Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Vinicio Villani

Sulle varie nozioni di dimensione per un insieme analitico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 1-2 (1963), p. 141-173

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_1-2_141_0>

SULLE VARIE NOZIONI DI DIMENSIONE PER UN INSIEME ANALITICO (*)

di VINICIO VILLANI (Pisa)

INTRODUZIONE. Nel presente lavoro si esaminano varie possibili definizioni di dimensione di un insieme analitico (anche con elementi nilpotenti) e se ne studiano le proprietà ed i mutui legami. Il punto di partenza è dato dalla osservazione che la « dimensione complessa » n di una varietà analitica complessa (connessa) M^n può essere definita sostanzialmente in quattro modi:

1) Mediante *carte locali*: n è il minimo intero tale che localmente M possa essere realizzata come sottovarietà (aperta) di $\mathbf{C}^n$.

2) In linguaggio *algebrico*: n è la dimensione di Krull dell'anello dei germi di funzioni olomorfe in ciascun punto di M.

3) In linguaggio *omologico*: n è la dimensione omologica dell'anello dei germi di funzioni olomorfe in ciascun punto di M (altri autori adoperano il termine « codimensione omologica »).

4) In linguaggio *topologico*: denotando con dim la dimensione topologica (in un punto comunque fissato di M): $n = \frac{\dim M^n}{\dim \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \dim M^n$.

Si consideri ora un insieme analitico X nel senso usuale definito sul corpo complesso. X si decompone univocamente in una sottovarietà complessa M ovunque densa in X (varietà dei punti regolari) ed in un sottoinsieme analitico non denso S (dei punti singolari). Dei quattro numeri sopra introdotti, gli ultimi tre hanno senso anche nei punti $p \in S$ (ma ivi non è detto che siano tra loro uguali). Il primo numero si può generalizzare in due modi distinti:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 35 del Comitato per la Matematica del C. N. R. nell'anno accademico 1961-62.

a) Si considera il minimo intero τ tale che in un conveniente intorno del punto p l'insieme analitico X possa essere realizzato come sottoinsieme analitico di $\mathbf{C}^{\tau}$.

b) Si decompone l'insieme analitico X in componenti irriducibili nel punto p, e si considera il minimo intero d, tale che in un conveniente intorno del punto p ciascuna componente irriducibile di X sia un rivestimento analitico di un aperto di $\mathbf{C}^{d'}$, con $d' \leq d$.

Ciascuno dei cinque numeri così introdotti rappresenta dunque un particolare aspetto della dimensione di un insieme analitico in un suo punto. Nel presente lavoro si estendono le definizioni di questi cinque numeri ad insiemi analitici (anche con elementi nilpotenti) definiti su un arbitrario corpo valutato completo K (0), e se ne studiano i legami. Per ottenere una maggiore semplicità e generalità di esposizione, i numeri τ e d vengono introdotti in modo algebrico, e successivamente se ne dimostrano le proprietà che li pongono in relazione con gli insiemi analitici, nel modo accennato in a) e b) (cfr. le proposizioni 3 e 6).

Diamo ora un elenco dei principali risultati che si dimostrano: Sia dunque $(X, \mathscr{A}_X)$ un insieme analitico (con elementi nilpotenti) su un corpo valutato completo K; $\mathscr{A}_X$ è il fascio dei germi di «funzioni analitiche» di X. Con A_p denoteremo la spiga di $\mathscr{A}_X$ sopra $p \in X$. Ogni spiga A_p è un anello locale noetheriano, il cui ideale massimale si denoterà con $\mathfrak{M}_p$. In ciascun punto $p \in X$ si considerano i seguenti numeri interi:

$\delta(p) =$ dimensione di Krull di A_p;

$d(p) =$ numero dei parametri di A_p;

$dih\, A_p =$ dimensione omologica di A_p;

$\tau(p) = \dim_K(\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2)$;

$t(p) =$ dimensione topologica di X nel punto p.

Sia M l'insieme dei punti $p \in X$ nei quali si ha $\delta(p) = \tau(p)$ (i punti di M sono quelli nei quali la spiga A_p è un anello regolare; nei punti $q \in X - M$ si ha $\delta(q) < \tau(q)$). Proveremo i teoremi seguenti:

I) dih $A_p \leq \delta(p)$ in ogni punto $p \in X$; inoltre dih $A_p = \delta(p)$ nei punti $p \in M$ (teorema 1).

II) $\delta(p) = d(p)$ in ogni punto $p \in X$ (teorema 2).

I ragionamenti che intervengono in questi primi due teoremi sono puramente algebrici, e non fanno uso delle proprietà «locali» degli insiemi analitici (00).

---

(0) Per le definizioni precise, cfr. il § 4.

(00) Il teorema 1 si trova già dimostrato ad es. in [8] e in [13]; il teorema 2 è dimostrato ad es. in [1], [16], [14].

III) per p variabile in X, le funzioni $\delta(p)$ e $\tau(p)$ sono semicontinue superiormente; la funzione $\operatorname{dih} A_p$ è semicontinua inferiormente (lemmi 7, 9, 11).

IV) Se K ha caratteristica zero, e se X è un insieme analitico ridotto, l'insieme M dei punti regolari è un aperto ovunque denso in X; in queste ipotesi, tenuto conto di III), si ha in ogni punto $p \in X$:

$$\operatorname{dih} A_p \leq \min \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \operatorname{dih} A_x = \min \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \delta(x) \leq \delta(p);$$

quindi si è ottenuta una disuguaglianza più precisa della disuguaglianza I) (teorema 3).

V) Se in particolare $K = \mathbf{C}$, e se X è un insieme analitico ridotto, si ha in ogni punto $p \in X$:

$$\delta(p) = \max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau(x)$$

e quindi anche

$$\delta(p) = \max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \delta(x)$$

(teorema 4). Questo risultato esprime il fatto che tra tutte le funzioni semicontinue superiormente, le quali nei punti $p \in M$ coincidono con $\delta(p)$, la funzione $\delta(x)$ è la più piccola possibile.

VI) Se X è sempre un insieme analitico ridotto, definito sul corpo $\mathbf{C}$, e se p è un qualunque punto di X, i tre numeri $\delta(p)$, $d(p)$, $\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau(x)$, che in virtù di II) e V) sono tra loro uguali, rappresentano metà della dimensione topologica di X nel punto p:

$$\delta(p) = d(p) = \max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau(x) = \frac{1}{2} t(p)$$

(teorema 5). (000)

Per ottenere una trattazione più sistematica, senza appesantire la lettura con troppi rinvii, ho ritenuto utile dimostrare brevemente anche qualche teorema già noto, pur rimandando per maggiori dettagli ai lavori originali; altri risultati, noti per insiemi analitici ridotti, sul corpo $\mathbf{C}$, sono quì dimostrati sotto ipotesi meno restrittive (cfr. in particolare tutto il § 4).

(000) Per questo teorema cfr. ad es. [11] e [9].

Vorrei infine segnalare che le dimostrazioni contenute nel presente lavoro fanno uso sistematico della funzione $\tau(p)$, il che permette ad es. di dare una semplice dimostrazione della densità dei punti regolari di X.

§ 1. Nel presente lavoro tutti gli anelli saranno supposti commutativi e dotati di elemento unità. Sia A un anello noetheriano, locale, e ne sia $\mathfrak{M}$ l'ideale massimale. Sia

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_\delta \subset A$$

una catena di lunghezza massimale di ideali primi di A, le inclusioni intendendosi in senso forte (si osservi che risulta necessariamente $\mathfrak{p}_\delta = \mathfrak{M}$, e che risulta $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ se e solo se A è un dominio di integrità). L'intero δ così introdotto si chiama la *dimensione di Krull* dell'anello A (1).

Si consideri ora $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$, che è in modo naturale uno spazio vettoriale sul corpo $K = A/\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ si chiama *spazio tangente di Zariski* dell'anello A. Posto $\tau = \dim_K \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$, si dimostra facilmente che ogni sistema minimale di generatori di $\mathfrak{M}$ consta di τ elementi ed individua una base di $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ (cfr. ad es. COHEN [3], lemma 2, pag. 56).

Si ha sempre:

$$\tau \geq \delta$$

(KRULL [7], teorema 7*, pag. 220, prendendo $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$). L'anello A si dice *regolare* se $\tau = \delta$.

Sia ora Λ un anello noetheriano locale regolare, di dimensione di Krull $\delta = n$; A sia un Λ-modulo di tipo finito. Una *risoluzione proiettiva* del Λ-modulo A è una successione esatta

$$\dots \longrightarrow X_h \longrightarrow X_{h-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

ove tutti gli X_h sono dei Λ-moduli proiettivi. Diremo *lunghezza* di questa risoluzione l'estremo superiore (eventualmente infinito) degli interi r tali che $X_r \neq 0$, mentre $X_{r+1} = X_{r+2} = \dots = 0$. Tra le risoluzioni proiettive sono particolarmente importanti quelle, nelle quali tutti gli X_h sono Λ-moduli *di tipo finito*. Nel caso in esame, poichè l'anello Λ è locale, ogni Λ-modulo proiettivo di tipo finito è *libero*: $X_h = \Lambda^{q_h}$, somma diretta di un certo numero q_h di esemplari di Λ (cfr. ad es. NORTHCOTT [8], teorema 12, pag.

---

(1) In tutto il seguito ci limiteremo a studiare anelli noetheriani *locali;* tuttavia sarà bene osservare che questa definizione di dimensione di Krull ha senso anche se A non è locale.

191). Quindi ogni risoluzione proiettiva del Λ-modulo A, mediante moduli di tipo finito, è una risoluzione libera di A.

Una risoluzione libera di A si può costruire come segue: detto p_0 il minimo numero di generatori del Λ-modulo A, sia $s_1, \dots, s_{p_0}$ un tale sistema di generatori; si consideri l'omomorfismo surgettivo

$$\alpha_0 : \Lambda^{p_0} \longrightarrow A$$

definito da

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_0}) \longrightarrow \sum_i \lambda_i s_i$$

e si ponga $A_1 = \operatorname{Ker} \alpha_0$.

A_1 è un Λ-modulo di tipo finito (Λ è noetheriano).

Sia p_1 il numero minimo di generatori del Λ-modulo A_1; si costruisca, come sopra, un omomorfismo surgettivo

$$\alpha_1 : \Lambda^{p_1} \longrightarrow A_1 ,$$

ecc. Questo procedimento si può ripetere; in definitiva si ottiene una risoluzione libera di A:

$$\text{(1)} \qquad \dots \longrightarrow \Lambda^{p_h} \xrightarrow{\beta_h} \Lambda^{p_{h-1}} \xrightarrow{\beta_{h-1}} \dots \xrightarrow{\beta_1} \Lambda^{p_0} \xrightarrow{\beta_0} A \longrightarrow 0$$

ove $\beta_0 = \alpha_0$, mentre (per $h > 0$) $\beta_h = \alpha_h \circ i$, i essendo l'iniezione naturale $A_h \longrightarrow \Lambda^{p_{h-1}}$. I numeri p_h ($h > 0$) a priori dipendono dalla scelta degli omomorfismi α_{h-1}. Nel lemma 2 proveremo che questi numeri hanno in realtà un significato intrinseco; a tale fine facciamo qualche premessa: ogni omomorfismo β_h, con $h > 0$, è definito da

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{p_h} \end{pmatrix} \longrightarrow (\gamma_{rs}^{(h)}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{p_h} \end{pmatrix}$$

ove $(\gamma_{rs}^{(h)})$ è una matrice di tipo (p_{h-1}, p_h), i cui elementi $\gamma_{rs}^{(h)}$ appartengono a Λ.

LEMMA 1. *Gli elementi $\gamma_{rs}^{(h)}$ appartengono (per ogni $h > 0$) all'ideale massimale $\mathfrak{M}_\Lambda$ di Λ.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\sigma_1, \dots, \sigma_{p_{h-1}}$ il fissato sistema minimale di generatori di A_{h-1}. Supponiamo ad es. $\gamma_{11}^{(h)} \notin \mathfrak{M}_\Lambda$; l'immagine nell'omomorfismo

β_h di $(1, 0, \dots, 0)$ è $(\gamma_{11}^{(h)}, \dots, \gamma_{p_{h-1}, 1}^{(h)})$; poichè $\operatorname{Im} \beta_h = \operatorname{Ker} \alpha_{h-1}$, si ha

$$\gamma_{11}^{(h)} \sigma_1 + \dots + \gamma_{p_{h-1}, 1}^{(h)} \sigma_{p_{h-1}} = 0 \qquad \text{in} \quad A_{h-1} .$$

Ma da $\gamma_{11}^{(h)} \notin \mathfrak{M}_\Lambda$ seguirebbe che $\gamma_{11}^{(h)}$ è invertibile, ossia, moltiplicando la relazione ottenuta per $(\gamma_{11}^{(h)})^{-1}$, si verrebbe ad esprimere σ_1 come combinazione lineare di $\sigma_2, \dots, \sigma_{p_{h-1}}$, il che contraddice alla minimalità del sistema di generatori di A_{h-1}.

Poniamo $K = \Lambda / \mathfrak{M}_\Lambda$; detta $\varphi : \Lambda \to K$ la proiezione naturale, K diventa un Λ-modulo, definendo

$$\lambda k = (\varphi \lambda) k \qquad \lambda \in \Lambda, \ k \in K.$$

Si consideri la successione ottenuta tensorizzando la successione esatta (1) per K:

$$\dots \to \Lambda^{p_h} \otimes_\Lambda K \xrightarrow{\delta_h} \Lambda^{p_{h-1}} \otimes_\Lambda K \xrightarrow{\delta_{h-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} \Lambda^{p_0} \otimes_\Lambda K \xrightarrow{\delta_0} A \otimes_\Lambda K \to 0.$$

Poichè $\Lambda^p \otimes_\Lambda K = K^p$, questa successione si può riscrivere nella forma

$$\dots \to K^{p_h} \xrightarrow{\delta_h} K^{p_{h-1}} \xrightarrow{\delta_{h-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} K^{p_0} \xrightarrow{\delta_0} A \otimes_\Lambda K \to 0.$$

Dal lemma 1 risulta che gli omomorfismi $\delta_h = \beta_h \otimes \text{id.}$ $(h > 0)$, sono tutti nulli. Poichè per definizione

$$\operatorname{Tor}_h^\Lambda (A, K) = \operatorname{Ker} \delta_h / \operatorname{Im} \delta_{h+1}, \qquad (h > 0)$$

si ha dunque, per ogni $h > 0$:

$$\operatorname{Tor}_h^\Lambda (A, K) = K^{p_h} .$$

LEMMA 2. *I numeri* p_h $(h > 0)$ *che compaiono nella risoluzione* (1) *rappresentano la dimensione su* K *degli spazi vettoriali* $\operatorname{Tor}_h^\Lambda (A, K)$. *Il numero* p_0 *è il numero minimo di generatori del* Λ*-modulo* A.

La risoluzione (1) *ha lunghezza minima, tra tutte le risoluzioni proiettive* (e quindi a fortiori ha lunghezza minima tra tutte le risoluzioni libere) *del* Λ*-modulo* A.

Data comunque una risoluzione libera

$$\dots \to \Lambda^{q_h} \to \Lambda^{q_{h-1}} \to \dots \to \Lambda^{q_0} \to A \to 0,$$

si ha $q_h \geq p_h$ *per ogni* h.

Restano da dimostrare le ultime due affermazioni: se

$$\ldots \longrightarrow X_h \longrightarrow X_{h-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

è una qualunque risoluzione proiettiva di A, si ha

$$K^{p_h} = \operatorname{Tor}_h^{\Lambda}(A, K) = \operatorname{Ker}(X_h \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow X_{h-1} \otimes_{\Lambda} K)/\operatorname{Im}(X_{h+1} \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow X_h \otimes_{\Lambda} K);$$

da $X_h = 0$ segue quindi $K^{p_h} = 0$.

Se poi gli X_h sono liberi, $X_h = \Lambda^{q_h}$, si ha $X_h \otimes_{\Lambda} K = \Lambda^{q_h} \otimes_{\Lambda} K = K^{q_h}$, e quindi

$$p_h = \dim_K \operatorname{Tor}_h^{\Lambda}(A, K) \leq \dim_K \operatorname{Ker}(K^{q_h} \longrightarrow K^{q_{h-1}}) \leq \dim_K K^{q_h} = q_h,$$

come volevasi dimostrare.

Detta r la lunghezza della risoluzione (1), il *teorema delle sizigie di Hilbert* (cfr. ad es. ANDREOTTI-GRAUERT [2], teorema 1, oppure ZARISKI-SAMUEL [16], cap. VII, teorema 43) assicura che $r \leq n$, n essendo la dimensione di Krull di Λ.

Chiameremo dimensione omologica (²) del Λ-modulo A il numero

$$\operatorname{dih}_{\Lambda} A = n - r.$$

Sia Λ un anello locale (non necessariamente regolare) ed A un Λ-modulo di tipo finito. Un insieme $m_1, \ldots, m_q$ di elementi dell'ideale massimale $\mathfrak{M}_{\Lambda}$ di Λ si dice una *A-successione normale,* se per ogni $1 \leq i \leq q$ l'elemento m_i non è divisore dello zero in $A/(m_1, \ldots, m_{i-1})A$. Una A-successione normale $m_1, \ldots, m_q$ si dice *massimale*, se non esistono A-successioni normali costituite da più di q elementi.

Supponiamo ora in particolare che A sia un anello quoziente dell'anello locale Λ, e che la struttura di Λ-modulo considerata su A sia quella naturale, vale a dire indotta nell'omomorfismo di proiezione $\varphi : \Lambda \longrightarrow A$ dalla struttura di A-modulo esistente su A. In tal caso vale il

LEMMA 3. *Data una A-successione normale massimale $m_1, \ldots, m_q$ di Λ, considerato come Λ-modulo, gli elementi $\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_q)$ costituiscono una A-successione normale massimale di A, considerato come A-modulo.*

(²) Seguiamo quì la terminologia di [2]; in [8], [13], [16] questo numero viene chiamato *codimensione omologica.*

La dimostrazione è evidente, perchè per definizione

$$\lambda a = \varphi(\lambda) \cdot a \qquad \lambda \in \Lambda, \quad a \in A.$$

Ricordiamo senza dimostrazione le seguenti due proposizioni di algebra omologica :

PROPOSIZIONE 1. *Sia A un anello locale, di dimensione di Krull δ, e sia q la lunghezza di una A-successione normale massimale di A, considerato come A-modulo. Si ha :*

$$q \leq \delta$$

(cfr. ad es. NORTHCOTT [8], Proposizione 7, pag. 204).

A si dice *anello di Cohen-Macaulay* se $q = \delta$.

Si noti che ogni anello locale regolare è un anello di Cohen-Macaulay, poichè un qualunque sistema minimale di generatori dell'ideale massimale $\mathfrak{M}$ di A costituisce una A-successione normale (che è massimale per la proposizione 1).

PROPOSIZIONE 2. *Dato un Λ-modulo A, con Λ anello locale regolare, $dih_\Lambda A$ rappresenta il numero di elementi di una Λ-successione normale massimale del Λ-modulo A.*

(cfr. ad es. NORTHCOTT [8], teorema 28, pag. 209, tenuto conto del corollario al teorema 24, pag. 208).

Ne segue il

TEOREMA 1. *Sia Λ un anello locale regolare ; A un anello quoziente di Λ ; si consideri A dotato della struttura naturale di Λ-modulo. Detta δ la dimensione di Krull di A, e q la lunghezza di una A-successione normale massimale di A, considerato come A-modulo, si ha :*

$$\mathrm{dih}_\Lambda A = q \leq \delta.$$

DIMOSTRAZIONE : Si ha infatti $\mathrm{dih}_\Lambda A =$ numero q_0 di elementi di una Λ-successione normale massimale di A, considerato come Λ-modulo (proposizione 2) ; d'altra parte $q_0 = q$ (lemma 3) e $q \leq \delta$ (proposizione 1).

COROLLARIO. *Se l'anello locale A è realizzato come quoziente di un anello locale regolare Λ_1, e contemporaneamente come quoziente di un anello locale regolare Λ_2, si ha :*

$$\mathrm{dih}_{\Lambda_1} A = \mathrm{dih}_{\Lambda_2} A.$$

OSSERVAZIONE: Nel § 4 proveremo, in una situazione più particolare, e servendoci di un ragionamento geometrico, una disuguaglianza più precisa della disuguaglianza $\mathrm{dih}_A\, A \leq \delta$.

§ 2. Si consideri ora in particolare come anello A un'*algebra analitica*, vale a dire sia

$$A = K\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{A}$$

ove: K è un corpo valutato completo non discreto; $K\{x_1, \dots, x_n\}$ è l'anello delle serie di potenze convergenti in un certo numero n di variabili (a valori in K); $\mathfrak{A}$ è un ideale di $K\{x_1, \dots, x_n\}$.

OSSERVAZIONI: 1). Si ha $K = A/\mathfrak{M}$; dall'aver supposto che K è valutato non discreto, risulta che il corpo K è necessariamente infinito.

2). A è un anello (locale) noetheriano (cfr. ad es. [12] Exp. 18, corollario 2 e pag. 18-07).

3). In particolare, è noetheriano $K\{x_1, \dots, x_n\}$, onde si ha un'immersione naturale di $K\{x_1, \dots, x_n\}$ nel proprio completamento, che è l'anello delle serie di potenze formali $K[[x_1, \dots, x_n]]$. Ciò prova tra l'altro che vale il *principio di identità* per le serie di potenze di $K\{x_1, \dots, x_n\}$ (3).

Un elemento P di $K\{x_1, \dots, x_{n-1}\}[x_n]$, cioè un elemento di $K\{x_1, \dots, x_n\}$ che è polinomiale nella variabile x_n, si chiama *pseudopolinomio* nella x_n; per mettere in evidenza la variabile polinomiale si scrive $P = P(x_n)$. Uno pseudopolinomio $P(x_n)$ si dice *privilegiato*, se il coefficiente di grado massimo di x_n è 1, mentre i coefficienti di grado inferiore sono tutti contenuti nell'ideale massimale $\mathfrak{M}_{n-1}$ di $K\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$:

$$P(x_n) = x_n^\nu + \mu_1 x_n^{\nu-1} + \dots + \mu_\nu, \quad \text{con} \quad \mu_1, \dots, \mu_\nu \in \mathfrak{M}_{n-1}.$$

Dato un ideale $\mathfrak{A}$ di $K\{x_1, \dots, x_n\}$, poniamo

$$\mathfrak{A}_h = \mathfrak{A} \cap K\{x_1, \dots, x_h\}.$$

Il sistema di coordinate $x_1, \dots, x_n$ si dice *privilegiato* per l'ideale $\mathfrak{A}$ di $K\{x_1, \dots, x_n\}$ se, detto d il massimo numero intero tale che $\mathfrak{A}_d = \{0\}$, ogni $\mathfrak{A}_h$ con $d + 1 \leq h \leq n$ contiene uno pseudopolinomio privilegiato

$$P_h(x_h) = K\{x_1, \dots, x_{h-1}\}[x_h].$$

---

(3) Questo fatto si può del resto provare direttamente, ripetendo ragionamenti ben noti nel caso $K = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$.

L'intero d, che a priori dipende dal sistema di coordinate fissato, si dirà *numero dei parametri* di $\mathfrak{A}$, o anche *numero dei parametri* dell'anello $K\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{A}$.

LEMMA 4 (teorema di preparazione per gli ideali). *Dato un ideale* $\mathfrak{A}$ *di* $K\{x_1, \dots, x_n\}$, *è sempre possibile mediante una opportuna trasformazione lineare di coordinate, della forma*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

fare sì che il nuovo sistema di coordinate sia privilegiato per l'ideale $\mathfrak{A}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} = \{0\}$, il lemma è evidente. Altrimenti sia $f(x_1, \dots, x_n)$ un elemento non identicamente nullo di $\mathfrak{A}$. La forma iniziale di f nello sviluppo di Taylor (ossia nello sviluppo come serie delle componenti omogenee) sia f_k:

$$f = f_k + f_{k+1} + \dots \qquad (f_k \not\equiv 0).$$

Esistono certo $n-1$ elementi $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ tali che $f_k(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$. Si consideri la trasformazione lineare di coordinate

$$\begin{cases} x_i \to x_i + a_i x_n & (i = 1, \dots, n-1) \\ x_n \to x_n . \end{cases}$$

Nel nuovo sistema di coordinate f è «preparata» onde è applicabile il teorema di Weierstrass (cfr. ad es. [12], Exp. 18): moltiplicando f per una opportuna unità u, si ottiene un pseudopolinomio privilegiato

$$uf = P_n(x_n) \in \mathfrak{A}.$$

Iterando il procedimento, a partire da $\mathfrak{A}_{n-1}$, ecc., si giungerà infine ad un certo $\mathfrak{A}_d = \{0\}$. Il lemma è provato, prendendo come trasformazione lineare di coordinate, il prodotto delle singole trasformazioni effettuate.

Abbiamo già osservato che a priori il numero d dei parametri di $\mathfrak{A}$ dipende dal particolare sistema di coordinate privilegiate che si è fissato. In realtà ciò non avviene, e precisamente il numero d associato ad $\mathfrak{A}$ coincide con $\delta =$ dimensione di Krull di $K\{x_1, \dots, x_n\}$; in altre parole si ha il

TEOREMA 2. *Dato un ideale* $\mathfrak{I}$ *di* $K\{x_1, \ldots, x_n\}$, *si ha* (con le notazioni precedentemente introdotte):

$$d = \delta.$$

DIMOSTRAZIONE: Fissato un sistema di coordinate privilegiate per $\mathfrak{I}$, si consideri l'omomorfismo naturale

$$\varphi : K\{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow K\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{I}.$$

In quanto $\mathfrak{I}_d = \{0\}$, si può identificare $K\{x_1, \ldots, x_d\}$ con la propria immagine $\varphi(K\{x_1, \ldots, x_d\})$. Si ponga poi

$$y_{d+i} = \varphi(x_{d+i}) \qquad i = 1, \ldots, n-d.$$

Per provare il teorema 2, ci sarà utile il

LEMMA 5. *Si ha isomorfismo naturale*

$$K\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{I} \simeq K\{x_1, \ldots, x_d\}[y_{d+1}, \ldots, y_n],$$

e $K\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{I}$ *è intero su* $K\{x_1, \ldots, x_d\}$ (4).

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA: Per induzione sul numero delle y. L'equazione $P_{d+1}(y_{d+1}) = 0$ prova che y_{d+1} soddisfa ad una equazione polinomiale del tipo voluto, onde $K\{x_1, \ldots, x_d\}[y_{d+1}]$ è intero su $K\{x_1, \ldots, x_d\}$. Inoltre ogni elemento $f \in K\{x_1, \ldots, x_{d+1}\}$ si può scrivere, per il teorema di Weierstrass, nella forma $f = qP_{d+1} + r$, con $r \in K\{x_1, \ldots, x_d\}[x_{d+1}]$; pertanto si ha $\varphi(f) = \varphi(r) \in K\{x_1, \ldots, x_d\}[y_{d+1}]$; ciò prova che l'applicazione naturale iniettiva $K\{x_1, \ldots, x_d\}[y_{d+1}] \rightarrow K\{x_1, \ldots, x_{d+1}\}/\mathfrak{I}_{d+1}$ è anche surgettiva, cioè un isomorfismo.

A questo punto possiamo procedere per induzione: dunque sia già provato che

$$K\{x_1, \ldots, x_{d+h-1}\}/\mathfrak{I}_{d+h-1} \simeq K\{x_1, \ldots, x_d\}[y_{d+1}, \ldots, y_{d+h-1}]$$

e che $K\{x_1, \ldots, x_d\}[y_{d+1}, \ldots, y_{d+h-1}]$ è intero su $K\{x_1, \ldots, x_d\}$. Si osservi che y_{d+h} soddisfa all'equazione $P_{d+h}(y_{d+h}) = 0$, e quindi soddisfa anche all'equazione $\widetilde{P}_{d+h}(y_{d+h}) = 0$, ottenuta sostituendo in P_{d+h} tutti i coefficienti

---

(4) Vale a dire ciascun y_{d+i} soddisfa ad una equazione polinomiale a coefficienti in $K\{x_1, \ldots, x_d\}$, con coefficiente del termine di grado massimo 1. Si suole anche dire che $K\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{I}$ è *aritmeticamente dipendente* da $K\{x_1, \ldots, x_d\}$.

con le rispettive immagini nell'omomorfismo φ. Il coefficiente del termine di grado massimo di $\tilde{P}_{d+h}$ è 1, perchè tale era il coefficiente in P_{d+h}; gli altri coefficienti sono elementi di $K\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h-1}]$. Quindi $K\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h}]$ è intero su $K\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h-1}]$. Per la transitività della dipendenza aritmetica, e tenuto conto dell'ipotesi di induzione, $K\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h}]$ è altresì intero su $K\{x_1, \dots, x_d\}$.

Resta ancora da provare che l'applicazione naturale iniettiva

$$K\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h}] \longrightarrow K\{x_1, \dots, x_{d+h}\}/\mathfrak{P}_{d+h}$$

è anche surgettiva. A tal fine, dato un elemento $f \in K\{x_1, \dots, x_{d+h}\}$, si applichi il teorema di Weierstrass:

$$f = qP_{d+h} + r \quad \text{con} \quad r \in K\{x_1, \dots, x_{d+h-1}\}[x_{d+h}].$$

Ne segue $\varphi(f) = \varphi(r)$ e, tenuto conto dell'ipotesi di induzione, $\varphi(r) \in K\{x_1, \dots$ $\dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h-1}][y_{d+h}] = K\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_{d+h}]$. Ciò completa il ragionamento di induzione, onde il lemma 5 è dimostrato.

Per provare il teorema 2 abbiamo bisogno di un ulteriore lemma, che è conseguenza immediata del « Going up theorem » di Cohen-Seidenberg (cfr. ad es. [4], teoremi 3, 4):

LEMMA 6. *Due anelli R ed S, con $R \subset S$, S intero su R, hanno la stessa dimensione di Krull.*

Applicando questo lemma ai due anelli $K\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ e $K\{x_1, \dots, x_d\}$ (il che è lecito in virtù del lemma 5) risulta che tali due anelli hanno la stessa dimensione di Krull. Ora la dimensione di Krull di $K\{x_1, \dots, x_d\}$ è proprio d, e quindi la dimensione di Krull di $K\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$, che avevamo indicato precedentemente con δ, coincide con d. Ciò prova il teorema 2 (5).

§ 3. Sia sempre $A = K\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ un'algebra analitica; può darsi che A sia allo stesso tempo un'algebra analitica con un numero minore di variabili, vale a dire $A \simeq K\{x_1, \dots, x_m\}/\mathfrak{Q}$, con $m < n$. Al problema di dare una rappresentazione di A come algebra analitica nel minimo numero possibile di variabili risponde la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Data un'algebra analitica $A = K\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ in n variabili, e indicata con τ la dimensione dello spazio tangente di Zariski di A,*

(5) L'idea di sfruttare il lemma 6 nella dimostrazione del teorema 2 si trova in ABHYANKAR [1].

A è anche algebra analitica in τ variabili:

$$A = K\{y_1 \ldots, y_\tau\}/\mathfrak{b};$$

inoltre A non può essere scritta come algebra analitica in meno di τ variabili.

Dimostrazione: Sia $\widetilde{\mathfrak{I}}$ lo spazio vettoriale su K, delle forme lineari (cioè del tipo $\varphi_1 = k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n$ con $k_1, \ldots, k_n \in K$) che sono forme iniziali di qualche elemento φ di $\mathfrak{I}$ (6). Posto $\sigma = \dim_K \widetilde{\mathfrak{I}}$ con un cambiamento lineare di coordinate si può fare in modo che nelle nuove variabili $y_1, \ldots, y_n$ lo spazio vettoriale $\widetilde{\mathfrak{I}}$ sia generato dalle ultime σ variabili $y_n, \ldots y_{n-\sigma+1}$. Si può costruire come segue un isomorfismo tra lo spazio tangente di Zariski T di A e lo spazio tangente di Zariski T_0 di $K\{y_1, \ldots, y_{n-\sigma}\}$: se un elemento $\alpha \in \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ è rappresentato mediante una serie di potenze di $K\{y_1, \ldots, y_n\}$ il cui termine lineare è $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$, ad α si associa l'elemento di T_0 rappresentato da $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{n-\sigma} y_{n-\sigma}$. Poichè $\dim T = \tau$, $\dim T_0 = n - \sigma$, ne segue $\tau = n - \sigma$.

Riscriviamo A come algebra analitica nelle variabili $y_1, \ldots, y_n$:

$$A = K\{y_1, \ldots, y_n\}/\mathfrak{I}$$

e dimostriamo che A è altresì isomorfa con l'algebra analitica (che provvisoriamente denoteremo con B):

$$B = K\{y_1, \ldots, y_\tau\}/\mathfrak{I} \cap K\{y_1, \ldots, y_\tau\}.$$

Ciò proverà la prima affermazione della proposizione, con $\mathfrak{b} = \mathfrak{I} \cap K\{y_1, \ldots$ $\ldots, y_\tau\}$. Intanto si ha un'iniezione canonica $B \to A$. Si tratta di far vedere che viceversa, fissato un elemento $\alpha \in K\{y_1, \ldots, y_n\}$, esiste un elemento $\beta \in K\{y_1, \ldots, y_\tau\}$ tale $\alpha - \beta \in \mathfrak{I}$. Ed infatti $\mathfrak{I}$ contiene, per come è stato scelto il sistema di coordinate, $n - \tau$ serie di potenze (non univocamente determinate) $\varphi_{\tau+1}, \ldots, \varphi_n \in K\{y_1, \ldots, y_n\}$, i cui termini lineari sono dati rispettivamente da $y_{\tau+1}, \ldots, y_n$. Moltiplicando φ_n per una opportuna unità a norma del teorema di preparazione di Weierstrass, si vede che $\mathfrak{I}$ contiene altresì uno pseudopolinomio privilegiato $P_n = y_n + \psi_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$, con ψ_n appartenente all'ideale massimale $\mathfrak{M}_{n-1}$ di $K\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Sostituiamo ora nelle serie convergenti $\varphi_{\tau+1}, \ldots, \varphi_{n-1}$ al posto di y_n la serie convergente $-\psi_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Si ottengono delle nuove serie di potenze convergenti $\varphi'_{\tau+1}, \ldots, \varphi'_{n-1} \in K\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$. Poichè la sostituzione di

(6) Come forma iniziale di 0, si considera la forma nulla.

y_n con $-\psi_n$ nei termini di grado k non altera i termini di grado minore di k, le $\varphi'_{\tau+1}, \ldots, \varphi'_{n-1}$ hanno ancora come forme lineari rispettivamente $y_{\tau+1}, \ldots, y_{n-1}$. Si ha evidentemente

$$\varphi_{\tau+i} - \varphi'_{\tau+i} = (y_n + \psi_n)\,\chi_{\tau+i} \qquad (\chi_{\tau+i} \in K\{y_1, \ldots, y_n\})$$

e quindi

$$\varphi_{\tau+i} - \varphi'_{\tau+i} \in \mathfrak{P}.$$

Ciò prova che da $\varphi_{\tau+i} \in \mathfrak{P}$ segue $\varphi'_{\tau+i} \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, \ldots, n - \tau - 1)$.

Ragioniamo ora su φ'_{n-1}, come prima su φ_n, e così di seguito. In definitiva si ottiene il risultato seguente: $\mathfrak{P}$ contiene $n - \tau$ pseudopolinomi privilegiati lineari

$$P_n = y_n + \psi_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$$

$$P_{n-1} = y_{n-1} + \psi_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{\tau+1} = y_{\tau+1} + \psi_{\tau+1}(y_1, \ldots, y_\tau).$$

Dato ora un arbitrario elemento $\alpha \in K\{y_1, \ldots, y_n\}$, vi si sostituisca al posto di y_n l'espressione $-\psi_n$; indi si sostituisca al posto di y_{n-1} l'espressione $-\psi_{n-1}$, e così di seguito, fino a sostituire $y_{\tau+1}$ con l'espressione $-\psi_{\tau+1}$. Trattandosi di una sostituzione di serie convergenti in una serie convergente, si ottiene una nuova serie convergente β, che appartiene per costruzione a $K\{y_1, \ldots, y_\tau\}$. Con ragionamento uguale a quello fatto sopra, a proposito di $\varphi'_{\tau+i}$ e $\varphi_{\tau+i}$, si vede che

$$\alpha - \beta \in \mathfrak{P}$$

come appunto volevasi dimostrare.

La seconda affermazione della proposizione 3 è pressochè evidente: se A è un'algebra analitica in m variabili $z_1, \ldots, z_m$:

$$A = K\{z_1, \ldots, z_m\}/\mathfrak{R},$$

le immagini (mod $\mathfrak{R}$) di $z_1, \ldots, z_m$ generano l'ideale massimale $\mathfrak{M}$ di A, e ciò implica $m \geq \tau$.

Con ciò la proposizione 3 è dimostrata completamente.

COROLLARIO. *Se A è regolare, si ha $A = K\{y_1, \ldots, y_\tau\}$.*

DIMOSTRAZIONE: A norma della proposizione 3 si ha $A = K\{y_1, \dots . y_\tau\}/\mathfrak{h}$. Se $\mathfrak{h}$ contenesse un elemento non nullo di $K\{y_1, \dots, y_\tau\}$, il numero d dei parametri di $\mathfrak{h}$ soddisferebbe alla disuguaglianza forte $d < \tau$. Poichè si è provato (teorema 2) che $d = \delta$, ne seguirebbe $\delta < \tau$, contro l'ipotesi che A fosse regolare. Quindi $\mathfrak{h} = \{0\}$; ciò prova il corollario.

NOTA: La proposizione 3 si sarebbe potuta dimostrare anche immergendo A nel proprio completamento $\widehat{A}$, applicando ad $\widehat{A}$ il teorema di Cohen sulla struttura degli anelli locali (equicaratteristici) completi, ed osservando che la dimensione dello spazio tangente di Zariski di $\widehat{A}$ coincide con la dimensione dello spazio tangente di Zariski di A.

A conclusione di questo paragrafo, vogliamo ancora applicare i risultati del § 1 alle algebre analitiche. Poniamo per brevità $\mathfrak{O}^n = K\{x_1, \dots, x_n\}$; un'algebra analitica A, considerata come $\mathfrak{O}^n$-modulo, possiede una dimensione omologica $\operatorname{dih}_{\mathfrak{O}^n} A = n - r$ (r = lunghezza di una risoluzione proiettiva minimale di A come $\mathfrak{O}^n$-modulo). Se poi si realizza A come algebra analitica in m variabili, A possiede una dimensione omologica $\operatorname{dih}_{\mathfrak{O}^m} A = m - l$ (l = lunghezza di una risoluzione proiettiva minimale di A come $\mathfrak{O}^m$-modulo). Il corollario al teorema 1, riformulato in questa situazione particolare, afferma:

PROPOSIZIONE 4. $\operatorname{dih}_{\mathfrak{O}^n} A$ *coincide con* $\operatorname{dih}_{\mathfrak{O}^m} A$, *vale a dire*:

$$n - r = m - l;$$

pertanto la dimensione omologica di un'algebra analitica è indipendente dalla sua particolare realizzazione, e può essere denotata semplicemente col simbolo dih A (7).

§ 4. Introduciamo ora la nozione di *insieme analitico con elementi nilpotenti* (cfr. ad es. GRAUERT [5], § 1, Def. 2 o anche [12] Sém CARTAN 60 61, Exp. 9). Sia K un corpo valutato completo non discreto. Su K^n si consideri il fascio $\mathfrak{O}^n$ dei germi di funzioni analitiche (a valori in K); questo è un fascio di K-algebre analitiche, la spiga nel punto $(p_1, \dots, p_n)$ essendo $K\{x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n\}$. Sussiste il seguente

TEOREMA DI COERENZA (di K. Oka). — *Il fascio* $\mathfrak{O}^n$, *definito su* K^n, *è coerente* (cfr. ad es. [12], Exp. 18-09).

$(K^n, \mathfrak{O}^n)$ è uno spazio anulato; sia poi U un aperto di K^n; posto $\mathfrak{O}^n_U = \mathfrak{O}^n | U$, anche $(U, \mathfrak{O}^n_U)$ è uno spazio anulato. Dato su U un fascio $\mathfrak{I}$ di

(7) Una dimostrazione diretta di questa proposizione si trova in ANDREOTTI-GRAUERT, [2] § 1.

ideali di $\mathfrak{O}_U^n$, si ponga $X = \operatorname{supp}(\mathfrak{O}_U^n/\mathfrak{I})$, e si consideri lo spazio anulato $(X, \mathfrak{O}_U^n/\mathfrak{I})$. Si dirà che $(X, \mathfrak{O}_U^n/\mathfrak{I})$ è un *insieme analitico* (*con elementi nilpotenti, di presentazione finita*) se il fascio $\mathfrak{I}$ è di tipo finito; in altre parole, se per ogni punto $p \in X$ si può trovare un intorno aperto $W \ni p\ (W \subset U)$, su cui esiste una successione esatta

$$\mathfrak{O}_W^m \longrightarrow \mathfrak{I}/W \longrightarrow 0 \qquad (m \text{ intero opportuno}).$$

Uno *spazio analitico* (con elementi nilpotenti) è per definizione uno spazio anulato che ha localmente la struttura di un insieme analitico di presentazione finita. Poichè i ragionamenti che svilupperemo nel seguito sono tutti di carattere locale, preferiremo parlare di insiemi analitici piuttosto che di spazi analitici; è chiaro d'altronde che ogni affermazione locale, vera per insiemi analitici, è altresì vera per spazi analitici.

Un insieme analitico $(X, \mathfrak{O}_U^n/\mathfrak{I})$ si dirà *ridotto* se $\mathfrak{I}$ è il fascio dei germi di tutte le funzioni di $\mathfrak{O}_U^n$ che sono nulle nei punti di X.

NOTA : Nel caso particolare $K = \mathbf{C}$ si ha la usuale nozione di insieme analitico $V \subset \mathbf{C}^n$: V è un insieme analitico se per ogni punto $p \in V$ esistono un intorno U_p in $\mathbf{C}^n$ ed un numero finito di funzioni $f_1, \dots, f_s$, olomorfe su U_p, tali che $V \mid U_p = \{x \in U_p \mid f_1(x) = 0, \dots, f_s(x) = 0\}$. Come fascio strutturale $\mathcal{A}_V$ si prende il fascio di tutte le funzioni (continue) di V, che sono restrizione a V di qualche funzione olomorfa di U_p. Quindi per costruzione gli insiemi analitici usuali sono tutti ridotti. Vedremo nell'appendice (corollario al teorema di coerenza di Oka-Cartan) che gli insiemi analitici usuali sono altresì di presentazione finita. Quindi la nozione di insieme analitico di presentazione finita, sul corpo valutato completo K, è una generalizzazione della nozione di insieme analitico nel senso usuale, sul corpo $\mathbf{C}$, per due distinti motivi:

(*a*) Si considerano insiemi analitici su un corpo, che non è detto sia quello complesso;

(*b*) Si considerano fasci strutturali che possono essere dotati di elementi nilpotenti (e ciò anche quando il corpo considerato è il corpo complesso).

Dato un insieme analitico di presentazione finita $(X, \mathfrak{O}_U^n/\mathfrak{I})$, non necessariamente ridotto, la spiga del fascio $\mathcal{A}_U = \mathfrak{O}_U^n/\mathfrak{I}$ sopra ogni punto $p \in X$ è un'algebra analitica $A_p = \mathfrak{O}_p^n/\mathfrak{I}_p$. Per brevità di linguaggio i numeri $\delta(p)$, $d(p)$, $\tau(p)$, dih A_p associati ad A_p si diranno anche dimensione di Krull, numero di parametri, dimensione dello spazio tangente di Zariski, dimensione omologica *dell'insieme analitico* X nel punto p; il numero dih A_p si denoterà anche con $\operatorname{dih}_p X$.

LEMMA 7. *La funzione $\delta(p)$, al variare del punto p nell'insieme analitico X (non necessariamente ridotto) è semicontinua superiormente.*

DIMOSTRAZIONE: Conviene ragionare sulla funzione $d(p)$ la quale, in virtù del teorema 2, coincide con $\delta(p)$. Per semplicità di notazione, esaminiamo la situazione in un intorno del punto $\{0\} \in K^n$. Sia $x_1, \dots, x_n$ un sistema di coordinate privilegiate per l'ideale $\mathfrak{T}$ che definisce X nel punto $\{0\}$, e siano (con le notazioni del § 2) $P_{d+1}(x_{d+1}), \dots, P_n(x_n)$ pseudopolinomi privilegiati appartenenti ad $\mathfrak{T}$. Si scelga un aperto $U \ni \{0\}$, nei cui punti $p = (p_1, \dots, p_n)$ tutti questi pseudopolinomi P_{d+i} sono definiti ed appartengono all'ideale $\mathfrak{T}(p)$, che definisce X nel punto p. Fissiamo l'attenzione ad es. su P_n, e riscriviamone lo sviluppo in serie, in un conveniente intorno del punto $p \in X \cap U$; posto

$$y_h = x_h - p_h \qquad (h = 1, \dots, n)$$

si ha

$$\begin{aligned} P_n &= x_n^\nu + \mu_1 x_n^{\nu-1} + \dots \\ &= (y_n + p_n)^\nu + \mu_1 (y_n + p_n)^{\nu-1} + \dots \\ &= y_n^\nu + \alpha_1 y_n^{\nu-1} + \dots \end{aligned}$$

ossia P_n è *preparato* nel nuovo sistema di coordinate $y_1, \dots, y_n$. Sia α_i il coefficiente di indice più alto, non appartenente all'ideale massimale $\mathfrak{M}_{n-1}$ di $K\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$; poichè $P_n(p) = 0$, $\alpha_\nu \in \mathfrak{M}_{n-1}$, e quindi $i < \nu$. Per il teorema di Weierstrass esiste una opportuna unità $u \in K\{y_1, \dots, y_n\}$ tale che uP_n è uno pseudopolinomio privilegiato $P_n'(y_n)$ (di grado $\nu - i > 0$). Per costruzione $P_n'(y_n)$ appartiene all'ideale $\mathfrak{T}(p)$.

Analogo ragionamento si può ripetere a proposito di $P_{n-1}, \dots, P_{d+1}$. Si vede così che $\mathfrak{T}(p)$ contiene almeno $n - d$ pseudopolinomi privilegiati $P_{d+1}'(y_{d+1}), \dots, P_n'(y_n)$, onde il numero dei parametri $d(p)$ dell'ideale $\mathfrak{T}(p)$ non può sicuramente superare $d = d(0)$. Ciò prova il lemma 7.

LEMMA 8. *Sia X un insieme analitico non necessariamente ridotto, realizzato in uno spazio K^n. Detta $\tau(p)$ la dimensione dello spazio tangente di Zariski ad X nel suo punto p, esiste un intorno $W \ni p$ opportunamente piccolo, tale che $X|W$ può essere realizzato come sottoinsieme analitico di $K^{\tau(p)}$.*

DIMOSTRAZIONE: La spiga del fascio strutturale $\mathcal{A}_X$ di X nel punto p sia $A_p = \mathfrak{O}_p^n / \mathfrak{T}_p$. Non è restrittivo supporre che le coordinate $y_1, \dots, y_n$ in K^n siano state scelte in modo che $p = \{0\}$, e che l'algebra A_p sia isomorfa con un'algebra analitica nelle prime $\tau = \tau(0)$ variabili $y_1, \dots, y_\tau$ (cfr.

la proposizione 3). Indichiamo con $\pi : K^n \longrightarrow K^\tau$ la proiezione che ad $(y_1, \dots, y_n)$ associa $(y_1, \dots, y_\tau)$. Nel punto $\{0\}$ l'ideale $\mathfrak{N}$ sia generato dalle funzioni $f_1, \dots, f_s \in K\{y_1, \dots, y_n\}$. Poichè X è di presentazione finita, queste funzioni generano l'ideale $\mathfrak{N}_p$ in tutti i punti di un opportuno intorno $U \ni \{0\}$. Sia poi V un intorno di $\{0\}$ in ogni punto p del quale le funzioni $y_{\tau+1} + \psi_{\tau+1}(y_1, \dots, y_\tau), \dots, y_n + \psi_n(y_1, \dots, y_{n-1})$ di cui alla proposizione 3 sono definite ed appartengono all'ideale $\mathfrak{N}_p$. Poniamo $W = U \cap V$ e indichiamo con $\varphi_i(y_1, \dots, y_\tau)$ le funzioni ottenute dalle funzioni $f_i(y_1, \dots, y_n)$, sostituendo y_n con $-\psi_n, \dots, y_{\tau+1}$ con $-\psi_{\tau+1}$. L'insieme analitico X, ristretto a W, può essere definito da

$$X = \{(y_1, \dots, y_n) \in W \mid \varphi_i(y_1, \dots, y_\tau) = 0 \quad (i = 1, \dots, s); \qquad y_{\tau+1} = \psi_{\tau+1}, \dots, y_n = \psi_n\}.$$

L'immagine in $\pi(W)$ dell'insieme analitico X è data da

$$\pi(X) = \{(y_1, \dots, y_\tau) \in \pi(W) \mid \varphi_i(y_1, \dots, y_\tau) = 0 \} \qquad (i = 1, \dots, s)\}.$$

Ciò mostra che la proiezione $\pi : X \longrightarrow \pi(X)$ è biunivoca e bicontinua. Per provare che si tratta di un isomorfismo di insiemi analitici resta ancora da far vedere che il fascio strutturale di X è isomorfo col fascio strutturale di $\pi(X)$, e ciò si vede immediatamente, ripetendo in ciascun punto $p \in X$ il ragionamento fatto per provare la proposizione 3.

LEMMA 9. *La funzione $\tau(p)$ al variare del punto p nell'insieme analitico X (non necessariamente ridotto) è semicontinua superiormente.*

DIMOSTRAZIONE: Fissato un punto $p \in X$ si pensi X realizzato localmente in un intorno W di p come sottoisieme analitico di $K^{\tau(p)}$. Nei punti $q \in X \cap W$ lo spazio tangente di Zariski T_q ha dimensione $\tau(q)$ non superiore alla dimensione dello spazio ambiente in cui X è immerso, ossia appunto $\tau(q) \leq \tau(p)$, come volevasi dimostrare.

LEMMA 10. *X sia sempre un insieme analitico non necessariamente ridotto. Poniamo M = insieme dei punti $p \in X$ nei quali la spiga A_p è un anello regolare. L'insieme M è aperto. Un punto $p \in X$ appartiene ad M se e solo se, realizzato localmente X come sottoinsieme dello spazio tangente di Zariski T_p, X copre tutto un intorno aperto di p in T_p.*

DIMOSTRAZIONE: L'ultima affermazione è una riformulazione del corollario alla proposizione 3. Da questa caratterizzazione segue direttamente che M è aperto.

I punti di M si dicono punti *regolari* (o *semplici*) di X. Si pone $S = X - M$, insieme dei punti *singolari* di X.

LEMMA 11. *La funzione* $\mathrm{dih}_p X$ *al variare del punto* p *nell'insieme analitico* X (*non necessariamente ridotto*) *è semicontinua inferiormente.*

DIMOSTRAZIONE: Pensiamo X realizzato in vicinanza del punto p come sottoinsieme analitico di un K^n; poniamo per brevità $\mathfrak{O}_p^n = K\{x_1 - p_1, \ldots \ldots, x_n - p_n\}$, e consideriamo una risoluzione di lunghezza minima dell'$\mathfrak{O}_p^n$-modulo A_p:

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{O}_p^n)^{p_r} \xrightarrow{\beta_r} \ldots \xrightarrow{\beta_1} (\mathfrak{O}_p^n)^{p_0} \xrightarrow{\beta_0} A_p \longrightarrow 0.$$

Poichè per ipotesi l'insieme analitico X è di presentazione finita, e poichè il fascio $\mathfrak{O}^n$ è coerente (teorema di *Oka*), esiste tutto un intorno V_p di p in K^n, sul quale si possono estendere gli omomorfismi β_h, in modo che la successione di fasci su V_p:

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{O}^n)^{p_r} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathfrak{O}^n)^{p_0} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

risulti ancora esatta. Ciò prova che nei punti $x \in X$ vicini a p, la lunghezza $r(x)$ di una risoluzione minimale di A_x è certo minore o uguale alla lunghezza $r = r(p)$ della risoluzione considerata nel punto p, ossia si ha

$$\mathrm{dih}_x X = n - r(x) \geq n - r(p) = \mathrm{dih}_p X.$$

LEMMA 12. *X sia un insieme analitico non necessariamente ridotto. Poniamo N = insieme dei punti $p \in X$ nei quali la funzione $\tau(p)$ è continua (e quindi localmente costante). N è aperto e ovunque denso in X.*

DIMOSTRAZIONE: In quanto i valori assunti da τ sono tutti interi, è chiaro che l'insieme N è aperto. Proviamo che N è ovunque denso in X. Fissato $x \in X$, in un intorno W sufficientemente piccolo di x la funzione $\tau(p)$ assume solo un numero finito di valori distinti, poichè $0 \leq \tau(p) \leq \tau(x)$, e τ è a valori interi. Ne segue che esiste un intorno opportunamente piccolo $U_0 \subset W$, con la proprietà che

$$\min \lim_{\substack{p \to x \\ p \in X}} \tau(p) = \min_{p \in U_0} \tau(p);$$

questa uguaglianza vale poi a fortiori su ogni intorno $U \subset U_0$ di x. Sia q un punto di U, in cui $\tau(q) = \min_{p \in U} \tau(p)$. Il punto q appartiene necessariamente ad N, in quanto la funzione τ vicino a q è costante (τ nei punti vicini a q non può crescere a causa della semicontinuità, nè diminuire, perchè $\tau(q)$ è il valore minimo assunto da τ su U). Si è dunque provato che in un intorno U comunque piccolo di x esistono punti $q \in N$. Ciò dimostra precisamente la nostra tesi.

LEMMA 13. *Il corpo valutato completo K abbia caratteristica zero. L'insieme analitico X definito sul corpo K sia ridotto. Allora l'insieme N dei punti nei quali $\tau(p)$ è continua coincide con l'insieme M dei punti nei quali A_p è regolare.*

DIMOSTRAZIONE: È chiaro che da $p \in M$ segue $p \in N$. Viceversa, sia $p \in N$; in base alla caratterizzazione dei punti di M, fornita nel lemma 10, si tratta di far vedere che, realizzato localmente X nello spazio tangente di Zariski T_p, X copre tutto un intorno aperto di p in T_p; se così non fosse, dovrebbero esistere delle funzioni $f \in K\{x_1, \dots, x_\tau\}$ non identicamente nulle in T_p, e identicamente nulle su X (in un conveniente intorno di p). Poichè X è ridotto, tutte queste funzioni f appartengono ad $\mathfrak{m}_p$. Lo sviluppo di Taylor di una siffatta funzione f nel punto p:

$$f = f_k + f_{k+1} + \dots \qquad (f_k \not\equiv 0)$$

deve cominciare necessariamente da una componente omogenea di grado $k \geq 2$, perchè se vi comparisse un termine lineare non nullo, lo spazio tangente di Zariski ad X nel punto p sarebbe propriamente contenuto nello spazio ambiente in cui X è localmente immerso, contro l'ipotesi che questi due spazi coincidano. Scegliamo f in modo che k sia il minimo possibile. Almeno una delle derivate di f_k rispetto alle coordinate $x_1, \dots, x_\tau$ di T_p $\left(\text{ad es. } \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)$ non è identicamente nulla vicino a p (si ricordi che K ha caratteristica zero). Poichè lo sviluppo di Taylor di $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ha un termine iniziale di grado $k-1$, dalla scelta di f, con k minimo risulta che la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ non può essere identicamente nulla su X. Viceversa $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ dev'essere identicamente nulla nei punti di X, in un conveniente intorno V di p, perchè altrimenti, comunque fissato V, in qualche punto $q=(q_1, \dots, q_\tau) \in X \cap V$ si avrebbe $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_q \neq 0$, onde lo sviluppo di f nel punto q:

$$f = \sum_{i=1}^{\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_q (x_i - q_i) + [2]$$

avrebbe termine lineare non nullo, e risulterebbe $\tau(q) < \tau(p)$, cioè la dimensione degli spazi tangenti di Zariski non sarebbe costante vicino a p, contro l'ipotesi che $p \in N$.

I risultati conseguiti finora si possono riassumere nel

TEOREMA 3. *Il corpo valutato completo non discreto K abbia caratteristica zero. L'insieme analitico X su K sia ridotto. Allora i punti regolari di X costituiscono un sottoinsieme aperto ovunque denso M di X; nei punti $p \in M$ si ha:*

$$\delta(p) = \tau(p) = \mathrm{dih}_p X.$$

Nei punti $q \in S = X - M$ si ha poi:

$$\mathrm{dih}_q X \leq \min_{\substack{x \to q \\ x \in M}} \lim \delta(x) \leq \delta(q) < \tau(q).$$

OSSERVAZIONE: La disuguaglianza $\mathrm{dih}_q X \leq \min\lim_{x \to q} \delta(x) \leq \delta(q)$ precisa nel caso in esame, la disuguaglianza del teorema 1.

§ 5. Da ora in poi sia sempre $K = \mathbf{C}$, e gli insiemi analitici siano tutti ridotti.

TEOREMA 4. *Sia X un insieme analitico* (ridotto, definito sul corpo $\mathbf{C}$); *M l'insieme dei punti regolari di X; in ogni punto $p \in X$ si ha:*

$$\delta(p) = \max_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \tau(x).$$

OSSERVAZIONI: 1). Il secondo membro di questa uguaglianza è ben definito, perchè M è ovunque denso in X (cfr. i lemmi 12 e 13). Inoltre nei punti di M il teorema è ovviamente vero, perchè in tali punti la funzione τ è localmente costante.

2). Poichè nei punti di M si ha $\tau(x) = \delta(x)$, l'uguaglianza del teorema 4 è equivalente con l'uguaglianza

$$\delta(p) = \max_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \delta(x).$$

Alla dimostrazione del teorema 4 occorre premettere alcune nozioni sulla struttura locale degli insiemi analitici (ridotti, definiti sul corpo complesso); queste nozioni sono note; tuttavia, data la frammentarietà della letteratura originale, ne daremo una dimostrazione nell'appendice al presente lavoro.

Diremo che l'insieme analitico X è *irriducibile nel punto* p, se l'ideale $\mathfrak{A}$ (che individua X nel punto p) è primo. L'ideale $\mathfrak{A}$ che definisce un insieme analitico X in un suo punto p, non è detto che sia primo; però, avendo supposto X ridotto, ne segue che $\mathfrak{A}$ coincide col proprio radicale; poichè inoltre $\mathfrak{O}_p^n$ è un anello noetheriano, $\mathfrak{A}$ si può scrivere in modo unico come intersezione di un numero finito di ideali primi, nessuno dei quali contiene l'intersezione degli altri:

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{p}^{(j)}, \qquad \mathfrak{p}^{(h)} \not\supset \bigcap_{j \neq h} \mathfrak{p}^{(j)}$$

(a priori i $\mathfrak{p}^{(j)}$ sono primari, ma da $\mathfrak{A} = \operatorname{rad} \mathfrak{A}$ segue subito che essi sono addirittura primi).

PROPOSIZIONE 5. *Sia X un insieme analitico* (ridotto), *realizzato in un aperto di $\mathbf{C}^n$. Fissato un punto $p \in X$, esiste un aperto opportunamente piccolo $U \subset \mathbf{C}^n$, ed un numero finito r di insiemi analitici $X_1, \dots, X_r$, definiti su U, godenti delle proprietà seguenti:*

(a) *Ciascun X_j è individuato nel punto p dell'ideale $\mathfrak{p}^{(j)}$, e quindi gli X_j sono tutti irriducibili in p.*

(b) *Restringendo X all'aperto U, si ha $X = \bigcup X_j$.*

(c) *Sull'aperto U, o anche restringendo tutti gli insiemi analitici ad un qualunque aperto $U_0 \subset U$, si ha per ogni h : $X_h \not\subset \bigcup_{j \neq h} X_j$.*

(d) *Detto M_j l'insieme dei punti regolari di X_j, ed M l'insieme dei punti regolari di $X \mid U$, si ha:*

$$M = \bigcup_{j=1}^{r} M_j - \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j).$$

(e) *Gli insiemi X_j sono univocamente determinati, nel senso che, data una ulteriore decomposizione di X in insiemi analitici irriducibili in p : $X = \bigcup_{h=1}^{s} X'_h$, si ha $r = s$, ed esiste un intorno opportunamente piccolo di p su cui ciascun X_i coincide con un X'_h.*

Studiamo ora la struttura di un insieme analitico X, realizzato in $\mathbf{C}^n$, che sia *irriducibile* nel suo punto p. Il sistema di coordinate di $\mathbf{C}^n$ sia privilegiato per l'ideale $\mathfrak{A}$; per semplicità di notazione supponiamo che p sia l'origine delle coordinate, e indichiamo con d il numero di parametri di $\mathfrak{A}$; detto $\mathbf{C}^d$ lo spazio delle prime d variabili, e $\pi : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^d$ la proiezione $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_d)$, si ha la:

PROPOSIZIONE 6. *In un intorno sufficientemente piccolo W dell'origine di $\mathbf{C}^d$ esiste una funzione analitica non identicamente nulla Δ tale che, posto $D = \{x \in W \mid \Delta(x) = 0\}$, si ha:*

(a) *Ogni punto* $z \in W - D$ *è proiezione dello stesso numero* $\nu \geq 1$ *di punti di* X.

(b) *Quando* $z \rightarrow 0$ *in* $\mathbf{C}^d$, *fuori del luogo* D, *i* ν *punti di* $\pi^{-1}(z) \cap X$ *tendono a* 0 *in* $\mathbf{C}^n$.

(c) $X \cap \pi^{-1}(W - D)$ *è un insieme analitico in* $\mathbf{C}^n$, *privo di punti singolari.*

(d) *Ogni punto di* $X \cap \pi^{-1}(W - D)$ *possiede un intorno* V *in* X, *che è in isomorfismo analitico con la propria proiezione* $\pi(V)$, *la quale è un sottoinsieme analitico aperto di* $\mathbf{C}^d$.

(e) *La chiusura di* $X \cap \pi^{-1}(W - D)$ *è tutto* $X \cap \pi^{-1}(W)$.

X sia sempre irriducibile nel punto $\{0\}$; dalla proposizione 6, c risulta che l'insieme S dei punti singolari di X è contenuto in $\pi^{-1}(D)$; ma sulla struttura di S si può dire di più:

PROPOSIZIONE 7. (a) *L'insieme singolare* S (*ristretto ad un conveniente intorno di* $\{0\}$) *è un sottoinsieme analitico di* X.

(b) $M = X - S$ *è connesso per archi nel punto* $\{0\}$, *cioè, dato ad arbitrio un intorno* U_0 *di* $\{0\}$ *in* $\mathbf{C}^n$, *esiste un intorno* $W_0 \subset U_0$, *tale che* $M \cap W_0$ *è connesso per archi.*

(c) *Nel punto* $\{0\}$ *la dimensione di Krull associata ad* S *è strettamente inferiore della dimensione di Krull associata ad* X.

Rimandiamo la dimostrazione di queste tre proposizioni all'appendice, e passiamo a provare il teorema 4.

Esaminiamo separatamente due casi:

I). X sia irriducibile in p. Dalla proposizione 6, d segue che nei punti $x \in X \cap \pi^{-1}(W - D)$ si ha $\tau(x) = d(x) = d(p)$. I punti siffatti sono densi in X, vicino al punto p (proposizione 6, e), quindi a fortiori tali punti che appartengono ad M, sono densi in M. D'altra parte M è connesso per archi in p (proposizione 7, *b*) onde τ è costante su M in un conveniente intorno di p; pertanto in tutti i punti $x \in M$ sufficientemente vicini a p si ha $\tau(x) = d(p)$. Poichè $d(p) = \delta(p)$ (teorema 2), il teorema 4 è provato nel caso che X sia irriducibile in p.

II). X sia riducibile in p. Si osservi che, decomposto X nell'unione di insiemi irriducibili $X = \bigcup X_i$ (cfr. la proposizione 5) si ha nel punto p:

$\delta(p) =$ dim. di Krull di $X = \max\limits_i$ (dim. di Krull di X_i). Per provare il teorema 5 in generale, basta quindi far vedere che

$$\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau(x) = \max_i \left(\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M_i}} \tau_i(x)\right),$$

ove τ_i indica la dimensione dello spazio tangente di Zariski ad X_i.

Dalla proposizione 5, d segue immediatamente la validità della disuguaglianza

$$\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau(x) \leq \max_i \, (\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M_i}} \tau_i(x)).$$

Per provare la disuguaglianza opposta, si consideri uno degli insiemi X_i, per il quale il numero $\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \to M}} \tau_i(x)$ sia il più grande possibile; sia ad es. $i = 1$. In un intorno U_0 arbitrariamente piccolo di p, esistono punti $q \in X_1$ che non appartengono ad $\bigcup_{j \neq 1} X_j$ (proposizione 5, c); poichè $\bigcup_{j \neq 1} X_j$ è un insieme chiuso, esiste tutto un intorno $W \ni q$, che non interseca $\bigcup_{j \neq 1} X_j$; inoltre possiamo scegliere $W \subset U_0$. In virtù del lemma sulla densità dei punti regolari (paragrafo precedente) devono esistere su $X_1 \cap W$ punti x di M (che certo appartengono ad M_1). In tali punti evidentemente $\tau(x) = \tau_1(x)$. D'altra parte, per quanto visto nel I^0) caso, τ_1 è costante su M_1, vicino a p; riassumendo: esistono punti $x \in M$ arbitrariamente vicini a p, nei quali si ha

$$\tau(x) = \tau_1(x) = \max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M_1}} \tau_1(x) = \max_i \, (\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M_i}} \tau_i(x)) ;$$

ne segue

$$\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau(x) \geq \max_i \, (\max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \tau_i(x)),$$

e ciò conclude la dimostrazione del teorema 4.

Il teorema 4, nel caso che X sia irriducibile in p, si può riformulare anche dicendo che:

Se X è irriducibile in p, la funzione $\delta(x)$ $(x \in X)$ è costante su un opportuno intorno di p. Noi proveremo più in generale il seguente:

COROLLARIO. *Se nel punto $p \in X$ la spiga A_p è un anello di Cohen-Macaulay* (8) *allora la funzione $\delta(x)$ $(x \in X)$ è costante su un opportuno intorno di p.*

DIMOSTRAZIONE: Dai teoremi 3 e 4 si deduce

$$\operatorname{dih}_p X \leq \min \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \delta(x) \leq \max \lim_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \delta(x) = \delta(p) ;$$

(8) In linguaggio geometrico l'essere A_p di Cohen-Macaulay si esprime dicendo che l'insieme analitico X è *intersezione completa* nel punto p.

tenuto conto dell'ipotesi $\operatorname{dih}_p X = \delta(p)$, ne segue

$$\min_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \delta(x) = \max_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \delta(x).$$

Poichè δ è a valori interi, deve quindi esistere un opportuno intorno $V \ni p$ tale che δ sia costante nei punti di $M \cap V$. Nei punti di $(X - M) \cap V$ si ha poi, a norma del teorema 4, $\delta(q) = \max\limits_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \delta(x) = \delta(p)$, il che prova che δ è costante in tutti i punti di $X \cap V$, come volevasi dimostrare.

Questo corollario prova in particolare che se A_p è di Cohen-Macaulay, tutte le componenti irriducibili di X nel punto p hanno la stessa dimensione di Krull $\delta(p)$.

§ 6. Per quanto visto precedentemente, i tre numeri $\delta(p)$, $d(p)$, $\max\limits_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \tau(x)$ sono tra loro uguali in ciascun punto $p \in X$ (X insieme analitico sul corpo $\mathbf{C}$). D'altra parte X, in quanto spazio topologico, possiede altresì in ogni suo punto p una *dimensione topologica* $t(p)$ (che si può definire ad es. come in HUREWICZ-WALLMAN [6], Cap. III).

TEOREMA 5. — *In ogni punto $p \in X$ si ha:*

$$t(p) = 2\,\delta(p)$$

(e quindi anche $t(p) = 2\,d(p) = 2 \max\limits_{\substack{x \to p \\ x \in M}} \lim \tau(x)$).

DIMOSTRAZIONE: Il teorema è evidentemente vero se p è un punto regolare, perchè in tal caso p possiede in X un intorno omeomorfo con un aperto di $\mathbf{C}^{\delta}$, vale a dire con un aperto di $\mathbf{R}^{2\delta}$.

Se p è qualunque, cioè non necessariamente regolare, si procede per induzione su δ: I). Il teorema è sicuramente vero per $\delta(p) = 0$, perchè allora p è un punto isolato di X.

II). $\delta(p)$ sia arbitrario. Indichiamo sempre con M l'insieme dei punti regolari, e con $S = X - M$ l'insieme dei punti singolari di X. Se X è riducibile, sia poi $X = \bigcup X_i$ la sua decomposizione in insiemi irriducibili, e sia M_i l'insieme dei punti regolari di X_i. La dimensione di Krull di S è minore di $\delta(p)$ (proposizione 7, c); inoltre δ è semicontinua superiormente (lemma 7), e quindi la dimensione di Krull di S è minore di $\delta(p)$ in tutti i punti di un intorno opportunamente piccolo di p, onde è applicabile il nostro teorema (ipotesi di induzione); vale a dire in tutti i punti di un opportuno intorno $U_1 \ni p$ la dimensione topologica di S è $\leq 2\,\delta(p) - 2$.

Siano $X_1, \dots, X_s$ le componenti irriducibili di X che hanno in p dimensione di Krull massima $\delta(p)$. Per le restanti componenti $X_{s+1}, \dots, X_r$ si può ripetere lo stesso ragionamento già fatto per S, onde in tutti i punti di un opportuno intorno $U_2 \ni p$ la dimensione topologica di $X_{s+1}, \dots, X_r$ è $\leq 2\,\delta(p) - 2$. Pertanto anche la dimensione topologica dell'unione $S \cup X_{s+1} \cup \dots \cup X_r$ in tutti i punti di $U_1 \cap U_2$ è $\leq 2\delta(p) - 2$ (cfr HUREWICZ-WALLMAN [6], teor. III, 2, pag. 30). L'insieme $X - (S \cup X_{s+1} \cup \dots \cup X_r) = (M_1 \cup \dots \cup M_s) \cap M$ è un insieme analitico non singolare, che per costruzione ha in tutti i punti di un opportuno intorno $U_3 \ni p$ dimensione di Krull $\delta(p)$, ossia dimensione topologica $2\,\delta(p)$. Restringiamo tutti gli insiemi analitici considerati ad $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. X è riunione dei suoi due sottoinsiemi $X - (S \cup X_{s+1} \cup \dots \cup X_r)$ ed $S \cup X_{s+1} \cup \dots \cup X_r$, i quali hanno entrambi dimensione topologica non superiore a $2\delta(p)$. Poichè $S \cup X_{s+1} \cup \dots \cup X_r$ è chiuso, anche X ha dimensione topologica non superiore a $2\delta(p)$ (cfr. HUREWICZ-WALLMAN [6], Coroll. 1 a pag. 32).

Se si osserva infine che uno dei due insiemi in cui è stato decomposto X ha nel punto p proprio dimensione topologica $2\delta(p)$, ne segue l'affermazione del teorema 5.

APPENDICE

Per dimostrare le proposizioni 5, 6, 7, del § 5 faremo uso di due teoremi fondamentali della teoria degli insiemi analitici, che quì ci limitiamo ad enunciare:

TEOREMA DEGLI ZERI DI HILBERT. *L'ideale* $\mathfrak{I}$ *di* $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ *sia generato da* $f_1, \dots, f_s$. *Se* $f \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ *è una funzione identicamente nulla nei punti* $\{f_1(x) = 0, \dots, f_s(x) = 0\}$ *di un opportuno intorno di* $\{0\}$, *allora una potenza* f^r *di* f *appartiene ad* $\mathfrak{I}$.

Se in particolare l'ideale $\mathfrak{I}$ *è primo, il teorema è vero già prendendo* $r = 1$.

Per la dimostrazione, cfr. ad es. [11] Exp. XIV, e ROSSI [10], teorema 2.4.

TEOREMA DI COERENZA DI OKA-CARTAN. *Sia* U *un aperto di* $\mathbf{C}^n$; $f_1, \dots, f_s$ *siano funzioni olomorfe su* U. *Posto* $V = \{x \in U \mid f_1(x) = 0, \dots, f_s(x) = 0\}$, *il fascio di ideali* $\mathfrak{I}(V)$ *dei germi di funzioni olomorfe nulle su* V *è coerente.*

Per la dimostrazione, cfr. ad es. [11], Exp. XVI.

Ci servirà inoltre il seguente

COROLLARIO AL TEOREMA DI OKA-CARTAN. *$f \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ sia una funzione prima con l'ideale primo $\mathfrak{p}$, generato nell'origine di $\mathbf{C}^n$ da $f_1, \dots, f_s$. Esiste un intorno U opportunamente piccolo dell'origine, tale che in tutti i punti $p \in V \mid U$, f sia prima con l'ideale $(f_1, \dots, f_s)_p$ generato da $f_1, \dots, f_s$ nel punto p.*

DIMOSTRAZIONE: Sia

$$\gamma^{(i)}, \gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_s^{(i)} \qquad (i = 1, \dots, N)$$

un sistema di generatori per il modulo delle relazioni tra $f, f_1, \dots, f_s$ in un intorno U di $\{0\}$ (un tale insieme di generatori esiste, per il teorema di Oka-Cartan). Se $fg \in (f_1, \dots, f_s)_p$, g dev'essere della forma $g = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \gamma^{(i)}$, con $\lambda_i \in \mathbf{C}\{x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n\}$. Ma $f\gamma^{(i)} \in \mathfrak{p}$, e quindi, avendo supposto f prima con $\mathfrak{p}$, ne segue $\gamma^{(i)} \in \mathfrak{p}$, onde $g \in (f_1, \dots, f_s)_p$ Quindi da $fg \in (f_1, \dots, f_s)_p$ segue $g \in (f_1, \dots, f_s)_p$; ciò prova precisamente il corollario.

Prima di passare alla dimostrazione delle proposizioni 5, 6, 7 dobbiamo ancora ricordare tre lemmi sulla struttura locale degli insiemi analitici irriducibili (9).

Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$; il sistema di coordinate sia privilegiato per $\mathfrak{p}$. Detto d il numero di parametri di $\mathfrak{p}$, sia Q_d il corpo quoziente di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$. Poichè $\mathfrak{p}$ è primo, si può considerare il corpo quoziente del dominio di integrità $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{p}$; da lemma 5 risulta che questo corpo quoziente è $Q_d[y_{d+1}, \dots, y_n]$ (ove y_{d+j} è l'immagine omomorfa di x_{d+j}, mod $\mathfrak{p}$). Il teorema dell'elemento primitivo (cfr. VAN DER WAERDEN [15], Vol I, pag. 120) assicura che esiste un elemento $y = \sum_{i=1}^{n-d} c_i y_{d+i}$ ($c_i \in \mathbf{C}$) tale che $Q_d[y_{d+1}, \dots, y_n] = Q_d[y]$. Dall'espressione di y risulta $y \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}[y_{d+1}, \dots, y_n]$ e quindi y è intero su $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$. Indicando con $z = \sum_{i=1}^{n-d} c_i x_{d+i}$ una nuova indeterminata, sia

$$q(z) = z^\nu + \sigma_1 z^{\nu-1} + \dots + \sigma_\nu \qquad (\sigma_i \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\})$$

il polinomio minimo di y. Indichiamo con Δ il discriminante di q. Ciascun y_{d+i} può essere scritto nella forma

$$y_{d+i} = \frac{\omega_{d+i}(x_1, \dots, x_d, y)}{\Delta(x_1, \dots, x_d)} \qquad \text{con } \omega_{d+i} \in C\{x_1, \dots, x_d\}[y]$$

(cfr. [15], vol II, pag. 94).

---

(9) I lemmi 14, 15, 16 sono altresì alla base delle dimostrazioni del teorema degli zeri di Hilbert e del teorema di Oka-Cartan.

OSSERVAZIONE: Il polinomio minimo $q(z)$ di y (a coefficienti nell'anello $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$) è privilegiato; infatti $q(z)$ è «preparato» onde, moltiplicato per una opportuna unità di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$ a norma del teorema di Weierstrass, dà luogo ad un polinomio privilegiato, che ha ugual grado (per la minimalità) e quindi coincide con $q(z)$.

Analogamente, siano $q_{d+i}(x_{d+i})$ i polinomi minimi di y_{d+i} (a coefficienti nell'anello $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}$, e con coefficiente di grado massimo 1). Per la stessa ragione anche i q_{d+i} sono privilegiati.

LEMMA 14. *Sia U un intorno dell'origine di $\mathbf{C}^n$, arbitrariamente fissato; esiste un intorno U_d dell'origine di $\mathbf{C}^d$, tanto piccolo che:*

1) Δ nonchè tutti i coefficienti dei polinomi q, q_{d+j}, ω_{d+j} sono olomorfi su tutto U_d.

2) Dato un punto $a = (a_1, \dots, a_d) \in U_d$, con $\Delta(a) \neq 0$, in corrispondenza ad ognuna delle ν soluzioni $\zeta^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \dots, \nu)$ di $q(a_1, \dots, a_d, z) = 0$, il punto di $\mathbf{C}^n$:

$$\left(a_1, \dots, a_d, \frac{\omega_{d+1}(a, \zeta^{(\alpha)})}{\Delta(a)}, \dots, \frac{\omega_n(a, \zeta^{(\alpha)})}{\Delta(a)}\right)$$

appartiene ad U.

DIMOSTRAZIONE: Un U_d soddisfacente alla condizione 1 esiste evidentemente. Per provare che esistono degli U_d soddisfacenti anche alla condizione 2, basta osservare che $\dfrac{\omega_{d+j}(a, \zeta^{(\alpha)})}{\Delta(a)}$ è uno zero del polinomio privilegiato $q_{d+j}(a_1, \dots, a_d, x_{d+j})$ e quindi lo si può rendere arbitrariamente vicino all'origine, pur di prendere gli $a_1, \dots, a_d$ opportunamente piccoli.

Per brevità indicheremo con a_{d+j} $(j = 1, \dots, n-d)$ i numeri $\dfrac{\omega_{d+j}(a, \zeta^{(\alpha)})}{\Delta(a)}$ associati ad una soluzione $\zeta^{(\alpha)}$ arbitraria, ma fissata, di $q(a, z) = 0$. Il significato geometrico dei punti $(a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n)$ è chiarito dai due lemmi seguenti:

LEMMA 15. *Sia f una funzione appartenente all'ideale primo $\mathfrak{p} \subset \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$. Esistono due aperti U, U_d soddisfacenti alle condizioni del lemma 14, tali che f è olomorfa su U, e per ogni d-upla $(a_1, \dots, a_d) \in U_d$, con $\Delta(a_1, \dots, a_d) \neq 0$, si ha $f(a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Preliminarmente si osservi che appartengono a $\mathfrak{p}$ gli pseudopolinomi privilegiati $q_{d+j}(x_{d+j}) \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}[x_{d+j}]$ e che, dividendo f per questi pseudopolinomi, f risulta equivalente in un opportuno intorno U dell'origine di $\mathbf{C}^n$ con una funzione $g \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}[x_{d+1}, \dots, x_n]$; $g \in \mathfrak{p}$. Pertanto basta dimostrare il lemma 15 per le funzioni g, $q_{d+1}, \dots, q_n$, che sono tutte polinomiali in $x_{d+1}, \dots, x_n$. Sia dunque $f \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}[x_{d+1}, \dots, x_n]$; $f \in \mathfrak{p}$. Detto t il grado totale di f in $x_{d+1}, \dots, x_n$, si ha:

$$\Delta^t \cdot f\left(x_1, \dots, x_d, \frac{\omega_{d+1}(z)}{\Delta}, \dots, \frac{\omega_n(z)}{\Delta}\right) \in \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_d\}[z].$$

Sostituendo l'indeterminata z con la propria immagine omomorfa y, e ricordando che $f \in \mathfrak{p}$, si ottiene

$$\Delta^t \cdot f\left(x_1, \dots, x_d, \frac{\omega_{d+1}(y)}{\Delta}, \dots, \frac{\omega_n(y)}{\Delta}\right) = 0;$$

ciò prova che $\Delta^t \cdot f\left(x_1, \dots, x_d, \frac{\omega_{d+1}(z)}{\Delta}, \dots, \frac{\omega_n(z)}{\Delta}\right)$ è un multiplo, in $\mathbf{C}\{x_1, \dots$ $\dots, x_d\}[z]$, del polinomio minimo di y, che è $q(z)$. Particolarizzando $(x_1, \dots, x_d)$ con $(a_1, \dots, a_d)$ e z con un $\zeta^{(\alpha)}$ tale che $q(a_1, \dots, a_d, \zeta^{(\alpha)}) = 0$, ne segue $\Delta^t(a_1, \dots, a_d) \cdot f(a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n) = 0$. Poichè $\Delta^t(a_1, \dots, a_d) \neq 0$, si ottiene la tesi.

LEMMA 16. *Sia $f_1, \dots, f_s$ un sistema di generatori di $\mathfrak{p}$. Esiste un aperto V contenente l'origine di $\mathbf{C}^n$, ed in corrispondenza a V un aperto V_d in $\mathbf{C}^d$ (V, V_d soddisfacenti alle condizioni del lemma* 14) *tali che, dato un punto $(a_1, \dots, a_d) \in V_d$ con $\Delta(a_1, \dots, a_d) \neq 0$, gli unici punti di V sopra $(a_1, \dots, a_d)$ nei quali si annullano tutte le $f_1, \dots, f_s$, siano i ν punti della forma $(a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n)$.*

DIMOSTRAZIONE: Si ha $q\left(x_1, \dots, x_d, \sum_{i=1}^{n-d} c_i x_{d+i}\right) \in \mathfrak{p}$; così pure $\Delta(x_1, \dots, x_d) x_{d+j} - \omega_{d+j}(x_1, \dots, x_d, \Sigma c_i x_{d+i}) \in \mathfrak{p}$ $(j = 1, \dots, n-d)$, e quindi in un opportuno intorno V dell'origine di $\mathbf{C}^n$ tutte queste funzioni sono combinazioni lineari delle $f_1, \dots, f_s$. Scelto in corrispondenza a V un intorno V_d, per cui vale il lemma 14, sia $(a_1, \dots, a_d, b_{d+1}, \dots, b_n) \in V$ un punto in cui si annullano $f_1, \dots, f_s$. In tale punto si annullano quindi anche q, $\Delta \cdot x_{d+j} - \omega_{d+j}$ $(j = 1, \dots, n-d)$; poichè queste funzioni si annullano sopra $(a_1, \dots, a_d)$ solo nei ν punti $(a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_n)$, segue la tesi.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 6: I lemmi 14, 15 e 16 dimostrano le affermazioni (a) e (b). Si osservi poi che (c) è conseguenza immediata di (d). Dimostriamo (d): Nel punto considarato si ha per ipotesi $\Delta(a_1, \dots, a_d) \neq 0$; se $(a_1, \dots, a_d, \zeta^{(\alpha)})$ è uno zero di $q(x_1, \dots, x_d, z)$, il teorema delle funzioni implicite permette di esprimere in un opportuno intorno di $(a_1, \dots, a_d, \zeta^{(\alpha)})$ la z come funzione olomorfa delle $x_1, \dots, x_d$; poichè su tale intorno si ha $\Delta \neq 0$, ciascuna x_{d+j} è funzione olomorfa di $x_1, \dots, x_d, z$, e quindi anche funzione olomorfa delle sole $x_1, \dots, x_d$:

$$x_{d+j} = \varphi_{d+j}(x_1, \dots, x_d).$$

Con ciò si è ottenuta una rappresentazione parametrica di X in un conveniente intorno del punto considerato, il che prova (d). Dimostriamo (e): La funzione $\Delta(x_1, \dots, x_d)$, dipendendo solo dalle prime d variabili, non appartiene a $\mathfrak{p}$, quindi è prima con $\mathfrak{p}$. Per il corollario al teorema di *Oka Cartan* esiste tutto un intorno U di $\{0\}$ in $\mathbf{C}^n$, tale che nei punti $x \in X \mid U$, Δ sia primo con l'ideale generato da $f_1, \dots, f_s$ (sistema di generatori di $\mathfrak{p}$). Pertanto Δ non può annullarsi identicamente su X in alcun intorno di x, vale a dire ogni punto di $X \cap U$ è punto di accumulazione di punti di $X \cap \cap (U - \pi^{-1}(D))$; ciò prova che X è contenuto nella chiusura di $X \cap \cap (U - \pi^{-1}(D))$. D'altra parte X stesso è un sottoinsieme chiuso di U, onde X coincide con la chiusura di $X \cap (U - \pi^{-1}(D))$.

Per dimostrare la proposizione 7 è utile la seguente caratterizzazione jacobiana dei punti regolari di un insieme analitico X irriducibile nel punto $\{0\}$. Sia $\mathfrak{p}$ l'ideale primo che individua X in $\{0\}$; sia poi $f_1, \dots, f_s$ un sistema di generatori per l'ideale $\mathfrak{p}$. Su un opportuno intorno $U \ni \{0\}$ le funzioni $f_1, \dots, f_s$ generano il fascio di ideali che definisce X. Poniamo

$$\varrho(p) = \text{rango}\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_s)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)_p \qquad p \in X \cap U;$$

$$r = \max \lim_{\substack{p \to \{0\} \\ p \in X}} \varrho(p).$$

Criterio dello jacobiano: Su un conveniente intorno W di $\{0\}$, i punti regolari di X sono esattamente i punti $p \in X \cap W$ nei quali $\varrho(p) = r$.

DIMOSTRAZIONE: Siano $M, M', M'', \dots$ i minori di ordine r della matrice $\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_s)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)$. Uno almeno di questi, sia ad es. M, non è identicamente nullo su X vicino a $\{0\}$. Sia $W \subset U$ un intorno di $\{0\}$ tale che:

1) $r = \max_{p \in X \cap W} \varrho(p)$;

2) Su W valga il corollario al teorema di *Oka-Cartan,* relativo ad M.

Da 2) risulta che, comunque fissato un punto $p \in X \cap W$, M non può essere identicamente nullo su X vicino a p, onde l'insieme S dei punti in cui tutti i minori di ordine r sono nulli è certo non denso in X. Inoltre S è chiuso in X. Pertanto i punti di discontinuità di $\varrho(p)$ su $X \cap W$ sono esattamente quelli nei quali $\varrho(p) < r$. D'altra parte si ha

$$\tau(p) = n - \text{rango}\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_s)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)_p \qquad p \in X \cap W$$

(cfr. la dimostrazione della proposizione 3). Quindi i punti di discontinuità di τ su $X \cap W$ sono quelli nei quali $\varrho(p) < r$. Tenuto conto del lemma 13, ne segue il criterio jacobiano.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 7 : (a) Il criterio jacobiano assicura che su un conveniente intorno $W \ni \{0\}$, l'insieme singolare S di X è definito da $S \cap W = \{x \in W \mid M(x) = 0, M'(x) = 0, \dots\}$, e quindi è certamente un insieme analitico. (b) Il gruppo di monodromia del rivestimento $\pi : X \cap \pi^{-1}(W - D) \longrightarrow W - D$ coincide, vicino a $\{0\}$, col gruppo di Galois di $q(z)$, il quale è transitivo, onde si può passare da un foglio all'altro del rivestimento con un cammino continuo. Ciò prova che la varietà $X \cap \pi^{-1}(W - D)$ è connessa in $\{0\}$. D'altra parte questa varietà è ovunque densa nella varietà $(X - S) \cap \pi^{-1}(W)$, e quindi anche quest'ultima è connessa in $\{0\}$. (c) Da (a) risulta che in un conveniente interno di $\{0\}$, S è un sottoinsieme analitico, propriamente contenuto nell'insieme analitico X, il quale è irriducibile in $\{0\}$. Ciò significa che l'ideale $\mathfrak{P}$ associato ad S contiene propriamente l'ideale primo $\mathfrak{p}$ associato ad X in $\{0\}$. Ora la dimensione di Krull di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ è data dal massimo numero intero e, tale che esista una catena di ideali primi $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_e$ di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, con $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_e$ (che ciò equivalga alla definizione di dimensione di Krull data nel § 1 si vede subito, perchè gli ideali primi di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ contenenti $\mathfrak{P}$ sono in corrispondenza biunivoca naturale con gli ideali primi di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$). La dimensione di Krull δ di $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{p}$ è certo $\geq e + 1$, perchè almeno una catena $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'_0 \subset \mathfrak{p}'_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_{e+1}$ esiste sicuramente; basta prendere ad es. $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'_{i+1} = \mathfrak{p}_i$ $(i = 0, \dots e)$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 5: L'ideale $\mathfrak{P}_p = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{p}^{(j)}$ che individua X nel punto p sia generato da $(f_1, \dots, f_s)$; $\mathfrak{p}^{(j)}$ sia generato in p da $(f_1, \dots, f_s, g_1^{(j)}, \dots, g_{t_j}^{(j)})$. Tutte queste funzioni sono olomorfe su un certo $W_j \ni p$. Si considerino tutti i prodotti

$$g_{\alpha_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot g_{\alpha_r}^{(r)} \qquad (\alpha_j = 1, \dots, t_j).$$

Esiste un intorno $W \ni p$; $W \subset W_j$ $(j = 1, \dots, r)$ nei punti del quale tutti questi prodotti (che sono in numero finito ed appartengono ad $\mathfrak{P}_p$) sono combinazioni lineari di elementi di $\mathfrak{P}_p$. Poniamo

$$Y_j = \{x \in W \mid f_1(x) = 0, \dots, f_s(x) = 0,\ g_1^{(j)}(x) = 0, \dots, g_{t_j}^{(j)}(x) = 0\}.$$

Per il teorema di Oka-Cartan Y_j è un insieme analitico (ridotto). Nel punto p la spiga del fascio di ideali che individua Y_j è proprio $\mathfrak{p}^{(j)}$ (teorema degli zeri di Hilbert per ideali primi) onde il fascio di ideali di Y_j è generato in tutti i punti di un opportuno intorno U_j dalle funzioni $f_1, \dots, f_s, g_1^{(j)}, \dots, g_{t_j}^{(j)}$.

Per ogni j si fissi poi una funzione $\varphi^{(j)} \in \bigcap_{h \neq j} \mathfrak{p}^{(h)}$, $\varphi^{(j)} \notin \mathfrak{p}^{(j)}$. Dal corollario al teorema di Oka-Cartan risulta che esiste tutto un intorno $V_j \ni p$ nei cui punti q $\varphi^{(j)}$ è prima con l'ideale che definisce Y_j in q. L'intorno V_j si può scegliere inoltre tanto piccolo che $\varphi^{(j)}$ sia identicamente nulla su $(\bigcap_{h \neq j} Y_h) \mid V_j$.

Sia

$$U = (\bigcap_j U_j) \cap (\bigcap_j V_j)$$

e si considerino gli insiemi analitici Y_j ristretti ad U: $X_j = Y_j \mid U$. Gli insiemi analitici X_j verificano tutte le condizioni della proposizione 5:

(a) È evidente.

(b) Per costruzione si ha $X \supset \bigcap_j X_j$; ma viceversa, dato $q \in X$, se fosse $q \notin \bigcup X_j$ esisterebbe per ogni j almeno una $g_{\alpha_j}^{(j)}$ non nulla in q; ciò è assurdo perchè il prodotto $g = \prod_j g_{\alpha_j}^{(j)}$ è combinazione lineare dei generatori di $\mathfrak{P}_p$, e quindi sicuramente $g(q) = 0$.

(c) Per costruzione la funzione $\varphi^{(j)}$ è identicamente nulla su $\bigcup_{h \neq j} X_h$, ma, comunque fissato un punto $q \in X_j$, $\varphi^{(j)}$ non è identicamente nulla su X_j vicino a q, vale a dire vicino ad ogni $q \in X_j$ esistono punti di X_j che non appartengono ad $\bigcup_{h \neq j} X_h$.

(d) Si ha l'inclusione evidente

$$M \supset \bigcup_{j=1}^{r} M_j - \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j).$$

Viceversa dato un punto $q \in M$, si pensi X realizzato nel proprio spazio tangente di Zariski T_q in $q \cdot X$ copre un intorno aperto di q in T_q. Sia se possibile $q \in X_i \cap X_j$; X_i ed X_j sono in vicinanza di q due sottoinsiemi analitici chiusi, nessuno dei quali coincidente con X (cfr. (c)). Quindi l'intorno aperto di q in T_q dovrebbe essere unione di un numero finito di suoi sottoinsiemi analitici chiusi, assurdo. Pertanto q appartiene ad un solo X_j, e ne è dunque punto regolare.

(e) Sia se possibile $X = \bigcup_{h=1}^{s} X'_h$ un'altra decomposizione di X; ciascun X'_h è associato ad un ideale primo $\mathfrak{p}^{(h)}$; ciò prova che $s = r$; inoltre, se X_j ed X'_j sono associati allo stesso ideale primo $\mathfrak{p}^{(j)}$, il sistema di generatori di X'_j è in un conveniente intorno di p combinazione lineare del sistema di generatori di X_j, e viceversa, onde su tale intorno si ha $X_j = X'_j$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABHYANKAR: *Concepts of order and rank on a complex space, and a condition for normality.* Math, Annalen **141** (1960) 171-192.

[2] ANDREOTTI — GRAUERT: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. de France **90** (1962).

[3] COHEN: *On the structure and ideal theory of complete local rings.* Trans. Am. Math. Soc. **59** (1946) 54-106.

[4] COHEN — SEIDENBERG: *Prime ideals and integral dependence,* Bull. Am. Math. Soc. **52** (1946) 252-261.

[5] GRAUERT: *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume homplexer Strukturen.* Inst. Hautes Etudes Sci. (Publ. Math. N. 5) Paris 1960.

[6] HUREWICZ — WALLMAN: *Dimension Theory.* Princeton Math. Series 4, Princeton 1941.

[7] KRULL: *Dimensionstheorie in Stellenringen.* Journ. für reine u. angew. Math. von Crelle **179** (1938) 204-226.

[8] NORTHCOTT: *An introduction to Homological Algebra.* Cambridge Univ. Press 1960.

[9] REMMERT — STEIN: *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen.* Math. Annalen **126** (1953) 263-306.

[10] ROSSI: *Analytic Spaces.* Princeton Univ. 1960 (Note mimeografate).

[11] Sém. CARTAN 1951-52. E. N. S. Paris.

[12] Sem. CARTAN 1960-61. E. N. S. Paris.

[13] SERRE: *Algèbre Locale - Multiplicités* (Cours au Collège de France 1957-58) Note mimeografate.

[14] THIMM: *Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen* (Aschendorff Verl.) Münster 1961

[15] VAN DER WAERDEN: *Moderne Algebra* Vol. I (1930), Vol. II (1931). Springer, Berlin.

[16] ZARISKI — SAMUEL: *Commutative Algebra,* Vol. II; Van Nostrand, 1960.