ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BRUNO FORTE

Su di una relazione integrale tra media temporale e media in fase nella statistica dei fenomeni non stazionarî

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 1-2 (1963), p. 13-29

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_1-2_13_0>

SU DI UNA RELAZIONE INTEGRALE TRA MEDIA TEMPORALE E MEDIA IN FASE NELLA STATISTICA DEI FENOMENI NON STAZIONARÎ

BRUNO FORTE (a Roma)

SOMMARIO. — Si stabilisce una relazione integrale tra la media in fase e la media temporale per una data classe di funzioni di fase; questa relazione è ritenuta basilare per una teoria statistica dei fenomeni non stazionarî. Con essa si riconoscono altresì significative proprietà di ricorrenza nei riguardi del moto dei punti rappresentativi nello spazio delle fasi.

INTRODUZIONE. Ai fini di una interpretazione fisica degli schemi adottati e dei risultati conseguiti nella presente nota, sarà qui esposto un procedimento, di carattere generale, con il quale si formula una teoria statistica di fenomeni non stazionarî. Si tratta della naturale estensione a tale tipo di fenomeni del procedimento largamente illustrato e seguito da J. Kampé de Fériet nella trattazione statistica di taluni fenomeni stazionarî (cfr. [1], [2], [3], [4]).

In effetti dall'esame delle teorie classiche riguardanti i fenomeni di evoluzione nel tempo di dati enti naturali, quali i fenomeni di diffusione, il moto dei fluidi, il moto dei corpi elastici, il moto dei sistemi meccanici ad un numero finito di gradi di libertà, si riconosce un comune modo di procedere nella rappresentazione di tali fenomeni.

Si considera lo spazio R_p delle p-ple di numeri reali

$$u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$$

lo spazio R_q delle q-ple di numeri reali

$$x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_q).$$

Si introduce quindi un opportuno spazio astratto X, particolare classe di applicazioni di un dominio C di R_p in R_q, i cui elementi x sono costituiti da q funzioni

$$x_1(u),\ x_2(u), \dots, x_q(u),$$

che soddisfano, eventualmente, ad assegnate condizioni sul contorno di C. Si assume che il generico elemento x dello spazio X caratterizzi, in un qualsivoglia istante t, lo stato fisico attuale del sistema in evoluzione. Le singole funzioni $x_i(u)$ assegneranno di volta in volta: la distribuzione di temperatura in un solido, la distribuzione delle cariche elettriche nello spazio ed il campo elettrico generato da questa distribuzione, la posizione e l'atto di moto di un sistema meccanico e così via.

In questo modo la evoluzione nel tempo del sistema è caratterizzata da una applicazione di R_1 in X cioè da una q-pla di funzioni di u e del tempo t

$$x_1(u,t),\ x_2(u,t), \dots, x_q(u,t).$$

La legge di evoluzione nel tempo (legge del fenomeno) è poi assegnata mediante un sistema di equazioni differenziali del tipo:

a) $$\frac{\partial x_i}{\partial t} = D_i(x_1, x_2, \dots, x_q), \qquad (i = 1, 2, \dots, q).$$

dove i D_i sono dati operatori differenziali che comprendono le derivate parziali delle funzioni x rispetto alle sole variabili u; tali operatori dipendono inoltre con legge nota ed esplicita dalle variabili u ed in generale anche dal tempo t, dipendono dalle sole variabili u nel caso in cui si tratti di un fenomeno stazionario (cfr. [5]).

A questo punto si formula il problema di Cauchy (in grande) per il sistema (a); cioè si assegna un istante t_0 ed in corrispondenza ad esso un punto x_0 in X, si vuole determinare la conseguente legge di evoluzione nel tempo del dato ente fisico, vale a dire la q-pla di funzioni:

$$x(u,t) \equiv \{x_1(u,t),\ x_2(u,t), \dots, x_q(u,t)\}$$

definite in C, per ogni valore di $t \geq t_0$, che soddisfano le equazioni (a) e per le quali sia:

b) $$x(u, t_0) = x_0(u).$$

Per ogni valore t_0 del tempo t nell'insieme R_1 dei numeri reali, si assegna un sottoinsieme X_{t_0} di X quale insieme dei punti rappresentativi degli stati che si riguardano come possibili («accessibili») nell'istante t_0 per il dato sistema fisico. Si ammette che in corrispondenza a ciascun punto

x_0 di X_{t_0}, interpretato come dato (iniziale) relativo all'istante t_0, esista, unica, la soluzione del sistema (a), soddisfacente la condizione (b) (1).

Sia X^* il sottoinsieme di X, unione degli insiemi X_{t_0}, che si hanno per i diversi valori dell'istante iniziale t_0 in R_1.

Sia $x(u)$ un qualsivoglia punto in X_{t_0}, $x(u, t)$ la soluzione che ad esso corrisponde nel relativo problema di Cauchy; per ogni valore di $t \geq t_0$, $x(u, t)$ appartiene certo a X^*. Pertanto le soluzioni che corrispondono, nel senso precisato, ai singoli punti $x(u)$ di X_{t_0} individuano una trasformazione $T_{t_0}^{(\tau)}$ di X_{t_0} in X^*, per ogni valore dell'intervallo di tempo τ nell'insieme dei reali positivi; la trasformazione $T_{t_0}^{(\tau)}$ è definita dalla relazione:

$$\text{c)} \qquad T_{t_0}^{(\tau)}\, x(u) = x(u, t_0 + \tau).$$

La famiglia di trasformazioni $\{T_{t_0}^{(\tau)}\}$, generata dalla trasformazione $T_{t_0}^{(\tau)}$ al variare di t_0 in R_1 e di τ nell'insieme dei reali positivi, assieme ai relativi sostegni $\{X_{t_0}\}$, rappresenta la totalità delle soluzioni del sistema differenziale (a) in X^*.

È utile ricordare che le trasformazioni $T_{t_0}^{(\tau)}$ sono legate tra loro dalla relazione (cfr. [6]):

$$\text{d)} \qquad T_{t_0}^{(\tau)} = T_{t_0+\tau'}^{(\tau)} \cdot T_{t_0}^{(\tau')},$$

per ogni t_0 in R_1, τ' e τ'' reali positivi, $\tau = \tau' + \tau''$. Si ha infatti per la (c):

$$T_{t_0+\tau'}^{(\tau'')} \cdot T_{t_0}^{(\tau')}\, x(u) = T_{t_0+\tau'}^{(\tau'')}\, x(u, t_0 + \tau') = x(u, t_0 + \tau' + \tau''),$$

per ogni $x(u) \in X_{t_0}$; è quindi:

$$T_{t_0+\tau'}^{(\tau'')} \cdot T_{t_0}^{(\tau')}\, x(u) = T_{t_0}^{(\tau)}\, x(u), \qquad \text{per ogni } x(u) \in X_{t_0}.$$

In definitiva il sistema fisico, preso in considerazione, nonchè la legge con la quale si evolve nel tempo sono rappresentati rispettivamente dallo spazio X^* e dalle trasformazioni $\{T_{t_0}^{(\tau)}\}$, che hanno per sostegni i sottoinsiemi X_{t_0} di X^*.

Con questo comune modo di rappresentare diverse grandezze fisiche e le relative leggi di evoluzione nel tempo, si riconosce altresì legittimo il raffigurare il fenomeno con la totalità dei moti in X^* di un fluido, per il quale X_{t_0} è la regione occupata in X^* all'istante t_0. Con questa immagine

(1) L'insieme X_{t_0} può dunque essere caratterizzato tra l'altro mediante un teorema di esistenza ed unicità della soluzione in X del problema di Cauchy, sopra enunciato.

appare naturale chiamare ancora *spazio delle fasi* lo spazio X^* (2), traiettoria del punto x, a partire dall'istante t_0, l'insieme $\Gamma_{t_0}(x)$ dei punti $T_{t_0}^{(\tau)} x(u)$ in X^* (3).

Con queste premesse si è in grado di illustrare il procedimento mediante il quale si istituisce una teoria statistica per ciascuno dei fenomeni in esame.

Si definisce una σ-algebra $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi A (eventi) di X^*, che comprenda X^* stesso e i singoli insiemi X_{t_0} sostegno delle trasformazioni $T_{t_0}^{(\tau)}$, e tale inoltre che

$$\text{se è} \qquad A \in \mathcal{F}$$

$$\text{sia anche } [T_{t_0}^{(\tau)}]^{-1} A \in \mathcal{F} \text{ (4)},$$

per ogni t_0 in R_1 ed ogni valore di τ nell'insieme dei reali positivi.

Si introduce quindi una famiglia di misure di probabilità $\{m_{t_0}\}$ su $\mathcal{F}$, cioè una famiglia di funzioni di insieme non negative e σ-additive, di sostegno $\mathcal{F}$, per le quali sia:

$$m_{t_0}(X_{t_0}) = m_{t_0}(X^*) = 1, \quad \text{per ogni } t_0 \text{ in } R_1, \text{ (5)}.$$

La esistenza ed unicità (nel futuro) della soluzione del problema di Cauchy induce poi a richiedere alle probabilità $\{m_{t_0}\}$ di soddisfare la seguente condizione:

e) $$m_{t_0}([T_{t_0}^{(\tau)}]^{-1} A) = m_{t_0+\tau}(A),$$

per ogni A in $\mathcal{F}$ e ogni valore reale positivo di τ, (6).

Vale anche la pena di osservare che il presente modello di statistica comprende, come caso particolare, quello relativo ai fenomeni stazionarî,

---

(2) Si ricordi che per i fenomeni stazionari lo spazio delle fasi è l'insieme dei punti x in X rappresentativi di stati «accessibili» per il dato sistema fisico; lo spazio X^* è qui l'insieme dei punti x rappresentativi di stati «accessibili» al dato sistema fisico in almeno un istante t.

(3) Cfr. [7], pag. 261.

(4) Con $[T_{t_0}^{(\tau)}]^{-1} A$ si è indicata la estensione reciproca dell'insieme A mediante la trasformazione $T_{t_0}^{(\tau)}$, cioè l'insieme formato da quegli elementi x in X^*, la cui immagine $T_{t_0}^{(\tau)} x$ appartiene ad A.

(5) Attribuendo così probabilità nulla alla totalità degli stati ritenuti non accessibili al dato sistema fisico nell'istante t_0.

(6) La relazione (e) esprime infatti la seguente ipotesi: la probabilità che all'istante $t_0 + \tau$ lo stato del sistema sia rappresentato da un punto x in A è uguale alla probabilità che all'istante t_0 lo stato del medesimo sistema sia rappresentato da un punto x in $[T_{t_0}^{(\tau)}]^{-1} A$, insieme dal quale l'insieme A proviene appunto con legge univoca.

cioè a quei fenomeni per i quali i secondi membri delle equazioni (a) non dipendono esplicitamente dal tempo; comprende anche il modello di statistica nel quale le misure $\{m_{t_0}\}$ non dipendono dal tempo t_0 (7). Nei riguardi di quest'ultimo si dirà che il fenomeno, per il quale si è realizzata una statistica, mediante la famiglia (di eventi) $\mathcal{F}$ e la misura m ($\equiv m_{t_0}$), è in *equilibrio statistico.*

Nella speciale classe dei fenomeni stazionarî le trasformazioni $T_{t_0}^{(\tau)}$ relative al medesimo intervallo di tempo τ e ai diversi valori dell'istante iniziale t_0 si identificano in una stessa trasformazione $T^{(\tau)}$, come pure i loro sostegni X_{t_0} coincidono con tutto lo spazio X^*; altrettanto dicasi per le misure $\{m_{t_0}\}$, che nel modello di statistica introdotto per il caso stazionario [5] sono ridotte ad una unica misura m, in quanto si è ritenuta aderente alla stazionarietà l'ipotesi che il fenomeno sia in equilibrio statistico.

Scopo di ogni teoria statistica è quello di rappresentare proprietà di media di un determinato fenomeno mediante grandezze la cui valutazione non richieda la effettiva determinazione delle soluzioni del sistema (a). A proposito dei fenomeni stazionarî si è riconosciuto (cfr. [8]) che se tali grandezze si suppongono associate ad una funzione (di fase) definita in X^* a valori in R_1 ed m-sommabile, se inoltre si impone alla legge di associazione la verifica di alcune condizioni, del resto naturali (8), vi è un solo modo per rappresentare dette grandezze ed è mediante la media in fase $\bar{f}$ della funzione $f(x)$ dalla quale dipendono:

$$\bar{f} = \int_{X^*} f(x)\, dm.$$

Quando si vogliano estendere queste considerazioni ai fenomeni non stazionarî è naturale pensare a proprietà di media associate a funzioni dipendenti in generale oltrechè dai punti x in X^* anche dal tempo t; in quanto le stesse leggi di evoluzione nel tempo dipendono dall'istante t_0, che si riguarda come iniziale per esse, oltrechè dal punto x in X^* che in tale istante individua lo stato del sistema fisico. In analogia con il caso stazionario si definirà media in fase, all'istante t_0, di una funzione $f(x, t)$, definita in $X^* \times R_1$, a valori in R_1 e m_t-sommabile per ogni t in R_1, l'integrale

$$\bar{f}(t_0) = \int_{X^*} f(x, t_0)\, dm_{t_0}.$$

---

(7) Tale è il caso dei sistemi olonomi per i quali si assume come misura di probabilità la ordinaria misura di Lebesgue normalizzata.

(8) Per queste condizioni si vede ancora [8].

Al fine di collegare le proprietà di media in un dato modello statistico con i valori di una grandezza desumibili direttamente da una esperienza si considera la media temporale di una funzione di fase $f(x, t)$, tale media è definita dalla relazione:

$$\text{f)} \qquad \widehat{f}(x, t_0) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} f(T_{t_0}^{(\tau)} x, t_0 + \tau)\, d\tau,$$

ed è per l'appunto la sola grandezza media che si può pensare di desumere da un procedimento di misura per la valutazione della funzione $f(x, t)$.

Si presentano quindi in forma del tutto spontanea due problemi la cui soluzione ha notevole importanza ai fini del collegamento tra teoria statistica ed esperienza. Il primo riguarda la caratterizzazione delle funzioni di fase e (in generale) del tempo per le quali esista la media temporale $\widehat{f}(x, t_0)$, il secondo è quello di riconoscere quale relazione intercorra tra media in fase e media temporale, quando quest'ultima esista.

Mentre per il caso stazionario questi problemi sono stati ampiamente studiati (9), non altrettanto può dirsi per il caso più generale e non meno interessante quale è quello non stazionario.

Per il solo caso stazionario sono classici in proposito i seguenti risultati:

1 — l'esistenza della media in fase $\overline{f}$ di una data funzione $f(x)$ implica l'esistenza della sua media temporale $\widehat{f}(x)$.

2 — tra la media temporale e la media in fase sussiste la relazione integrale:

$$\text{g)} \qquad \int_{X^*} \widehat{f}(x)\, dm = \int_{X^*} f(x)\, dm,$$

cioè la media in fase della media temporale di una data funzione di fase eguaglia la media in fase della funzione stessa.

3 — per quelle funzioni di fase $f(x)$ (dette funzioni ergodiche) per le quali la corrispondente media temporale $\widehat{f}(x)$ sia in X^* equivalente ad una costante $\widehat{f}$ si ha:

$$\widehat{f} = \int_{X^*} f(x)\, dm,$$

(9) Per una esposizione dettagliata dei relativi risultati si vedano [9], [10] e [14].

vale a dire l'eguaglianza della media temporale alla media in fase (conseguenza immediata della (g)).

Al contrario per i fenomeni non stazionarî si è riconosciuto che (cfr. [7]):

1′ — l'esistenza della media in fase $\overline{f}(t_0)$, per ogni t_0 in R_1, *non* implica l'esistenza della media temporale $\widehat{f}(x, t_0)$, (10).

Si può poi affermare che:

2′ — se anche esiste di una data funzione $f(x, t)$ la media temporale $\widehat{f}(x, t_0)$, sommabile nello spazio mensurale $(X^*, \mathcal{F}, m_{t_0})$ per ogni t_0 in R_1, *non* è vera in generale per essa l'eguaglianza:

$$\text{g}') \qquad \int_{X^*} \widehat{f}(x, t_0)\, dm_{t_0} = \int_{X^*} f(x, t_0)\, dm_{t_0}\,,$$

cioè non è sempre vero che la media in fase della media temporale è eguale alla media in fase della funzione stessa.

In effetti, mentre l'integrale a primo membro della (g′) è costante al variare di t_0 in R_1, non altrettanto può dirsi (11) per la media in fase che ivi figura a secondo membro.

Pertanto alla base di una teoria statistica dei fenomeni non stazionarî vi è la risoluzione dei problemi seguenti:

A — ricerca delle condizioni che congiuntamente all'esistenza della media in fase $\overline{f}(t_0)$ assicurino l'esistenza della media temporale di una data funzione $f(x, t)$.

B — ricerca di una relazione tra media temporale e media in fase, da sostituire alla (g′) e che si riduca alla (g) quando trattasi di un fenomeno stazionario in equilibrio statistico.

Il problema (A) è stato trattato e risolto con ipotesi abbastanza generali nella nota [7].

La presente nota è dedicata essenzialmente al problema (B). Si riconoscerà qui che nella classe delle funzioni $f(x, t)$ definite in $X^* \times R_1$, a integrali equi-assolutamente continui negli spazi mensurali finiti $\{(X^*, \mathcal{F}, m_t)\}_{t \in R_1}$:

---

(10) Anche quando ci si limita a considerare funzioni $f(x)$ della sola fase x, si veda per questo l'esempio riportato in [7], pag. 267.

(11) Quale esempio in proposito basterà pensare ad una funzione indipendente dal tempo t e che non sia un invariante per le trasformazioni $\{T_{t_0}^{(\tau)}\}$, cioè a una funzione $f(x)$ tale che non sia per essa $f(T_{t_0}^{(\tau)} x) = f(x)$ quasi ovunque in $(X^*, \mathcal{F}, m_{t_0})$, per ogni t_0 in R_1 e ogni τ reale positivo.

1'' — l'esistenza della media temporale $\widehat{f}(x, t_0)$, quasi ovunque in $(X^*, \mathcal{F}, m_{t_0})$, *implica* l'esistenza del limite

$$\overline{f}_A = \lim_{\tau^* \to +\infty} \frac{1}{\tau^*} \int_{t_0}^{t_0+\tau^*} \int_{T_{t_0}^{(\tau)} A} f(x, t_0 + \tau)\, dm_{t_0+\tau}\, d\tau,$$

per ogni insieme $A \in \mathcal{F}$ per il quale sia $[T_{t_0}^{(\tau)}]^{-1} \cdot T_{t_0}^{(\tau)} A \equiv A$.

2'' — tra la media temporale $\widehat{f}(x, t_0)$ e il limite $\overline{f}_A$ della media delle medie in fase sussiste la relazione integrale:

h) $$\int_A \widehat{f}(x, t_0)\, dm_{t_0} = \overline{f}_A\,,$$

per ogni $A \in \mathcal{F}$, con $[T_{t_0}^{(\tau)}]^{-1} \cdot T_{t_0}^{(\tau)} A \equiv A$. In particolare, quando ci si riferisca allo spazio delle fasi X^*, si avrà:

g'') $$\int_{X^*} \widehat{f}(x, t_0)\, dm_{t_0} = \lim_{\tau^* \to +\infty} \frac{1}{\tau^*} \int_{t_0}^{t_0+\tau^*} \int_{X^*} f(x, t_0 + \tau)\, dm_{t_0+\tau}\, d\tau.$$

La relazione (g'') si riduce, come richiesto, alla (g) quando sia applicata ad un fenomeno stazionario in equilibrio statistico.

La relazione (h) generalizza la stessa relazione (g) relativa al caso stazionario.

La relazione (h) consentirà tra l'altro di rieonoscere in maniera relativamente facile ed immediata alcune proprietà di ricorrenza nel moto del punto rappresentativo x in X^*. Tali proprietà si ritengono nuove sopratutto per il loro aspetto quantitativo [12] ed inoltre interessanti anche nei riguardi dei fenomeni stazionarî.

Al fine di evitare inutili complicazioni nei procedimenti atti a dimostrare quanto sopra enunciato, ci si limiterà a considerare per la variabile temporale t una successione di valori in R_1, senza con questo ledere il carattere di generalità dei risultati (si veda per questo [10]). Si penserà cioè fissato un intervallo di tempo $\overline{\tau}$ e conseguentemente la successione degli

[12] Per altre proprietà di ricorrenza, sempre nei riguardi dei fenomeni non stazionarî si veda [13].

istanti:

$$\ldots, -n\bar{\tau}, \ldots, -2\bar{\tau}, -\bar{\tau}, 0, \bar{\tau}, 2\bar{\tau}, \ldots, n\bar{\tau}, \ldots$$

Assunto l'intervallo di tempo quale intervallo di tempo unitario ed indicata con $T_k^{(i)}$ la trasformazione $T_{k\bar{\tau}}^{(i\bar{\tau})}$, si riconosce che la evoluzione della data grandezza fisica nella successione di istanti presa in considerazione è rappresentata dalla successione:

$$\{(X^*, \mathcal{F}, m_k, T_k)\}_{k \in K},$$

ove K è l'insieme degli interi relativi.

Pertanto un fenomeno non stazionario, così discretizzato, dal punto di vista statistico si identifica con ciò che è stato definito un *processo discreto* (cfr. [7]).

La media temporale di una data funzione $f(x, t)$, definita in $X^* \times R_1$, sarà quindi sostituita dal limite $\widehat{f}(x, k)$ al tendere di n all'infinito della media:

$$\widehat{f}(x, k, n) = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_i\, f(T_k^{(i)} x, k + i),$$

dove si è posto per comodità di scrittura $T_k^{(0)} x = x$, (13).

Il paragrafo seguente è dedicato alla dimostrazione delle proposizioni (1″) e (2″).

1. Relazione tra media têmporale e media in fase. Con riferimento ad una funzione $f(x, k)$ definita in $X^* \times K$, a valori reali e sommabile in $(X^*, \mathcal{F}, m_k)$ per ogni $k \in K$, si ricordi la seguente definizione: gli integrali indefiniti della successione

1-1 $$\left\{ (\mathcal{F}) \int f(x, k)\, dm_k \right\}_{k \in K}$$

sono equi-assolutamente continui in $\{(X^*, \mathcal{F}, m_k)\}_{k \in K}$, se comunque si fissi un numero $\varepsilon > 0$ è possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un

(13) Viceversa per passare dal caso discreto, k variabile in K, al caso continuo, t variabile in R_1, basterà applicare i risultati che seguono alla funzione $F(x, k)$ definita in $X^* \times K$ dalla relazione

$$F(x, k) = \int_0^{\bar{\tau}} f(T_{k\bar{\tau}}^{(\tau)} x, k\bar{\tau} + \tau)\, d\tau.$$

numero positivo δ_ε, tale che risulti:

$$\left| \int_U f(x, k)\, dm_k \right| < \varepsilon ,$$

per ogni insieme U in $\mathcal{F}$ che soddisfi la relazione

$$m_k(U) < \delta_\varepsilon$$

quale che sia $k \in K$, (14).

Sia $\mathcal{L}_a$ la classe delle funzioni $f(x, k)$ per le quali gli integrali (1·1) sono equi-assolutamente continui nella successione di spazi mensurali finiti $\{(X^*, \mathcal{F}, m_k)\}_{k \in K}$. Si ha nei riguardi delle medie $\widehat{f}(x, k, n)$ delle funzioni di detta classe la proposizione seguente:

Sia $\{(X^*, \mathcal{F}, m_k, T_k)\}_{k \in K}$ un processo discreto che conserva la misura, finita, m_k: per ogni funzione in $\mathcal{L}_a$ per la quale esiste m_k-quasi ovunque la media

$$\widehat{f}(x, k) = \lim_{n \to +\infty} \widehat{f}(x, k, n),$$

detta media $\widehat{f}(x, k)$ è m_k-sommabile in $(X^*, \mathcal{F}, m_k)$ e conseguentemente m_k-quasi ovunque finita.

DIMOSTRAZIONE: Dato un numero reale $\varepsilon > 0$ per la equi-assoluta continuità degli integrali

$$\left\{ (\mathcal{F}) \int f(x, k)\, dm_k \right\}_{k \in K} \tag{1·2}$$

si può determinare un numero reale $\delta_\varepsilon > 0$, tale che per ogni insieme U per il quale è

$$m_{k+i}(U) < \delta_\varepsilon$$

con $k \in K$, i intero positivo del resto qualsiasi, sia anche:

$$\int_U |f(x, k+i)|\, dm_{k+i} < \varepsilon.$$

Si considerino ora gli integrali indefiniti della successione

$$\left\{ (\mathcal{F}) \int \widehat{f}(x, k, n)\, dm_k \right\}_{k \in K};$$

per ogni U in $\mathcal{F}$ è certo:

1-3 $$\left|\int_U \widehat{f}(x, k, n)\, dm_k\right| \leq \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_i \int_U |f(T_k^{(i)} x, k+i)|\, dm_k \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_i \int_{T_k^{(i)} U} |f(x, k+i)|\, dm_{k+i},$$

Poichè d'altra parte è

$$m_{k+i}(T_k^{(i)}\, U) \leq m_k(U)$$

dalla equi-assoluta continuità degli integrali (1-2) e dalla diseguaglianza (1-3) segue la equi-assoluta continuità degli integrali indefiniti

1-4 $$\left\{(\mathcal{F}) \int \widehat{f}(x, k, n)\, dm_k\right\}_{k \in K}$$

negli spazi mensurali finiti $\{(X^*, \mathcal{F}, m_k)\}_{k \in K}$. Ciò basta ad assicurare la sommabilità rispetto a $(X^*, \mathcal{F}, m_k)$ della media $\widehat{f}(x, k)$, alla quale convergono quasi ovunque le medie $\widehat{f}(x, k, n)$, ([15]).

La proposizione seguente è una immediata conseguenza della applicazione del teorema di Lebesgue, relativo al passaggio al limite sotto il segno di integrale ([16]):

Sia $\{(X^*, \mathcal{F}, m_k, T_k)\}_{k \in K}$ un processo discreto che conserva la misura m_k, finita, $f(x, k)$ una qualunque funzione in $\mathcal{L}_a$ per la quale esista quasi ovunque in $(X^*, \mathcal{F}, m_k)$ la media $\widehat{f}(x, k)$, A un sottoinsieme in $\mathcal{F}$ per il quale sia:

$$[T_k]^{-1} \cdot T_k\, A \equiv A$$

è:

1-5 $$\int_A \widehat{f}(x, k)\, dm_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_i \int_{T_k^{(i)} A} f(x, k+i)\, dm_{k+1},$$

uniformemente rispetto ad A in $\mathcal{F}$.

([14]) Si osservi in particolare che se in tutto $X^* \times K$ è $|f(x, k) < L$, con L reale positivo, cioè se la funzione $f(x, k)$ è limitata in $X^* \times K$, gli integrali (1-1) sono equi-assolutamente continui.

([15]) Cfr. [12] cap. VII, 1, N⁰ 3, prop. 14, pag. 360.

([16]) Cfr. [12] cap. VII, 1, N⁰ 3, prop. 9, pag. 352.

DIMOSTRAZIONE: Si osservi che la relazione

$$[T_k]^{-1} \cdot T_k A \equiv A$$

implica:

1-6 $$[T_k^{(i)}]^{-1} \cdot T_k^{(i)} A \equiv A$$

per ogni valore dell'intero positivo i. Per la (1-6) si ha poi:

$$\int_A \widehat{f}(x, k, n)\, dm_k = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_i \int_{T_k^{(i)} A} f(x, k+i)\, dm_{k+i} .$$

D'altra parte la sommabilità della funzione $\widehat{f}(x, k)$ limite della successione $\{\widehat{f}(x, k, n)\}_{n \in N}$, e la equi-assoluta continuità degli integrali della successione

$$\left\{(\mathcal{F}) \int \widehat{f}(x, k, n)\, dm_k\right\}_{k \in K}$$

implicano la validità del teorema di Lebesgue ([17]) cioè:

a) l'esistenza del limite $\overline{f_A}$ della successione

$$\left\{\int_A \widehat{f}(x, k, n)\, dm_k\right\}_{n \in N}$$

e quindi delle medie

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_i \int_{T_k^{(i)} A} f(x, k+i)\, dm_{k+i} ,$$

per ogni A in $\mathcal{F}$.

b) l'eguaglianza:

$$\int_A \widehat{f}(x, k)\, dm_k = \overline{f_A} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_i \int_{T_k^{(i)} A} f(x, k+i)\, dm_{k+i} ,$$

che è appunto la enunciata relazione (h) tra la media temporale e la media in fase.

([17]) Cfr. loc. cit. nota ([16]).

Dall'esame del teorema di Lebesgue si riconosce altresì che la convergenza delle medie

$$\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_{i} \int_{T_k^{(i)} A} f(x, k+i)\, dm_{k+i}$$

alla media in fase sull'insieme A della media temporale $\widehat{f}(x, k)$ è uniforme rispetto a detti insiemi A in $\mathcal{F}$; ciò vuol dire che comunque si fissi un numero positivo ε si può in corrispondenza ad esso determinare un intero positivo $\bar{n}$ tale che per ogni intero $n \geq \bar{n}$ e quale che sia $A \in \mathcal{F}$, con $[T_k]^{-1} \cdot T_k A \equiv A$, si abbia:

$$\left| \int_A \widehat{f}(x, k)\, dm_k - \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_{i} \int_{T_k^{(i)} A} f(x, k+i)\, dm_{k+i} \right| < \varepsilon.$$

2. **Proprietà di ricorrenza del moto dei punti rappresentativi nello spazio delle fasi.** La relazione integrale tra media temporale e media in fase stabilita nel paragrafo precedente è certo interessante per il suo significato immediato, risulta tuttavia di palese utilità quando si vogliano riconoscere proprietà di ricorrenza nel moto dei punti rappresentativi x nello spazio delle fasi X^*. Ciò è quanto si vuole ora dimostrare.

Anzitutto, generalizzando una definizione di P. R. Halmos (cfr. [10]) si dirà che un punto x in X^* è k-ricorrente in un dato insieme A se esiste un intero positivo i tale che

2-1 $$T_k^{(i)} x \in A.$$

Un punto x per il quale sia verificata la (2-1) in corrispondenza ad un numero *finito* di valori dell'intero positivo i, si dirà *debolmente* k-ricorrente in A; lo si dirà al contrario *fortemente* k-ricorrente in A se la relazione (2-1) è verificata da una *infinità* di valori (distinti) dell'intero positivo i.

Nei riguardi dei fenomeni non stazionarî ha poi senso definire *generalmente* ricorrenti in A in senso debole (forte) quei punti x dello spazio delle fasi X^* che risultino debolmente (fortemente) k_j-ricorrenti in A in corrispondenza ad una infinità $\{k_j\}$ di valori dell'intero k; di questa proprietà godono i punti per i quali esiste una successione di istanti iniziali tali che, a partire da ciascuno di essi, detti punti ripassano un numero finito o, rispettivamente, una infinità di volte per il fissato insieme A.

Assegnato, comunque, un insieme A in $\mathcal{F}$, sia χ_A la sua funzione caratteristica, cioè sia:

$$\chi_A(x, k) = 1 \qquad \text{per ogni } x \text{ in } A \text{ e ogni } k \text{ in } K,$$
$$\chi_A(x, k) = 0 \qquad \text{per ogni } x \text{ in } X^* - A \text{ e ogni } k \text{ in } K.$$

Si supponga inoltre che esista m_k-quasi ovunque il limite $\widehat{\chi_A}(x, k)$ della media $\widehat{\chi_A}(x, k, n)$ di detta funzione caratteristica.

Sia infine X_k il sottoinsieme in $\mathcal{F}$ dei punti x di X^* per i quali è:

$$\widehat{\chi_A}(x, k) = 0.$$

L'insieme X_k comprende certo tutti i punti x di X^* che *non* ricorrono nel dato insieme A, come pure quelli debolmente k-ricorrenti in A. Si può osservare che l'invarianza della media temporale della funzione $\chi_A(x, k)$ lungo le traiettorie $\Gamma_k(x)$, cioè la relazione:

$$\widehat{\chi_A}([T_k]^{-1} x, k-1) = \widehat{\chi_A}(x, k),$$

implica:

$$[T_k]^{-1} X_k = X_{k-1},$$

e quindi anche:

$$[T_k]^{-1} \cdot T_k X_k = X_k \qquad \text{per ogni } k \text{ in } K.$$

Sussiste pertanto la relazione integrale tra media temporale e media in fase, quale si è riconosciuta nel paragrafo precedente, in riferimento alla funzione $\chi_A(x, k)$ ed all'insieme X_k:

$$\int_{X_k} \widehat{\chi_A}(x, k)\, dm_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_i \int_{X_{k+i}} \chi_A(x, k+i)\, dm_{k+i}\,.$$

Da questa relazione segue:

2-2 $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_i\, m_{k+i}(A \cap X_{k+i}) = 0,$$

ove l'insieme $A_k = A \cap X_k$ è l'insieme dei pnnti x in A per i quali è $\widehat{\chi_A}(x, k) = 0$, e quindi comprende i punti x di A non ricorrenti o debolmente k-ricorrenti in A. La (2-2) implica a sua volta:

2-3 $$\liminf_{i \to +\infty} m_{k+i}(A_{k+i}) = 0,$$

di qui la prima proprietà di ricorrenza del moto dei punti x in X^*, che si intendeva stabilire:

« Comunque si fissi un numero reale $\varepsilon > 0$ è possibile in corrispondenza ad esso determinare una successione di istanti (iniziali)

$$k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots$$

per ciascuno dei quali i punti x di un sottoinsieme $\overline{A}_{k_j}$ di A ($\equiv A - A_{k_j}$), di misura $m_{k_j}(\overline{A}_{k_j}) > m_{k_j}(A) - \varepsilon$, sono fortemente k_j-ricorrenti nel dato insieme A. »

In particolare quando si tratti di un fenomeno stazionario in equilibrio statistico, avendo per esso:

$$A_{k+i} = A_k = A^*$$

ed inoltre:

$$m_{k+i}(A^*) = m_k(A^*) = m(A^*)$$

dalla (2-3) si ha anche:

$$m(A^*) = 0,$$

cioè che quasi tutti i punti di A sono fortemente ricorrenti in A ed in più che la loro frequenza di transito in A (rappresentata dalla media $\widehat{\chi}_A(x, k)$) è diversa da zero, ([18]).

Al fine di riconoscere una ulteriore proprietà di ricorrenza, per ogni fissato intero h in K si consideri l'insieme B_h dei punti x del dato insieme A in $\mathcal{F}$ per i quali è $\widehat{\chi}_A(x, k) = 0$ per ogni $k \geq h$.

L'insieme B_h comprende i punti x di A che, a partire dall'istante $k \geq h$, del resto qualunque, o non ricorrono in A o sono debolmente k-ricorrenti in A per ogni $k \geq h$.

Gli insiemi $\{B_h\}_{h \in K}$ costituiscono una successione di sottoinsiemi (misurabili) in A; è inoltre:

$$B_h \subset A_h \qquad \text{per ogni valore dell'intero } h.$$

Dal (2-2) si ha pertanto:

2-4 $$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_i \, m_{k+i}(B_{k+i}) = 0.$$

D'altra parte è certo:

$$[T_k^{(i)}]^{-1} B_{k+i} \supset B_k ,$$

per ogni valore dell'intero positivo i, e, conseguentemente,

$$m_{k+i}(B_{k+i}) = m_k([T_k^{(i)}]^{-1} B_{k+i}) \geq m_k(B_k).$$

([18]) Per questa proprietà di ricorrenza, relativa al caso stazionario (teorema di Poincarè) si veda anche [10].

Dalla (2-4) si ha così:

$$m_k(B_k) = 0$$

si riconosce cioè che è di misura nulla il sottoinsieme dei punti x di A per i quali per ogni intero $k' > k$ è $\widehat{\chi}_A(x, k') = 0$.

Di qui la seconda proprietà di ricorrenza che si intendeva stabilire:

« L'insieme dei punti x di un qualunque insieme A in $\mathcal{F}$ che per ogni istante $k \geq h$ (con k e h in K) *non* sono fortemente k-ricorrenti in A è di misura m_h nulla. »

Tenuto conto che nei fenomeni non stazionarî in equilibrio statistico ([19]) è

$$m(\bigcup_{h \in K} B_h) = \lim_{n \to +\infty} m(B_h) = 0$$

e che l'insieme $\bigcup_{h \in K} B_h$ comprende tutti i punti x di A che non sono generalmente ricorrenti in A, si può infine affermare che:

« Nei fenomeni non stazionarî in equilibrio statistico quasi tutti i punti di un qualunque insieme A in $\mathcal{F}$ sono generalmente ricorrenti nell'insieme A medesimo ».

([19]) Quale è il caso dei sistemi meccanici ad un numero finito di gradi di libertà.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Sur la Méchanique Statistique des milieux continus.* Congrés Inter. Phil. Sciences, Paris oct. 1949, t. 3 - Actualités Scientifiques, 1137, pp. 129-144, (1951).

[2] J. KAMPÉ DE FÉRIET et J. KOTIK, *Sur les ondes de pesanteur à deux dimensions d'energie finie.* Comptes Rendus Acad. Sciences, t. 235, pp. 230-232 (1952).

[3] J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Statistical Mechanics of continuous media,* Proc. Symp. on Hydrodynamics instability, Am. Math. Society, New. York (1960).

[4] J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Random Solutions of partial differential equations.* Proc. 3rd Symp. on Math. Statistic and Probability, Berkley (1955), t. 3, pp. 199-208.

[5] J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Meccanica statistica dei mezzi continui,* appunti del Corso, in Pisa, anno acc. 1957-58, Ist. Mat. Università di Pisa (1958).

[6] B. FORTE, *Sulla convergenza delle medie temporali nella teoria ergodica dei fenomeni non stazionarii,* Riv. di Matematica dell'Univ. di Parma, S. 2, t. 1, pp. 29-44, (1960).

[7] B. FORTE, *Sulla convergenza delle medie nei processi non stazionarii,* Ann. di mat. pura e appl., S. IV, t. LVI, pp. 263-280, (1961).

[8] B. FORTE e F. STROCCHI, *A solution of the restricted ergodic problem in Statistical Mechanics,* Riv. di Matematica dell'Univ. di Parma, S 2, t. 3, pp. 77-87, (1962).

[9] A. I. KHINCHIN, *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics,* Dover Publ., New York (1949).

[10] P. R. HALMOS, *Lectures on ergodic Theory,* Math. Society of Japan, (1956).

[11] P. R. HALMOS, *Measure Theory,* Van Nostrand ed., New York, (1951).

[12] F. CAFIERO, *Misura e Integrazione,* ed. Cremonese, Roma (1959).

[13] B. FORTE, *Proprietà ricorrenti del moto non stazionario di un fluido e relativa estensione ad un numero qualunque di dimensioni,* Ann. della Scuola Nor. Sup. di Pisa, S. III, t. XII, fasc. IV, (1958).

[14] K. JACOBS, *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergoden* Theorie, Erg. der Math., Springer Verlag, Berlin (1960).