu \right\}$ sono equiassolutamente continue.

Fissato così S_ε sia I_σ un insieme tale che $\int\limits_{I_\sigma} \| f_n \| \, d\mu < \varepsilon/5$; $\int\limits_{I_\sigma} \| f \| \, d\mu < \varepsilon/5$; e su $S_\varepsilon - I_\sigma$ la convergenza di $f_n(x)$ a $f(x)$ sia uniforme. Sia infine $\overline{n}$ tale che per $n > \overline{n}$ e $x \in S_\varepsilon - I_\sigma$ sia

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon/_{5[\mu(S_\varepsilon - I_\sigma)+1]} \, .$$

Si ha allora

$$\int\limits_A \| f_n - f \| \, d\mu \leq \int\limits_{S_\varepsilon} \| f_n - f \| \, d\mu + \int\limits_{A-S_\varepsilon} \| f_n \| \, d\mu + \int\limits_{A-S_\varepsilon} \| f \| \, d\mu \leq$$

$$\leq \int\limits_{S_\varepsilon - I_\sigma} \| f_n - f \| \, d\mu + \int\limits_{I_\sigma} \| f_n \| \, d\mu + \int\limits_{I_\sigma} \| f \| \, d\mu + \frac{2\varepsilon}{5} \leq \frac{5}{5} \, \varepsilon = \varepsilon$$

e il teorema è dimostrato. Si noti che anche qui, come nel caso reale, la condizione $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_A \| f_n - f \| \, d\mu = 0$ esprime che il passaggio al limite:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_F f_n \, d\mu = \int\limits_F f \, d\mu$$

è uniforme al variare di F in $\mathcal{F} \cap A$.

§ 5. — Confronti con le definizioni di Bochner [1], di Dunford [3, 4] e di Hille - Phillips [5].

La definizione di Bochner è data in modo analogo alla def. 2.4 : le funzioni prese in considerazione sono definite in spazi euclidei con la struttura di spazio mensurale rispetto alla misura di Lebesgue, le definizioni di funzione costante a tratti, funzione misurabile e funzione sommabile sono identiche a quelle date nei paragrafi 2 e 4 ; e la definizione di integrale è data analogamente alla def. 2.4 con gli assiomi (1), (2), (3), (4), e in più il seguente assioma :

(5) Se $\{ f_m(x) \}$ è una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque a $f(x)$; se quasi ovunque è $\| f_m(x) \| \leq G(x)$ con $\int\limits_{R^n} G(x) \, d\mu < \infty$ allora $\lim\limits_{m \to \infty} \int\limits_F f_m \, d\mu = \int\limits_F f \, d\mu$ per ogni insieme F misurabile secondo Lebesgue.

Per i teoremi 1, 4 e 2, 4 tale definizione coincide con la definizione 2. 4 in cui si sostituisca R^n al posto di S e la struttura mensurale di R^n sia quella definita dalla misura di Lebesgue; cioè la def. 2. 4 è una estensione dell'integrale di Bochner e in questo l'assioma (5) è sovrabbondante e può essere eliminato.

Dunford [3, 4] diede la seguente definizione di integrale.

Sia $\mathcal{U}$ la famiglia delle funzioni definite in R^n, a valori in uno spazio di Banach B, uniformemente continue e di norma integrabile.

Per $f \in \mathcal{U}$ si definisce l'integrale (a valori in B) e si indica con $\int f \, d\mu$ come limite delle somme di Mengoli-Cauchy relative a f ed alla misura di Lebesgue, limite la cui esistenza è una banale conseguenza della ipotesi della continuità uniforme di f e della integrabilità di $\| f(x) \|$. La quantità $||| f ||| = \int_{R^n} \| f(x) \| \, d\mu$ è una norma su $\mathcal{U}$ rispetto a cui $\mathcal{U}$ non è completo; detto $\mathcal{I}$ il completamento astratto di $\mathcal{U}$ si vede che $\mathcal{I}$ è identificabile a una famiglia di classi di equivalenza di funzioni, rispetto alla relazione $f - g = 0$ se $f(x) - g(x) = 0$ quasi ovunque.

Tali funzioni si diranno integrabili.

Per $f \in \mathcal{U}$ si ha $\| \int f \, d\mu \| \leq ||| f |||$ cioè la trasformazione lineare $\int : \mathcal{U} \rightarrow B$ è limitata e può essere prolungata a tutto $\mathcal{I}$; l'elemento di B $\int f \, d\mu$ si dirà integrale della funzione integrabile f.

Con tali definizioni si verifica facilmente che se $\{f_m\}$ «converge» a f nel senso che

$$f_m(x) \rightarrow f(x) \ q \cdot \text{ov.}; \qquad \int_{R^n} \| f_m - f \| \, d\mu \rightarrow 0 \tag{1}$$

allora $\lim_{m \to \infty} \int f_m(x) \, d\mu = \int f(x) \, d\mu$.

Dunford stesso osservò che è densa in $\mathcal{I}$ la classe $\mathcal{N}$ definita da: $\mathcal{N} = \left\{ f \in \mathcal{I} / \int \| f \| \, d\mu < +\infty ; \ f \text{ è misurabile secondo Bochner}; \ f \text{ assume al più una infinità numerabile di valori} \right\}$

e che se $f \in \mathcal{N}$ cioè se $f/F_i = \alpha_i \, (i = 1, 2, \dots, m \dots)$ si ha $\int_F f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \mu(F \cap F_i)$

(la serie ha senso in quanto converge assolutamente essendo $\int_{R^n} \| f \| \, d\mu < +\infty$).

In altre parole la classe $\mathcal{N}$ poteva essere sostituita alla classe $\mathcal{U}$ nella definizione di integrale. Dunford si fermò qui e la sua idea è stata ripresa da Hille-Phillips [5] che, osservando che la definizione di $\mathcal{N}$ non richiede una topologia sullo spazio di definizione di f ma solo una struttura mensurale, hanno esteso la definizione di [3] in questo modo:

Sia B uno spazio di Banach; $(S, \mathcal{F}, \mu)$ sia uno spazio mensurale σ-finito; sia $\mathcal{N}$ la classe: $\{f: S \to B; f$ è misurabile nel senso della definizione del § 2; $\int_S \|f\|\, d\mu < +\infty$; f assume al più una infinità numerabile di valori$\}$.

Per $f \in \mathcal{N}, f/F_i = \alpha_i$ si ponga $\int_F f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, \mu(F \cap F_i)$.

Sia $\mathcal{I}$ la classe delle funzioni $f: S \to B$ tali che esiste una successione $\{f_m\}$ di elementi di $\mathcal{N}$ per cui $\lim_{m\to\infty} \int_S \|f_m - f\|\, d\mu = 0$ (f_m si dirà successione approssimante di f).

Le funzioni di $\mathcal{I}$ si dicono funzioni integrabili.

Si verifica facilmente che, se $f \in \mathcal{I}$, esiste ed è indipendente dalla particolare successione approssimante il limite $\lim_{m\to\infty} \int_F f_m\, d\mu$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

Tale limite si indica con $\int_F f\, d\mu$ e si dice integrale della funzione integrabile f esteso all'insieme F.

Con tali definizioni Hille-Phillips [5, pagg. 79-82] hanno dimostrato che:

(a) se $f \in \mathcal{I}$ allora $\left\| \int_F f\, d\mu \right\| \leq |||f||| = \int_S \|f\|\, d\mu < +\infty$

(b) se $f \in \mathcal{I}$ allora f è misurabile nel senso del § 2.

(c) $|||f|||$ è una seminorma su $\mathcal{N}$; lo spazio normato associato è completo

(d) l'applicazione $f \to \int f\, d\mu$ è lineare limitata

(e) se $\{F_m\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{F}$ due a due disgiunti si ha $\int_{\cup F_n} f\, d\mu = \Sigma \int_{F_n} f\, d\mu$.

Da (a), (b), (c) prendendo per S lo spazio euclideo R^n con la struttura mensurale definita dalla misura di Lebesgue si ritrova l'integrale di Dunford; cioè effettivamente l'integrale di [5] è una estensione di quello di [3].

Da (a), (b), (d), (e) e dal teor. 1.4 segue l'equivalenza tra l'integrale di [5] e quello della def. 2.4; cioè effettivamente l'integrale di Hille-Phillips è una estensione di quello di Bochner.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCHNER S. « *Integration von Funktionen deren werte die Elemente eines Vectorraumes sind* » Fund. Math. vol. XX (anno 1933) pag. 262-276.

[2] CAFIERO F. « *Misura e integrazione* » Monografie matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[3] DUNFORD N. « *Integration in general analysis* » Trans. Amer. Math. Soc., vol. 37 (1935) pagg. 441-453.

[4] DUNFORD N. « *Uniformity in linear spaces* » Trans. Amer. Math. Soc. vol. 44 (1938) pagg. 305-356.

[5] HILLE E. PHILLIPS R. S. « *Functional analysis and Semi-groups* » Am. Math. Soc. 1957.